Quand l'expérience s'en mêle et fait remonter des connaissances mathématiques enfouies

Del Notaro, Christine

COLLOQUE INTERNATIONAL
OPÉEN & ReForm 2016
Nantes (France) : 8, 9 et 10 Juin 2016

Texte original.*

Quand l'expérience s'en mêle et fait *remonter* des connaissances mathématiques enfouies

Christine DEL NOTARO

Université de Genève
40, bd du Pont-D'Arve
1205 Genève
Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé. Cette contribution se propose d'aborder la question des phénomènes insus par le biais de la didactique des mathématiques, sous l'angle de ce que nous avons appelé des *niveaux de connaissance* dans notre recherche doctorale (Del Notaro, 2010). Connaissance est mise en lien avec savoir et ignorance ; nous développerons les phénomènes insus relativement à ces notions, à partir de ce que des élèves de fin d'école primaire produisent comme mathématiques à un niveau que nous avons nommé révélé (observable) mais également en lien avec ce que des étudiants en formation à l'enseignement primaire peuvent en interpréter, de par le type d'inférences logiques mises en œuvre (déduction, induction, abduction). Cette observation participative du chercheur suppose une composante subjective qui fera partie intégrante de notre analyse. Nous décrirons un insu extrait des connaissances des élèves les plus enfouies, à un niveau présumé, partant d'une interaction de connaissances entre élèves et chercheur.

Mots-clés : Jeu de tâches mathématiques ; expérience ; expérimentation ; connaissances ; inférences logiques

INTRODUCTION

Notre recherche consiste à interpréter les connaissances des élèves afin de comprendre comment elles se manifestent et de quoi elles sont constituées. Pourquoi des élèves de 12 ans ne s'y retrouvent-ils plus dans la formulation de la parité d'un nombre ? Comment se fait-il qu'ils puissent dire que certains nombres sont « plus pairs » que d'autres ? Ou encore, qu'un nombre est pair car il possède plus de chiffres pairs qu'impairs? Partant de ce type de constats, nous avons sondé le *milieu*[1] mathématique, ce qui a conduit à éprouver le modèle du *jeu de tâches*, élaboré par un groupe de chercheurs en enseignement spécialisé (DDMES, 2003) dans le domaine de la géométrie. Nous l'avons étendu au domaine du nombre dans l'enseignement dit ordinaire. Le *jeu de tâches* préconise une mise en interaction du chercheur avec des élèves, comme élément non neutre. Avec Devereux (1980, p.30), nous partageons l'idée que l'observateur ou, dans notre cas, le chercheur/expérimentateur, ne peut adopter un point de vue qui ne soit pas intimement lié à sa propre subjectivité: « *Par bonheur, ce qu'on appelle les « perturbations » dues à l'existence de l'observateur, lorsqu'elles sont correctement exploitées, sont les pierres angulaires d'une science du comportement authentiquement scientifique [...].* Plus que la seule « existence » de l'observateur, nous

[1] En didactique des mathématiques, le terme « milieu » désigne tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit. (*Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*, Brousseau, 1998)

préconisons une implication, voire, une intrusion du chercheur/expérimentateur dans la réflexion de l'élève. Cette interaction se définit comme une réplique mathématique personnelle, liée à ce que le sujet répond en regard de la tâche proposée ; ce jeu de va-et-vient est contraint par le savoir et fait ressortir les connaissances de part et d'autre. Ce mode d'interaction a donné lieu à une transposition dans l'enseignement aux futurs professeurs d'écoles, qui est un deuxième axe de recherche, en somme quasiment indissociable du premier. La triangulation « *chercheur, objet de savoir, élève* » se décline ainsi en « *chercheur, objet de savoir, étudiant* », puis, inévitablement, en « *étudiant, objet de savoir, élève* ». Cette contribution mettra toutefois la focale sur les connaissances des élèves que nous avons répertoriées en *niveaux,* terme certes discutable, mais il est à prendre au sens d'*états de connaissances* d'un élève à un moment donné.

PERSPECTIVE EPISTEMOLOGIQUE

Nous allons brièvement indiquer comment et pourquoi nous en sommes arrivée à catégoriser des états de connaissances – ce qui constitue quasiment une hérésie pour tout didacticien des mathématiques, mais nous ne pouvions en faire l'économie sauf à ignorer un pan important dans notre propre démarche épistémologique. Ainsi avons-nous plongé dans les méandres des connaissances manifestées par les élèves et nous sommes-nous aventurée dans leur théorisation en termes de niveaux. Ces derniers viennent en écho à une théorie de l'objet privilégiée jusqu'alors, comme nous le verrons, mais qui ne fonctionnait pas à l'épreuve de la contingence. Nous avons dû falsifier cette théorie si nous voulions avoir une chance de comprendre, en ouvrant une bulle du côté du sujet et revenir ainsi sur les questions des représentations (Brun, Vergnaud). Craignant toutefois que cela ne nous emmène bien loin de la didactique des mathématiques, nous nous y sommes risquée néanmoins. Dans ce questionnement et cette modélisation s'inséreront notre façon d'envisager l'insu.

Faits numériques *vs* niveaux de connaissances

Nous précisons en préambule que nous avons tenté de produire une théorisation de phénomènes dans notre recherche doctorale, qui nous amène aujourd'hui à parler de l'insu et de le mettre en regard de nos niveaux de connaissances. Nous devons toutefois exposer la théorisation que nous avons laissée de côté pour en aboutir à celle-là. Notre cadre d'analyse des données souffrait d'un manque caractérisé par des notions théoriques partielles et non construites pour dépouiller des données : la notion de faits numériques en trois niveaux de Conne (1987). Nous avons donc élaboré le versant qui nous manquait, celui des connaissances. Nous l'avons caractérisé en trois niveaux également, pour répondre au schéma des faits numériques.

Faits numériques

Les faits numériques de Conne sont relatifs aux signes et sont en quelque sorte des interfaces entre connaissances d'une part et pratiques sociales de l'autre. Partant de cette idée de faits numériques et des trois niveaux objectifs qui les caractérisent, et afin d'observer les élèves aux prises avec de tels faits, nous avons été amenée à considérer, comme en amont, trois niveaux de connaissance. Conne dit qu'un *fait numérique* comporte trois niveaux d'analyse:

«… [Un fait numérique] se manifeste à un certain niveau, s'explique à un niveau supérieur et repose à un niveau inférieur ».

Si l'on prend, par exemple, le critère de divisibilité par 4, le fait numérique est que le critère veut qu'il suffise de considérer le nombre formé par les deux derniers chiffres d'un nombre pour savoir si ce dernier est divisible par 4 ; ainsi par exemple le nombre 5555548 est-il divisible par 4. Ce critère suscite toute une série de surprises auprès des élèves, de la même nature, peut-être, que celle du lecteur face à cette quantité de « 5 », même s'il reconnait bien évidemment 48 comme divisible par 4. La forme du nombre, en tant que signe, produit un effet sur sa signification. Cet effet est de l'ordre de l'insu en tant qu'il se manifeste de manière *confuse*, le plus souvent dans un milieu *saturé*. Pour en revenir aux trois niveaux d'analyse d'un fait numérique : le manifeste, le supérieur et le sous-jacent, en voici leur caractérisation, transposée à notre objet :

Le niveau manifeste : lorsqu'un nombre est écrit en numération de position de base 10, donc de manière usuelle, on peut lire directement sur cette écriture le multiple de 100 et le reste (positif et inférieur à 100) qui le composent. Pour un nombre n donné, désignons par $C(n)$ ce multiple et par $DU(n)$ ce reste, on peut écrire : $n = C(n) + DU(n)$. Dans cette notation, C renvoie à *centaine*, D à *dizaines* et U à *unité*. Une telle notation se justifie parce que justement le reste de la division par 100 du nombre n est un nombre qui s'écrit avec deux chiffres, aux dizaines, le chiffre des dizaines de n et aux unités, celui des unités de n. Notre théorème indique que n est un multiple de 4 si et seulement si $DU(n)$ l'est aussi (D est donc le chiffre des dizaines, U le chiffre des unités et $DU(n)$ le nombre à deux chiffres qui s'écrit DU ; quant à $C(n)$, qui n'est pas à proprement parler le nombre de centaines de n, mais le multiple qui vaut 100 fois le nombre de centaines de n, on peut l'écrire en reproduisant l'écriture de n et en substituant le chiffre 0 au chiffre des dizaines à celui des unités).

Ainsi donc notre propriété de divisibilité se manifeste à la lecture (de la transcription usuelle) du nombre : on isole les deux *derniers* chiffres du nombre et on vérifie si le nombre ainsi formé est ou non un multiple de 4. Pour ce faire, soit on connait par cœur la liste de ces multiples, soit on dispose de critères analytiques permettant de reconnaître d'un simple coup d'oeil si c'est un multiple de 4 ou non, soit on procède de bien d'autres manières encore.

Le niveau manifeste est celui de l'écriture des nombres et du fait que la décomposition *C(n) +DU (n)* se lit sur l'écriture des nombres. Il concerne aussi les règles de formation des multiples de 4 à deux chiffres, *DU* comme par exemple : {*D pair et U multiple de 4*} ou {*D impair et U pair non multiple de 4*}. Toutes les propriétés en jeu se nouent sur ce niveau manifeste.

Par contraste, en examinant la démonstration, on se dit que l'on a dû chercher bien des choses pour ce simple fait. Ainsi, il y a donc une fusion (condensation) du fait au niveau manifeste sur les signes qui l'expriment (ici, l'écriture des nombres en numération de position qui condense l'écriture de sommes de multiples des unités, dizaines, centaines, milliers, *id est* de puissances de la base). Ce n'est que rétrospectivement et analytiquement, vu d'un point de vue supérieur, que l'on peut parler de synthèse dans un signe, alors que, pour certains usagers, ce signe restera très indifférencié. Par exemple, cela demande un travail certain de relier les écritures 12, 16, 32 ou 56 par le fait que toutes ont en commun un chiffre des dizaines impair et un chiffre des unités pair non multiple de 4. Cette remarque nous fait alors distinguer de ce niveau manifeste un niveau supérieur.

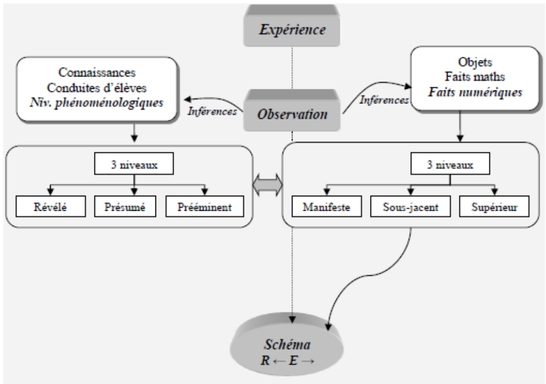
Le niveau supérieur est constitué par les règles très générales et « supérieures » d'associativité de la multiplication, de distributivité de la multiplication sur l'addition et de caractère euclidien de l'anneau des entiers (les niveaux supérieurs sont ceux auxquels on remonte pour expliquer le fait numérique ; on ne peut pas remonter plus haut que les axiomes des structures concernées).

Le niveau sous-jacent, sur lequel le *fait numérique* repose, est toujours un niveau de connaissances et de faits relativement indifférenciés. Dans notre cas, cela peut prendre la forme de la parité, des multiples de 2, de la table de 4, des multiples de 4, etc. sans que les liens entre ces notions ne soient identifiés, puisque comme on l'a vu, ces notions sont, dans les représentations, souvent indifférenciées de part et d'autre (élève et professeur). Retenons que ce niveau est constitué de tout ce qu'il faut savoir pour *saisir* ce qui est manifeste. Ici, c'est donc, d'une part, une certaine familiarité avec les écritures chiffrées de nombres et la forme qu'elles peuvent avoir et, d'autre part, une certaine familiarité avec les chiffres et la division. Ce ne sont en général pas des savoirs répertoriés, mais on se rend compte que les élèves observés en avaient une grande expérience, d'où la saturation du milieu, puisque viennent s'exprimer dans la situation de multiples savoirs non répertoriés et identifiés comme tels par les enseignants, qui ne savent pas trop qu'en faire au vu du fait, seule notion qu'ils voudraient retenir.

Cette notion de fait numérique permet de penser les critères et de les replacer comme des *choses* numériques dont les élèves peuvent faire l'expérience.

Toutefois, nos recherches nous ont montré que le niveau sous-jacent est plus vaste que ce que l'on imagine et que le niveau manifeste ne nous donne pas l'ampleur du sous-jacent ; il y a eu un glissement de sens. Néanmoins, nous avions vu trop de choses à travers cette lunette pour qu'elles soient mises de côté. Le glissement de sens qui a eu lieu consiste en une distorsion de la notion de faits numériques. Après quelques errements, nous avons enfin pointé l'erreur. À partir du schéma des faits numériques, on peut faire des inférences sur les objets mathématiques alors que nous cherchions à caractériser les connaissances. Une fois l'idée précisée, nous avons pensé qu'un schéma sur les connaissances en trois niveaux pouvait avantageusement compléter celui sur les objets.

Le fait d'avoir confronté l'idée à la contingence a amené à trouver de nouveaux liens, à intégrer cette idée dans un schéma plus vaste et à préciser celle qui a présidé à ce glissement.



Le schéma ci-dessus permet de mieux comprendre la complémentarité des deux modélisations. À partir des faits observés, nous inférons des conduites d'élève, dont nous déduisons les relations entretenues entre règle et logique au travers de l'expérience (REL), après avoir re-défini le plan des objets (niveaux manifeste, sous-jacent et supérieur). Le fait numérique a une fonction de révélateur, de prise de conscience de connaissances plus profondes, que nous prenons en compte en tant que chercheuse pour tenter de comprendre comment dépasser, pour les élèves, le simple constat de ce fait. Pour ce faire, nous analysons ce que nous appelons les *connaissances présumées*, en écho au *niveau sous-jacent*. Ce qui figure dans ce niveau présumé, c'est ce que les élèves savent déjà sur les nombres et dont ils peuvent rendre compte à l'occasion d'un fait nouveau. Dans ce niveau de connaissances multiples et diverses, il y règne une certaine confusion. À l'image du niveau sous-jacent qui est constitué de connaissances relativement indifférenciées, les connaissances du niveau présumé fusent sans anticipation, dépassant souvent les élèves qui n'en ont pas conscience, voire, les submergeant. Il y a donc à ordonner ces connaissances pour pouvoir aller dans un niveau plus élevé. Nous soutenons en effet que dans l'expérience, les éléments du niveau présumé, en s'accommodant, aident à prendre de la distance avec le niveau révélé pour arriver à un niveau plus général, supérieur.

C'est avec le matériel du niveau présumé des connaissances de l'élève que nous jouons : nous injectons de nouvelles connaissances dans le milieu afin de cerner l'expérience.

Niveaux de connaissances

Niveau révélé. Ce niveau désigne tout ce que l'élève voit comme régularités dans un fait numérique, les règles qu'il va inférer et les logiques qui vont sous-tendre son action.

Niveau présumé. Dans ce niveau s'exprime ce que l'élève convoque comme anciennes connaissances et qu'il met dans le milieu pour traiter le fait numérique; il s'agit de toutes les connaissances activées observables (par contraste avec le sous-jacent qui n'est pas visible). C'est une sorte de niveau infra conscient, d'où les connaissances sortent sans avoir été anticipées. Ce niveau vient alimenter en informations le niveau révélé (à mettre en lien avec le manifeste), produit beaucoup d'informations, et c'est là que nous rencontrons la possible saturation du milieu. En effet, à cette liberté d'expression non contrôlée, ou d'exploration et de plaisir à faire des expériences, s'associe ce phénomène de saturation du milieu qui accompagne le processus. Elle fait office dans ce cas, de prise sur le changement, qui n'est que l'une de ses nombreuses facettes: la mise en ordre de leurs connaissances tire les élèves vers un niveau plus élevé. Pour sortir de la confusion occasionnée par la saturation, il faut pouvoir accéder à ce niveau supérieur qu'est le niveau prééminent.

Niveau prééminent. Par contraste avec le niveau supérieur du fait numérique, qui est le niveau mathématique du savoir savant, nous allons considérer dans la transposition de ce savoir savant, le niveau prééminent comme étant le niveau le plus élevé par rapport à la classe d'âge considérée ; par exemple, dans le cas d'une *course*[2] *à 20* avec des élèves de 5 ans, le niveau prééminent ne sera pas le savoir de la division mais pourrait être celui des soustractions successives (prémisses à la division).

Ce qui nous intéresse est donc de voir comment tout cela s'articule, quel rôle cela joue dans la transformation de connaissances en savoirs et comment, en mettant de l'ordre dans le présumé, on peut tirer l'élève vers un niveau supérieur.

Nous tentons de mieux cerner cette question de l'expérience en essayant de faire ce détour par les connaissances, les conduites des élèves. Il y a une dialectique entre les deux schémas : au niveau manifeste du fait numérique répond le niveau révélé des connaissances de l'élève. Dans les critères de divisibilité par 4, ce que l'élève relève comme régularités et comme règles est de l'ordre du niveau manifeste du fait. En revanche, le niveau présumé des connaissances anciennes que l'élève donne à voir questionne le niveau sous-jacent ; ces deux niveaux peuvent se superposer ou non. En tous les cas, le présumé se donne à voir là où le sous-jacent est rendu invisible dans la mesure où il contient absolument toutes les connaissances a priori utiles pour pouvoir aborder le fait.

L'occasion donnée aux élèves de re-convoquer d'anciennes connaissances, de les faire remonter à un niveau de conscience en interaction avec celles de l'expérimentateur permet de mettre en exergue une confusion, signe de l'émergence d'un insu. En ce qui concerne notre fait de divisibilité par 4, les différences objet / sujet peuvent être caractérisées de la façon suivante :

« Critères de divisibilité par 4 »	
Les trois niveaux du fait numérique	***les trois niveaux de connaissances de l'élève***
Niveau manifeste Régularités manifestées par l'écriture des nombres et du fait que la décomposition *C(n) + DU (n)* se lit sur l'écriture des nombres.	**Niveau révélé** Ce que l'élève voit comme régularités dans le fait, ce niveau peut se superposer au manifeste.
Niveau sous-jacent Ensemble de tout ce qu'il faut savoir pour *saisir* ce qui est manifeste. Ici c'est d'une part une certaine familiarité avec les écritures chiffrées de nombres et la forme qu'elles peuvent avoir et d'autre part une familiarité avec les chiffres et la division, pour les principes les plus élémentaires.	**Niveau présumé** Ensemble des connaissances concernant le fait, que l'élève a convoquées (ex : parité/imparité, multiples de 2, table de 4, multiples de 4. Ce niveau donne à voir des éléments du niveau sous-jacent, propres au sujet. Nous le considérons comme le niveau de l'expérience dans lequel s'effectuent les réorganisations pour accéder au niveau prééminent.
Niveau supérieur Explication des faits au niveau mathématique le plus élevé par rapport aux axiomes des structures concernées. Dans notre fait, il est constitué par les règles très générales d'associativité de la multiplication, de distributivité de la multiplication sur l'addition, de caractère euclidien de l'anneau des entiers.	**Niveau prééminent** Niveau *optimal* des connaissances des élèves. Il constitue une petite partie du niveau supérieur ; il s'agit du niveau le plus *élevé* par rapport à la classe d'âge considérée. Il s'agit ici du savoir que l'on pourrait qualifier de *visé* par le degré scolaire, par exemple.

La mise en évidence de l'expérience permet de voir des liens entre niveau sous-jacent et niveau présumé. L'expérience qui s'y exprime est en lien avec les éléments du sous-jacent. Ces niveaux phénoménologiques se repèrent dans la contingence, ce qui n'est pas le cas des niveaux en rapport aux faits numériques décrits par Conne, qui se rapportent à l'objet et par conséquent, s'identifient dans la théorie.

A partir de constats documentés dans nos recherches, nous formulons une première hypothèse : les élèves effectuent des va-et-vient dans la convocation de leurs connaissances, entre niveau de connaissances révélées (celles qu'ils voient) et niveau de connaissances présumées (leur expérience).

Ce sont les deux niveaux majoritairement investis par les élèves. On observe que lorsqu'ils procèdent à des essais ou effectuent des expérimentations autour d'une suite de nombres, par exemple, ils se situent le plus

[2] ajouter à tour de rôle, un nombre < 3 et arriver le premier à 20 ; stratégie experte : 20 ÷ par 3 = 18, reste 2, on commence à 2 et on ajoute 3. Nombres gagnants : 2-5-8-11-14-17-20

souvent au niveau révélé : ils explorent la forme des nombres en repérant des régularités, tentant de suivre une logique et en faisant fonctionner une règle. En revanche, leurs remarques, leurs constats ou leurs affirmations sont généralement de l'ordre du niveau présumé : ils parlent à partir de leur expérience. C'est dans ce niveau que le milieu sature, car c'est là que s'expriment tous azimuts les éléments de leur expérience.

Les liens que les élèves vont établir entre ce qu'ils expérimentent au niveau révélé et leurs connaissances antérieures (convoquées au niveau présumé, c.-à-d. le niveau de leur expérience), seront partie constituante du niveau prééminent : le niveau de la conversion de leurs connaissances en savoirs. Nous ne développerons pas cet aspect dans la présente contribution mais nous nous devions de le préciser.

Liens entretenus avec les inférences logiques

Ainsi, les niveaux de connaissances RPP (révélé, présumé, prééminent) s'articulent aux catégorisations *Saturation vs Dé-saturation* et *Exploration vs Expérience*. C'est en permettant à l'élève de mettre de l'ordre dans les connaissances fusant au niveau présumé, que l'on peut lui permettre d'avoir une action sur le niveau prééminent de ses connaissances.

Comprendre quel rôle joue cette articulation dans la transformation des connaissances en savoirs et comment, en allant dans le niveau de l'expérience de l'élève, c'est-à-dire, en lui permettant de travailler ses représentations et d'explorer le milieu constitué de connaissances souvent indifférenciées, permet de le tirer vers le niveau prééminent. Nous préconisons pour cette entreprise, un aménagement du milieu par des jeux de tâches, interaction de connaissances entre les deux parties. En permettant l'émergence de l'expérience de l'élève, on se heurte inévitablement à l'expression d'une forme d'insu que l'on peut reconnaitre dans des expressions comme « *j'ai vu dans ma tête* » ou encore « *je le savais, mais j'ai pas fait* attention ».

Cette part non-consciente, ainsi que l'évoque le texte de cadrage à travers les propos de Lechevalier (2001, p.26), cet inconscient cognitif est défini comme étant « *[…] l'ensemble des états ou des dispositifs inconscients des activités cognitives. Plus qu'un système défini, c'est une reconnaissance de la part non consciente, souvent appelée automatique des processus mentaux ».*

Dans notre acception, cette « part non consciente » résulte du savoir mathématique en ce sens que les connaissances préalablement construites par l'élève se manifestent au détour d'un échange ou d'une surprise, de manière abrupte. La motivation vient d'un objet de savoir. En effet, ce n'est pas *ex-nihilo* qu'un élève s'écrie, par exemple *« le 3 est un nombre populaire pour les maths »* ; ce type de manifestation procède du savoir mathématique et la part de l'insu s'exprime dans le fait que des connaissances anciennes et enfouies, comme nous aimons à le qualifier, refont surface parfois brusquement à l'occasion d'une stimulation par l'objet. Nous ne sommes pas toujours en mesure de comprendre ce qui se joue chez l'élève ni d'où vient ce *cri du cœur mathématique*, pourtant, pour enfouies qu'elles soient, elles n'en sont pas moins accessibles : on peut les *retrouver* en allant les *rechercher* au moyen d'une interaction de connaissances que représente le jeu de tâches. L'insu se donne à voir majoritairement dans le phénomène que nous avons nommé saturation du milieu, et que nous développons ci-après, mais également au détour d'une réflexion à haute voix ou d'une situation d'action de l'élève. Si on lui demande à ce moment-là pourquoi le 3 est populaire, il ne sait pas… le jeu de tâches consiste à reprendre l'échange en tentant de comprendre par d'autres moyens, ne serait-ce que celui d'entrer dans le jeu en demandant par exemple « et 6 ? Il est populaire ? ». Arrêtons-nous sur cet exemple quelques instants pour saisir l'idée de jeu de tâches qui préconise que l'expérimentateur est un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Si un expérimentateur pose la question pour 6, il y a fort à parier qu'un autre expérimentateur, en fonction de ses propres connaissances et de ce qu'évoque en lui cette remarque (mathématiquement s'entend) demandera quant à lui si 5 l'est ou posera peut-être même une toute autre question ! Pourquoi 6 ? Pourquoi 5 ? Peut-être parce que le premier expérimentateur voit 6 en tant que double de 3 et que le deuxième envisage 5 comme nombre impair suivant. Nous ne sommes pas toujours en mesure de donner une explication nous-mêmes non plus, cela se passant dans l'action, *hic et nunc*. La surprise évoquée plus haut comme réactivation de connaissances anciennes nous permet de faire un lien avec les inférences logiques, dont nous ne retiendrons pour cet article que l'abduction, selon Peirce (1931-1935). « *Deduction proves that something must be; Induction shows that something actually is operative; Abduction merely suggests that something may be."* (Peirce, 5.171)

Dans cette citation, le caractère labile de l'abduction et le fait qu'elle soit, dans notre acception, liée à la création de règles permet de penser les choses en termes d'inconscient cognitif, que nous prendrons ici au sens de Piaget :

« L'inconscient cognitif consiste en un ensemble de structures et de fonctionnements ignorés du sujet sauf en leurs résultats et c'est donc pour des raisons profondes que Binet a jadis énoncé cette vérité sous des airs de boutade : « la pensée est une activité inconsciente de l'esprit. » Par où il voulait dire que si le moi est conscient du contenu de sa pensée il ne sait rien des raisons structurales et fonctionnelles qui le contraignent à penser de telle ou telle manière, autrement dit du mécanisme intime qui dirige la pensée. » (p.13).

Ces règles s'avèrent la plupart du temps fausses, du fait qu'elles servent d'hypothèses pour expliquer un fait surprenant ; elles nécessitent d'être vérifiées par induction/déduction. Ceci nous amène à l'idée qu'une logique abductive est donc un processus réversible où les résultats sont toujours liés au fait que le sujet cherche une explication, une règle pour répondre à une situation surprenante; il suit son intuition qui lui vient de son expérience. Dans ce processus, il se peut à un moment donné, que les connaissances s'entrechoquent et s'expriment par des propos qui peuvent sembler décousus, mais qui proviennent en fait de ce niveau sous-jacent, propre au sujet. C'est la grande différence de ce modèle avec celui des faits numériques qui prend en compte l'objet uniquement.

MANIFESTATIONS DE L'INSU DANS LA CONTINGENCE

Saturation du milieu

A partir du constat que les programmes et les moyens d'enseignement sont dans l'évitement de ce déferlement de connaissances au vu de la complexité mathématique et de la difficulté à le gérer, nous questionnons ce fait, en faisant précisément *plus* de mathématiques, et surtout, d'un niveau plus complexe. Nous souhaitons lever la censure et l'autocensure, pour observer un milieu qui sature. Autrement dit, nous nous autorisons à suivre l'intelligence et la curiosité mathématique des élèves et décidons d'aller plus loin que le programme lorsque cela se présente – comme par exemple les factorisations avec les élèves de 11 et 12 ans.

Quelle interprétation de l'insu

La saturation du milieu est un phénomène identifié à partir de l'indifférenciation des représentations, qui se manifeste comme un amalgame, une confusion entre les notions, par exemple, entre parité et multiples de 4 (*tous les nombres pairs sont multiples de 4*). Pour comprendre comment l'objet *critère de divisibilité* s'exprime dans les représentations des élèves et quelles connaissances ces derniers engagent dans leur exploration, quelque chose du côté du sujet était à prendre en compte pour comprendre cet objet, de l'ordre de l'expérience du sujet dans son rapport à un objet et comme articulation de ces niveaux de connaissances; c'est ce que nous avons tenté de modéliser.

L'analyse de l'exploration des élèves et de l'expérience montre que cette dernière est nécessaire pour dépasser le niveau révélé, car elle se situe au niveau présumé des connaissances. L'expérience montre en outre comment le jeu avec le milieu par un jeu de tâches (idéalement) permet d'accéder à des niveaux plus enfouis de connaissances et d'affaiblir ainsi la saturation qui en découle.

Les élèves ont une expérience de la division, pour l'avoir déjà rencontrée et utilisée. Cette expérience leur donne une certaine connaissance (représentation) de cet objet. Ils savent effectuer l'algorithme, résoudre des problèmes, etc. Il faut donc que le sujet puisse aller puiser dans cette expérience, les représentations et/ou les connaissances qui lui permettront de pouvoir les différencier.

Aménagement du milieu : le *jeu de tâches* fait émerger la saturation

Le niveau manifeste du fait numérique faisant écran dans nos séances pour aller plus loin (les élèves tournent en rond), nous avons cru bon de mettre la lumière sur les connaissances enfouies dans le niveau présumé, car c'est à cet endroit que la saturation se donnait à voir.

L'analyse du phénomène de saturation permet de dire qu'il intervient toujours quand les élèves vont puiser dans le niveau présumé de leurs connaissances pour répondre à ce qu'ils appréhendent du niveau révélé. C'est dans le niveau présumé, celui de l'expérience, que l'on va re-trouver des éléments qui permettent de construire une connaissance. Par exemple dans son expérience, l'élève va trouver tout ce qu'il a déjà construit antérieurement à propos des suites numériques : c'est cette connaissance qui va être convoquée et devoir être accommodée à la nouvelle.

En jouant avec les nombres au niveau présumé, ils font surgir les éléments de leur expérience. Nous pouvons donc relier ces manifestations de l'insu (au sens d'inconscient cognitif piagétien) et la dé-saturation du milieu, pour permettre de mettre de l'ordre dans les connaissances et, partant, de les distinguer pour permettre une différenciation des représentations également.

Lorsque le doute s'immisce, les hypothèses des élèves sont sans limites. C'est bien ce qui caractérise leur intelligence et qui ne saurait être négligé.

Nous retenons que ce phénomène de saturation est bel et bien un indicateur consistant de l'état des connaissances des élèves, de surcroit fort attrayant pour le chercheur, et qui nous incite à le provoquer chez les élèves, pour voir…

La notion de jeu de tâches

Rapidement dit, il s'agit d'un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. L'expérimentateur est un élément du milieu (au sens de Bloch, 2002) qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Cet ensemble de tâches résulte d'un savoir mathématique et met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées et qui constituent leur expérience du nombre. En effet, au fil des tâches, l'élève se constitue peu à peu une expérience à propos des nombres, et plus particulièrement, en ce qui nous concerne, des relations de divisibilité.

Cette notion consiste à explorer, investiguer le milieu de manière approfondie. Il y a également l'idée de repousser les limites de la tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en découlant évidemment du savoir mathématique ; le milieu n'est pas une entité statique mais au contraire, dynamique : nous y associons une certaine liberté dans le questionnement des élèves. Ainsi, nous nous autorisons à interagir avec l'élève selon notre propre représentation de la tâche et en dehors, parfois, de notre analyse préalable. Nous cultivons l'idée qu'il y a un enjeu à saisir un étonnement (de notre part ou de celle des élèves) et de l'exploiter sur le vif. Cela signifie que nous ne cherchons pas ici à faire réussir l'élève, mais que nous sommes bien dans la perspective épistémologique de comprendre comment les connaissances des élèves s'agencent. De ce fait, il se peut que nous abandonnions abruptement une tâche, que nous laissions flotter des erreurs sans les discuter ou encore, que nous intervenions en donnant des contre-exemples, que nous empêchions l'élève de réfléchir par nos questions, ou que nous le déstabilisions pour tenter de saisir le fil de sa pensée. Cela peut paraitre particulier, mais il n'en demeure pas moins que les élèves adorent ce type d'interaction sans que nous ne nous l'expliquions véritablement.

Pour déterminer le type de milieu dans lequel nous questionnons les élèves, nous précisons qu'il s'agit d'un milieu de type expérimental, au sens de Bloch (2002) qui définit différents modèles de milieux, selon s'ils se trouvent du côté de la théorie, de l'expérimentation ou de la contingence. Ainsi, le modèle de milieu expérimental nous permet-il non seulement de prévoir et d'analyser un phénomène d'enseignement, les rapports à la connaissance et au savoir des élèves et du professeur ainsi que leur articulation, mais encore, de construire des situations expérimentales, de les étudier et de les analyser dans la contingence.

Formation des enseignants : restitution du jeu de tâches par la narration

La question de la restitution de nos interactions de connaissances s'est posée et dans l'optique de continuer à sonder la partie subjective, nous avons opté pour l'interprétation des propos par le sujet, ce qui constitue *sa* réalité. Donc point de film ni d'enregistrement, mais une narration, après-coup, du jeu effectué. La théorie qui sous-tend ce choix a été puisée chez Benjamin (1936), pour la narration en tant qu'*expérience pour qui écoute* et Devereux (1980) pour ses réflexions à propos de la non-neutralité de l'observateur.

Deux exemples de narrations qui tentent d'illustrer ce propos : la première, par l'expérimentatrice et la deuxième, par des étudiants en formation qui ont suivi le cours d'introduction au jeu de tâches en mathématiques au primaire.

Narration 1 : *« Je leur présente l'exercice $8^{...} = 16^{...}$ et ce qui ressort immédiatement, c'est l'égalité suivante : $8^4 = 16^2$ parce que 16 est le double de 2. Les étudiants ont répondu la même chose lorsque je leur ai demandé de répondre rapidement et sans réfléchir. Nos représentations nous poussent à répondre ceci ! Nous avons beaucoup de relations et de connaissances en tête qui vont s'amalgamer par moments. Un moyen de dissocier (différencier) toutes ces connaissances qui viennent « encombrer le milieu » est le jeu de tâches, dans lequel le fait d'interagir avec les élèves et de leur permettre d'expérimenter ces relations va leur donner la possibilité de retrouver des connaissances plus anciennes. Lorsque je demande aux élèves s'ils sont sûrs de ce qu'ils avancent, ils répondent que oui : ils sont même précisément « archi-sûrs », personne ne doute ! Je leur propose de vérifier à la calculette pas besoin, c'est sûr que c'est juste, me répond l'un. Je dis alors que par principe, en maths, on ne croit jamais sur parole… ils s'engagent alors dans une exploration de ce milieu. Plein de rapports émergent autour des notions de moitié et double. Ils pensent qu'il y a peut-être un lien avec la parité/imparité du nombre et font leurs essais. Je les laisse faire car en effet, il y a à trier entre toutes ces notions qui entretiennent des liens étroits. Il y a tellement de liens dans notre tête qu'on ne sait plus comment les expliquer. Cette phrase montre effectivement que le milieu sature, trop plein d'informations de toutes sortes ; en vrac et en passant : liens entre bases, double, triple, quel effet sur les exposants, liens entre exposants et multiples, multiples et nombres pairs/impairs, etc. Un nombre pair peut-il donner un nombre impair ? Cette réflexion montre que les élèves sont en train de re-construire toutes ces relations. Ils sont en 8PH (12 ans), et la parité peut encore leur poser question par moments… ce n'est souvent pas compris à l'extérieur et pourtant, c'est si facile de faire saturer un milieu dans le domaine du nombre… »*

Narration 2: *« Bien qu'il soit utilisé aussi bien par l'élève à l'aise en mathématiques, ou par la mère au foyer distante des mathématiques, il suffirait qu'une seule division ne donne pas le résultat attendu pour que leur "effort inductif sombre dans le néant", comme l'explique Peirce. C'est d'ailleurs ce que nous verrons par la suite. Raisonnement par abduction: c'est justement en allant plus loin qu'on peut se retrouver face à une saturation du milieu. Il y a d'ailleurs un moment dans chacune des narrations, où les deux élèves sont confuses face à leur règle établie.*

En premier lieu, elle cherche en vain une régularité dans sa recherche, lorsqu'elle ajoute des 4 au diviseur, elle obtient :

1/ 49 = 0,02 04 08

(...)

1/ 444449 = 0, 000002249976

Après investigations, elle pose la règle "le résultat commence par un nombre de 0 égal au nombre 4 du diviseur, et après 2250". Cette règle n'étant pas valable pour les premières divisions effectuées (à cause des retenues…), elle se retrouve face à un résultat "surprenant" et inexplicable. Elle l'explique donc avec un ajout de règle "inventée" telle que "sauf pour les sept premières divisions". Elle a donc adapté sa règle en fonction de ce qu'elle observe, pour rétablir de l'ordre dans son raisonnement. C'est comme si, pour elle, tout devait absolument dépendre d'une règle. (…). Par chance (si nous pouvons l'exprimer ainsi), cette saturation du milieu est "tombée" sur une division qui est très visuelle: Elle reconnait *immédiatement le 44, double de 22, et induit elle-même que "le nombre de chiffres du diviseur, permet de savoir par combien on va devoir lire les chiffres du résultat". Ici, la saturation du milieu lui a permis de se réorienter sur une règle beaucoup plus efficace que la première. Cependant, après avoir établi cette nouvelle règle, Léa ne la teste pas.* »

Ces deux narrations contiennent les interprétations du jeu et mettent en évidence les mouvements de va-et-vient dans la convocation des connaissances.

CONCLUSION

En guise de conclusion, nous osons une synthèse de ce qui a été évoqué dans cet article : prenons les critères de divisibilité comme objet mathématique se donnant à voir à un niveau manifeste, comme un fait numérique qui résiste de par la complexité, par exemple, de sa structure. L'élève en perçoit les signes à un niveau révélé de ses connaissances et se met à l'explorer, à expérimenter des pistes et se constitue une expérience autour de ces critères. Considérons que dans certains cas, son expérience le mène tous azimuts et occasionne un phénomène de saturation du milieu, en tant que connaissances fusant de toutes parts. Ces connaissances, du côté du sujet, nous les catégorisons en niveaux/états de connaissances (dialectiques) pour répondre à l'objet mathématique qui résiste. Ainsi, le fait observé par l'élève au niveau révélé va-t-il parfois conduire à une saturation du milieu (trop plein d'informations), ce qui a pour conséquences de faire remonter des connaissances enfouies, mais qui se manifestent dans le désordre et la confusion. C'est là que nous saisissons la part de l'insu (en tant qu' « inconscient mathématique » ?) qui fait émettre certains propos à l'élève, sans qu'il ne sache ni d'où ils viennent, ni à fortiori comment les interpréter. C'est du *jeu de tâches*, interaction de connaissances faisant se rencontrer deux *inconscients mathématiques*, que peut provenir la dé-saturation du milieu.

BIBLIOGRAPHIE

Benjamin, W. (1936). Rastelli raconte… et autres récits suivi de le narrateur, Seuil.

Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations. *Actes de la xi^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brun, J. (1997). Enseignement des mathématiques et psychologie du développement cognitif : quels rapports? Actes : XXIIIème Colloque inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, La Grande-Motte, 13, 14, 15 mai 1996, IREM de Montpellier, 33-43.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

Conne, F. (2004). Une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en Suisse romande. Colloque GDM, 3 Rivières, Québec, 7 mai 2002.

DDMES (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques, Paris, 28-29 mars.

Del Notaro, C. (2005). « Je le savais, mais je n'avais pas fait attention » ou la conversion connaissance/savoir. *Educateur*, (7), 18-19.

Del Notaro, C. (2007). Observation de milieux non différenciés dans la contingence à propos d'une tâche sur les relations de divisibilité. CD-Rom. *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud.* (M.Merri coord.) Presses Universitaires du Mirail (Toulouse), 469-483.

Del Notaro, C. (2010). Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité. Thèse de doctorat, Genève.

Del Notaro, C. (2014). Implementation In Class of a Theory Stemming From a Research: A Question of Didactical Transposition. *US-China Education Review. B*, *4*(10), 730-739.

Del Notaro, C. (2015). Narrer pour comprendre et comprendre pour narrer : un essai d'analyse d'un jeu de tâches entre futurs enseignants et élèves de l'école primaire. Actes des *Journées d'études Activités de l'enseignant débutant et activités pour débuter 11-12 juin.* Université de Nantes.

Devereux, G. (1980). De l'angoisse à la méthode dans les sciences du comportement. Paris. Flammarion, 1980

Laing, R.D. (1969). La politique de l'expérience. Essai sur l'aliénation. Stock, Paris-Mesnil-Ivry.

Laing, R.D. (1986). La voix de l'expérience. Paris : Seuil.

Peirce, C. S. (1931-1935). Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes 1–6 edited by C. Hartshorne, P. Weiss, Cambridge, Harvard University Press.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques* 10/2, 2.3, 135-169 Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (2002). Piaget visité par la didactique. *Intellectica*, 33, 107-123.