De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde

Coppé, Sylvie; Dorier, Jean-Luc; Yavuz, Ilyas

How to cite

COPPÉ, Sylvie, DORIER, Jean-Luc, YAVUZ, Ilyas. De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. In: Recherches en didactique des mathématiques, 2007, vol. 27, n° 2, p. 151–186.

Coppé, S., Dorier, J-L. & Yavuz, I. (2007) De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27(2), 151–186.

DE L'USAGE DES TABLEAUX DE VALEURS ET DES TABLEAUX DE VARIATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE FONCTION EN FRANCE EN SECONDE.

Sylvie COPPÉ[*], Jean-Luc DORIER[**], Ilyas YAVUZ[***]

RESUME

L'enseignement de la notion de fonction au début du lycée en France a conduit, depuis 20 ans, à un usage accru des divers modes de représentation des fonctions, spécialement dans les premières leçons. Dans cet article, nous tentons de caractériser comment sont pris en compte, par les différents acteurs de l'institution, ces récentes modifications, en particulier concernant l'usage qui est fait des courbes, des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans le chapitre des généralités sur les fonctions en classe de seconde.
Après avoir précisé les cadres théoriques de notre recherche, nous présenterons d'abord les résultats concernant le rapport institutionnel à ces objets, en nous appuyant sur une analyse des programmes et des manuels. Par l'analyse des réponses à un questionnaire que nous avons élaboré, nous verrons ensuite comment ce rapport institutionnel se décline chez les enseignants, en dégageant leurs opinions et leurs choix didactiques. Nous analyserons enfin, par un test écrit, les capacités des élèves à résoudre différentes tâches, qui nous ont semblé emblématiques des changements mis en avant dans les derniers programmes.
Nous tenterons dans nos conclusions de replacer ce travail dans une perspective plus large de l'apprentissage du concept de fonction, en interrogeant à la fois la pertinence des changements adoptés par rapport à l'apprentissage de la notion de fonction, mais aussi, sur un autre plan, les limites de nos choix théoriques et méthodologiques.

ABSTRACT

[*] Equipe Coast, UMR ICAR et IUFM de Lyon (France). Sylvie.Coppe@univ-lyon2.fr

[**] Equipe DDM, Laboratoire Leibniz, Grenoble et IUFM de Lyon (France). Jean-Luc.Dorier@imag.fr

[***] Equipe Coast, UMR ICAR, Lyon (France). ilyavuz@hotmail.com

The teaching of the concept of function in the beginning of upper secondary education in France has been subject to important changes during the last 20 years, leading to an increasing use of various modes of representation. In this paper, we try to characterise how these recent changes have taken into account by the various actors of the institutions, in particular regarding the use of curves, tables of values and table of variations in the chapter about generalities of the functions in the class of "seconde".
After a presentation of the theoretical frameworks used in this research work, we first present our results about the institutional relation to these objects, based on an ecological analysis of programs and textbooks. Then, through the analysis of the answers to a questionnaire, we will see how this institutional relation is implemented by teachers, while bringing out their opinions and didactical choices. We will finally analyse, though a test, students' ability in solving various tasks typical of the changes put forward in the recent evolution.
We will try in our conclusions to replace our study in a larger perspective about the learning of the concept of function. In this sense, we will question not only the consistency of the curriculum changes but also, on another level, the limits of our theoretical and methodological choices.

RESUMEN

La enseñanza de la noción de función al principio del instituto en Francia ha llevado desde hace 20 años a un mayor uso de los diversos modos de representación de las funciones, especialmente en las primeras lecciones. En este artículo, intentamos caracterizar cómo los diferentes actores de la institución toman en cuenta esas recientes modificaciones, en particular el uso que se hace de las líneas curvas, de las tablas de valores y de las tablas de variaciones en cuanto a las generalidades sobre las funciones en clase de segundo.
Después de precisar los cuadros teóricos de nuestra investigación, presentaremos primero los resultados respecto a la relación institucional con esos temas, apoyándonos en un análisis de los programas y de los manuales escolares. Gracias al análisis de las respuestas a un cuestionario que hemos realizado, veremos después cómo los profesores consideran esta relación institucional, mostrando sus opiniones y sus elecciones didácticas. Por fin analizaremos, gracias a una prueba escrita, las capacidades de los alumnos a resolver diferentes tareas que nos han parecido emblemáticas de los cambios propuestos en los últimos programas.
Intentaremos en nuestras conclusiones enfocar este trabajo en la perspectiva más amplia del aprendizaje del concepto de función, cuestionando tanto la pertinencia de los cambios adoptados respecto al aprendizaje de la noción de función, como también, en otro ámbito, los límites de nuestras preferencias teóricas y metodológicas.

Mots-clés: fonction, tableau de valeurs, tableau de variations, courbe, registre de représentation sémiotique, anthropologie du didactique, classe de seconde.

INTRODUCTION

Depuis le début de la contre-réforme des mathématiques modernes, l’enseignement de la notion de fonction, au début du lycée en France, a subi de profondes mutations. Ainsi, l'étude des fonctions se fait plus progressivement, puisqu'on introduit tout d'abord les fonctions affines à la fin du collège, en classe de troisième (élèves de 14-15 ans). Puis, au début du lycée, en classe de seconde (élèves de 15-16 ans), on introduit le langage des fonctions sans les outils théoriques classiques de l'analyse (dérivée, limites, etc.), qui n'apparaîtront qu'à partir de la classe de première (élèves de 16-17 ans). Parallèlement, le bestiaire des fonctions que les élèves doivent connaître reste limité en classe de seconde aux fonctions du second degré, racine et cosinus, sinus, alors qu’en première, apparaissent les fonctions polynômes et rationnelles, les fonctions logarithmes et exponentielles n’apparaissant qu’en classe de Terminale (élèves de 17-18 ans).

En seconde, un des points les plus emblématiques de cette évolution a trait à un usage accru des divers modes de représentation des fonctions, spécialement dans les premières leçons. Ainsi, parallèlement à une diminution de la suprématie du registre algébrique, le registre graphique a acquis de nouveaux droits, mais les programmes préconisent également d’utiliser dans des conditions nouvelles les tableaux de valeurs et les tableaux de variations. Traditionnellement, les représentations algébrique et graphique jouent un rôle dominant (le registre algébrique est d’ailleurs souvent le seul accepté pour démontrer), alors que les tableaux de valeurs comme les tableaux de variations ne jouent qu’un rôle d’auxiliaires dans le passage de l’algébrique au graphique. Cependant, suite aux diverses réformes du système d’enseignement français depuis les années 70, les places et rôles de ces modes de représentation ont subi de nombreuses évolutions (Yavuz, 2005 et Coppé, Dorier & Yavuz, 2006). Ainsi, les tableaux de valeurs et les tableaux de variations apparaissent de plus en plus explicitement dans les programmes de seconde depuis 2000, comme moyens à part entière de représentation des fonctions. L’extrait suivant du programme de la classe de seconde paru en 2000 en atteste :

> Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule […]
> Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d’une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.

Ainsi, cet extrait laisse penser que le tableau de valeurs peut ne plus être seulement un outil de représentation partielle de la courbe, mais devenir une façon de « définir » une fonction. De même, le tableau de variations n'est plus dépendant de la connaissance préalable de la fonction, mais peut servir à caractériser une famille de fonctions, déterminée par l'allure de leur représentation graphique. Une question reste de savoir dans quelle mesure les élèves peuvent comprendre que ces différentes ostensifs définissent bien un objet et, qui plus est, le même objet. Pour les professeurs, la tâche est également difficile dans la mesure où ils ont à prendre en compte ces différents modes de représentation, tout en travaillant à l'émergence et l'unité du concept de fonction.

Ces constats nous ont amenés à faire une étude plus précise sur la façon dont les tableaux de valeurs et les tableaux de variations sont utilisés dans les classes de seconde, comment ils y vivent, en lien avec quels types de tâches, et ce qu'ils peuvent permettre dans l'apprentissage du concept de fonction (Yavuz, 2005).

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés à l'enseignement et l'apprentissage de la notion de fonction. Nombre d'entre eux s'appuient sur une analyse épistémologique de cette notion, en particulier en référence à son évolution historique (Comin, 2005, Schneider, 1994, Sierpinska, 1992, etc.). Nous ne prétendons pas, dans le cadre de cet article résumer ces travaux, mais nous nous contenterons de cette citation issue du travail de Comin :

> L'analyse épistémologique nous a conduit à poser que c'est l'idée de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable. Rappelons seulement que chez Leibniz (1646-1716), le mot « fonction » désigne une relation entre grandeurs dont les variations sont liées par une loi. L'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments des deux ensembles modélisés par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs. Dieudonné (1972) gomme même la distinction entre correspondance et graphe qu'il taxe de psychologique. (op. cité, 38)

De fait, la fonction a subi une évolution dans les mathématiques savantes, qui l'a, en partie, coupée de son origine épistémologique comme modèle d'une « dépendance entre variables en décrivant une correspondance terme à terme entre les valeurs prises par ces variables » (ibid., p. 37). Au niveau de l'enseignement, depuis les mathématiques modernes, la fonction occupe en France une niche importante en troisième, et surtout en seconde. Cependant, les dernières évolutions des programmes ont eu en particulier deux effets sur cette niche. D'une part, l'appauvrissement du travail algébrique au collège a réduit considérablement le bestiaire des formules algébriques étudiables à ce niveau ; d'autre part, l'entrée dans une démarche spécifique de l'analyse a été repoussée entièrement à la classe de Première. Ainsi, l'enseignement des fonctions occupe-t-il actuellement une place nouvelle et particulière dans la classe de seconde. Il ne peut en effet s'appuyer en amont que sur les exemples des fonctions linéaires et affines, à peine formalisées, et n'a plus vocation à nourrir immédiatement un travail dans le domaine de l'analyse.

Ainsi, nous rejoignons le constat de Comin « qu'une partie importante des élèves de seconde ne sont pas prêts à recevoir un enseignement formel du concept de fonction ». Il définit à la suite les grandes lignes d'un projet curriculaire permettant de mieux organiser l'enseignement des fonctions au collège et au lycée. Ce projet nous paraît tout à fait intéressant, mais nécessiterait un changement important dans les programmes actuels.

Par ailleurs, plusieurs travaux ont permis de mieux comprendre et de préparer l'enseignement des fonctions comme entrée dans le domaine de l'analyse (Artigue 1993), (Bloch, 2000, 2002 et 2003), (Hauchart et Schneider, 1996), (René de Cotret, 1985), (Schneider, 1994), (Sierpinska, 1992), etc. Pour les raisons que nous avons évoquées plus haut, ces propositions sont de moins en moins compatibles avec les évolutions des programmes français actuels de seconde.

C'est pourquoi, parallèlement à ces études qui montrent les difficultés et les obstacles et font des propositions curriculaires, il nous a semblé important de mieux mesurer les effets, dans les programmes, sur les pratiques enseignantes et in fine dans les apprentissages, des dernières modifications de programme.

Dans cet article, issu d'un travail de doctorat, nous présenterons nos analyses visant à caractériser comment sont prises en compte, par les différents acteurs de l'institution, ces récentes modifications, en particulier l'usage qui est fait des courbes, des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans le chapitre des généralités sur les fonctions en classe de seconde.

Après avoir précisé les cadres théoriques de notre recherche, nous présenterons d'abord les résultats concernant le rapport institutionnel à ces objets, en nous appuyant sur une analyse des programmes et des manuels. Par l'analyse des réponses à un questionnaire que nous avons élaboré, nous verrons ensuite comment ce rapport institutionnel se décline chez les enseignants, en dégageant leurs opinions et leurs choix didactiques. Nous analyserons enfin, par un test écrit, les capacités des élèves à résoudre différentes tâches, qui nous ont semblé emblématiques des changements mis en avant dans les derniers programmes.

Ce travail n'est bien sûr pas une apologie des nouveaux programmes. Dans ce sens, nous tenterons dans nos conclusions de replacer ce travail dans une perspective plus large de l'apprentissage du concept de fonction, en interrogeant à la fois la pertinence des changements adoptés par rapport à l'apprentissage de la notion de fonction, mais aussi, sur un autre plan, les limites des questionnements que nos choix de cadres théoriques et de méthodologie d'analyse nous imposent.

CADRES DE L'ETUDE

Nos deux cadres théoriques de référence principaux sont d'une part, la théorie anthropologique du didactique, développée en plusieurs étapes par Chevallard et, d'autre part, les registres de représentation sémiotique de Duval. Nous les présentons maintenant brièvement avec nos premiers éléments d'analyse sur les tableaux de valeurs et de variations. Nous situons ainsi le contexte théorique dans lequel va se développer notre étude.

1. Cadre de l'anthropologie du didactique

Le concept de transposition didactique (Chevallard, 1991) qui désigne globalement le passage du savoir savant au savoir enseigné se décompose en deux étapes :

- Le passage du savoir savant au savoir à enseigner, la transposition dite externe, qui aboutit aux programmes.
- Le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné, transposition dite interne.

Dans la mesure où il est difficile d'avoir accès aux raisons des choix qui ont présidé au passage du savoir savant au savoir à enseigner, notre travail portera essentiellement sur le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Lorsque la noosphère souhaite introduire des objets de savoir dans les contenus d'enseignement, elle sélectionne des éléments du savoir savant et les transforme afin de pouvoir, notamment, rédiger un programme officiel d'enseignement. Les éléments du savoir savant ainsi transformés deviennent des savoirs à enseigner. Cependant, Arsac (1989) fait remarquer que le savoir à enseigner ne se réduit pas au programme :

> Nous avons remarqué en effet qu'un texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme. (Arsac et al., 1989, pp.12-13)

Arsac pointe là un élément laissé obscur par Chevallard qui parle pour sa part de « texte du savoir » sans plus de précision. Dans notre travail, nous considérons que le savoir à enseigner est constitué non seulement du programme scolaire, mais également des interprétations courantes et des habitudes générales prises à propos de ce programme par les professeurs, ce qu'ils pensent qu'ils ont à enseigner en référence à leurs connaissances, aux anciens programmes qu'ils peuvent avoir rencontrés en position d'élève ou de professeur et aux outils utilisés notamment les manuels scolaires, outils importants pour la pratique.

Le cadre théorique de l'approche anthropologique a été développé par Chevallard (1992) dans le prolongement de la théorie de la transposition didactique. Il se fonde sur les notions d'objet et d'institution. Un objet de savoir O existe dès lors qu'une personne X ou qu'une institution I reconnaît cet objet comme existant pour elle, ou de façon plus précise s'il existe un rapport personnel de X à O (noté R(X,O)) ou un rapport institutionnel de I à O (noté R(I,O)). Ainsi, un objet n'existe que parce qu'il est connu d'une personne (ou d'une institution), il n'existe qu'en tant qu'objet de connaissance.

Du point de vue de l'approche anthropologique, la notion d'objet de savoir est assez molle, c'est un terme quasiment primitif. Aussi considérons-nous la fonction, mais aussi ses modes de représentation, plus particulièrement le tableau de valeurs et le tableau de variations, comme des objets de savoir. Nous considérons par ailleurs « l'enseignement des mathématiques en classe de seconde en France » comme une institution. Cette approche nous permet donc d'identifier les rapports institutionnels aux objets de savoir en question d'une part, et de caractériser les enjeux didactiques liés à ces objets de savoir d'autre part.

La question initiale que nous nous posons porte sur les conditions qui ont amené à faire vivre et évoluer le tableau de valeurs et le tableau de variations dans l'enseignement du concept de fonction en classe de seconde. Nous nous situons tout d'abord dans une perspective écologique, c'est-à-dire que nous identifions l'évolution de l'habitat et des niches des objets tableau de valeurs et tableau de variations, selon les termes définis par Chevallard dans son approche de l'écologie didactique des savoirs :

> Les écologistes distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce. (Chevallard, 1994, p.142)

Cette approche nous permet d'identifier le contenu du savoir à enseigner à travers les choix de transposition de la noosphère et donc les niches occupées par ces deux types de tableaux dans le programme. Notre problème est alors de déterminer les différents objets qui sont amenés à vivre dans l'enseignement de la notion de fonction, ainsi que les organisations mathématiques dans lesquelles ils vont se trouver impliqués.

Pour ce faire, nous utilisons les outils de l'approche praxéologique (Chevallard, 1999) qui nous permettent de décrire des éléments du rapport institutionnel à l'objet fonction et ses modes de représentation d'une part, et de caractériser les enjeux didactiques liés à ces objets de savoir d'autre part. Dans cette approche, on décrit toute activité humaine par des praxéologies, quadruplets formés de types de tâches T - présents dans une institution donnée, des techniques τ - permettant de réaliser les tâches t de même type T, des technologies θ - discours justifiant la technique τ, et des théories Θ - technologies de la technologie. En effet, pour pouvoir exister dans une institution, une technique, et donc un type de tâches, doivent apparaître comme compréhensibles, lisibles et justifiés.

La théorie de l'anthropologie didactique est propice au questionnement écologique. En effet, pour analyser un savoir mathématique dans une institution donnée selon cette théorie, il faut déterminer l'organisation mathématique, c'est-à-dire la carte des praxéologies qui le décrit. Or, une fois ce système déterminé, on se rend compte de l'existence de certains types de tâches et de l'absence d'autres. « Pourquoi tel type de tâche existe-t-il et pas tel autre ? » est assurément un questionnement d'ordre écologique. Dans ce sens, un de nos problèmes est de déterminer quelles sont les conditions qui ont amené à faire vivre et évoluer le tableau de valeurs et le tableau de variations dans l'écologie de l'enseignement du concept de fonction en classe de seconde en France. Notre souci est donc d'examiner les possibilités d'existence et les manières d'exister de ces objets de savoir.

2. Cadre des registres de représentation sémiotique

Pour compléter ce premier cadre théorique, nous avons également fait appel aux travaux de Duval (1993 et 1995) sur les registres de représentation sémiotique, qui nous ont permis, entre autres, d'introduire une dimension supplémentaire dans la catégorisation des tâches proposées aux élèves autour de la notion de fonction.

Ce cadre théorique prend pour hypothèse que la compréhension d'un concept passe par l'utilisation et la coordination de différents registres de représentation sémiotique. Dans ce sens, le concept de fonction est riche et on peut supposer que les propriétés des fonctions vont se dégager en prenant en compte la multiplicité des représentations possibles. En effet, aucun registre de représentation ne peut enfermer à lui seul la notion de fonction et donc ne peut être le support unique d'une définition. Il faudrait donc que les élèves parviennent à résoudre des tâches sur les fonctions dans les différents registres de représentation, mais aussi qu'ils apprennent à passer d'un registre à un autre, afin d'acquérir une conceptualisation suffisamment solide de la notion de fonction. Reste à savoir si les programmes actuels de seconde offrent un milieu suffisant pour travailler dans ce sens. C'est une interrogation qui est au centre de cette recherche.

Selon Duval, le mot de représentation est à la fois important et marginal en mathématiques. Il définit « les représentations sémiotiques comme des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (Duval, 1993, 39). Les représentations sémiotiques sont, selon lui, absolument nécessaires à l'activité mathématique, car les objets ne peuvent être directement accessibles dans la perception et doivent donc être représentés. La thèse que soutient l'auteur est que « les représentations sémiotiques ne sont pas seulement des moyens d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, mais qu'elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée » (ibid., 39). Elles jouent en effet un rôle dans le développement des représentations mentales, dans l'accomplissement de différentes fonctions cognitives (objectivation, calcul, etc.), ainsi que dans la production même des connaissances. Il distingue alors la sémiosis, appréhension ou production d'une représentation sémiotique, de la noésis, appréhension conceptuelle d'un objet, tout en affirmant leur inséparabilité : « […] il n'y a pas de noésis sans sémiosis, alors qu'on veut enseigner les mathématiques comme si la sémiosis était une opération négligeable par rapport à la noésis » (ibid., 40). Dans les activités cognitives liées à la sémiosis, il distingue alors trois types d'activités : la formation d'une représentation identifiable comme appartenant à un registre donné, le traitement et la transformation d'une représentation à l'intérieur du registre où elle a été créée, et enfin la conversion, c'est-à-dire la transformation d'une représentation sémiotique d'un registre dans un autre. Il souligne l'importance de la troisième activité, comme un passage nécessaire pour permettre la coordination des registres attachés à un même concept. Il soutient de plus que la possibilité de conversion est une des conditions essentielles de la conceptualisation, donc de la noésis : « la compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (ibid., 51). Il s'intéresse alors aux conditions d'un apprentissage prenant en compte la sémiosis. Il remarque que si les deux premières activités semblent être prises en compte dans l'enseignement, la troisième semble souvent ignorée. On la considère comme allant de soi du moment que les règles de fonctionnement à l'intérieur de chaque registre sont acquises par l'apprenant. Duval montre que de nombreuses difficultés des élèves relèvent de leur incapacité à effectuer des conversions de registres de représentation sémiotique.

Pour ce qui relève de la notion de fonction, on distingue habituellement les registres algébrique, graphique, numérique et de la langue naturelle. La plupart des auteurs attachent les tableaux de valeurs au registre numérique, alors que rien n'est arrêté pour les tableaux de variations. Nous reviendrons sur ce point en détail plus loin. Dans l'étude des praxéologies, il nous a également semblé important de catégoriser les tâches selon les trois types d'activité (traitement, transformation et conversion) que distingue Duval, en mettant en évidence le(s) registre(s) mis en jeu.

A l'appui de ces cadres théoriques, nous visons à répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les conditions qui ont amené à faire vivre les courbes, les tableaux de valeurs et les tableaux de variations dans l'écologie actuelle du chapitre de généralités sur les fonctions en classe de seconde ? Quelles sont les manières d'exister de ces objets de savoir ?

- Quels sont les types de tâches mathématiques mettant en œuvre l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations ? Quels sont leurs liens éventuels avec les autres registres de représentation ?

- Pourquoi et comment certains types de tâches n'apparaissent pas ou peu dans les manuels et dans la pratique de la classe ?

- Quel système de contraintes institutionnelles pèse sur les auteurs de manuels et les enseignants ? Quelles libertés ont-ils pris dans leurs choix effectifs ?

- Comment les élèves se comportent-ils face à des tâches emblématiques des changements récents de programmes, qui ont du mal à vivre dans les classes, en particulier celles impliquant des changements de registres ?

Dans le présent article, nous donnerons des éléments de réponse aux quatre premières de ces questions. La cinquième a été essentiellement abordée à travers des expérimentations qui ne seront pas relatées ici (Yavuz, 2005 et Coppé, Dorier & Yavuz, à paraître). Nous donnerons toutefois quelques éléments de réponse dans notre analyse du questionnaire proposé aux élèves, ainsi que dans notre conclusion, en replaçant ces interrogations dans le cadre plus général de l'apprentissage de la notion de fonction au lycée en France.

Avant de passer à l'analyse du rapport institutionnel en seconde, nous présentons dans les sections qui suivent nos analyses et questions sur la nature des tableaux de valeurs et de variations, leur place dans l'enseignement des mathématiques, leur rôle dans la représentativité des fonctions et leur appartenance à des registres de représentation sémiotique. Pour une analyse sur le rôle et la place des courbes voir (Chauvat, 1999), (Bloch, 2002 et 2003), (Falcade, 2002) et (Lacasta, 1995).

3. Le tableau de valeurs

A l'entrée en seconde, les élèves ont déjà rencontré et utilisé des tableaux comprenant deux lignes de valeurs, en mathématiques comme dans d'autres disciplines ou dans des situations extérieures à l'école. De plus, ils ont eu à représenter graphiquement les données d'un tel tableau, par le tracé de points dans un repère et même éventuellement en reliant ces points, en général par des segments de droites. Par exemple, dans le programme de physique-chimie de 5$^{\text{ème}}$ / 4$^{\text{ème}}$ de 1997, on trouve :

> A l'issue du cycle central des collèges, l'élève doit également être capable de :
> - construire un graphique en coordonnées cartésiennes à partir d'une série de données, les échelles étant précisées par le professeur ;
> - le graphique étant donné, interpoler une valeur. (BO n° 5 du 30-1-1997)

En classe de mathématiques, en troisième, le travail sur les fonctions linéaires et affines, conduit à la représentation des tableaux de proportionnalité (travaillés depuis le primaire) par des droites, mais aussi par des formules algébriques, sous forme fonctionnelle. C'est ici que se situe la première rencontre des élèves avec l'idée qu'on peut modéliser par une fonction la relation qui peut rendre compte du passage de la première à la seconde ligne d'un tableau.

Ainsi, en classe de seconde, le tableau de valeurs n'est pas un objet nouveau pour les élèves, ni son lien avec les courbes, ce qui ne veut pas dire que ces objets représentent des fonctions, objets encore flous dans la tête des élèves. De plus, ces diverses expériences autour des tableaux de valeurs ont formaté leur représentation de cet objet. En outre, ceci peut être accentué par l'usage de calculatrices et de tableurs, qui renforcent un certain stéréotype et notamment l'idée qu'un tableau suffit pour tracer une courbe et qu'il y a un rapport doublement univoque entre une courbe et « son » tableau de valeurs.

Pour une fonction, un tableau de valeurs donne un « échantillon » des couples formés par une valeur de la variable et la valeur correspondante de son image. C'est donc une représentation partielle (sauf dans le cas très particulier d'un ensemble fini) de la correspondance entre la variable et son image. Elle donne donc une vision finie pour quelque chose qui est en général infini. Qui plus est, dans la majorité des cas, c'est une discrétisation d'un phénomène continu. En outre, le tableau de valeurs n'a aucune raison a priori de contenir des valeurs remarquables de la fonction au regard de ses variations. C'est dans ce sens une représentation très partielle et arbitraire. A contrario, partant d'un tableau de valeurs, par nature fini, il existe une infinité de fonctions qui peuvent le satisfaire. Dans le cadre graphique, ceci se traduit par les différents choix possibles pour joindre certains points par des lignes. Si, théoriquement, la variabilité est infinie, en pratique, il existe certains implicites ou usages qui limitent ce choix, pouvant même laisser croire à l'unicité. D'un point de vue algébrique, l'interpolation est un domaine inabordable au niveau de la seconde dans toute sa généralité, même si la recherche de la droite représentant au mieux un nuage de points est abordée dans des cas simples.

Dans ce contexte, un tableau de valeurs peut être considéré comme une représentation sémiotique dans le cadre numérique d'une fonction. Le problème est que ce n'est pas le représentant d'une seule fonction mais de plusieurs. Par ailleurs, même si l'usage du tableau est suffisamment simple pour que l'on considère que le registre est numérique sans autre spécificité, il n'en reste pas moins que la signification entre la ligne du haut et celle du bas est bien spécifique de la notion de fonction. Ainsi, une difficulté vient de ce que la représentation d'une fonction par un tableau, laisse un gros implicite sur les valeurs qui ne sont pas présentes et ce qui permet de passer des valeurs de x à celles de $f(x)$. Un tableau de valeurs peut être précieux pour un expert ; pour le novice, cela nécessite, au-delà du signe, de ne pas oublier l'objet et tout ce qui n'est pas déterminé. Dans ce sens, le travail de conversion vers d'autres registres semble une nécessité. On peut déjà toutefois anticiper qu'un trop grand enfermement dans le duo registre numérique – registre graphique peut ne jamais laisser vraiment envisager ce qu'est une fonction.

4. Le tableau de variations

Contrairement aux courbes et aux tableaux de valeurs, les tableaux de variations sont des objets tout à fait nouveaux pour les élèves de seconde, puisqu'ils ne vivent que dans l'habitat des fonctions. Comme le relève Bloch (2000) dans sa thèse, le tableau de variations n'a pour « fonction [que] d'être une transition entre l'étude d'une fonction et la représentation graphique ». Traditionnellement, c'est un outil permettant de résumer (sorte de sténographie) l'étude du signe de la dérivée, avant de passer à la représentation graphique. Néanmoins, dans les nouveaux programmes de seconde, il est introduit avant la notion de dérivée. Sa fonction reste cependant de résumer par un codage adapté les variations d'une fonction avec la donnée des valeurs des extrema et des valeurs ou limites aux bornes du domaine de définition. Dans certains cas, on peut y rajouter quelques autres valeurs particulières, mais ce n'est qu'une facilité d'écriture, évitant de donner en plus un tableau de valeurs. Ce n'est donc pas un simple tableau à double entrée, il est régi par un codage plus complexe qui embarque beaucoup plus de connaissances mathématiques sur les fonctions. Il permet certes la lecture d'images et d'antécédents comme un tableau de valeurs, mais surtout, il synthétise de façon exhaustive toutes les informations sur les variations et les extrema de la fonction, ainsi que les valeurs ou limites aux bornes du domaine. De fait, l'utilisation du tableau de variations engage nettement plus de connaissances que le tableau de valeurs, non seulement parce qu'il nécessite de savoir déterminer les variations de la fonction, mais aussi parce qu'il nécessite des aptitudes plus spécifiques de codage et donc de décodage. Par ailleurs, le tableau de variations prend implicitement en compte l'aspect continu de la variable, puisqu'il résume les variations et ne se contente pas d'un échantillonnage discret comme le tableau de valeurs.

Ainsi, à quelques différences superficielles près, à une fonction donnée correspond un seul tableau de variations. C'est une différence essentielle avec le tableau de valeurs. Par contre, plusieurs fonctions peuvent correspondre à un même tableau de variations.

Il n'y a donc pas de correspondance univoque dans la représentation et ce sont plus les variations que l'on représente, que la fonction elle-même. De plus, le tableau de variations n'appartient pas à un registre sémiotique habituel. Comme pour le tableau de valeurs, il y a un tableau à deux lignes avec des valeurs numériques, mais celles-ci ne sont pas arbitraires : les déterminer correspond à un travail mathématique complexe. De plus, les flèches ont une signification bien particulière et ne peuvent être tracées n'importe où. C'est donc à un registre symbolique spécifique qui emprunte à des codes plus généraux mais dans un domaine limité, qu'appartiennent les tableaux de variations.

A l'appui de ces éléments théoriques, nous allons à présent présenter nos analyses. Elles portent sur l'analyse du rapport institutionnel, dans le contexte des programmes de 2000 de la classe de seconde aux tableaux de valeurs et de variations, à travers les programmes, les manuels et les pratiques des enseignants. Nous présentons ensuite des éléments du rapport des élèves à ces objets à travers l'analyse d'un test portant sur ces objets. Nous conclurons enfin sur la place que les tableaux de valeurs et de variations peuvent avoir dans l'apprentissage de la notion de fonction et sur des remarques critiques par rapport aux choix actuels de programme concernant le chapitre de généralités sur les fonctions en classe de seconde.

RAPPORT INSTITUTIONNEL AUX OBJETS TABLEAUX DE VALEURS ET DE VARIATIONS

Nous allons maintenant déterminer des éléments du rapport institutionnel aux objets tableaux de valeurs et de variations. Pour cela, nous commencerons par une étude de l'évolution des programmes qui nous permettra de situer la place de ces objets au fil des changements de programmes. Puis, nous présenterons les résultats d'une analyse écologique de quatre manuels actuels de seconde, que nous compléterons par l'analyse d'un questionnaire posé à des professeurs enseignant en seconde, afin de mieux déterminer la place de ces objets dans l'enseignement actuel.

1. Analyse écologique de l'évolution des programmes depuis 1980

Nous avons commencé cette étude au début de la période de la contre-réforme des mathématiques modernes. Ce choix s'est imposé par le fait que ce n'est qu'à partir de 1980 que des changements significatifs commencent à apparaître dans les programmes sur les fonctions. (voir Artigue, 1993 et Le Van Tien, 2001).

Rappelons que l'époque 1980 – 2000 est marquée par quatre programmes différents correspondant à quatre périodes : 1980 – 1985, 1986 – 1989, 1990 – 1999 et 2000 -. Chacun de ces programmes conserve, pour l'essentiel, les objectifs et la substance du précédent. Néanmoins, on peut dégager des changements significatifs.

Dans la période 1980-1985, la contre-réforme réduit la théorisation et la formalisation au strict nécessaire. De fait, on sent bien une volonté de sortir du tout algébrique. La fonction pourrait être définie, à côté d'une formule explicite, par des tableaux de données numériques, des touches de la calculatrice ainsi que par des graphiques. De plus, les représentations graphiques occupent désormais une nouvelle niche « permettre une démarche expérimentale ». Cette niche marque un changement radical du rôle des représentations graphiques par rapport à l'époque précédente. En effet, alors que dans les années 1970 le graphique venait après les résultats théoriques, il peut désormais apparaître comme registre d'entrée dans des problèmes.

Les statistiques, introduites pour la première fois en seconde dans cette période, sont un lieu où la « lecture de tableaux » et l'« analyse des graphiques » sont propres à modifier certaines des tâches relatives aux fonctions. Il apparaît ainsi que ce chapitre nourrit et renforce l'utilisation de tableaux de valeurs et de la représentation graphique, leur offrant un habitat distinct du chapitre sur les fonctions.

Dans la période 1986-1989, les outils pour l'étude locale d'une fonction et la méthode du discriminant pour les équations du second degré ont disparu de la classe de seconde. On assiste ainsi à une baisse de l'appareillage théorique sur les fonctions. L'activité expérimentale est par ailleurs davantage mise en avant, ce qui se manifeste, entre autres, dans la place plus importante octroyée aux représentations graphiques et au tableau de valeurs. Les niches « expérimentation graphique » et « expérimentation numérique » apparaissent ainsi pour la première fois. Le registre graphique a également pour rôle de permettre de donner du sens aux inégalités et aux inéquations, et de diminuer les difficultés de la manipulation algébrique.

D'autre part, les programmes ont essayé de donner un ancrage plus fort aux domaines extra mathématiques en lien avec les fonctions. Les statistiques prennent encore une place plus importante. Ces deux dernières évolutions ont donné une importance croissante aux registres graphique et aux tableaux de valeurs.

Dans la période 1990-1999, on constate des changements importants par rapport au programme précédent qui accentuent encore les évolutions déjà amorcées. La volonté ambitieuse des premiers programmes de la contre-réforme, de donner les outils théoriques de cette étude, à travers l'étude du comportement local des fonctions, est ici définitivement abandonnée. La représentation graphique prend une place encore plus grande et doit toujours permettre de diminuer les difficultés des manipulations algébriques.

Dans la même période, l'enseignement de l'algèbre au collège subit un net recul. De fait, le registre algébrique des fonctions commence à perdre de sa prédominance en classe de seconde. Le programme contemporain de 3ème développe également, pour la première fois, un enseignement de statistique, qui couvre tout l'ancien programme de statistique de seconde, et comprend entre autres, « lecture, interprétation et réalisation de tableaux et de graphiques ».

La calculatrice programmable est également introduite pour la première fois en seconde pour l'étude des fonctions. Ainsi, le statut du tableau de valeurs est grandement modifié : on peut avoir facilement accès à cet objet à partir de la touche « tableau de valeurs » d'une calculatrice.

A partir du programme 2000, comme nous l'avons dit en introduction, plusieurs modes de représentation de la fonction sont cités explicitement par le programme. Le registre algébrique n'est plus le seul mode d'entrée. Ce point de vue est très explicite dans les accompagnements de programmes, dont nous donnons ci-dessous quelques extraits :

> Au sujet des fonctions, l'accent est mis sur les différents aspects sous lesquels apparaît la notion de fonction : graphiques, numériques, qualitatifs. Là encore, il est proposé d'insister sur les apports respectifs des différents cadres d'étude.
>
> Le programme demande explicitement de traiter des exemples de fonctions données à l'aide d'une courbe (elles sont fréquentes dans les documents des autres disciplines ou dans les médias : la légende accompagnant la courbe permet d'identifier les deux grandeurs en jeu) ainsi que celles fournies par un tableau de données (type « tarif postaux »). A propos de fonctions définies par une courbe, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'image et d'antécédents ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.) ; on pourra convenir ici que l'information est exhaustive et on

> montrera la nécessité d'une telle convention à l'aide de courbes tracées avec un grapheur à partir d'une formule (des changements de fenêtre peuvent modifier l'allure de la courbe, mais il ne s'agit plus là de fonction définie par une courbe).

Dans cet extrait, il est à noter la prolifération d'expressions du type : « différents aspects sous lesquels apparaît… », « différents cadres d'étude », fonctions « données à l'aide de… », « fournies par … », « définies par… ». Ces locutions renvoient plus ou moins à l'idée de représentation, sans que ce terme ne soit jamais employé et entretiennent, de fait, l'ambiguïté dans la distinction entre l'objet et ses représentations. Ce qui est mis en avant est la multiplicité des représentations possibles de la fonction et de leurs apports respectifs ainsi que l'importance qu'il y a à faire le lien entre elles. Ce qui est finalement absent, c'est l'objet lui-même et la partialité que chaque mode de représentation comporte.

Ce qui apparaît aussi dans ces quelques lignes, c'est le rapport des fonctions avec les autres disciplines, les medias et le monde extérieur. Ainsi, la dimension civique est invoquée, pour que « les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe ». On voit bien ici que le travail ne porte plus explicitement sur la fonction, mais sur sa représentation, censée enfermer une information, qui porte en fait sur la fonction. C'est une réponse du programme à une injonction de la société pour que les mathématiques s'ouvrent sur les autres disciplines et sur le monde extérieur. Au niveau de la seconde, le chapitre de généralités sur les fonctions semble donc tout destiné à jouer partiellement ce rôle. L'étude des fonctions est alors placée dans un rapport élargi qui dépasse le seul domaine mathématique ce qui peut avoir pour conséquence, voire justifier, la légitimité du repli de leur enseignement sur les modes de représentation qui peuvent, en plus, être considérés comme plus intuitifs. Or, le risque, souligné par d'autres auteurs avant nous, est que faute de travail sur l'objet, on ne travaille que sur les ostensifs.

La statistique a également pris une place croissante. Dans le programme de 2000, elle constitue à elle seule, une des trois grandes parties du programme (même si elle représente moins d'un tiers du temps d'enseignement) renforçant ainsi l'utilisation des tableaux de valeurs et de représentations graphiques en dehors du cadre strict des fonctions.

En conclusion, on constate que le programme de 2000 montre une tendance marquée à une modification structurelle importante dans l'enseignement des fonctions. Plus particulièrement, il y a une injonction forte à utiliser, dans des conditions nouvelles, les objets tableaux de valeurs et de variations. Il apparaît clairement que ces injonctions, d'une part viennent pallier le vide laissé par le registre algébrique et d'autre part s'insèrent dans un changement plus global touchant à une plus grande prise en compte de contextes extra-mathématiques et à l'utilisation des calculatrices graphiques. Cependant, les programmes restent assez vagues sur les types de tâches possibles.

Dans ce contexte, nous allons à présent voir comment les auteurs des manuels et les enseignants vont répondre à ces injonctions et quelle est la nature des changements apportés à leurs pratiques.

2. Analyse de quatre manuels

Pour des questions de faisabilité nous avons choisi quatre manuels (édition 2000), parmi les plus utilisés par les enseignants de seconde selon une enquête informelle que nous avons menée, et que nous désignerons par M1, M2, M3 et M4. Nous ne présenterons pas ici le détail de toutes nos analyses, en particulier au regard de l'utilisation des praxéologies mathématiques (voir Yavuz, 2005). Dans cette synthèse de nos résultats, nous nous centrerons sur une catégorisation des tâches selon les registres d'entrée et de sortie.

Méthodologie de l'analyse

Notre analyse des manuels comporte deux volets.

- Dans le premier, nous analysons la partie « cours » des manuels (activités, cours, méthodes, exercices résolus, …) des chapitres liés à l'étude des fonctions pour voir comment le tableau de valeurs et le tableau de variations sont introduits, quelles connaissances sont institutionnalisées et sur quels types de tâches elles sont mises en jeu.
- Dans le deuxième volet, il s'agit d'analyser tous les exercices de ces mêmes chapitres. Ici, nous prendrons en compte seulement les exercices dans lesquels le tableau de valeurs et le tableau de variations apparaissent explicitement en tant qu'un registre d'entrée ou de sortie ou dans une tâche intermédiaire.

Pour cette analyse, nous distinguons, suivant Duval, quatre grands registres de représentation des fonctions : le registre algébrique (A), le registre graphique (G), le registre numérique des tableaux de valeurs (Tvl) et le registre symbolique des tableaux de variations (Tvr), classant dans une rubrique « autres » tous les autres registres pouvant intervenir.

Premier volet : la partie cours des manuels

a. Utilisation des tableaux de valeurs

Nos analyses montrent que l'utilisation du tableau de valeurs est très différente suivant les manuels. Seul M1 lui donne un rôle très important dans l'étude des fonctions et ainsi y consacre des paragraphes spécifiques avec sa définition, alors que les trois autres ne lui laissent que peu de place. De plus, le même manuel M1 essaie de montrer qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles et qu'il n'a aucune raison, a priori, de contenir des valeurs remarquables de la fonction au regard de ses variations. Dans les autres manuels, aucune précision n'est donnée sur son rôle et ses limites pour l'étude des fonctions. Dans la moitié des manuels analysés, le tableau de valeurs n'est pratiquement jamais utilisé comme registre d'entrée dans une activité, dans un exercice ou dans un problème.

Peu de types de tâches abordés dans le cours traitent d'une conversion vers ou à partir d'un tableau de valeurs. De plus, quand les tableaux de valeurs apparaissent, c'est, la plupart du temps, dans une sous-tâche d'un type de tâche plus global, qui fait intervenir une conversion entre le registre algébrique et le registre graphique, pour arriver à tracer « point par point » la représentation graphique d'une fonction. Seul M1 étudie différents types de tâches illustrant toutes les conversions possibles liées au tableau de valeurs et explicite la non unicité de la représentation dans le registre de sortie.

b. Utilisation du tableau de variations

Nos analyses montrent que tous les manuels sauf M2 consacrent un paragraphe spécifique au tableau de variations. Par contre, seul M4 donne des explications sur sa construction et essaie également de visualiser le passage d'une représentation graphique à un tableau de variations en traçant des flèches ascendantes et descendantes sur une représentation graphique.

Seul M1 étudie différentes tâches illustrant toutes les conversions possibles vers ou à partir d'un tableau de variations. Ajoutons également que des types de tâches illustrant des conversions entre le tableau de valeurs et le tableau de variations n'apparaissent que dans ce manuel, avec un discours explicite sur la non univocité.

Seuls des types de tâches illustrant la conversion G→Tvr apparaissent dans tous les manuels, ce qui est normal, puisque le tableau de variations est introduit dans tous à partir du registre graphique. Des types de tâches liées à la conversion A→Tvr se trouvent dans seulement deux des manuels (M1 et M2) (avec les techniques d'étude), ainsi que ceux liés à la conversion Tvr→G, avec le commentaire : « à un tableau de variations, on peut faire correspondre plusieurs représentations graphiques ». On constate ainsi que l'injonction explicite du programme de faire « dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations » est inégalement prise en compte dans les manuels.

Deuxième volet : analyse des exercices

Nous avons tout d'abord classé tous les exercices des 4 manuels selon leur registre d'entrée : A, G, Tvl et Tvr. et « autres ». Le tableau ci-dessous récapitule les données ainsi obtenues :

Manuel	Nb tot. d'exos	A	G	Tvl	Tvr	Autres
M1	**151**	36%	25%	6%	15%	19%
M2	**68**	29%	28%	3%	10%	29%
M3	**92**	58%	15%	0%	7%	21%
M4	**79**	32%	34%	3%	8%	24%

Tableau 1. -. Répartition des exercices selon leur registre d'entrée.

Nous constatons que dans M3 la plupart des exercices (58 %) ont le registre algébrique comme registre d'entrée, contre 15 % pour le registre graphique. Ceci dénote un écart important avec la mise en place de la nouvelle tendance du programme. Dans les trois autres manuels, par contre, l'entrée par le registre graphique arrive quasiment à égalité avec le registre algébrique, chacun représentant un tiers environ des exercices. M4 marque cependant une légère préférence pour le registre graphique, ce qui était déjà visible au niveau de la partie cours.

Les tableaux de valeurs n'apparaissent pas du tout dans M3 comme registre d'entrée, alors que M1 consacre deux fois plus d'exercices avec entrée par un tableau de valeurs par rapport aux deux autres manuels. Ces pourcentages restent cependant assez faibles. Il est à noter que les tableaux de valeurs qui sont donnés dans les énoncés aussi bien que ceux qui sont à compléter ont des caractéristiques très stables (entre 4 et 8 valeurs, le plus souvent entières, avec pas régulier, comprenant les bornes, souvent symétriques, etc.). Par ailleurs, aucune tâche ne nécessite que les élèves fassent des choix sur les valeurs à faire apparaître dans le tableau. Il y a donc une totale absence de prise de distance par rapport à la représentativité du tableau de valeurs. La plupart des tâches faisant intervenir les tableaux de valeurs consistent à remplir un tableau dont les caractéristiques structurelles sont fixées ou à utiliser un tel tableau pour tracer une courbe (ce qui renforce la technique du tracé point par point). Le contexte numérique est donc le seul travaillé, la question de la représentativité est absente.

Les tableaux de variations apparaissent globalement plus souvent dans les manuels au niveau du registre d'entrée que les tableaux de valeurs (toujours plus du double). Ils sont surtout utilisés dans M1, où ils représentent un fort pourcentage (21% au total pour les tableaux de valeurs et de variations). Ce résultat peut surprendre tant le tableau de variations a coutume d'être demandé comme résultat d'une tâche de l'élève et peu utilisé comme registre d'entrée. On voit donc que cette nouvelle tendance des programmes de faire un travail spécifique sur le tableau de variations a l'air d'avoir été reprise par la plupart des manuels.

Toutes les conversions apparues et étudiées dans la partie cours sont aussi travaillées dans les exercices, sauf dans M3 où la conversion A→Tvr n'est pas demandée. Réciproquement, aucune tâche de conversion non vue en cours n'est abordée pour la première fois en exercice, sauf dans M3, où la conversion Tvr→G apparaît pour la première fois en exercice.

M1 se distingue encore une fois par la densité des tâches faisant intervenir le registre symbolique des tableaux de variations. Ainsi, on trouve dans ce manuel les types de tâche suivants :

- donner deux tableaux de valeurs distincts pour un même tableau de variation (2 occurrences),
- à partir d'une fonction f dont on ne connaît que le tableau de variations donner le tableau de variations de $2f$, $f - 3$, $- f$, $| f |$, f^2 et $1/f$ (4 occurrences, plus 4 avec seulement f^2),
- à partir du seul tableau de variation, déterminer si c'est possible, l'ensemble des images, si 0 a des antécédents, les valeurs de x qui ont des images positives (4 occurrences).

On trouve également dans M1 un exercice comprenant un tableau à trois colonnes (une pour le registre graphique, une pour le registre numérique des tableaux de valeurs et une pour le registre symbolique des tableaux de variations). Chacune des 3 lignes correspond à une fonction, une case est remplie, l'élève doit compléter les deux autres. C'est donc une tâche explicite de conversion qui fait intervenir trois registres simultanément.

Conclusion

Ainsi, on peut constater une grande diversité dans ce qui est proposé dans les manuels dans le chapitre de généralités sur les fonctions au regard de l'utilisation des registres numérique des tableaux de valeurs et symbolique des tableaux de variations.[1] Si l'ensemble des manuels offre une variété importante de situations où les tableaux de valeurs et de variations sont utilisés, il n'y en a pas un qui les recouvre toutes, même si M1 est largement à la pointe sur de nombreux points. En particulier, dans la plupart, l'usage des tableaux de valeurs peut sembler propre à renforcer chez les élèves une conception discrète de la fonction et le tracé point par point des courbes. D'autre part, le travail sur les tableaux de variations reste limité sauf dans M1. On voit ainsi que l'injonction faite par les programmes d'utiliser ces objets dans de nouvelles conditions se révèle inégalement traitée : de façon variée dans M1, de façon significative mais limitée dans M2 et M4, elle est quasiment ignorée par M3, qui se rabat sur des tâches classiques majoritairement dans le registre algébrique. Par ailleurs s'il existe bien des types de tâches liés aux conversions entre les registres dans tous les manuels, la place laissée au questionnement de l'élève reste faible. Ainsi, la plupart des manuels ne laissent que peu de place pour une réflexion sur la représentativité des tableaux de valeurs, sur le choix du nombre de valeurs et de leur répartition dans le domaine de définition. Dans le même ordre d'idées, dans M4, dans une série d'exercices on demande de « tracer la courbe représentative d'une fonction » seulement connue par son tableau de variations, renforçant ainsi l'idée qu'une seule courbe correspond à un tableau de variations.

Par ailleurs, dans la plupart des manuels, on prend beaucoup de place pour retravailler ce qui est censé avoir été fait en 3$^{\text{ème}}$ autour des fonctions linéaires et affines avec des types de tâches classiques qui relèvent du traitement dans le registre algébrique (calcul d'images et d'antécédents à partir de l'expression algébrique de la fonction, lecture graphique) ou bien de conversion (tracer la courbe d'une fonction affine ou retrouver l'expression de la fonction à partir de la courbe ou d'un tableau de valeurs). Ceci est certainement un indice

[1] Notons que notre étude de manuels a été faite en 2001. Depuis, une nouvelle série de manuels est sortie en juin 2004. Un survol rapide de ces nouveaux manuels semble montrer que les choses ont légèrement évolué dans le sens d'une plus grande prise en compte des diverses tâches de traitement et de conversion faisant intervenir les registres numérique des tableaux de valeurs et symbolique des tableaux de variations.

de l'embarras des auteurs à trouver de nouveaux contenus qui peuvent faire sens. Vu cette diversité et ces difficultés, il apparaît doublement important de voir ce que les enseignants font réellement travailler à leurs élèves de ces conversions. C'est ce que nous avons essayé de voir à travers le questionnaire que nous présentons ci-dessous.

3. Questionnaire aux enseignants

Hormis les renseignements classiques qui nous permettent de situer le professeur : (ancienneté, manuels utilisés,…), nous regroupons les renseignement récoltés en trois catégories :

- Les organisations mathématiques mises en place par chaque professeur autour de la notion de fonction (nombre de chapitres avec leurs titres, lien avec d'autres chapitres , etc…).
- Les définitions et les rôles attribués aux tableaux de valeurs et de variations.
- Les avis sur certaines questions que les élèves ont eu à faire dans leur questionnaire (donneraient-ils ou non ces exercices ?, si oui à quel moment de l'apprentissage et avec quels objectifs ?, prévision de ce que feraient les élèves).

22 enseignants ont accepté de répondre à ce questionnaire.

Leur ancienneté en seconde est diverse. Sept enseignants ont commencé à enseigner avant le programme 1980 ; un enseignant dans la période 1986 – 1990 et deux autres dans celle de 1980 – 1986 ; dix d'entre eux ont commencé à enseigner à partir du programme 1990. Enfin un enseignant a commencé à partir du nouveau programme et un n'a pas répondu à cette question.

Voici les principaux résultats issus de l'analyse de leurs réponses.

Le tableau de valeurs

La plupart des enseignants pensent que cet objet ne nécessite pas de définition puisque les élèves le connaissent et l'utilisent déjà. Il semble pour eux que les connaissances sur les tableaux de valeurs sont peu importantes, voire transparentes, et donc qu'elles n'ont pas à être explicitées. Ceci est encore renforcé par l'utilisation de la calculatrice programmable.

Quant à leurs propres définitions, on constate qu'elles diffèrent de façon importante et on peut les classer ainsi : environ un tiers des enseignants précisent que le tableau de valeurs est un résumé de quelques valeurs et de leurs images sans choix sur la variable (huit enseignants), alors que pour six enseignants, le tableau de valeurs est soumis à des contraintes sur le choix de la variable (pas, valeurs particulière, etc.). De plus, pour deux autres enseignants, il est exhaustif de tous les couples (x, f(x)). Enfin six enseignants ne précisent pas de définition en répondant « aucun intérêt » ou « la calculatrice le remplace » ou ne répondent rien. Néanmoins, la plupart des enseignants sont d'accord sur le fait qu'il aide à tracer la représentation graphique d'une fonction (trois enseignants précisent « tracer avec précision »).

Les représentations des enseignants sur l'objet tableau de valeurs diffèrent donc assez largement, ce qui a certainement des conséquences sur les pratiques en classe, sur le choix des exercices et les réponses attendues des élèves. En revanche, les enseignants considèrent massivement que cet objet est, d'une part peu problématique pour les élèves, et, d'autre part, très lié au registre graphique. On peut donc penser qu'ils auront du mal à l'associer à d'autres types de tâches.

Le tableau de variations

La quasi-totalité des enseignants considèrent que le tableau de variations est un objet indispensable pour l'étude des fonctions et qu'il constitue un résumé des propriétés d'une fonction (beaucoup l'associent au terme « schéma »). Or, comme pour le tableau de valeurs, la plupart d'entre eux ne donnent pas une définition explicite aux élèves. En effet, le tableau de variations est expliqué sur des exemples à partir d'une courbe mais sans identification de connaissances particulières. Il semble que, comme pour le tableau de valeurs, les connaissances sur les tableaux de variations restent transparentes pour eux et ne fassent donc pas l'objet d'un enseignement explicite.

Ils soulignent majoritairement deux rôles principaux du tableau de variations : résumé des propriétés d'une fonction et schéma de l'allure de la courbe. Ces rôles cités nous donnent des idées sur les types de tâches qu'ils lui associent :

- Tâches de traitement : répondre à certaines questions sur les propriétés d'une fonction (sens de variations, extrema, comparer deux images, etc.).

- Tâches de conversion entre le tableau de variations et le registre graphique. Là encore, on peut voir que le tableau de variations est fortement associé au registre graphique.

Il semble donc qu'il y ait davantage de consensus sur la définition d'un tableau de variations, et que, comme pour le tableau de valeurs, le lien avec le registre graphique soit privilégié. De plus, les enseignants montrent le plus souvent la construction de cet objet sur un exemple.

Leurs positions vis-à-vis de certains exercices du questionnaire aux élèves

Parmi les exercices que nous avons proposés aux professeurs, nous avons constaté que ceux qui concernent le tableau de valeurs sont beaucoup plus discutés que ceux concernant le tableau de variations, alors que les deux relèvent de la conversion de registre. Ainsi l'exercice posé à la question 8 (question 4 du questionnaire élève) « tracer une courbe, puis une autre à partir d'un tableau de variation » est majoritairement choisi par les professeurs qui indiquent que c'est un exercice facile pour les élèves qui ne devraient pas faire d'erreurs. Ces arguments montrent que ce type de tâches est conforme au rapport institutionnel (il est également cité dans les programmes).

Voyons maintenant l'exercice suivant qui a également été posé dans le questionnaire élève analysé ci-dessous.

9. Voici un exercice de Seconde

« Soit une fonction *g* définie sur l'intervalle [-2 ; 14] dont on connaît les valeurs suivantes :

x	*-2*	*3*	*8*	*14*
g(x)	*-7*	*41*	*7*	*34*

1) Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par *g* sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquez.

2) Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par *g* sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquez»

a. Donnez un corrigé de cet exercice.

b. Poseriez-vous cet exercice à vos élèves de seconde ? Explicitez vos raisons.

c. Si vous le posiez à des élèves, l'envisageriez-vous comme un exercice : d'introduction, d'entraînement, de réinvestissement, une partie d'un DS, une partie d'un DM[2] ou autres (précisez). (Plusieurs réponses sont possibles).

d. Quelles seraient, selon vous, les principales difficultés qu'un élève de seconde pourrait rencontrer dans la résolution de cet exercice ?

Pour donner un corrigé, la plupart des enseignants, passent soit au registre graphique, soit au tableau de variations. Seul un enseignant donne un contre exemple numérique. Ceci montre que leurs

[2] DS : Devoir Surveillé (c'est-à-dire fait en classe et évalué) et DM : Devoir à la Maison (travail donné à faire à la maison, qui peut ou non donner lieu à une évaluation).

connaissances sur le tableau de valeurs sont certainement conditionnées par une représentation dans un autre registre. Deux autres enseignants répondent -7 et 41 en traçant un tableau de variations compatible avec le tableau de valeurs donné. Ils ne paraissent donc pas avoir vu le problème (ou bien ce sont eux qui considèrent que le tableau de valeurs donne toutes les informations pertinentes), ce qui explique qu'ils jugent l'intérêt de cet exercice quasi nul et qu'une lecture graphique ou un tableau de variations serait plus intéressant pour chercher les extrema d'une fonction. Ils déclarent ainsi qu'ils ne poseraient pas cet exercice dans leur classe.

Leurs réponses à la question b sont très partagées, ce qui montre que cet exercice ne fait certainement pas partie du rapport institutionnel de la classe de seconde, ce qui est confirmé par les réponses à la question c. En effet, la plupart des enseignants envisagent cet exercice comme une partie d'un DM, il est plutôt considéré comme un exercice de recherche et est renvoyé au travail personnel des élèves.

Ceux qui le poseraient le feraient pour montrer les limites des informations données par le tableau de valeurs alors que les autres trouvent qu'il y a trop de réponses possibles, ce qui pourrait déstabiliser les élèves voire leur donner des idées fausses.

D'une façon générale, les exercices que nous avons proposés dans lesquels le tableau de valeurs intervient (autrement que pour aider au tracé d'une courbe) sont peu choisis par les professeurs. Ce point important révèle un aspect du contrat didactique révélateur des pratiques des enseignants. On peut donc penser que les pratiques habituelles des professeurs de mathématiques actuels laissent encore peu de place à des exercices qui pourraient permettre de problématiser certaines notions et de les discuter pour faire avancer les connaissances des élèves.

Ainsi, notre étude montre qu'il existe une distance entre les tendances du nouveau programme et les choix de certains enseignants, qui révèle une difficulté à mettre en place certaines nouveautés du programme dans leurs classes. Les pratiques des enseignants semblent donc bien conformes à ce que nous avons pu observer dans les manuels. Il nous reste à avoir une idée plus précise sur ce que les élèves ont réellement appris. Ceci nous permettra de mieux cerner la nature du contrat didactique en vigueur dans les classes à propos de l'usage de ces tableaux.

TEST ELEVES

Nous avons élaboré un questionnaire en nous basant sur l'analyse institutionnelle réalisée précédemment, afin d'évaluer les capacités des élèves de seconde à résoudre différentes tâches mettant en jeu l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations, en particulier au regard de la conversion entre registres.

1. Présentation du questionnaire

Nous avons élaboré deux questionnaires jumeaux, pour éviter que deux élèves côte à côte ne copient l'un sur l'autre. Chaque questionnaire comporte quatre exercices. Les exercices 2 et 3 sont identiques sauf par les valeurs numériques choisies. En revanche, pour les exercices 1 et 4, nous avons fait varier le registre de sortie à partir du même registre d'entrée. Les deux questionnaires sont analysés ci-dessous. Tous les exercices sont ouverts dans le sens où ils admettent une infinité de réponses correctes. Par ailleurs, aucun de ces exercices ne nécessite de calcul.

Exercice 1

La tâche en jeu ici est une conversion du registre numérique des tableaux de valeurs vers le registre symbolique des tableaux de variations (registre graphique pour le questionnaire B) : on demande à l'élève de donner un tableau de variations (une courbe) compatible avec un tableau de valeurs donné.

Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2] dont on connaît les valeurs suivantes :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

a. Donner un tableau de variations possible pour f.
b. Est-ce qu'on pourrait en trouver un autre ?
Si oui, lequel ? Si non, expliquer.

Une variable didactique importante porte sur la nature du tableau de valeurs proposé. Nous avons choisi de donner un tableau de valeurs classique, selon ce que nous avons observé dans les manuels : 5 valeurs toutes entières avec un pas de 1 comprenant les bornes du domaine, données dans un ordre croissant. De plus, ce tableau peut représenter une fonction affine $f : f(x) = 2x + 1$. Ce choix (fait dans les deux versions du questionnaire) rend la question a) particulièrement simple, mais peut se poser en obstacle pour la question b), dans la mesure où le modèle affine est tellement fort que les élèves ont du mal à imaginer qu'il peut y avoir d'autres fonctions.

Si passer d'un tableau de valeur à une courbe (questionnaire B) est une tâche relativement classique, donner un tableau de variations à l'aide d'un seul tableau de valeurs (questionnaire A) l'est beaucoup moins. De plus, comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, on insiste peu sur l'idée qu'à un tableau de valeurs peuvent correspondre plusieurs tableaux de variations (courbes). Par ailleurs, la plupart des enseignants interrogés sur cette question précisent que les élèves ont tendance à ne prendre en compte que des valeurs entières pour la variable *x*, entre lesquelles ils n'imaginent pas qu'il puisse y avoir un changement de variation. Ainsi, nous pensons que la plupart des élèves vont avoir des difficultés à donner un autre tableau de variations (courbe) à la question b), d'autant plus que comme nous l'avons déjà signalé le modèle affine est très fort.

Exercice 2

On demande à l'élève de donner la plus grande et la plus petite valeur prises par une fonction dont on ne connaît qu'un tableau de valeurs. Ainsi, cet exercice ne comporte pas de changement de registre explicite. Il nécessite toutefois de sortir du seul registre numérique des tableaux de valeurs et de prendre en compte explicitement les valeurs qui n'apparaissent pas dans le tableau, c'est-à-dire de mobiliser des connaissances sur la fonction au-delà de ce qui en est donné et connu.

> Soit une fonction *g* définie sur l'intervalle [-2 ; 14], dont on connaît les valeurs suivantes :

x	-2	3	8	14
g(x)	-7	41	7	34

> Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par *g* sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquer.
>
> Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par *g* sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquer.

Notre analyse des manuels a montré que les tâches faisant intervenir un tableau de valeurs font toujours intervenir explicitement un autre registre, algébrique, graphique ou extra-mathématique. D'autre part, l'analyse des réponses des enseignants montre que cette tâche ne fait pas réellement partie du rapport institutionnel de la classe de seconde, puisque le contrat de la classe ne permet pas d'avoir d'exercices avec des réponses aussi ouvertes. Dans ce sens, on peut considérer ces questions comme peu habituelles, voire hors contrat.

Ici encore, la nature du tableau de valeurs proposé constitue une valeur importante de la variable didactique. Nous avons choisi de donner un tableau de valeurs qui peut laisser croire que l'on a toutes les informations pertinentes pour le tableau de variations. En effet, on ne donne que 4 valeurs de x non régulièrement espacées, avec des images dans un ordre qui change à chaque fois de façon nette. Dans le cas du questionnaire B, nous avons donné un tableau plus « complet » avec 9 couples de valeurs régulièrement espacées avec un pas de 1.

Ici, il y a trois grands types de réponses :

- Envisager qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau, donc avoir compris que le tableau de valeurs ne donne que des indications partielles sur la fonction.
- Ne pas sortir des valeurs du tableau, tout en ayant une vision correcte de la notion d'extremum.
- Rester aussi dans les valeurs du tableau, mais en montrant en plus des difficultés dans la compréhension de la notion d'extremum, voire d'image et d'antécédent.

La bonne réponse consiste à dire qu'on ne peut pas connaître les valeurs extrémales à partir de ce tableau, en utilisant différents types d'arguments.

Exercice 3

Il concerne le traitement d'un tableau de valeurs dans un contexte de la vie courante :

> Le tableau ci-dessous donne les cours, en euros, de deux actions au premier semestre 2002 (valeurs de l'action à l'ouverture de la bourse le premier jour ouvrable de chaque mois).

mois / action	janvier	février	mars	avril	mai	juin
A_1	12,18	12,41	10,27	11,05	9,95	10,51
A_2	9,61	8,87	11,78	13,49	11,78	10,89

> A votre avis, est-ce qu'il est possible qu'à un moment donné les cours de ces deux actions aient été identiques ? Si oui, combien de fois ? et quand ? Si non, expliquer.

Le point essentiel consiste à voir qu'il y a au moins un croisement des valeurs (en supposant un changement continu des valeurs dans la période). Si ce changement est certain, il peut aussi y en avoir d'autres, sachant qu'entre deux dates du tableau tout est possible. Par contre, si on envisage un modèle discret, on peut écarter la possibilité d'égalité des deux valeurs.

On peut considérer cette question comme peu habituelle. En effet, comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, on utilise habituellement des tableaux de valeurs pour deux types de tâches différents :

- comme un outil qui permet de tracer de façon précise la courbe représentative d'une fonction (passage entre le registre algébrique et le registre graphique),

- comme un résumé d'une situation de la « vie courante », pour décrire une relation entre deux grandeurs. Dans ce cas, on demande plutôt de passer au registre graphique en précisant de joindre les valeurs du tableau, soit avec des segments de droites, soit le plus régulièrement possible.

Dans les deux cas, on passe au registre graphique pour répondre à certaines questions, alors qu'ici, on peut tout à fait répondre directement à partir du seul tableau de valeurs, même si tracer des courbes peut donner une intuition du résultat.

Il est à noter que le contexte concret pose ici des questions propres à la modélisation. En particulier, le temps peut être considéré de façon continue ou discrète. Ces questions sont en général passées sous silence et traitées de façon implicite. La question que nous posons ici nécessite pour être complètement traitée de prendre en compte ces questions de façon explicite.

Exercice 4

C'est à nouveau une question de conversion : on demande à l'élève de donner une courbe (un tableau de valeurs dans le questionnaire B) compatible avec tableau de variations donné.

Soit une fonction h définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et son tableau de variations :

x	-3		-1		0		2		3
$h(x)$	1	↗	2	↘	0	↗	4	↗	9

a. Tracer une représentation graphique possible pour h.
b. Est-ce qu'on pourrait en tracer une autre ? Si oui, laquelle ? Si non, expliquer.

Contrairement à l'exercice 1, c'est ici la tâche de la version du questionnaire A qui est plus classique que celle du questionnaire B. Ainsi, on peut penser que, pour la question a, la majorité des élèves va tracer une courbe en joignant les cinq points donnés dans le tableaux de variations, soit avec des segments de droite soit le plus régulièrement possible. Pour le questionnaire B, ils peuvent avoir plus de réticence à donner un tableau de valeurs ne contenant que celles contenues dans le tableau de variations.

De nos analyses précédentes, il ressort que le fait qu'un tableau de variations peut correspondre à plusieurs représentations graphiques (ou tableaux de valeurs) n'est pas toujours explicitement discuté dans les manuels. De plus, les enseignants interrogés prévoient que nombre d'élèves auront du mal à admettre qu'il peut y avoir plusieurs réponses, et qu'ils envisageront majoritairement comme seule possibilité de relier les points à la règle (ou bien qu'ils n'arriveront pas à donner un autre tableau de valeurs en intercalant de nouvelles valeurs). Ainsi, certains enseignants considèrent la question b (des deux versions) comme « hors contrat ».

2. Principaux résultats issus de l'analyse des réponses

Le test a été passé, pendant une séance (environ 40 minutes), dans 10 classes différentes réparties dans 6 établissements de niveaux variés. 260 élèves ont répondu à l'un ou l'autre des deux questionnaires, après les premières séances sur les fonctions (voire, dans certaines classes, à la fin des chapitres sur les fonctions). Les enseignants avaient pour consigne de ne pas intervenir pendant le test.

Conversion à partir du registre numérique des tableaux de valeurs (Exercice 1)

Les résultats confirment que les élèves arrivent facilement, à partir d'un tableau de valeurs, à tracer une courbe (83%) alors qu'un nombre important (55%) a des difficultés pour donner un tableau de variations. Il apparaît donc que le registre de sortie dans la conversion joue un rôle important et que, dans ce sens, le registre symbolique des tableaux de variations est nettement plus compliqué que le registre graphique. Ceci est accentué par le fait que la conversion entre les registres numérique des tableaux de valeurs et symbolique des tableaux de variations n'est mise en avant, ni par les manuels, ni par les enseignants, c'est donc une tâche inhabituelle pour les élèves. Mais il semble que cette difficulté soit aussi liée au fait qu'aucun des deux registres en cause ne détermine entièrement la fonction en jeu, voire ne nécessite de prendre en compte le fait que derrière ces ostensifs existe une fonction. Ainsi, pour réaliser cette conversion, l'élève doit, au moins implicitement, sélectionner les informations pertinentes pour l'un et l'autre registre et réaliser la part d'arbitraire qu'il reste dans chacune des deux représentations.

Seuls 3% d'élèves arrivent à donner un autre tableau de variations et 11% une autre courbe (et encore sans changer les variations) correspondant à un même tableau de valeurs. D'une façon générale, les élèves ont également beaucoup de mal à donner deux réponses à une même question ou à admettre l'arbitraire d'une réponse (ce qui confirme l'opinion des enseignants en réponse à notre questionnaire).

Ceci nous montre également que la plupart des élèves font automatiquement certaines conversions (par exemple d'un tableau de valeurs à une représentation graphique), mais se trouvent déstabilisés par des questions inhabituelles sur ces conversions. Comme nous l'avons constaté dans l'analyse des manuels et du questionnaire aux enseignants, le tableau de valeurs apparaît quasi exclusivement comme un outil pour aider à tracer la représentation graphique d'une fonction. Dans ce contexte, la tendance naturelle (entretenue par la plupart des tâches proposées à l'élève) est de compléter entre les valeurs données par le comportement le plus « lisse ». Ces tâches répétitives, qui de plus portent sur des fonctions peu variées, semblent renforcer chez les élèves l'idée qu'une seule courbe peut correspondre à un même tableau de valeurs. Une conséquence est que les élèves restent enfermés dans une technique algorithmique, à défaut d'un questionnement plus conceptuel sur ces objets.

Traitement du registre numérique des tableaux de valeurs (Exercices 2 et 3)

Il apparaît clairement que de nombreux élèves font comme si toutes les informations pertinentes étaient contenues dans le tableau de valeurs. Comme précédemment, rares sont ceux qui peuvent envisager plusieurs cas de figures correspondant à un même tableau de valeurs. Par ailleurs, nous avons pu constater de façon claire que la forme du tableau de valeurs influence très nettement les réponses des élèves : dans le cas d'un tableau de valeurs non régulièrement espacées, 14% des élèves peuvent imaginer des extrema entre les valeurs fournies par le tableau, alors que, dans le cas où le tableau comprend toutes les valeurs entières de la variable (cas du questionnaire B), seulement 5% des élèves en sont capables. Ainsi, il apparaît qu'un tableau comportant toutes les valeurs entières de la variable sur un intervalle donné renforce l'idée d'unicité de la représentation. En revanche, nous n'avons pas observé de différence significative selon que la tâche est donnée en référence à des contextes intra ou extra-mathématiques (Exercice 3).

Conversion à partir du registre symbolique des tableaux de variations (Exercice 4)

Concernant les conversions à partir d'un tableau de variations, on trouve des résultats similaires au cas du tableau de valeurs. Pour la première question (produire une courbe ou un tableau de valeurs) il y a une différence de performance puisque le taux de réussite atteint 76% pour le premier cas, contre 64% pour le second. On retrouve une différence suivant le registre de sortie, la conversion vers le registre graphique est en effet plus habituelle. Notons tout de même que le taux de non réponse est plus élevé ici que pour l'exercice 1 (21% des dans le cas de la courbe, 32% dans le cas du tableau de valeurs). Ceci tend à montrer qu'une conversion partant d'un tableau de variations déroute plus les élèves.

Seuls 18% des élèves peuvent donner une autre courbe et 6% un autre tableau de valeurs. Ces résultats sont proches de ceux de l'exercice 1. S'il semble qu'on trouve les mêmes types de difficultés que dans le cas des tableaux de valeurs, s'y rajoutent également des difficultés propres au codage des tableaux de variations. Cela confirme que la complexité du tableau de variations est certainement sous-estimée dans l'enseignement.

Notons aussi que 10% des élèves indiquent qu'il existe une autre courbe ou un autre tableau mais ne la (le) produisent pas. Il se peut alors que ce soient leurs connaissances sur les courbes qui ne leur permettent pas, à ce moment-là, d'en déterminer une autre ou bien qu'ils ne se donnent pas le droit de choisir des valeurs arbitraires pour le tableau de valeurs.

Expérimentations en terminale

Afin de compléter notre analyse, il nous a semblé intéressant d'expérimenter les questionnaires précédents dans quelques classes de terminale pour voir si certaines erreurs persistaient ou s'il y avait une évolution sur la façon dont les élèves utilisent le tableau de valeurs et le tableau de variations. Nous les avons ainsi expérimentés dans 4 classes différentes de terminale, 2 classes de S et 2 classes de ES[3], réparties dans 2 établissements de niveaux variés. 111 élèves au total ont répondu.

Cette expérimentation montre que, même s'il y a une légère amélioration par rapport aux classes de seconde dans les classes de terminale S, celle-ci est très peu sensible dans les classes de ES. Il semble donc que les connaissances de la plupart des élèves n'évoluent guère sur ces objets, qui ne sont plus enjeux explicites d'enseignement au-delà de la classe de seconde. En outre, il apparaît que l'illusion d'unicité et d'exhaustivité de la représentation, quand le tableau de valeurs est « complet », est renforcée. Il semble donc que la

[3] La section S est la section Scientifique, la section ES est celle d'Economie et Sciences Sociales.

représentation par un tableau de valeurs soit de plus en plus normative au fur et mesure qu'on avance dans les classes de Lycée. Cet effet de contrat est certainement renforcé par l'utilisation des calculatrices. La référence au registre algébrique dans une tâche où celui-ci n'est pas a priori pertinent est plus forte chez les élèves de terminale. Ceci s'explique naturellement par l'accroissement du travail algébrique fait dans les classes de première et de terminale. Par contre, on note une plus grande aisance dans l'utilisation des tableaux de variations, outils fortement utilisés après la seconde.

CONCLUSION

Notre analyse institutionnelle, grâce aux outils de la théorie anthropologique, nous a permis de mettre en évidence la difficulté qu'il y a à faire vivre effectivement dans les classes les injonctions du programme en rupture avec des pratiques bien installées dans la culture mathématique. On constate ainsi qu'il y a peu de travail explicite sur les connaissances propres aux tableaux de valeurs et variations, peu de tâches concernant les conversions de registres, et que seuls les types de tâches classiques sont majoritairement choisis par les enseignants.

Deux facteurs peuvent expliquer cet état de fait. D'une part, la contrainte qu'imposent, de façon plus ou moins implicite, les représentations dominantes de ce qu'est l'activité mathématique dans l'institution scolaire française, rend certaines ruptures difficiles voire impossibles. Ceci est d'autant plus fort dans le cas d'enseignants qui enseignent depuis longtemps, pour lesquels, par exemple, le registre algébrique est dominant pour traiter de problèmes où interviennent des fonctions. D'autre part, les auteurs des manuels et les enseignants n'ont peut-être pas pris pleinement conscience que l'utilisation de différents registres et plus particulièrement la conversion entre différents registres sont importantes pour la compréhension de la notion de fonction. Ainsi, même s'ils mettent en place en début de chapitre des activités novatrices jouant sur différents registres, celles-ci restent souvent sans écho dans la suite de leur enseignement. Dans le prolongement du travail présenté ici, nous avons également mené deux expérimentations sur des tâches nécessitant un travail de conversion entre registres (Yavuz, 2005 et Coppé, Dorier & Yavuz, à paraître). Celles-ci nous ont permis de confirmer que les tableaux de valeurs, les tableaux de variations, et même les graphiques ne vont pas sans poser des difficultés aux élèves et ne représentent peut-être pas les accès les plus adéquats vers la notion de fonction. En effet, avant la seconde, les élèves ont déjà construit pour les tableaux de valeurs et les courbes et les liens qui les unissent, des connaissances en acte dans des contextes variés, sans liens direct avec les fonctions, qui peuvent se poser en obstacle à la notion de fonction. Ces résultats confirment et renforcent les conclusions déjà obtenues par d'autres auteurs essentiellement à propos des courbes (Bloch, 2002 et 2003, Chauvat, 1999, Schneider, 1994, …). Pour les tableaux de variations, nos études montrent qu'ils sont plus problématiques pour les élèves que le laissent croire les manuels et les pratiques des enseignants. Il y aurait ici certainement à penser un travail plus spécifique en seconde pour améliorer la compréhension des élèves de ce qu'est un tableau de variations et de comment il est construit, même si nos analyses montrent que les difficultés ont tendance à se résorber en terminale.

Ces différents résultats semblent montrer que les choix actuels de programmes ne sont pas les plus pertinents. A ce propos Comin (2005) conclut son analyse des programmes de seconde en disant :

> Cette caricature du concept de fonction en tant que relation numérique semble révélatrice d'une conception institutionnelle qui s'oppose à l'idée de faire émerger et mûrir cette notion par abstraction de relations entre grandeurs. (op.cité, 34)

Cette position est argumentée à l'appui d'une analyse épistémologique tout à fait convaincante, et, en effet, il semble bien que quelque chose d'essentiel pour le concept de fonction manque dans le travail des élèves en seconde ou avant. Néanmoins, la proposition que Comin ébauche à la fin de son article demanderait d'une part à être affinée et surtout nécessiterait une refonte importante des programmes actuels de seconde et de collège.

Les travaux de Bloch (2003) ou Falcade (2002) donnent des réponses qui prennent en compte une part des critiques de Comin et qui peuvent être plus facilement implémentées dans le cadre du programme de seconde.

Plus généralement, ces travaux et nos analyses nous interrogent sur les limites de la théorie de Duval, quant à l'importance accordée aux tâches de conversion indépendamment d'autres caractéristiques qu'elles pourraient avoir. En effet, si l'on considère le type de tâches suivant, que l'on trouve fréquemment dans les manuels « donner un tableau de valeurs d'une fonction dont on ne connaît que la courbe ». Il s'agit bien d'une tâche de conversion entre les registres numérique et graphique. Or les connaissances mobilisées par les élèves pour résoudre cet exercice peuvent se limiter à savoir lire des coordonnées de points dans un repère et à les reporter dans un tableau. Ceci peut se faire indépendamment de la compréhension de ce qu'est une fonction.

En revanche, le type de tâches « tracer plusieurs courbes à partir d'un tableau de valeurs » nécessite de mobiliser des connaissances sur les fonctions qui dépassent le seul fonctionnement de chaque registre et de leurs liens. De même certaines tâches de traitement supposent des connaissances plus ou moins importantes sur la notion de fonction. Ainsi « à partir d'un tableau de valeurs d'une fonction f, donner un tableau de valeurs de la fonction f^2 » est bien une tâche de traitement dans le registre numérique qui peut se faire sans mobiliser des connaissances spécifiques sur les fonctions alors que la tâche consistant à donner le maximum d'une fonction dont on ne connaît qu'un tableau de valeur (exercice 2 du test aux élèves) est également une tâche de traitement qui suppose des connaissances sur les fonctions qui dépassent le seul registre numérique. Elle ne peut être correctement appréhendée sans prendre en compte l'idée du continu avec ou sans appui sur un autre registre.

Les conversions entre les registres de représentation sémiotique ne semblent donc pas suffisantes pour accéder au concept de fonction. Plus précisément, l'organisation mathématique à l'œuvre en seconde dans le chapitre des généralités sur les fonctions ne permet pas une conceptualisation suffisante de la notion de fonction, malgré un accent important sur la prise en compte des différents registres de représentation sémiotique et particulièrement sur les conversions entre eux. Une des difficultés vient de ce que les registres en jeu n'interviennent pas sur le même pied d'égalité et donc ne peuvent interagir de façon suffisante. Enfin, la faiblesse des compétences des élèves dans le registre algébrique reste un problème qui limite la pertinence des conversions possibles.

Cependant, il nous semble que l'importance accrue de la statistique, l'usage des calculatrices graphiques et la nécessité d'ouvrir les mathématiques sur les autres disciplines et le monde extérieur sont autant de facteurs qui doivent nous conduire à nous interroger sur la nécessité de faire travailler les élèves sur les différents modes de représentation des fonctions, y compris pour les élèves qui ne poursuivront pas des études scientifiques. Or, pour ceux-ci il y a certainement matière à repenser par ailleurs les exigences sur le contenu mathématique plus traditionnel. Dans ce sens, la tentative de changement dans les programmes pouvait sembler attrayante. On en a vu les limites. Il n'en reste pas moins que notre étude montre aussi que des questions de conversion entre registres peuvent conduire à des réflexions importantes sur la non-univocité des représentations. C'est une porte qui s'ouvre sur la prise en compte des variations et la remise en cause du discret et du tracé point par point, ce qui représente un enjeu essentiel dans la conceptualisation de la notion de fonction.

Une autre piste que nous n'avons fait qu'effleurer et qui nous semble peu prise en compte, au moins en France, concerne le rapport à des situations extra-mathématiques et à la modélisation par des fonctions. Il reste un travail important à faire dans ce sens.

REFERENCES

ARSAC, G., DEVELAY, M., TIBERGHIEN, A. (1989), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et en biologie*. Lyon : IREM et LIRDIS.

ARTIGUE, M. (1993), Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM*. 11. 115-139.

ASSUDE, T. (1996), De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.16(1) 47-71.

BLOCH, I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu - Connaissances et savoirs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2) 135-193.

BLOCH, I. (2000), L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : connaissances, savoirs, et conditions relatives à la validation, Bordeaux : Université de Bordeaux 1.

BLOCH, I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*. 58. 25-46.

BLOCH, I. (2003), Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*. 52. 3-28.

CHAUVAT, G. (1999), Courbes et fonctions au collège. *Petit x*. 51. 23-44.

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique* (1991). Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 12(1) 73-111.

CHEVALLARD, Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsac, G. et al. (ed) *La transposition didactique à l'épreuve* (pp.135- 180). Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2) 222-265.

COMIN, E. (2005), Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel, *Petit x*. 67. 33- 61.

COPPE, S, DORIER J.L. & YAVUZ, I. (2006), Eléments d'analyse sur le programme de 200 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x*.71, 29-60.

DUVAL, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives (*IREM de Strasbourg). 5. 37-65.
DUVAL, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang.
FALCADE, R. (2002), L'environnement Cabri-Géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction. *Petit x*. 58. 47-81.
HAUCHARD, C, SCHNEIDER, M. (1996), Une approche heuristique de l'analyse. *Repères IREM*. 25. 35-62.
LACASTA, E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôle*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
LE VAN TIEN (2001), *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-nam*, Thèse de doctorat de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville et de l'Université J. Fourier. Equipe DDM, Laboratoire Leibniz, Grenoble.
RENE DE COTRET, S. (1985), *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Thèse de doctorat de l'Université du Québec à Montréal.
SCHNEIDER, M. (1994), Aux confins de l'analyse et de la géométrie : un obstacle épistémologique, In Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (ed) *Actes de la Quatrième Université d'Eté d'Histoire des Mathématiques* (pp.283-294). Lille : IREM de Lille.
SIERPINSKA, A. (1992), On understanding the notion of function, in The concept of function : Aspects of Epistemology and Pedagogy, *Mathematical Association of America MAA Notes*. 25. 25-58.
YAVUZ, I. (2005), Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations. Thèse de doctorat, Université Lumière - Lyon 2.