Aperçu de la diversité des approches sur la résolution de problèmes

Chanudet, Maud; Favier, Stéphane

La résolution de problèmes en mathématiques

Enjeux pour l'enseignement et l'apprentissage

Sous la direction de
Sylvie COPPÉ et
Jean-Luc DORIER

edp sciences

UGA Éditions

UGA Éditions

La résolution de problèmes en mathématiques

Enjeux pour l'enseignement et l'apprentissage

Sous la direction de Sylvie Coppé et Jean-Luc Dorier

Éditeur : UGA Éditions, EDP Sciences
Lieu d'édition : Grenoble
Année d'édition : 2024
Date de mise en ligne : 26 septembre 2024
Collection : Enseigner les sciences
ISBN numérique : 978-2-37747-481-3

https://books.openedition.org

Édition imprimée
ISBN (Édition imprimée) : 978-2-7598-3555-3
Nombre de pages : 396

RÉFÉRENCE NUMÉRIQUE

Coppé, Sylvie, et Jean-Luc Dorier, éditeurs. *La résolution de problèmes en mathématiques*. UGA Éditions, EDP Sciences, 2024, https://books.openedition.org/ugaeditions/42332.

Métadonnées de couverture
Crédits
Full length portrait of an excited little schoolgirl © Adobe Stock – Drobot Dean
Ce document a été généré automatiquement le 1 octobre 2024.

RÉSUMÉ

En mathématiques, les problèmes sont riches d'enseignement pour les élèves car ils permettent de construire et de donner du sens aux notions mathématiques, et également de mettre en œuvre et de développer des mécanismes de résolution. L'équipe de didactique des mathématiques de

l’Université de Genève nous offre ici une approche complète de la résolution de problèmes, à la fois comme objet et comme outil d’enseignement. De multiples aspects sont pris en compte : les effets des interactions entre élèves ou avec l’enseignant·e, les choix de l’enseignant·e, le rôle et la place de l’évaluation, les effets de la transposition didactique externe (depuis les choix politiques jusqu’à la rédaction des programmes et l’étude des manuels) ; et ce à différents niveaux scolaires (du début du primaire jusqu’au secondaire). Cette immersion totale dans une réalité sociale avec ses conditions et ses contraintes fait de cet ouvrage un outil unique pour comprendre les ressorts didactiques à l’œuvre et favoriser la progression des élèves.

NOTE DE L’ÉDITEUR

Publié avec le soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique et du programme IDEX Université Grenoble Alpes.

La résolution de problèmes en mathématiques

Enseigner les sciences

Collection dirigée par Grégoire Charlot

La collection « Enseigner les sciences » s'adresse aux enseignants des premier et second degrés, à ceux de l'université, aux formateurs, ainsi qu'à toute personne intéressée par les mathématiques, sciences et techniques, l'éducation ou la formation scientifique. Son objectif est de fournir des ressources (éclairages historiques, épistémologiques, fiches de travaux pratiques, fiches pour l'enseignant) pour mieux expliquer, enseigner ces disciplines. Il s'agit notamment de valoriser et diffuser les travaux de recherche-action des IREM, de Maths à modeler, ainsi que ceux qui sont menés dans tous les pays francophones, grâce au réseau des IREM et à ses liens avec l'Afrique, l'Amérique latine, l'Asie, le Québec et l'Europe francophone. Divers types de travaux, en langue française, peuvent être soumis, ainsi que d'autres types de supports (supports numériques, objets physiques) de médiation des sciences, s'accompagnant d'une réflexion sur les savoirs enseignés.

La résolution de problèmes en mathématiques

Enjeux pour l'enseignement et l'apprentissage

Sous la direction de
Sylvie Coppé & Jean-Luc Dorier

EDP Sciences
UGA Éditions
2024

Dans la même collection

Le binaire au bout des doigts. Un casse-tête entre récréation mathématique et enseignement, Lisa Rougetet, 2023.
Graines de scientifiques en maternelle. Explorer le monde du vivant, des objets et de la matière, sous la direction de Frédéric Charles, 2021.
L'apprentissage de la critique. Développer l'analyse critique en physique, Laurence Viennot & Nicolas Décamp, 2019.
Mathématiques récréatives. Éclairages historiques et épistémologiques, sous la direction de Nathalie Chevalarias, Michèle Gandit, Marcel Moralès & Dominique Tournès, 2019.

Photo de couverture : *Full length portrait of an excited little schoolgirl* © Adobe Stock – Drobot Dean

L'Université Grenoble Alpes et EDP Sciences sont engagés pour la science ouverte – retrouvez cet ouvrage en accès ouvert au format html sur le portail OpenEdition Books (books.openedition.org).

Publié avec le soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique et du programme IDEX Université Grenoble Alpes.

FRANCE 2030

Fonds national suisse

ISSN 2680-8102
ISBN 978-2-7598-3555-3

UGA Éditions
Université Grenoble Alpes
CS 40700
38058 Grenoble Cedex 9, France

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

TABLE DES MATIÈRES

Chanudet Maud et Favier Stéphane

Chapitre 1

APERÇU DE LA DIVERSITÉ DES APPROCHES SUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES [1]

Du problème à la résolution de problèmes

Le concept de *problème* est au cœur de ce livre. Ce terme polysémique est très usité dans la vie courante. La résolution de problème est une problématique au cœur de nombreux travaux d'horizons et de fondements épistémologiques très divers qui relèvent de différents champs scientifiques. Nous n'avons pas l'ambition ici de tous les aborder, ni même de les citer. Toutefois, nous allons tenter d'en présenter plusieurs qui ont orienté nos réflexions et nos travaux, et qui nous ont permis de nous positionner.

Du point de vue étymologique, l'origine grecque *προ ́βλημα* du mot problème indique « ce qu'on a devant soi, obstacle », ce qui met en avant l'idée qu'un problème engendre un obstacle, relatif à celui qui tente de le résoudre.

La psychologue cognitiviste Weil-Barais (1993) considère comme *problème* toute situation caractérisée par trois ensembles :

1. Ce chapitre s'est inspiré en partie du chapitre 2 de la thèse non publiée de Stéphane Favier (2022).

- un ensemble de données (des objets matériels, des actions, des événements, des représentations symboliques, linguistiques, graphiques, mathématiques, etc.) ;
- un ensemble de questions qui précisent le but à atteindre ;
- un ensemble de contraintes qui délimitent les actions du sujet. (Weil-Barais, p. 562)

Elle ajoute qu'en jouant sur les éléments de ces trois ensembles, on peut différencier les problèmes proposés dans les études afin de les adapter aux objectifs visés. Mais cette caractérisation pourrait laisser penser qu'un problème est défini indépendamment du sujet. Or plusieurs auteur·es remettent vivement en cause cette indépendance avec le sujet (Brun, 1990 ; Fagnant & Demonty, 2016 ; Richard, 2004). Pour elles et eux, un problème se définit dans un rapport entre le sujet et la situation qui lui est proposée. Un problème ne l'est donc pas en lui-même, mais le devient en fonction des conditions dans lesquelles il est proposé. Proposer un problème à un sujet implique donc la prise en compte de facteurs liés non seulement à la situation, mais aussi au sujet. Ainsi, dans le contexte scolaire, un même énoncé, suivant les connaissances de l'élève à qui on le destine, suivant le moment où on le propose pendant la scolarité, suivant la gestion qui en est faite par l'enseignant·e en classe, suivant sa formulation, etc., peut faire l'objet d'une résolution où l'élève va mettre en jeu des procédures personnelles et nouvelles ou bien faire l'objet d'une procédure automatisée. Dans ce dernier cas, plusieurs auteurs, dont Schoenfeld (1985) et Julo (1995), parlent d'exercice, car il y a « une stratégie qui s'impose d'elle-même, une procédure que l'on n'a pas vraiment à élaborer (mais plutôt à appliquer) et donc une représentation que l'on n'a plus vraiment à construire » (Julo, 1995, p. 19). Richard (2004) précise dans le même sens qu'une situation est perçue comme un problème par un sujet à l'une des deux conditions suivantes : soit le sujet ne dispose pas des connaissances qui correspondent spécifiquement au problème posé, c'est-à-dire qu'elle ou il ne sait pas *a priori* que faire face à cette situation, soit les connaissances dont elle ou il dispose, et mobilise effectivement, se sont révélées inefficaces.

Plus particulièrement, dans le contexte scolaire, une même tâche peut être considérée comme un problème à un certain niveau de la scolarité alors qu'elle deviendra plutôt un exercice d'application à des niveaux de scolarité ultérieurs. Et d'ailleurs, pour un niveau donné, même si la plupart des élèves peuvent percevoir une tâche comme un problème, il est tout à fait envisageable que pour certain·es du même niveau, cette tâche relève d'un exercice d'application.

Ces considérations ne veulent cependant pas dire qu'un problème est constitué de n'importe quelle tâche complexe ou difficile, comme le souligne Schoenfeld (2013) :

> *That is, complexity or difficulty alone did not make a task a problem; solving a system of 100 linear equations in 100 unknowns without the use of technology might be a real challenge for me, but it is not a problem in the sense that I know how to go about getting an answer, even if it might take me a very long time and I agonize over the computations*. (Schoenfeld, p. 10)

Ainsi, face à un problème, un·e élève doit donc se lancer dans une forme d'activité qui vise à dépasser une difficulté, d'où le terme de *résolution de problèmes* qui peut se décrire sous forme d'un processus cognitif visant un but, sans que l'élève ait de méthode connue à mettre en œuvre (Mayer & Wittrock, 2006, p. 287). Toute la difficulté réside dans la manière de rendre compte de ce processus au cours duquel se passent des événements observables (paroles, gestes, calculs écrits, etc.), mais aussi des événements non observables (Weil-Barais, 1993, p. 565).

Différentes approches psychologiques étudient la manière dont des sujets résolvent des problèmes généraux (c'est-à-dire qui ne prennent pas nécessairement appui sur des notions ou concepts mathématiques) indépendamment de tout contexte d'enseignement ou d'apprentissage. C'est l'objet de la première section de ce chapitre. Dans la deuxième section, nous nous centrons sur les différents processus, externe et interne, qui interviennent lors de la résolution de problèmes mathématiques. Enfin, nous adoptons un point de vue didactique pour aborder la résolution de problèmes mathématiques en tant qu'enjeu d'enseignement et d'apprentissage. Ainsi, dans ce qui constitue la troisième et dernière section de ce premier chapitre, nous situons la place occupée et le rôle joué par la résolution de problèmes dans différentes théories didactiques et enfin nous présentons des dispositifs et des courants pédagogiques centrés sur l'apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Nous conclurons en précisant notre positionnement dans ce paysage pour mener les travaux de notre équipe.

Étude de l’activité de résolution de problèmes

Comme nous venons de l’évoquer, résoudre un problème c’est mettre en œuvre un processus cognitif pour trouver une solution. Sans chercher l’exhaustivité, nous présentons de façon très synthétique les quatre approches qui, selon nous, résument l’essentiel de l’apport de la psychologie à la résolution de problèmes du point de vue des processus cognitifs en jeu. Les lecteurs et lectrices intéressées pourront trouver facilement plus de détails sur ce que nous abordons, notre but ici est de brosser un rapide tour d’horizon, pour mieux nous situer dans le paysage. En préambule, il nous paraît important de souligner que dans tous ces travaux, de manière générale, les problèmes étudiés ne sont pas représentatifs de ceux qui sont proposés dans la diversité du cadre scolaire. En effet, les énoncés des problèmes qui interviennent dans les études de psychologie ne font pas ou très peu intervenir de notions ou concepts mathématiques particuliers, même si leur résolution mobilise des raisonnements mathématiques. Ces raisonnements restent toutefois assez généraux et souvent plus d’ordre logique que strictement mathématique. *Les tours de Hanoï* est un des exemples les plus classiques de ce type de problèmes. Il s’agit de déplacer des disques de rayons différents sur des tiges afin de basculer d’une position de départ à une position d’arrivée, si possible en un minimum de coups, en respectant deux contraintes : il n’est possible de déplacer qu’un seul disque à la fois et un disque ne peut pas être posé sur un disque plus petit (figure 1).

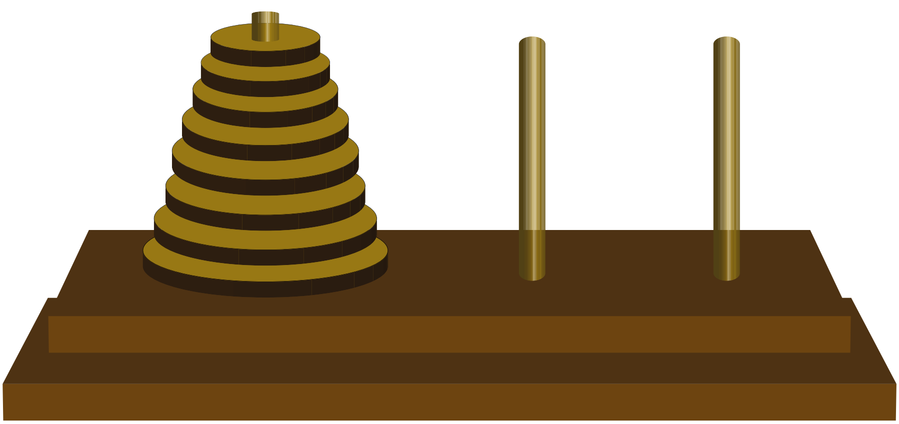


Figure 1. Exemple de configuration des tours de Hanoï

Une des origines de l'intérêt des psychologues pour la résolution de problèmes tient dans l'étude de différentes expériences menées en psychologie animale (Thorndike, 1898). Celles-ci sont d'ailleurs à l'origine du courant béhavioriste. Ce courant théorique cherche à rendre compte du processus de résolution en ne s'appuyant que sur des éléments observables c'est-à-dire en ne regardant que « la manière dont le sujet réagit aux événements que sa conduite provoque » (Weil-Barais, 1993, p. 565). Dans cette approche, le sujet cherche à satisfaire des besoins. Le renforcement et le lien entre stimulus et réponse permettent d'expliquer la conservation ou la modification des différentes réponses qui, au fil des essais, amènent le sujet à produire la bonne réponse. Nous ne pouvons pas ici rentrer dans les détails, mais une des caractéristiques de la résolution de problèmes ainsi mise en avant est liée au rôle de l'expérience, au sens courant du terme, pour trouver une solution. Ceci étant, la principale critique que l'on peut faire à cette approche tient au fait que le sujet n'est considéré qu'au travers de ses actions, avec une sous-estimation de la dimension mentale du processus de résolution.

Dans un autre courant, dénommé approche gestaltiste ou psychologie de la forme, un rôle primordial est donné à la perception. Cette approche met ainsi en avant le fait qu'un sujet découvre une solution après quelques essais et surtout après une phase de réflexion ou d'inactivité apparente qui correspond à la réorganisation des éléments de la situation. On désigne ce phénomène de restructuration, par le terme d'*insight*. Le problème des *neuf points* est souvent donné en exemple pour illustrer ce phénomène. Il s'agit de relier neuf points disposés sous forme d'un quadrillage de trois lignes et trois colonnes, avec seulement quatre segments et sans lever le crayon (figure 2).

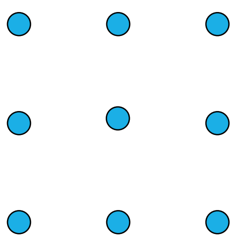


Figure 2. Le problème des neuf points

Bien que plusieurs études aient remis en cause ce phénomène en proposant des interprétations différentes notamment sur ce problème (comme le fait Richard, 1994, p. 529-531), il est cependant intéressant de noter l'idée que le sujet est susceptible de traiter de manière globale une situation pendant cette phase dite de réflexion et non pas seulement partie par partie.

Un troisième courant est issu de l'approche piagétienne, dite encore approche fonctionnelle genevoise, où la résolution de problèmes a un traitement particulier. En effet, les travaux initiaux de Piaget se sont centrés sur le *sujet épistémique* « défini comme le noyau commun à la connaissance de sujets d'un même niveau de développement » (Inhelder & de Caprona, 1992, p. 20) dans le but de dégager une « architecture générale de la connaissance » (*Ibid.*). Mais dépassant cette première approche, Inhelder et de Caprona ont ouvert une autre piste, en s'intéressant au *sujet psychologique* et en cherchant comment un sujet utilise ses connaissances pour agir dans une situation donnée. Ainsi, pour en rendre compte, ces auteur·es s'appuient sur la notion de *schème* développée par Piaget et précisent que « dans une résolution de problème, les schèmes conduisent directement à la solution ou font obstruction, selon qu'ils engendrent des procédures adéquates ou non à la situation » (p. 43). C'est ainsi la mise en œuvre de schèmes et leur adaptation qui vont permettre à un sujet de découvrir une solution. Une procédure correcte nécessite l'association de la situation à un ou plusieurs schèmes. Cela a pour conséquence d'attribuer une signification fonctionnelle à ces schèmes qui va les lier également aux objets auxquels ils s'appliquent. Ces objets vont ainsi hériter de certaines propriétés ou de certaines significations. À ce sujet, Inhelder et de Caprona (1992) avancent que :

> […] cette liaison fonctionnelle indissociable du schème et de l'objet est une caractéristique frappante des moments initiaux de la résolution de problèmes. Au cours même de cette dernière, on peut remarquer […] certaines actions n'ont pas pour but d'actualiser des connaissances mais visent simplement à « faire parler l'objet ». (Inhelder & de Caprona, 1992, p. 45)

Dans cette approche, la notion de *représentation* et son rôle fonctionnel viennent compléter celle de schème. Deux aspects complémentaires de cette notion sont envisagés. Le premier concerne la *sémioticité* c'est-à-dire les différents traitements que peuvent engendrer les différents modes de représentation (geste, image, langage) mobilisés. Le second aspect est relatif aux buts et aux moyens qu'un sujet peut envisager. Ainsi, selon ces chercheur·es, « les représentations portent par conséquent aussi bien sur les chemins à prendre que sur les résultats auxquels ils conduisent » (*Ibid.*, p. 48). Ce courant met donc l'accent sur le rôle des connaissances et des représentations.

Enfin, le dernier courant que nous voulons mettre en évidence est né dans les années 70 avec l'apparition de l'informatique et les débuts de l'intelligence artificielle, c'est l'approche dite du traitement de l'information impulsée par Newell et Simon (1972). Cette approche définit un problème comme la donnée d'un état initial, d'un état final et d'un ou plusieurs opérateurs qui vont permettre au sujet d'agir et de transformer cette situation pour passer de l'état initial à l'état final. L'*espace-problème* correspond à l'ensemble des états qui peuvent être obtenus, en partant de l'état initial, par application des actions autorisées par l'opérateur. Ce courant considère les différents aspects suivants pour rendre compte du processus de résolution d'un problème :

> - l'élaboration de la *représentation du problème*, c'est-à-dire l'interprétation effectuée par le sujet des données initiales, des données à rechercher, du but à atteindre et des contraintes ;
> - les traitements effectués par le sujet sur les données ou sur les représentations (les identifications, les classifications, les inférences, les calculs en tout genre, les traductions, les transformations, etc.) ;
> - les contrôles exercés et les décisions prises.
>
> (Weil-Barais, 1993, p. 570)

Trouver une solution correspond alors à la découverte d'un cheminement dans l'espace-problème à l'aide de règles d'exploration appelées *heuristiques*. Des catégories générales d'heuristiques sont mises en évidence et modélisées sous forme de programmes de résolution de problèmes. Au-delà de leur lien avec l'informatique, ces travaux ont pu montrer le rôle majeur joué par les représentations et les mécanismes de contrôle en résolution de problèmes.

Ces quatre courants mettent en avant des aspects différents des processus mis en œuvre en résolution de problèmes. Bien que les béhavioristes ne s'intéressent pas à ce qui se passe dans la tête des sujets, mais plutôt à leurs comportements observables, ils ont mis en évidence le rôle des essais pour se rapprocher, voire découvrir la solution d'un problème. Toutefois, l'approche gestaltiste a montré les limites de ces travaux en étudiant des problèmes spécifiques pour lesquels ce ne sont pas tant les essais qui conduisent à la solution, mais plutôt la capacité à réorganiser les éléments du problème. Enfin, les psychologues cognitivistes s'intéressent principalement au rôle des connaissances, des représentations et des mécanismes de contrôle qu'elles et ils mettent en évidence sur des problèmes très spécifiques.

Étude des processus de résolution de problèmes mathématiques

Dans cette section, nous nous intéressons aux processus en jeu lors de la résolution de problèmes mathématiques, sans qu'il y ait pour autant d'enjeu d'enseignement. Nous entendons ici englober la grande diversité des problèmes *mathématiques*, c'est-à-dire ceux dont la résolution mobilise des concepts, des démarches ou des raisonnements mathématiques. Dans les approches des psychologues que nous avons parcourues précédemment, les problèmes abordés sont souvent limités à des enjeux de raisonnement ou de logique comme dans les tours de Hanoï ou le problème des neuf points, qui certes rentrent dans la catégorie des problèmes mathématiques, mais sont loin de pouvoir en embrasser la grande diversité. En particulier, de tels problèmes ne mettent pas en jeux de notions mathématiques, comme des équations, de l'algèbre, des fonctions, de la géométrie ou des intégrales, etc. Dans ce sens, ils ne sont pas à eux seuls représentatifs de l'ensemble beaucoup plus vaste de problèmes mathématiques envisageables et proposés dans les classes.

De nombreux modèles ont été développés pour permettre de rendre compte des processus à l'œuvre en résolution de problèmes mathématiques[2]. Certains modèles se situent à un niveau macroscopique, général, et consistent à mettre en évidence différentes phases qui composent l'activité de résolution ainsi que leurs relations. Lehmann et coll. (2015) parlent alors de structure externe, en référence à l'organisation temporelle du processus. D'autres modèles se concentrent sur la structure interne (*Ibid.*) de ces processus c'est-à-dire à un niveau plus microscopique considérant par exemple les connaissances, les heuristiques, les activités métacognitives ou encore les croyances. Nous allons présenter une synthèse assez large de ces différents modèles en commençant par les plus généraux.

Caractérisation de la structure externe

Les travaux de Pólya (1945, 1989) ont initié dès les années 60 un courant de recherche, florissant dans les années 80 et 90, notamment dans le monde anglo-saxon, dit du *problem solving*. Dans *Comment poser et résoudre un problème* (traduction française de *: How to solve it*), Pólya présente un modèle qui s'articule en quatre phases successives de travail :

2. Dans la suite du manuscrit, l'expression *résolution de problèmes* désignera à chaque fois les problèmes dans le contexte mathématique, de manière à alléger le texte.

1. Comprendre le problème ;
2. Concevoir un plan ;
3. Mettre le plan à exécution ;
4. Examiner la solution obtenue.

Pour chacune des étapes, il propose une série de questions à se poser et de suggestions à expérimenter pour avancer dans la résolution du problème cherché, comme le montre la figure 3 (la mise en forme ici reproduite est celle de l'ouvrage de Pólya).

Comprendre le problème

- *Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?*
- Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue. Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?
- Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.
- Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

Concevoir un plan

- L'avez-vous déjà rencontré ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
- *Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?* Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
- *Regardez bien l'inconnue* et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
- *Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ?* Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?
- Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions.
- Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ? Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ? Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes les deux s'il est nécessaire, de façon à ce que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ?
- Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

Mettre le plan à exécution

- En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre. Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

Revenir sur sa solution

- Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?
- Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?
- Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

Figure 3. Ensemble des questions proposées par Pólya (1989)

Pour parvenir à ce modèle, Pólya a analysé les processus de résolution de problèmes mis en œuvre par des experts dans le domaine des mathématiques. Ce modèle descriptif se veut universel et Pólya suggère que les enseignant·es se posent ces questions devant leurs étudiant·es pour que cette façon de faire pour résoudre un problème s'impose naturellement (1989). Dans la foulée de cette approche ont été proposés des programmes d'entraînement à la résolution de problèmes, comme le General Problem Solving Program (voir Kilpatrick, 1969) aux États-Unis. Cependant, sans doute du fait de la complexité inhérente à la résolution de problèmes, ces programmes n'ont pas eu les effets escomptés. Cela pose plus généralement la question de l'enseignement de méthodes plutôt que de contenus mathématiques et de la manière dont les enseignant·es peuvent soutenir les élèves dans ces apprentissages.

Néanmoins, le modèle de Pólya a servi de base à plusieurs chercheur·es pour développer leur propre approche. Schoenfeld (1985) notamment l'a enrichi en ajoutant une phase qu'il appelle *exploration* (figure 4) pour rendre compte de la part de la recherche qui tend à s'éloigner de la simple compréhension de l'énoncé, mais qui ne constitue pas encore un plan qu'il s'agirait de mettre en œuvre. Selon lui, cette phase est moins structurée que les phases d'appropriation et de planification et peut être associée d'une certaine manière au parcours dans l'espace-problème (au sens de Newell et Simon) pour lequel « *the majority of problem-solving heuristics come into play* » (Schoenfeld, 1985, p. 110).

Par l'ajout de cette phase, Schoenfeld se distingue de Pólya en ce qu'il affirme que le processus n'est pas forcément linéaire, et qu'il peut être même cyclique : les cycles sont représentés par une boucle entre les phases planification/exploration/appropriation ou par un aller-retour planification/exploration (figure 4).

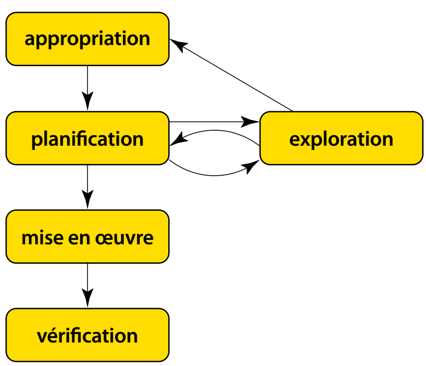


Figure 4. Présentation simplifiée et traduite du modèle de Schoenfeld (1985)

Wilson et coll. (1993) poussent encore plus loin l'élaboration du modèle en proposant une interprétation qui met en avant les liens possibles entre les différentes étapes du modèle de Pólya : ce sont ceux symbolisés par les flèches noires (figure 5). Soulignons ici que l'on voit poindre dans ce modèle axé sur la structure externe du processus, la prise en compte d'un élément de la structure interne à travers les activités métacognitives.

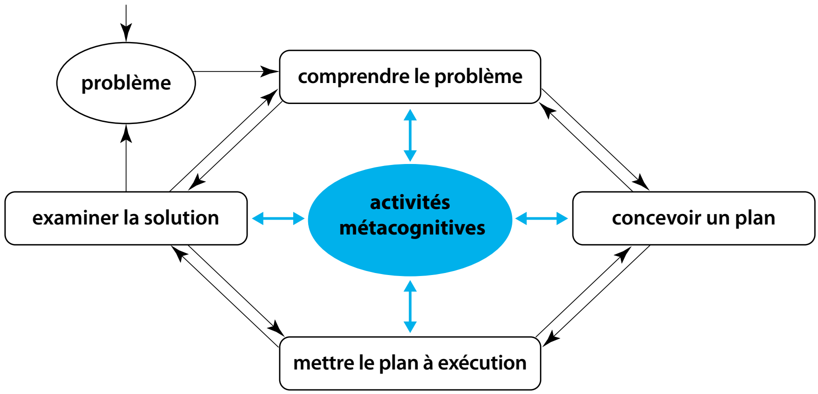


Figure 5. Traduction du modèle de Wilson et coll. (1993)

Rott (2012b) met quant à lui à l'épreuve ces différents modèles en analysant les processus effectivement mobilisés par des élèves de 10-12 ans pour résoudre des problèmes. Ses analyses montrent que les deux tiers environ des processus mobilisés par les élèves sont linéaires (68 sur un total de 98 observations). Cela met en évidence le fait qu'un modèle strictement linéaire comme celui de Pólya n'est pas complètement adapté pour décrire le travail des élèves. Par ailleurs, il observe que les élèves n'explicitent pas forcément leur plan de résolution avant de le mettre en œuvre, ce qui l'amène à regrouper les phases de planification et de mise en œuvre. Enfin, les élèves ne passent pas toujours directement de l'appropriation à la planification et sa mise en œuvre, mais elles et ils passent, bien souvent, par une phase d'exploration. Cela confirme l'importance de considérer cette phase d'exploration pour rendre compte de la dimension non structurée d'une partie de certains processus. À l'aune de ses observations et de ses résultats, Rott propose un modèle permettant, selon lui, de mieux décrire les processus de résolution de problèmes effective par des élèves (figure 6).

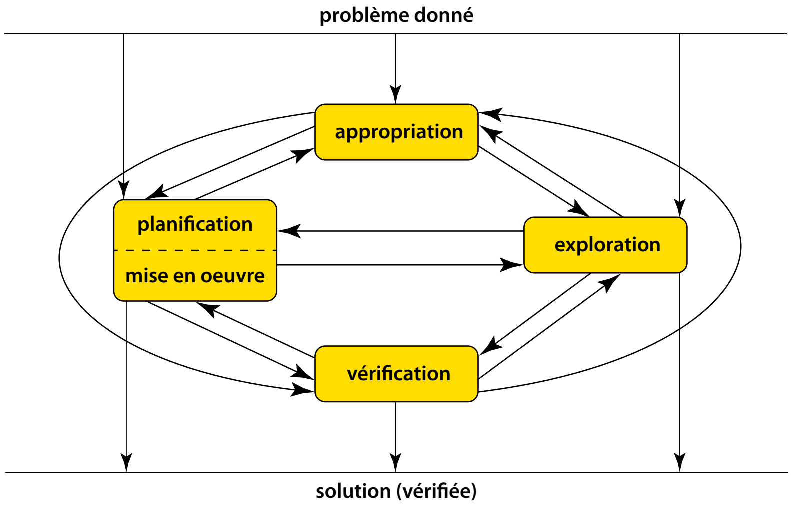


Figure 6. Traduction du modèle de Rott (2012)

Les modèles exposés ci-dessus, et en particulier le modèle très complet de Rott, dont la thèse de Favier, présentée en partie plus loin dans ce livre, s'est grandement inspirée, permettent de décrire la nature du processus de résolution de problèmes mathématiques du point de vue de son organisation globale, macroscopique. Ils permettent donc de rendre compte d'une partie des processus complexes qui sont en jeu lorsqu'un sujet résout un problème, mais pas de comprendre les ressorts internes qui en régissent la dynamique. C'est pourquoi nous allons à présent exposer des travaux qui se centrent sur l'étude de la structure interne du processus.

Caractérisation de la structure interne

Les travaux de Pólya et de Schoenfeld sont à la base du courant de recherche du *problem solving* et influencent encore aujourd'hui les recherches actuelles sur ce thème. Ce courant cherche à comprendre les processus impliqués dans la résolution de problèmes et à les caractériser. Des aspects qualitatifs, la structure interne soulignée par Lehmann et coll. (2015), que sont par exemple les ressources, les heuristiques, les croyances[3] ou les activités métacognitives[4], jouent un rôle central lors de la résolution d'un problème. Schoenfeld (1985, 1992) regroupe sous le terme de *ressources* les différentes connaissances mathématiques qu'un individu peut mettre en œuvre pour résoudre un problème. Dans son approche, le terme d'*heuristiques* désigne les stratégies, les techniques ou les règles empiriques qui permettent de progresser. Ressources et heuristiques sont pilotées par des décisions globales appelées *activités métacognitives*. Enfin, la dernière catégorie rassemble les différentes *croyances* qu'un individu peut avoir sur lui, son environnement, le sujet du problème ou sur les mathématiques en général. Ces quatre catégories, qui se superposent et interagissent entre elles, sont nécessaires et suffisantes selon Schoenfeld (2013) pour analyser la réussite ou l'échec dans la résolution de problèmes. D'autres recherches mettent en avant des aspects comparables, même si les termes employés ne sont pas toujours les mêmes (Lester et coll., 1989 ; Verschaffel, 1999).

Au-delà de la recherche, le courant du *problem solving* a eu une influence certaine sur les curricula de mathématiques de nombreux pays. Aux États-Unis par exemple, la résolution de problèmes a été annoncée comme objectif central des mathématiques pour la décennie 80-90, comme en témoigne le programme d'actions rédigé par le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) qui préconise que le « *problem solving* [*should*] *be the focus of school mathematics in the 1980s* » (1980, p. 1) et que « *the mathematics curriculum should be organized around problem solving* » (1980, p. 2).

Soulignons que l'approche du *problem posing* (Cai et coll., 2013 ; Kilpatrick, 1987 ; Silver & Cai, 1996) est venue prolonger le courant du *problem solving.* Au-delà de la résolution d'un problème déjà posé, cette approche met l'accent sur la construction des questions auxquelles il s'agira ensuite de répondre. Ainsi, Silver et Cai (1996) postulent que savoir poser des problèmes améliore la capacité à les résoudre. Cette centration en amont de la résolution de problèmes fait écho à ce que Bachelard posait comme la marque du véritable esprit scientifique (nous ne prétendons pas toutefois affirmer ici une filiation) :

---

3. Ces termes sont la traduction de *resources*, *heuristics* et *belief systems.*

4. Selon Schoenfeld, « self-regulation *or* monitoring *and* control *is one of the broad arenas encompassed under the umbrella term* metacognition » (1992, p. 57). Le terme d'activités métacognitives nous parait donc le plus adapté pour rendre compte de cette idée.

> Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. […] Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. (Bachelard, 1967, p. 17)

Pour autant, pour le moment, les chercheur·es n'ont pas accordé autant d'importance au fait de savoir poser des problèmes qu'au fait de savoir les résoudre (Liljedahl et coll., 2016, p. 32).

Dans le monde francophone, Julo a mené un travail important sur la résolution de problèmes dont nous nous sommes largement inspiré·es dans les travaux présentés dans ce livre. Il part de l'hypothèse qu'il existe des processus spécifiques à la base de l'activité de résolution de problèmes, liés à la représentation que l'on se fait du problème et à notre mémoire des problèmes déjà rencontrés. Il distingue alors un pan *action* et un pan *représentation* dans les processus impliqués. Pour lui, « lorsque nous cherchons à résoudre un problème, nous nous construisons progressivement une certaine représentation de ce problème » (1994, p. 24). Cette représentation ne se limite cependant pas à la compréhension de son énoncé, mais intervient et évolue tout au long du processus de résolution. Julo identifie ainsi trois processus dans la construction de la représentation : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation. L'activité de représentation est au cœur d'un double mouvement entre la situation et les connaissances du sujet. En effet, si les connaissances du sujet viennent influencer les représentations qu'il se fait du problème, les caractéristiques de la situation viennent en retour influencer l'activité de représentation (Julo, 1995, p. 58). L'hypothèse selon laquelle il existe des connaissances jouant un rôle spécifique dans les processus de représentation l'amène à définir la notion de schémas de problèmes, comme des « traces laissées en mémoire par les situations rencontrées précédemment et organisées en objets structurés ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques » (Julo, 1995, p. 90). À partir de ces processus, il propose des pistes pour alimenter la réflexion didactique autour de la notion d'aide à la résolution de problèmes en mathématiques. Il souligne, par exemple, que c'est en multipliant les confrontations à des problèmes divers, que les élèves peuvent enrichir leur mémoire des problèmes et développer des schémas de problèmes.

Les différentes études évoquées ici nous permettent d'envisager la résolution de problèmes au travers des processus, internes et externes, mis en jeu par les sujets qui tentent de les résoudre. Se profile maintenant un enjeu fondamental pour les didacticien·nes que nous sommes, à savoir la question de l'enseignement et des apprentissages qui peuvent être associés à la pratique de la résolution de problèmes dans un contexte scolaire. Nous tentons d'y apporter des éléments de réponse dans la section suivante.

Point de vue didactique sur la résolution de problèmes

Comme le souligne Houdement (2009), se placer dans le contexte de la scolarité obligatoire pour étudier la résolution de problèmes amène à distinguer deux fonctions essentielles des problèmes dans l'enseignement :

> [D'une part] contribuer à construire des connaissances mathématiques dans une dynamique connaissances – savoirs, fonction particulièrement pointée par les approches didactiques (Brousseau, 1998 ; Conne, 1992 ; Douady, 1986) et [d'autre part] faire fréquenter une partie de l'activité du mathématicien, chercher, valider, fonction mise en avant par des mathématiciens (Glaeser, 1976) épistémologues, des praticiens chercheurs (IREM de Lyon dès 1988) et des chercheurs (équipe Maths à Modeler de Grenoble). (Houdement, 2009, p. 37)

Dans cette section, nous allons aborder successivement ces deux fonctions de la résolution de problèmes que nous désignons respectivement comme outil et objet d'enseignement et d'apprentissage.

La résolution de problèmes comme outil d'enseignement et d'apprentissage

Depuis les années 80, dans de nombreux pays et à divers niveaux d'enseignement, les recherches en éducation, les responsables institutionnels et les programmes scolaires prônent la résolution de problèmes non plus seulement comme une façon de valider la bonne utilisation des connaissances, mais aussi comme un moyen pour développer les apprentissages des élèves en mathématiques. Illustrons cette idée avec l'exemple du problème suivant :

Dans la piscine représentée ci-dessous, on souhaite installer 5 bouées à égale distance de chacun des deux bords recouverts de pelouse. Où peut-on placer ces bouées ?

Figure 7. Problème des bouées

L'enjeu principal de ce problème est de permettre aux élèves de construire des connaissances mathématiques en lien avec les savoirs mathématiques de la distance d'un point à une droite ainsi que de la bissectrice d'un angle définie comme l'ensemble des points situés à égale distance des côtés de l'angle. Ici, la résolution de problèmes permet donc de viser des objectifs d'apprentissage associés à des savoirs mathématiques, souvent identifiés et définis par les programmes scolaires.

Cette fonction de la résolution de problèmes comme outil de construction et de développement des connaissances est fondamentale dans la constitution de la didactique des mathématiques en France. C'est ce que montrent Artigue et Houdement, qui soulignent que l'écart des recherches francophones par rapport au courant du *problem solving* s'explique par le fait que la vision de la place et du rôle de la résolution de problèmes s'est essentiellement construite à partir de celle mise en avant dans la théorie des situations didactiques de Brousseau et dans celle des champs conceptuels de Vergnaud (Artigue, 2018 ; Artigue & Houdement, 2007).

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, « la notion de situation inclut, étend et diversifie la notion de problèmes » (Brousseau cité par Coppé & Houdement, 2010). Brousseau fait l'hypothèse que pour chaque connaissance, il existe « une classe minimale de situations qui font apparaître cette connaissance comme le moyen optimal et autonome de solution de ces situations » (Brousseau, 1997, p. 10). Une *situation fondamentale* est donc la modélisation de cette famille de situations. De plus, Brousseau propose ainsi, à partir des années 70, des ingénieries didactiques visant à élaborer ces situations fondamentales permettant la construction d'objets ou de notions mathématiques. Citons par exemple celle de la situation des voitures et des garages qui vise à travailler la constitution d'une collection équipotente à une collection donnée (Briand et coll., 2004) ou l'ingénierie didactique de la soustraction (Berté, 1996 ; Couderette, 2018). Cette théorie met donc l'accent sur l'importance du choix de problèmes pour permettre la construction de la connaissance visée. « Le maître doit donc effectuer, non la communication d'une connaissance mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère. » (Brousseau, 1998, p. 61.)

Vergnaud (1981, 1990), dans la théorie des champs conceptuels, indique que la notion de problème est centrale pour la construction des connaissances puisque « c'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant » (Vergnaud, 1990, p. 135). Il définit ainsi un concept comme un triplet de trois ensembles : l'ensemble de situations qui donnent du sens au concept, l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes et l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (Vergnaud, 1990, p. 145). Par exemple, pour le champ conceptuel de l'addition, Vergnaud propose une classification des problèmes additifs. Les enseignant·es peuvent s'emparer de cet outil théorique pour organiser les problèmes au sein d'une progression et analyser les difficultés potentielles rencontrées par les élèves.

Sur la base de ces deux théories et de leurs nombreux prolongements, plusieurs travaux de didactique de mathématiques ont ainsi montré l'importance de la résolution de problèmes comme outil pour apprendre et enseigner des mathématiques. Mais d'autres travaux se sont centrés sur la résolution de problèmes mathématiques comme un objet d'enseignement et d'apprentissage à part entière.

La résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage

Voici un énoncé de problème assez classique qui peut être utilisé pour travailler la résolution de problèmes comme objet :

> Pour construire un château de cartes à un étage il faut 2 cartes, pour un château de cartes à deux étages il faut 7 cartes et pour un château de cartes à trois étages il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? À 30 étages ? À 100 étages ?

Figure 8. Problème des châteaux de cartes

Ce problème est extrait d'une rubrique dédiée exclusivement aux narrations de recherche sur le site Sesamath[5] pour la classe de 3^{e} en France (élèves de 14-15 ans). Les narrations de recherche (Bonafé et coll., 2002 ; Chevallier, 1992) tout comme les problèmes ouverts (Arsac et coll., 1991), les situations de recherche pour la classe (Grenier, 2012), ou encore le débat scientifique

5. Repéré sur : https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms3_2012&page_gauche=162 [consulté le 07/05/2024].

(Legrand & ADIREM, 2003) sont des dispositifs qui ont vu le jour dans le but de former les élèves à la résolution de problèmes, en tant que telle, en mathématiques. Tous ces dispositifs partagent l'objectif commun de transposer la pratique de recherche en mathématiques à la classe et, en particulier, d'initier les élèves à la démarche scientifique. Pour mettre en lumière cette intention commune, Georget (2009) propose de regrouper sous le nom d'activités de *Recherche et de preuve entre pairs* (RPP) ces activités « dont l'objectif principal est d'entraîner les élèves à la démarche de recherche en mathématiques et aux échanges entre pairs à la manière des mathématiciens professionnels » (p. 77). Il les distingue des activités *Orientées notion ou technique* (ONT) qui désignent « les activités RPP dont l'objectif est de faire travailler *in fine* les élèves sur une nouvelle notion ou une nouvelle technique mathématique qui est au programme des élèves d'un niveau donné » (p. 78). Selon cette nomenclature, le problème des bouées est une activité ONT tandis que le problème du château de cartes est une activité RPP, ceci considéré à un niveau de scolarité donné.

Se pose alors la question de savoir ce qui peut être appris lorsque l'on vise à développer des compétences en résolution de problèmes. Ce n'est, à l'évidence, pas seulement des connaissances mathématiques de type notionnel, mais elles seront mobilisées et réinvesties. Une dérive serait de se focaliser sur la forme et de faire de ces enseignements des entraînements à la narration de recherche ou pire à l'analyse de texte ! En plus du réinvestissement de savoirs, Houdement (2009) postule qu'il est possible de développer des apprentissages en lien avec la modélisation et avec la manière de raisonner et de valider en mathématiques au travers d'activités RPP (cet aspect des modes de raisonnement comme apprentissage possible de la résolution de problèmes est abordé plus en détail dans le chapitre 5).

De fait, il semble bien que l'objectif le plus intéressant repose sur l'apprentissage du raisonnement mathématique. C'est ce que propose Jeannotte (2015) qui en distingue deux dimensions complémentaires : structurelle d'une part et processuelle d'autre part. Les différentes définitions que l'on trouve dans la littérature mettent l'accent sur l'une ou l'autre de ces deux dimensions. L'aspect structurel permet de décrire comment s'organisent et s'enchaînent les pas de raisonnement. On peut ainsi distinguer les raisonnements déductifs, inductifs et abductifs. L'aspect processuel met l'accent sur le fait que lorsqu'on mène un raisonnement, on fait un certain nombre d'actions qui sont orientées vers un but, que Jeannotte (2015) divise en neuf processus qui s'organisent selon deux grands pôles : les processus de recherche de similitudes et de différences, et les processus de recherche de validation.

Hersant (2010), quant à elle, formule des savoirs associés à la pratique mathématique et à la façon d'établir le vrai en mathématiques. Ces savoirs possiblement travaillés dans les activités RPP sont fortement associés à la dimension expérimentale des mathématiques. Elle les distingue comme pouvant relever de plusieurs aspects : la place de l'expérience, la preuve en mathématiques et un questionnement en termes de *plausible*, *possible* et *impossible*.

La résolution de problèmes et plus généralement l'activité de recherche des élèves, et la pratique d'une démarche scientifique sont également mises en avant dans des dispositifs institutionnels, comme en sciences en France (*La main à la pâte*[6]) depuis 1996. Dans la lignée des dispositifs visant à promouvoir la résolution de problèmes en classe, depuis les années 90 ont émergé divers dispositifs institutionnels, ainsi que divers projets européens (par exemple : PRIMAS[7], S-TEAM[8], ASSIST-ME[9]) qui mettent l'accent sur un enseignement scientifique axé sur les démarches d'investigation.

La démarche d'investigation s'inspire des travaux de Dewey (1910) autour de la notion d'enquête :

> *This scientific attitude of mind might, conceivably, be quite irrelevant to teaching children and youth. But this book also represents the conviction that such is not the case; that the native and unspoiled attitude of childhood, marked by ardent curiosity, fertile imagination, and love of experimental inquiry, is near, very near, to the attitude of the scientific mind.* (Dewey, 1910, p. iii)

Historiquement, l'Inquiry Based Education (IBE), traduite en français par *enseignement par démarche d'investigation*, a d'abord concerné les sciences avant d'englober les mathématiques. Elle a notamment été mise en avant et légitimée dans la sphère éducative, dès le milieu des années 90, par le biais

---

6. Le site de la fondation La main à la pâte est disponible à l'adresse suivante : http://www.fondation-lamap.org/fr [consultée le 07/05/2024].

7. Le site du projet européen PRIMAS ((Promote Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe) est disponible à l'adresse suivante : https://primas-project.eu/ [consultée le 07/05/2024].

8. Le rapport final du projet S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods) est disponible à l'adresse suivante : https://cordis.europa.eu/project/id/234870/reporting [consultée le 07/05/2024].

9. Le projet ASSIST-ME (Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education) est présenté à cette adresse : http://www.scientix.eu/projects/project-detail?articleId=120601 [consultée le 07/05/2024].

de la publication des *National Science Education Standards* aux États-Unis. Notons, à la suite d'Artigue et Blomhøj (2013), que ce courant pédagogique a reçu un fort soutien au niveau politique et socio-économique, en particulier en Europe, comme en atteste le rapport européen, dit rapport Rocard (Rocard et coll., 2007).

L'idée générale de l'IBE est de favoriser chez les élèves des démarches actives de questionnement dans l'enseignement des sciences et des mathématiques. Cela met en avant les points communs entre l'enseignement des mathématiques et celui des sciences, en soulignant la place centrale de l'expérimentation dans ces différentes disciplines. Dorier et Maass définissent cette approche comme :

> […] *a student-centered paradigm of teaching mathematics and science, in which students are invited to work in ways similar to how mathematicians and scientists work. This means they have to observe phenomena, ask questions, look for mathematical and scientific ways of how to answer these questions (like carrying out experiments, systematically controlling variables, drawing diagrams, calculating, looking for patterns and relationships, and making conjectures and generalizations), interpret and evaluate their solutions, and communicate and discuss their solutions effectively*. (Dorier & Maass, 2020, p. 384)

Le problème suivant est un exemple de ce qui pourrait être proposé dès le primaire dans cette optique : « En ski, existe-t-il une forme de piste plus rapide qu'une piste qui irait en ligne droite du départ à l'arrivée[10] ? » En effet, pour ce problème, les expérimentations avec du matériel sommaire tel des tuyaux et des billes permettent aux élèves de prendre conscience qu'il existe effectivement des trajectoires plus rapides que la ligne droite. Notons que la découverte de la trajectoire la plus rapide et son unicité ne sont pas accessibles avec un tel matériel.

À titre d'exemple, en France, les programmes de 2005, 2007 et 2008 (en cours jusqu'en 2016), dans une partie « Introduction générale pour le collège » proposent explicitement la démarche d'investigation comme une démarche d'apprentissage basée sur la mise en questionnement et en activité

---

10. Problème intitulé « À la recherche du chemin le plus rapide » sur le site de la Main à la pâte. Disponible à l'adresse suivante : https://www.fondation-lamap.org/fr/page/30038/a-la-recherche-du-chemin-le-plus-rapide [consultée le 07/05/2024].

des élèves, en notant cependant des différences épistémologiques suivant les disciplines. Pour les mathématiques, l'accent est mis sur la résolution de problèmes et la validation par la démonstration alors que pour les sciences, c'est la formulation d'hypothèses et la validation par l'expérimentation. Enfin, la démarche d'investigation est aussi présentée comme une démarche d'enseignement décrite par sept phases (que nous ne détaillons pas ici) qui ont pour but de donner des repères aux enseignant·es pour la pratiquer et à laquelle est ajoutée une banque de problèmes dans lesquels l'investigation est plus ou moins poussée.

Dans le même temps, dans le cadre de la Théorie anthropologique du didactique, Chevallard (2007) a introduit les notions d'Activité d'étude et de recherche (AER) et de Parcours d'étude et de recherche (PER) qui s'inscrivent dans cette perspective d'enquête et de démarche d'investigation. Les PER permettent selon lui « de subsumer un ensemble plus ou moins disparate de pratiques sociales de connaissance : recherche scientifique, enquête policière ou journalistique, etc. » (Chevallard, 2009, p. 2.) Cela conduit alors, selon lui, à repenser le statut du savoir, « ce n'est plus quelque chose que l'on sait d'avance, c'est ce que l'on découvre de concert avec les élèves au cours d'enquêtes (“mathématiques”) » (Chevallard, 2009, p. 8).

La popularité grandissante qu'a rencontrée l'IBE ces dernières années s'explique notamment par le fait qu'elle apparaît comme une solution possible face au désintérêt des élèves pour les sciences et les mathématiques (Rocard et coll., 2007). Ce désintérêt associé au constat fait par certain·es que la résolution de problèmes occupe encore une place timide dans les cours de mathématiques nous ont motivé·es à nous intéresser plus en détail à ce qui se passe effectivement dans les classes, à différents niveaux scolaires et lorsque la résolution de problèmes tend à occuper aussi bien des fonctions outil qu'objet.

Conclusion

Comme nous l'avons esquissé, la notion de problème en mathématiques est à la fois centrale et finalement assez vague. Elle s'oppose à des exercices d'entraînement ou d'application directe qui ne nécessitent pas de trouver quels outils utiliser ou quelle stratégie mettre en place pour les résoudre. Pour nous, toute tâche mathématique qui, pour un sujet donné à un instant précis, demande plus qu'une application directe d'un concept, souvent fraîchement enseigné, est un problème. Clairement nous distinguerons par contre les problèmes qui servent à faire apprendre des notions mathématiques (comme les formes géométriques ou les fonctions et leurs propriétés), des problèmes que l'on donne à résoudre aux élèves, sans intention de leur faire apprendre ou même appliquer des notions mathématiques précises, mais bien plutôt pour leur apprendre à raisonner mathématiquement. Dans le premier cas, nous parlerons de problèmes outils et dans le deuxième de problèmes objets d'enseignement.

Nous avons voulu éviter au maximum (même s'il n'est jamais possible de le faire totalement) tout arrière-plan idéologique sur ce que serait la meilleure activité de résolution de problème. C'est pourquoi nous avons évité les termes de problème ouvert, situation-problème, activité de recherche pour la classe, débat scientifique ou toute autre appellation de ce genre, pour ne garder que l'idée de problème, dans un sens large. Dans le même état d'esprit, nous n'avons pas voulu nous limiter dans les outils à disposition pour analyser le travail des élèves, voire celui des enseignant·es lors des activités de résolution de problèmes, c'est pourquoi de nombreux cadres théoriques ont été utilisés par les différent·es auteur·es de ce livre.

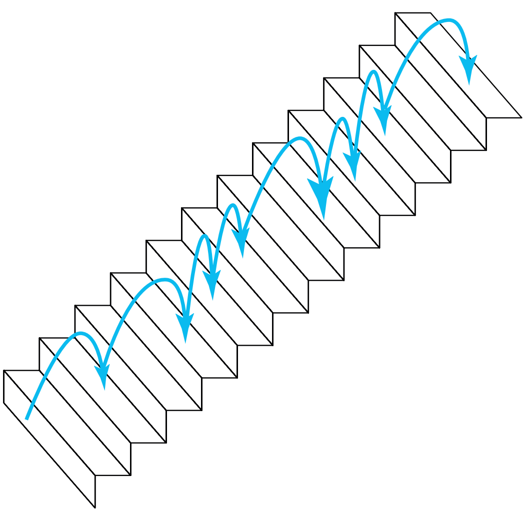
Il reste cependant certain que certains travaux ont échappé à notre vigilance et que nous n'avons pu rendre compte de l'immensité des travaux sur un thème aussi large que celui de la résolution de problèmes. Nous espérons toutefois que la diversité de nos approches aura permis de mettre une pierre de plus à l'édifice.

ANNEXES

Annexe 1. Énoncé du problème *L'escalier*

On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois. La figure ci-dessous montre un exemple.

- De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de une marche ? de deux marches ? de trois marches ? de quatre marches ? de cinq marches ?
- De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches ?



Annexe 2. Énoncé du problème *Armistice*

Dans la prison centrale de Champ-Dolon, il y a 250 cellules numérotées 1, 2, 3, …, 250, toutes occupées. Les portes des cellules peuvent être dans deux états : ouvertes ou fermées. On peut passer d'un état à l'autre en faisant faire un demi-tour au bouton de la porte. Au moment où commence l'histoire, toutes les portes sont fermées.

Pour fêter le vingtième anniversaire de la république de Genève, le président décide d'une amnistie. Il donne au directeur de la prison les ordres suivants :

> Tournez successivement d'un demi-tour les boutons :
> de toutes les portes,
> puis d'une porte sur deux, à partir de la deuxième,
> puis d'une porte sur trois, à partir de la troisième,
> puis d'une porte sur quatre, à partir de la quatrième.
> Continuez ainsi jusqu'à la dernière cellule.
> Libérez les prisonniers dont la porte de la cellule est ouverte.

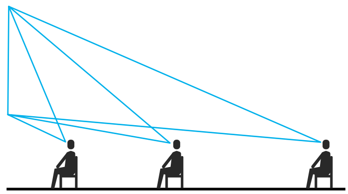
Pour des raisons de sécurité, le directeur de la prison vous demande de lui fournir un rapport dans lequel figurera :

1. le nombre de prisonniers qui seront libérés,
2. la liste des cellules qu'ils occupent et
3. la description la plus claire possible de votre méthode afin qu'il puisse vérifier votre liste !

Annexe 3. Fiche problème *Au cinéma*

On aimerait déterminer à quel endroit il faut s'asseoir dans une salle de cinéma pour avoir la meilleure vue de l'écran.

a) Décrire en quelques lignes comment varie notre angle de vision (c'est-à-dire l'angle sous lequel on voit l'écran) selon que l'on est plus ou moins éloigné de l'écran.



b) Où faut-il s'asseoir pour avoir le plus grand angle de vision ?

c) Dans la salle de cinéma *Chavanoscope*, le bas de l'écran se situe 2 mètres au-dessus du sol et le haut de l'écran se situe 5 mètres au-dessus du sol. Dans cette salle, à quelle distance horizontale de l'écran a-t-on le plus grand angle de vision ?

Fiche d'accompagnement

Les **objectifs d'enseignement** de cette activité sont :

OE1 : faire émerger la notion de variation d'une grandeur en fonction d'une autre ;

OE2 : examiner et discuter différents moyens pour représenter cette covariation (tableau de valeurs, représentation graphique).

Les **objectifs d'apprentissage** de cette activité sont :

OA1 : décrire verbalement la relation entre des grandeurs dépendantes dans une situation concrète donnée ;

OA2 : décrire par un tableau de valeurs la relation entre des grandeurs dépendantes dans une situation concrète donnée (la représentation graphique peut émerger dans certains groupes).

➤ Questions a) et b)

Dispositif : on propose de faire travailler les élèves individuellement.

Consigne : produire un texte de quelques lignes.

Type de réponse attendue : a) Si l'on s'assoit tout près de l'écran, notre angle de vision est très petit ; lorsqu'on s'éloigne un peu de l'écran, l'angle de vision grandit, mais si on s'éloigne trop, il diminue peu à peu ; b) Il faut s'asseoir pas trop près, mais pas trop loin non plus.

➤ Question c)

Matériel : il faut prévoir des règles graduées et des rapporteurs.

Dispositif : on propose de faire travailler les élèves par groupe de 3 ou 4 pour favoriser l'émergence de différentes idées et pour permettre d'organiser le travail de mesure.

Consigne :

1. Chercher à répondre le plus précisément possible à la question posée ;
2. Chaque groupe rédige une réponse en expliquant sa démarche et en exposant toutes les étapes de sa résolution.

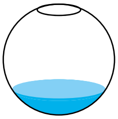
Type de réponse attendue : dans l'impossibilité de travailler algébriquement (il faudrait utiliser des fonctions trigonométriques inverses), les élèves ne peuvent que faire des essais en mesurant l'angle de vision pour différents emplacements. On les laissera organiser les données ainsi récoltées à leur manière (tableau de valeurs, graphique, autre) et en déduire une réponse à la question posée.

Annexe 4. Fiche problème *Les vases*

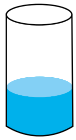
<u>Première partie :</u>

Ces trois récipients ont la même hauteur de 90 cm et le même volume.
On les remplit en 3 minutes, l'un après l'autre, à un robinet dont le débit ne varie pas.
Les graphiques indiquent la hauteur de remplissage des récipients en fonction du temps.
Associer, si possible, chaque récipient à sa courbe de remplissage.

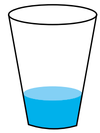
1



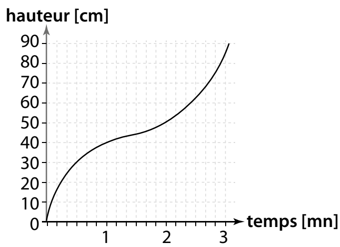
2

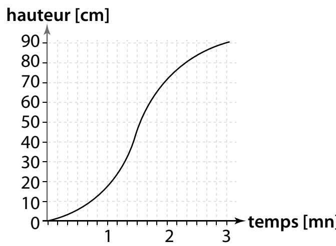


3



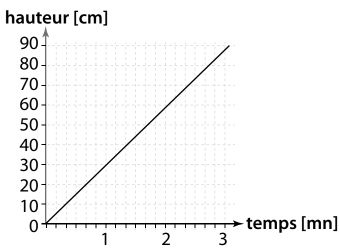
a

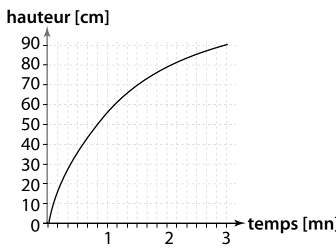




b

c



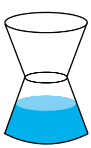


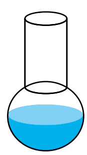
d

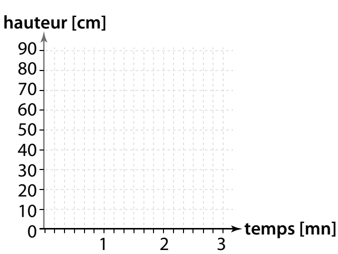
<u>Deuxième partie :</u>

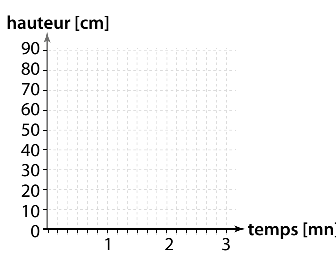
Ces deux récipients ont la même hauteur de 90 cm et le même volume. Ils sont remplis en 3 minutes.

Tracer les graphiques indiquant la hauteur de remplissage de ces récipients en fonction du temps.





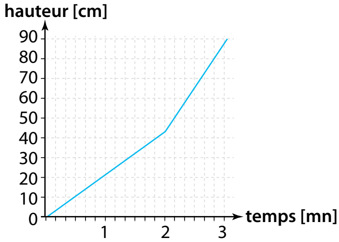


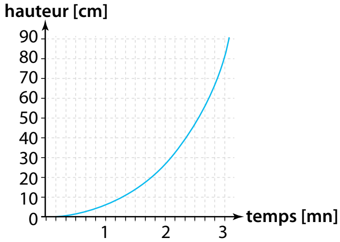


<u>Troisième partie :</u>

Les graphiques indiquent la hauteur de remplissage de deux récipients en fonction du temps.

Esquisser la forme des récipients de même hauteur (90 cm) et même volume qui pourraient correspondre aux courbes de remplissages tracées ci-dessous.





Fiche d'accompagnement

Les **objectifs d'enseignement** de cette activité sont :

OE1 : asseoir la notion de codépendance de deux grandeurs qui varient ;

OE2 : faire le lien direct entre la situation réelle et sa représentation graphique sans passer par la notion d'algèbre pour :

- élargir la conception de la notion de fonction ;
- lire un graphique comme la représentation d'un phénomène dynamique incluant la notion de vitesse de croissance.

Les **objectifs d'apprentissage** de cette activité sont :

OA1 : représenter graphiquement la relation entre des grandeurs dépendantes dans une situation concrète donnée ;

OA2 : traduire une représentation graphique par un processus dynamique précis (schéma d'un vase à remplir) ;

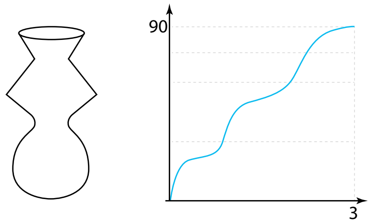
OA3 :interpréter un graphique comme représentation d'un phénomène dynamique.

➤ Dispositif suggéré

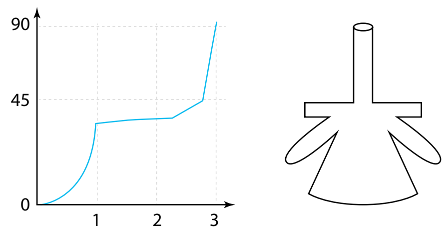
Les élèves travaillent une dizaine de minutes individuellement sur l'ensemble du document (parties 1, 2 et 3), puis par binôme ou groupe comparent leurs réponses et se mettent d'accord sur une réponse par item.

L'enseignant organise une mise en commun des propositions des élèves.

Pour les élèves les plus rapides, une quatrième partie peut être ajoutée : un élève invente un graphique et le proposera ensuite aux autres élèves qui devront le traduire en un récipient adéquat. Il peut aussi être demandé le contraire, à savoir proposer un récipient et trouver le graphique correspondant.



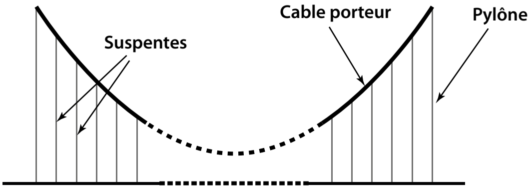
Reproduction de la proposition par un élève d'un vase, puis représentation graphique proposée dans un second temps par un autre élève.



Reproduction de la proposition par un élève d'une représentation graphique, puis proposition d'un vase dans un second temps par un autre élève.

Matériel : règle graduée.

Annexe 5. Fiche problème *Le pont*



Le pont suspendu de Youfcreek possède les caractéristiques suivantes :

- **La hauteur de chacun des deux pylônes est de 90 mètres**
- **La distance entre les deux pylônes est de 400 mètres**
- **Il y a 39 suspentes sous chacun des deux câbles porteurs**
- **La suspente centrale a une longueur de 10 mètres**
- **Les câbles porteurs sont courbés en forme de parabole**

La 5^{e} suspente en partant du pylône de droite est gravement endommagée, ce qui pourrait mettre les usagers de ce pont en danger.
Le matériau nécessaire à fabriquer les suspentes étant très résistant, il coûte ainsi particulièrement cher : vous êtes mandaté par la Société *Helpcreek* pour connaitre la longueur exacte de cette suspente.

Combien mesure-t-elle ?

Fiche d'accompagnement

Les **objectifs d'enseignement** de cette activité sont :

OE1 : mobiliser les différentes formes de représentations algébriques de la fonction quadratique dans un cadre concret ;

OE2 : montrer que le référentiel peut être placé à différents endroits et que le choix effectué va influencer les procédures, mais pas la réponse à la question.

Les **objectifs d'apprentissage** de cette activité sont :

OA1 : mathématiser le schéma d'une situation concrète en lui juxtaposant un référentiel permettant d'utiliser un type de fonctions connues ;

OA2 : déterminer l'expression algébrique d'une fonction quadratique en mobilisant des techniques connues en cohérence avec le référentiel choisi ;

OA3 :exploiter cette fonction pour déterminer la longueur cherchée.

➤ **Dispositif suggéré**

Faire travailler les élèves 3 à 5 minutes individuellement, puis par binôme ou groupe.

Les élèves par groupe devront se mettre d'accord sur une version finale et produire un seul document indiquant l'état d'avancée de la solution et les étapes pour y parvenir.

Consigne :

3. Répondre le plus précisément possible à la question posée ;
4. Chaque groupe rédige une réponse en expliquant sa démarche et en exposant toutes les étapes de sa résolution.

Matériel : règle graduée, calculatrices.

Annexe 6. Pré-test sur les fonctions

Test de mathématiques

Nom et prénom : **Date :**

Collège : **Classe :**

Une présentation propre et soignée est attendue. Tous les calculs doivent figurer sur la feuille.

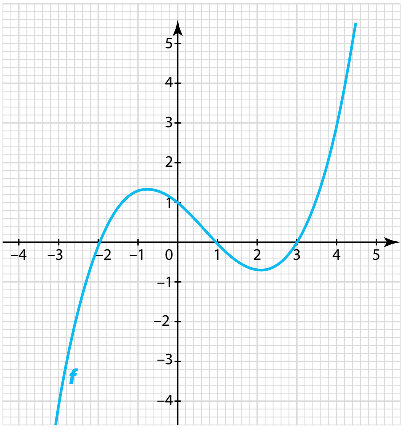
Calculatrice autorisée

Question 1

Voici la représentation d'une fonction *f*

a) Compléter le tableau suivant :

x	$f(x)$
– 3	...
0	...
1	...
3	...
...	3

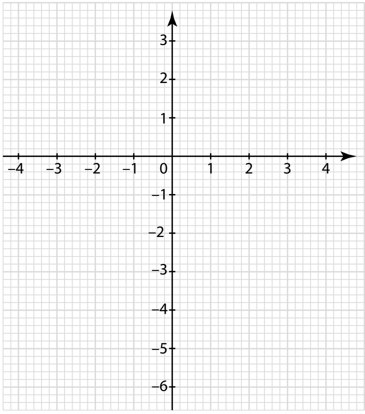


b) Donner deux nombres entiers qui ont la même image par *f*

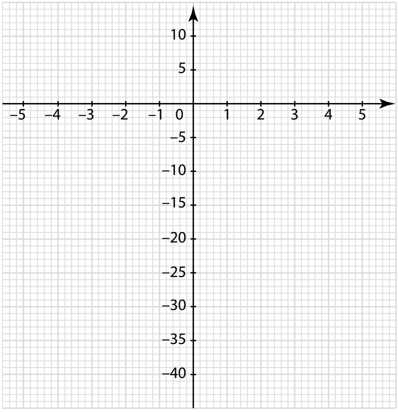
Question 2

Représenter graphiquement :

la fonction *f* définie par $f(x)=-x-2$

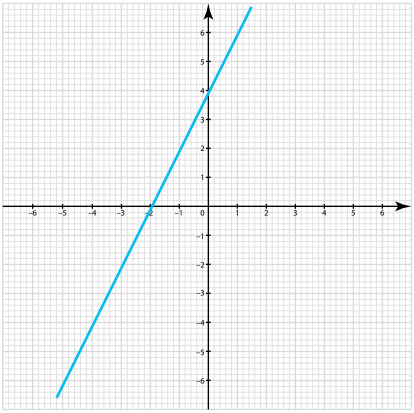


la fonction *g* définie par $g(x)=-2x^2$



Question 3

Voici la représentation graphique d'une fonction. Entourer la ou les expressions fonctionnelles ci-dessous correspondant à cette représentation graphique.



A. $x \rightarrow 4x + 2$

B. $x \rightarrow -2x + 4$

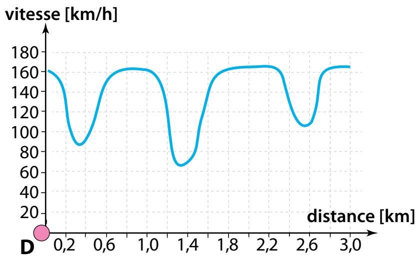
C. $x \rightarrow 1/2x + 4$

D. $x \rightarrow 4x - 2$

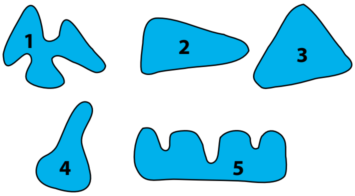
E. $x \rightarrow 2x + 4$

Question 4

Ce graphique représente les variations de la vitesse d'une voiture de course lors de son 2^e tour sur un circuit plat de 3 km de longueur.



Voici les tracés de cinq circuits :



a) **À partir du graphique ci-dessus, identifier sur lequel de ces cinq circuits la voiture roulait. Entourer votre réponse.**

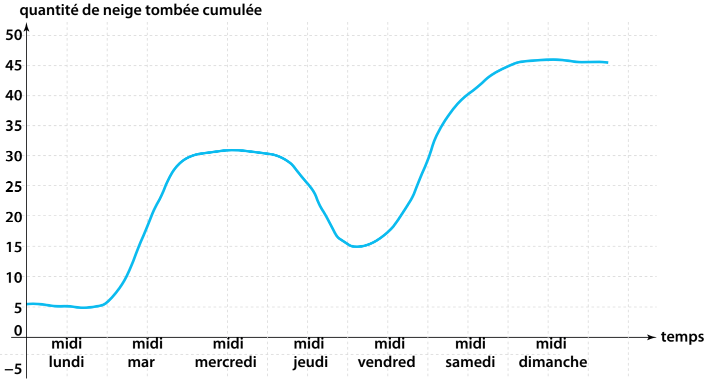
b) **Indiquer sur le circuit que vous avez identifié :**

- à quel endroit se situe le point de départ D.

- dans quel sens tourne la voiture.

Question 5

À proximité d'un petit village de montagne, la hauteur de la couche de neige est mesurée et enregistrée.
La représentation graphique ci-dessous montre les hauteurs de neige mesurées, en centimètres, pendant une semaine.
Durant cette semaine, la température ambiante était en-dessous de zéro, ainsi la neige ne fondait pas, sauf un jour de la semaine où il a plu.



1. a. Un jour de cette semaine, il a plu, la neige a alors fondu, quel jour était-ce ?
   ………………………
   b. De combien de centimètres la hauteur de neige a-t-elle diminué ce jour-là ?
   ………………………
   c. D'après vous, si la neige avait continué à fondre à la même vitesse que ce jour-là, de combien de centimètres la hauteur de neige aurait-elle diminué après deux jours ?
   ………………………
2. Quels sont les jours de la semaine pendant lesquels il a neigé ?
   ………………………
3. Quel jour est-il tombé la plus grande quantité de neige ?
   ………………………
4. Déterminer la hauteur totale de neige tombée durant la semaine.
   ………………………

Question 6

100 000 francs sont partagés entre un certain nombre de personnes et chacun reçoit une part égale.

1. Dans la situation décrite par la phrase encadrée ci-dessus, quelles sont les deux grandeurs variables ?
   ………………………
2. Déterminer une formule qui permette de calculer une des variables en fonction de l'autre.
   ………………………

Annexe 7. Post-test sur les fonctions

Evaluation formative **Durée : 90 minutes** **Date :**

NOM : PRENOM:

Tous les détails de calculs, les étapes, les raisonnements menés et les réponses doivent être indiqués.

Une présentation propre et soignée est exigée : écrire les réponses au stylo bleu ou noir, barrer les erreurs.

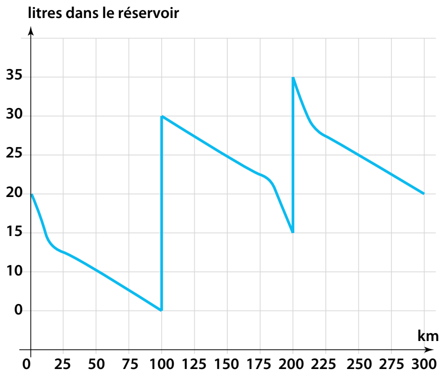
Matériel autorisé : calculatrice.

Taux de réussite :

Question 1

La représentation graphique ci-contre montre l'évolution du nombre de litres de carburant contenus dans le réservoir d'une voiture durant un voyage effectué par son propriétaire.

Répondez si possible aux questions suivantes en justifiant votre réponse et lorsque ce n'est pas possible, expliquez brièvement pourquoi :



a) À combien de stations-service le conducteur s'est-il arrêté pour prendre du carburant ?

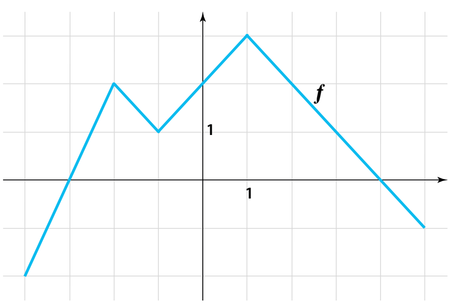
b) Combien de carburant a-t-il utilisé en tout pour ce voyage ?

c) Conduire en ville engendre une plus forte consommation que la conduite hors localité. Peut-on affirmer que le conducteur est parti d'une ville ? Justifier.

d) Représentez graphiquement en couleur sur la représentation ci-dessus, ce qui se serait passé si le conducteur ne s'arrêtait qu'à la première station.

Question 2

Voici la représentation graphique d'une fonction f définie pour $-4 \leq x \leq 5$.



À l'aide de cette représentation graphique :

a. déterminer $f(-2)$;

b. déterminer l'ensemble des zéros de f ;

c. déterminer l'ordonnée à l'origine de f ;

d. déterminer les valeurs de x telles que $f(x) = 1$;

e. déterminer les solutions de l'équation $f(x) = x$;

f. trouver un nombre qui a quatre préimages par f.

Question 3

On considère la fonction f définie par son expression fonctionnelle : $f(x)= -3x+35$.

Déterminer :

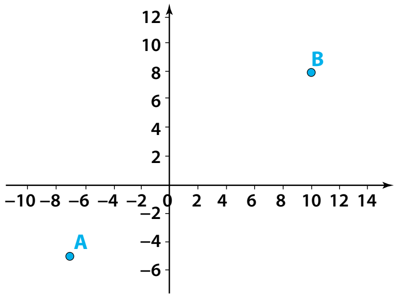
a. l'image de 10 par la fonction f ;

b. la ou les préimage(s) de 30 ;

c. l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique de f.

Question 4

Le point P (6 ; 5) appartient-il à la droite passant par les points A (-7 ; -5) et B (10 ; 8) ?

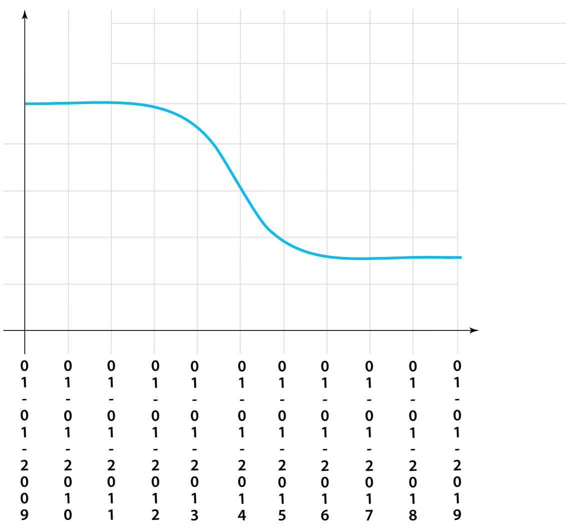


Question 5

Jusqu'à l'année 2010 les habitants du *Profonstan* ne triaient pas leurs déchets. Les premiers à le faire s'y sont mis en 2011.

La courbe ci-dessous représente le nombre d'habitants du *Profonstan* qui ne trient pas leurs déchets en fonction du temps.

Sur le même graphique, tracez la courbe qui représente le nombre d'habitants du *Profonstan* qui trient leurs déchets en fonction du temps.

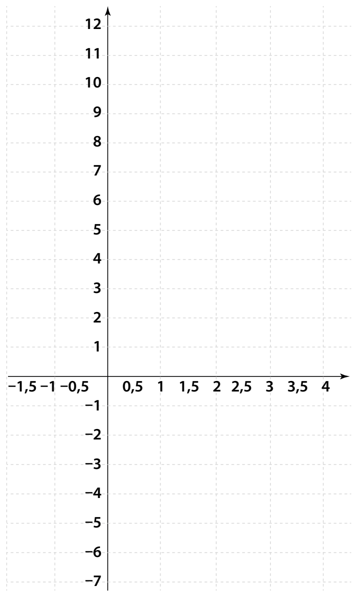


Question 6

a. Sur le repère ci-contre, représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x)=3x^2-10x+2$

b. Déterminer précisément les valeurs de x pour lesquelles $f(x)\leq 2$

c. 1000 a-t-il une image ? Justifiez votre réponse.



Question 7

Voici les représentations graphiques d'une parabole g et d'une droite f.

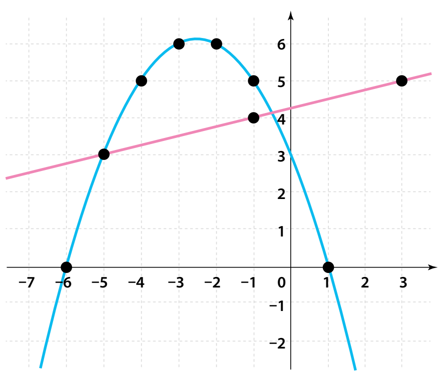
Les points marqués sur les représentations graphiques sont des points à coordonnées entières.

a. À l'aide d'informations que vous pouvez lire sur le graphique, déterminer précisément l'expression algébrique de f et de g

b. Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection de f et g

c. Pour quelle(s) valeur(s) de p la droite d'équation $y = px + 2$ n'aura-t-elle qu'une seule intersection avec la parabole g ?

Justifier votre réponse.



Listes des e-Annexes

Disponibles à l'adresse suivante :
https://www.unige.ch/fapse/dimage/index.php?cID=323

e-Annexe 1. Questionnaire élève sur la résolution de problèmes
e-Annexe 2. Statistiques questionnaire élèves sur la résolution de problèmes
e-Annexe 3. Questionnaire enseignants sur la résolution de problèmes
e-Annexe 4. Séquence d'enseignement sur les fonctions
e-Annexe 5. Questionnaire enseignants sur l'IB
e-Annexe 6. Modélisation possible du pont Golden Gate

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Allal, L. (2007). Régulations des apprentissages : Orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. Dans L. Allal & L. Mottier Lopez (dir.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (p. 7-23). De Boeck.

Allal, L. (2008a). Conceptualiser les outils d'évaluation des apprentissages. Dans G. Baillat, J.-M. De Ketele, C. Thélot & L. Paquay (dir.), *Évaluer pour former. Outils, dispositifs et acteurs* (p. 71-82). De Boeck.

Allal, L. (2008b). Évaluation des apprentissages. Dans A. Van Zanten (dir.), *Dictionnaire de l'éducation* (p. 311-314). Presses Universitaires de France.

Allal, L. & Mottier Lopez, L. (2005). L'évaluation formative de l'apprentissage : Revue de publications en langue française. *Dans L'évaluation formative : Pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires* (p. 265-290). OCDE.

Allard, C., Masselot, P., Peltier Barbier, M. L., Roditi, E, Solnon, A. & Tempier, F. (2021). Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, Praesco, en classe de CM2 en 2019, *Note d'information*, *21*(10), 2.

Arsac, G., Germain, G. & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren édition.

Artigue, M. (2018, 20 novembre). *Résolution de problèmes, calcul et démarches d'investigation* [Cours donné à l'ESPE de Paris].

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: Didactic and curricular perspectives. *ZDM*, *39*(5-6), 365-382. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0048-x

Bachelard, G. (1967). *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective* (5e édition). Librairie philosophique J. Vrin.

Balmes, R. S. & Coppé, S. (1999). Les activités d'aide à la résolution de problèmes en cycle 3. *Grand N*, *63*, 39-58.

Bednarz, N. & Lajoie, C. (2018). La résolution de problèmes au Québec au cours du 20e siècle. Dans J. L. Dorier, G. Gueudet, M. L. Peltier, A. Robert & E. Roditi, *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage* (p. 421-453). Belin Éducation.

Berté, A. (1996). *Soustraction à l'école élémentaire*. Document rédigé à partir des préparations des professeurs et des chercheurs et des observations faites dans l'école.

Bloom, B. S., Hastings, J. T. & Madaus, G. (1971). *Handbook on formative and Summative Evaluation of Student Learning*. Mc Graw-Hill. http://eric.ed.gov/?id=ED049304

Bloom, B.-S. (1968). *Learning for Mastery*. *1*(2), 1-12.

Bonafé, F. (1993). Les narrations de recherche, un outil pour apprendre à démontrer. *Repères IREM*, *12*, 5-14.

Bonafé, F., Sauter, M., Chevallier, A., Combes, M.-C., Deville, A., Dray, L. & Robert, J.-P. (2002). Les narrations de recherche du primaire au Lycée. *Brochure APMEP*, *151*.

Bosch, M. (2018). Study and research paths: A model for inquiry. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2018)* (1-0, p. 4015-4035). World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210

Briand, J., Loubet, M. & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Hatier, CD-Rom.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétiens… Aux situations didactiques. *Éducation et didactique* [En ligne], *6*(2). http://journals.openedition.org/educationdidactique/1475 [consulté le 03/06/2024].

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques* [Cours pour l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal].

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : Bilan et perspectives. *Math-Ecole*, *141*, 2-15.

Burgermeister, P.-F., Coppé, S., Coray, M., Coutat, S., De Simone, M., Dorier, J.-L., Essonnier, N. & Vendeira, C. (2021). La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques. Dans A. Chesnais & H. Sabra (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2020* (p. 173-202). IREM de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03545511 [consulté le 03/06/2024].

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Bikai, N. & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 57-69.

Celi, V., Coutat-Gousseau, S. & Vendeira, C. (2019). Travailler avec les formes en maternelle : Premiers pas vers des connaissances géométriques ? Dans Commission inter-IREM COPIRELEM (dir.), *Actes du 45e colloque de la COPIRELEM. Manipuler, Représenter, Communiquer : Quelle place pour les artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?* (p. 35-55). ARPEME.

Chanudet, M. (2019a). *Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques.* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève].

Chanudet, M. (2019b). Quelques résultats concernant les compétences en résolution de problèmes d'élèves évalués sur un même problème et à l'aide d'une même grille d'évaluation. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMf 2018* (p. 1532-1539). IREM de Paris.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury & M. Caillot (dir.), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Fabert. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=42 [consulté le 03/06/2024].

Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : La dialectique des médias et des milieux. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (dir.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*. IREM.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : Transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Dans *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire* [3e Université d'été Animath, Saint-flour, 22-27 août 2004], Paris, France. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf [consulté le 03/06/2024].

Chevallard, Y. (2009, 28 avril). *La notion de PER : problèmes et avancées* [Communication]. IUFM, Toulouse. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf [consulté le 03/06/2024].

Chevallard, Y. (2011, 18 février). *Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement* [séminaire TAD/IDD]. ADEF. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2010-2011-3.pdf [consulté le 03/06/2024].

Chevallier, A. (1992). Narration de recherche : Un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x*, *33*, 71-79.

Choquet-Pineau, C. (2014). *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3.* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université de Nantes].

Clements, H.-D., Swaminathan, S., Zeitler Hannibal, M.-A. & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 192-212.

Clot, Y. (1999). *La fonction psychologique du travail*. Presses Universitaires de France.

CNRTL. (s. d. a). *Problème*. https://www.cnrtl.fr/definition/probl%C3%A8me [consulté le 03/06/2024].

CNRTL. (s. d. b). *Truc*. https://www.cnrtl.fr/definition/truc [consulté le 03/06/2024].

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1989). Young Children's Emotional Acts While Engaged in Mathematical Problem Solving. Dans D. B. McLeod & V. M. Adams (dir.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* (p. 117-148). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_9

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(2-3), 221-270.

Coordination des DMS. (2020). *Indications pédagogiques complémentaires aux prescriptions cantonales. Démarches mathématiques et scientifiques (DMS) 10e-11e S. Année scolaire 2020-2021.*

Coppé, S. (1998). Composantes Privées et Publiques du Travail de l'Élève en Situation de Devoir Surveillé de Mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(2), 129-151. https://doi.org/10.1023/A:1003086628291

Coppé, S. (2011). Les problèmes dans les programmes depuis la contre réforme en France. Dans B. Grugeon (dir.), *Actes du 17e colloque de la CORFEM Caen 2010* (p. 9-16). CORFEM.

Coppé, S. (2021). Faut-il savoir ce qu'est un problème pour en résoudre ? *RMé*, 60-72.

Coppé, S. & Daina, A. (2023). Résolution de problème : Les élèves sont-ils en train d'apprendre ou sont-ils en difficulté ? *Revue de Mathématiques pour l'École*, *240*, 69-79.

Coppé, S. & Houdement, C. (2010). Résolution de problèmes à l'école primaire : Perspectives curriculaire et didactique. Dans C. Houdement & C. Bulf (dir.), *L'Enseignement des Mathématiques à l'École : Où est le Problème* (p. 48-71). COPIRELEM.

Corbaz, A. (1921). *Arithmétique. Calcul écrit. 2e série*. Librairie Payot.

Couderette, M. (2018). *Enquête comparatiste sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la soustraction au premier cycle du primaire dans plusieurs systèmes didactiques. Étude de cas en Suisse et en France.* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Jean-Jaurès].

Coutat, S. & Vendeira, C. (2015). Des pointes, des pics et des arrondis en 1P-2P. *RMé*, 223, 14-19.

Coutat, S. & Vendeira, C. (2018). *Document d'accompagnement : Activités pour la classe de 1P-2P, Espace (MSN11), figures géométriques, Travailler autrement les formes géométriques au cycle 1.* https://www.unige.ch/fapse/dimage/files/3915/4953/5358/CV-Activites-1P-2P.pdf [consulté le 03/06/2024].

Daina, A. (2013). *Utilisation des ressources : De la préparation d'une séquence à sa réalisation dans la classe de mathématiques. Cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois.* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève].

Demonty, I., Fagnant, A. & Dupont, V. (2015). Analyse d'un outil d'évaluation en mathématiques : Entre une logique de compétences et une logique de contenu. *Mesure et évaluation en éducation*, *38*(2), 1-29. https://doi.org/10.7202/1036761ar

Département de l'Instruction publique, de la culture et du sport. (2013). *Programme cantonal, littéraire-scientifique, profil sciences (S)*.

Département de l'Instruction publique, de la culture et du sport, Direction générale de l'enseignement obligatoire, Service enseignement et évaluation. (2020). *Programme cantonal. Complément au Plan d'études* *romand (PER). Démarches mathématiques et scientifiques (DMS). Année scolaire 2020-2021.*

Département de l'Instruction publique, de la formation et de la jeunesse. (2021). *Programme cantonal. Complément au Plan d'études romand (PER). Démarches mathématiques et scientifiques (DMS). Année scolaire 2021-2022 (v.6).*

Dewey, J. (1910). *How we think*. D. C. Heath.

Dorier, J. L. (2012). *Context analysis for the implementation of IBL: International synthesis report*. [PRIMAS project]. https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/FINAL_WP2_ContextAnalysis_licence_150708.pdf [consulté le 03/06/2024].

Dorier, J.-L. (2012). La démarche d'investigation en classe de mathématiques : Quel renouveau pour le questionnement didactique ? Dans B. Calmettes (dir.), *Démarches d'investigation. Références, représentations, pratiques et formation* (p. 35-56). L'Harmattan.

Dorier, J.-L. & Maass, K. (2020). Inquiry-Based Mathematics Education. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 384-388). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_176

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Dreyer, N. (2021). 50 ans de moyens d'enseignement romands de mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'École*, *235*, 5-20. https://doi.org/10.26034/vd.rm.2021.1723

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Dans *Actes du XXXII^{e} colloque COPIRELEM. Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs* (p. 67-89). COPIRELEM.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7-27.

Eysseric, P. (2002). Les ateliers de recherche en mathématiques [Expérimentation dans les classes et formation des professeurs des écoles]. *Grand N*, *70*, 7-34.

Fagnant, A. & Demonty, I. (2016). *Résoudre des problèmes : Pas de problème ! Guide méthodologique et documents reproductibles en ligne 10/12 ans*. De Boeck.

Farges, G. (dir.). (2020). Croyances et pratiques professionnelles des enseignants. *Revue internationale d'éducation de Sèvres*, *84*, 53-183. https://doi.org/10.4000/ries.9498

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève.* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève]. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466 [consulté le 03/06/2024].

Feigenbaum, E. A. & Feldman, J. (1963). *Computers and thought*. McGraw-Hill.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres.* [Thèse de doctorat en mathématiques générales, Université Claude Bernard, Lyon I].

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants.* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Paris Diderot].

Gérard, F.-M. (2008). Les outils d'évaluation ouverts, ou la nécessité de clés de fermeture. Dans J.-M. De Ketele, C. Thélot, G. Baillat & L. Paquay (dir.), *Évaluer pour former. Outils, dispositifs et acteurs* (p. 99-110). De Boeck.

Gérard, F.-M. (2008). La complexité d'une évaluation des compétences à travers des situations complexes : Nécessités théoriques et exigences du terrain. Dans Ettayebi, M., Opertti, R. & Jonnaert, P. (dir.), *Logique de compétences et développement curriculaire : débats, perspectives et alternative pour les systèmes éducatifs*. L'Harmattan.

Glaeser, G. (1976). *Le livre du problème. Pédagogie de l'exercice et du problème* (2e édition). Cédic.

Glaeser, G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. La pensée sauvage.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Grenier, D. (2012). La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). Dans J.-L. Dorier & S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMf2012* (p. 1354-1364). Université de Genève. https://publimath.univ-irem.fr/ACF12003 [consulté le 03/06/2024].

Grenier, D. (2007). *Des situations de recherche en mathématiques pour une formation à la démarche scientifique*. Actes de l'Université d'été « Démarche expérimentale ».

Grenier, D. & Payan, C. (2002). Situation de recherches « en classe » : Essai de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand Guerrier & C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 189-205).

Grootenboer, P. & Marshman, M. (2016). The affective domain, mathematics, and mathematics education. Dans *Mathematics, affect and learning* (p. 13-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-679-9_2

Grosgurin, L. (1940). *Arithmétique 6e année*. DIP.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*, 137-161.

Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524. http://www.jstor.org/stable/2321415

Hannula, M. S. (2020). Affect in Mathematics Education. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 32-36). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_174

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). *The Power of feedback. Review of Educational Research*, *77*(1), 81-112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques* [Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes].

Hiebert, J. (2003). Signposts for teaching mathematics through problem solving. Dans K. Frank, J. R. Lester & I. C. Randall (dir.), *Teaching mathematics through problem solving Prekindergarten-Grade 6* (p. 53-61). National Council of Teachers.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 31-59.

IBO. (1985). *Mathematics subject guide*. International Baccalaureate Organization.

IBO. (1993). *Group 5 Mathematics Guide*. International Baccalaureate Organization.

IBO. (2001). *Mathematical Methods Standard Level* (2e edition). International Baccalaureate Organization.

IBO. (2006). *Diploma Programme Mathematics SL guide*. International Baccalaureate Organization.

IBO. (2012). *Programme du diplôme Guide de mathématiques NM*. International Baccalaureate Organization.

IBO. (2013). *Diploma programme: Theory of knowledge guide*. International Baccalaureate Organization.

IBO. (2015). *Approaches to teaching and learning in the Diploma Programme*. International Baccalaureate Organization.

IBO. (2019). *Diploma Programme Mathematics: Analysis and approaches guide*. International Baccalaureate Organization.

Inhelder, B. & de Caprona, D. (1992). Vers le constructivisme psychologique : Structures ? Procédures ? Les deux indissociables. Dans *Le cheminement des découvertes de l'enfant*. Delachaux and Niestlé.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

Kahneman, D. (2012). *Système 1/système 2 : Les deux vitesses de la pensée*. Flammarion.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study.* [Thèse de doctorat en *Mathematics Education*, Stanford University].

Kilpatrick, J. (1969). Problem Solving in Mathematics. *Review of Educational Research*, *39*(4), 523-534.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? Dans A. H. Schoenfeld (dir.), *Mathematical problem solving* (p. 123-148). Academic Press.

Koichu, B., Berman, A. & Moore, M. (2006). Patterns of middle school students' heuristic behaviors in solving seemingly familiar problems. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 457-464.

Koichu, B., Berman, A. & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, *35*(2), 99-139.

Lacek, Y. (2023). *The Mathematical exploration within the International Baccalaureate: Institutional analysis and case studies of practices of two mathematics teachers and their students in Geneva.* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, University of Geneva]. https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:166509 [consulté le 03/06/2024].

Lackova, J. & Dorier, J.-L. (2018). La démarche d'investigation dans le cadre du Baccalaureat International. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMf 2018. Mathématique en scène – des ponts entre les disciplines, Paris (Gennevilliers)*. IREM. https://publimath.univ-irem.fr/ACF19013 [consulté le 03/06/2024].

Larson, L. C. (1983). *Problem-solving through problems*. Springer-Verlag New York Inc.

Leder, G. & Grootenboer, P. (2005). Affect and mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, *2*(17), 1-8.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 365-406.

Legrand, M. (1988). Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique : Le débat scientifique en situation d'enseignement. Dans C. Laborde et N. Balacheff (dir), *actes du Premier Colloque franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. La Pensée sauvage.

Legrand, M. & ADIREM. (2003). À la recherche d'une cohérence pour une véritable activité mathématique en classe. Dans J. Colomb (dir.*), Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes*. INRP.

Lehmann, M., Roesken-Winter, B. & Schueler, S. (2015). Use of mathematics in engineering contexts: An empirical study on problem solving competencies. Dans K. Krainer & N. Vondrová (dir.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2173-2179).

Lester, F. K., Jr., Garofalo, J. & Kroll, D. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes*. Bloomington, Indiana University.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Springer Open.

Maaß, K. & Engeln, K. (2014). *Report on the large-scale survey about inquiry based learning and teaching in the European partner countries (Project deliverable N° 10.2, fP7 Grant Agreement n° 320693)*. University of Education freiburg.

Margolinas, C. & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J.-Y. Rochex & Y. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires* (p. 19-32). Presses universitaires de Rennes.

Mayer, R. E. & Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. Dans *Handbook of educational psychology* (vol. 2, p. 287-303). Routledge.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. Dans *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 575-596). Macmillan Publishing Co, Inc.

Mercier, A. (2008). Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : La « résolution de problèmes ». Programme national de pilotage. Dans *Actes du séminaire national. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire* (p. 93-116).

Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes*. Scéren édition.

Mottier Lopez, L. (2008). *Apprentissage situé. La microculture de classe en mathématiques*. Peter Lang.

Mottier Lopez, L. (2009). L'évaluation en éducation : Des tensions aux controverses. Dans L. Mottier Lopez & M. Crahay (dir.), *Évaluations en tension. Entre la régulation des apprentissages et le pilotage des systèmes* (p. 7-25). De Boeck Université.

Mottier Lopez, L. (2015). Évaluations formative et certificative des apprentissages. Enjeux pour l'enseignement. De Boeck Université.

Mottier Lopez, L. (2017). Une modélisation pour appréhender la référentialisation dans l'évaluation des apprentissages des élèves. Dans P. Detroz, M. Crahay & A. Fagnant (dir.), *L'évaluation à la lumière des contextes et des disciplines* (p. 169-192). De Boeck Supérieur.

Mottier Lopez, L. & Allal, L. (2008). Le jugement professionnel en évaluation : Un acte cognitif et une pratique sociale située. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, *30*(3), 465-482.

Mottier Lopez, L. & Morales Villabona, F. (2018). Quand des enseignants de l'école primaire évaluent des résolutions de problèmes additifs : Étude des incidents critique en cours de jugement. *Mesure et évaluation en éducation*, *41*(1), 125-161.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980*). An agenda for action. Recommendations for School Mathematics of the 1980s.*

Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall.

Office du Baccalauréat International. (1973). *Le Baccalauréat International*. OBI.

Op't Eynde, P., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2002). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. Dans G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (dir.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (p. 13-37). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_2

Op'T Eynde, P., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 193-207.

Organisation du Baccalauréat International. (2012). *Programme du diplôme Guide de mathématiques NM*. OBI.

Para, V. & Otero, M. R. (2018). Study and Research path: Indicators of the development of the dialectics. *Pré-actes CITAD6*, 241-253. https://citad6.sciencesconf.org/data/pages/Pre_proceedings_citad_7.pdf [consulté le 03/06/2024].

Passaro, V. (2016). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans*. Université de Montréal.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l 'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques.* [Thèse de Doctorat non publiée, Université Joseph Fourier, Grenoble I].

Peterson, A. D. C. (2003). *Schools Across frontiers: The Story of the International Baccalaureate and the United World Colleges*. Open Court Publishing.

Pierce, C. S. (s. d.). *The collected papers of Charles Sanders Peirce* (Electronic edition). InteLex Past Master. https://colorysemiotica.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/08/peirce-collectedpapers.pdf [consulté le 03/06/2024].

Pinet, L. & Gentaz, E. (2007). La reconnaissance de figures géométriques planes (cercle, carré, rectangle et triangle) chez des enfants de cinq ans. *Grand N*, *80*, 17-24.

Poitrenaud, S. (1998). *La représentation des procédures chez l'opérateur. Description et mise en œuvre des savoir-faire*. [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université de Paris 8].

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Pólya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathematical method. 2nd edition*. Princeton University Press.

Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème* (Traduit de : How to solve it). J. Gabay.

Posamentier, A. S. & Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6: Powerful strategies to deepen understanding*. Corwin Press.

Renaud, G. (1974). *Experimental period of the International baccalaureate: Objectives and results*. The Unesco Press.

Rey, B., Caffieaux, C., Defrance, A. & Marcoux, G. (2005). L'articulation entre savoirs et compétences dans l'enseignement secondaire. Informations pédagogiques. *RESTODE*, *57*, 3-14.

Richard, J.-F. (1994). La résolution de problèmes. Dans *Traité de psychologie expérimentale* (vol. 2, p. 523-570). Presses Universitaires de France.

Richard, J.-F. (2004). *Les activités mentales* (4e éd.). Armand Colin.

Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

Robert, A. & Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignement sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x*, *60*, 6-25.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemmo, V. (2007). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the future of Europe*. Commission européenne. http://ec.europa.eu [consulté le 03/06/2024].

Roditi, E. & Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation et formations*, *86-87*, 235-257.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (dir.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences. Penser l'enseignement* (p. 61-87). Presses Universitaires de France.

Romanycia, M. H. & Pelletier, F. J. (1985). What is a heuristic? *Computational Intelligence*, *1*(1), 47-58.

Rott, B. (2012a). Heuristics in the problem solving processes of fifth graders. Dans T. Y. Tso (dir.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, p. 35-42).

Rott, B. (2012b). Models of the problem solving process – A discussion referring to the processes of fifth graders. Dans T. Bergqvist (dir.), *Learning Problem Solving and Learning Through Problem Solving, proceedings from the 13th ProMath conference* (p. 95-109).

Rott, B. (2014). Rethinking heuristics – characterizations and examples. Dans A. Ambrus & E. Vasarhelyi (dir.), *Problem Solving in Mathematics Education – Proceedings of the 15th ProMath Conference* (p. 176-192).

Rott, B. (2015). Rethinking heuristics – characterizations and vignettes. *LUMAT Online Journal*, *3*(1), 122-126.

Rott, B., Specht, B. & Knipping, C. (2021). *A descriptive phase model of problem-solving processes*. ZDM – Mathematics Education. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3

Ruiz-Primo, M. A. & Furtak, E. M. (2004). *Informal formative Assessment of Students' Understanding of Scientific Inquiry*. CSE 639.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*, 173-187.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Dans *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning: Vol. d* (p. 334-370). D. Grouws.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 9-34.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. Dans R. Mills Gagné, R. W. Tyler & M. Scriven, *Perspectives of curriculum evaluation* (p. 39-83). Rand Mc Nally.

Service d'examens des écoles internationales. (1967). *Le Baccalauréat International*. I.S.E.S.

Shavelson, R. J., Young, D. B., Ayala, C. C., Brandon, P. R., Furtak, E. M., Ruiz-Primo, M. A., Tomita, M. K. & Yin, Y. (2008). On the role and impact of formative assessment on science inquiry teaching and learning. *Applied Measurement in Education*, *21*(4), 295-314.

Silver, E. A. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 521-539.

Thorndike, E. L. (1898). *Animal intelligence: An experimental study of the associative processes in animals*. Columbia.

Tonge, F. M. (1960). Summary of a heuristic line balancing procedure. *Management Science*, *7*(1), 21-42.

Toulmin, S. E. (1958). *Les usages de l'argumentation. L'interrogation philosophique*. Presses Universitaires de France.

Toulmin, S. E. (2007). *The uses of argument*. Cambridge University Press.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 149-185.

Vendeira, C. (2019). Quelle transférabilité d'un matériel de géométrie d'un contexte d'enseignement à un autre ? *RMé*, *232*, 47-57.

Vendeira, C. & Coutat, S. (2017). « C'est une montagne ou une trompette ? » entre perception globale et caractéristiques des formes au cycle 1 et 2. *Grand N*, *100*, 79-104.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : Problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. P. Lang.

Vergnaud, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(23), 133-170.

Verschaffel, L. (1999). Realistic mathematical modeling and problem solving in the upper elementary school: Analysis and improvement. Dans J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit & B. Csapó (dir.), *Teaching and learning thinking skills* (p. 215-239). Swets&Zeitlinger.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (2008). Apprendre et enseigner les mathématiques : Un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants. Dans M. Crahay (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques*. De Boeck Supérieur.

Weil-Barais, A. (1993). *L'Homme cognitif*. PUF.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L. & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. Dans P. S. Wilson (dir.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (p. 57-78). National Council of Teachers of Mathematics.

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267-284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Zan, R., Brown, L., Evan, J. & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational studies in Mathematics*, *63*(2), 113-121.