La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19ème siècle : influence des philosophes de l'"Ecole écossaise du sens commun"

Ruffieux, Christiane

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Professeur J.-C. Pont

FACULTÉ DES SCIENCES
Département d'Histoire et Philosophie des Sciences

La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19ème siècle.

Influence des philosophes de l'« École Écossaise du Sens Commun ».

THÈSE

Présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève pour obtenir le grade de Docteur ès sciences, mention interdisciplinaire

par

Christiane Ruffieux

de

Crésuz (FR)

Thèse N°3622

GENÈVE

Editions à la carte, Sierre

2005

La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19ème siècle.

Influence des philosophes de l'« École Écossaise du Sens Commun ».

Christiane Ruffieux

FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Doctorat ès sciences
mention interdisciplinaire

Thèse de *Madame Christiane RUFFIEUX*

intitulée :

" La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19ème siècle. Influence des philosophes de l'Ecole Ecossaise du Sens Commun"

La Faculté des sciences, sur le préavis de Messieurs J.-C. PONT, professeur ordinaire et directeur de thèse (Faculté des sciences – Faculté des lettres - Département de Philosophie), G. WANNER, professeur ordinaire (Département de mathématiques), D. SCHULTHESS, vice-recteur (Université de Neuchâtel – Rectorat – Neuchâtel, Suisse) et Madame M.-J. DURAND-RICHARD, professeur (Université de Paris VIII – Département de mathématiques – Vincennes Saint-Denis, France), autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 17 mai 2005

P. Spierer

Le Doyen, Pierre SPIERER

Thèse - 3622 -

à Aurélie, Gabriel et Marie-Luce

« Si une image pouvait rendre cet état général de l'humanité à l'heure où nous écrivons, nous dirions que nous traversons une période analogue à celle qu'a dû traverser le monde physique, aux époques géologiques, à ces heures indécises de transition entre l'époque tertiaire et l'époque quaternaire, par exemple, alors que toutes les formes de la vie étaient en plein travail de transformation »

Préface de *La Grande Encyclopédie* 1899

«Il s'est constitué un monde de qualités sans homme, d'expériences vécues sans personne pour les vivre ; on en viendrait presque à penser que l'homme, dans le cas idéal, finira par ne plus pouvoir disposer d'une expérience privée et que le doux fardeau de la responsabilité personnelle se dissoudra dans l'algèbre des significations possibles »

Musil, *L'Homme sans qualité*

« Cet écrivain célèbre était en effet assez intelligent pour comprendre en quelle dangereuse situation l'homme s'est fourré depuis qu'il ne cherche plus son image dans le miroir des ruisseaux, mais dans les débris coupants de son intelligence.»

Musil, *L'Homme sans qualité*

Remerciements

Je tiens à remercier ici tout d'abord mon directeur de thèse, le Professeur Jean-Claude Pont, qui m'a confié un sujet qui s'est révélé riche et passionnant. Il m'a guidée avec tact et pertinence lorsque je m'égarais et m'a encouragée constamment avec générosité et confiance. La liberté qu'il m'a laissée dans la conduite de ce projet donna un cadre à ce travail qui me convenait parfaitement.

Je remercie aussi Mme Marie-José Durand-Richard et le Professeur Daniel Schulthess, qui me prodiguèrent de nombreux conseils pour améliorer mon texte et m'aidèrent à préciser ma pensée.

Je suis aussi très reconnaissante à Pierre qui m'a accompagnée durant ces longues années, me soutenant lorsque je me décourageais. Sa confiance sans faille et sa patience bienveillante furent des atouts précieux. Je le remercie pour ses lectures attentives des premières versions de ce manuscrit. Je le remercie d'avoir assumé de bonne grâce la bonne marche de la maison. Je remercie aussi mes enfants qui m'ont eux aussi soutenue avec patience dans ma démarche.

Je remercie mon amie Delphine qui a pris le temps de corriger la première version définitive du manuscrit. Son aide me fut précieuse.

Je remercie encore tous les amis qui m'ont encouragée tout au long de ces années. Leur intérêt pour mon travail fut une motivation qui a compté pour beaucoup.

Je remercie encore mes parents qui ont lu avec plaisir et intérêt mon travail. Ce fut pour moi une grande joie.

Résumé

En Grande-Bretagne, durant la première moitié du 19ème siècle, les mathématiciens de l'Ecole Algébrique Anglaise sont conduits vers une conception de l'algèbre symbolique qu'ils présentent comme une généralisation du calcul différentiel, du calcul des différences et de l'algèbre ordinaire. Ces travaux s'accompagnent d'une réflexion sur le sens d'une mathématique qui traiterait de purs symboles définis *a priori* par un procédé. A la question de l'existence de ces créations de l'esprit s'ajoute celle de la signification d'une opération portant sur des objets sans référent réel, ainsi que de son existence en tant qu'objet. Je montre que les algébristes anglais appuient leurs réflexions sur les théories de la connaissance des philosophes de l'Ecole Ecossaise du Sens Commun. Je montre en particulier que Charles Babbage s'est inspiré directement de la philosophie de l'esprit de Dugald Stewart, philosophie qui donne sa légitimité à une mathématique abstraite à un second degré.

Table des matières

Introduction

Dans l'histoire des mathématiques européennes de ces derniers siècles, il est deux événements dont la survenance provoqua un changement si important que le terme de *révolution*[1] est parfois employé pour les désigner: *l'application de la méthode algébrique à la géométrie* et *l'axiomatisation des mathématiques*. Ces deux *révolutions* sont de nature différente. La première est *technique* car elle est interne aux mathématiques, cependant que la seconde est *conceptuelle*, la nouveauté résidant dans la signification donnée à la nature même des mathématiques.
Jean-Claude Pont [2001] date symboliquement ces deux révolutions: la publication de *La Géométrie* (1637) de René Descartes [1596-1650][2] est le signe de la révolution technique et la publication des *Grundlagen der Geometrie* (1899) de David Hilbert [1862-1943], celui de la révolution conceptuelle. Il interprète la période s'étendant entre ces deux dates comme une période de transition, durant laquelle mathématiciens et philosophes prennent conscience de la profondeur des problèmes induits par les nouvelles techniques. Dans le courant du 19ème siècle, les situations paradoxales et les cas *pathologiques* se multiplient, le manque de rigueur devient manifeste, et la nature même des entités mathématiques est remise en question. En réponse à ces difficultés, Hilbert entreprend son projet d'axiomatisation des mathématiques[3].
Jean-Claude Pont propose de désigner la période s'étendant entre ces deux révolutions par les termes de « moderne ancienne » et la période à partir de 1899 de « moderne récente ». J'adopte, dans ce travail, sa périodisation et sa nomenclature.
Il est généralement admis que l'épistémologie des mathématiques dominante à l'époque « moderne ancienne » est une épistémologie *réaliste naïve*, dans laquelle la notion d'*évidence* joue un grand rôle. Elle a deux composantes: « il y a des propositions évidentes par elles-mêmes » et « il existe une nature et la géométrie la décrit »[4]. Dans cette épistémologie, les nombres et les figures sont fondés intuitivement. Leur existence est *réelle* et les propositions sur leurs propriétés sont *vraies,* dans un sens absolu qui ne laisse pas de place à une définition explicite des termes « réel » et « vrai ». Après la révolution conceptuelle marquant la transition entre les périodes « moderne ancienne » et « moderne récente », de nombreux mathématiciens adoptent le nouveau paradigme centré sur la notion de *consistance*[5]. Les mathématiques cessent d'être la science des grandeurs et des figures. La *structure algébrique*, une entité purement abstraite, est un exemple typique des nouveaux objets des mathématiques de la « modernité récente ». Les mathématiques ont vécu là un changement révolutionnaire. L'événement est reconnu et daté.
L'hypothèse générale de ce travail est que la révolution observée dans les mathématiques au tournant du 20ème siècle a des racines en dehors du champ des mathématiques, qu'elle s'insère

---

[1] Brunschvicg [1993]; Pont [2001].
[2] Bien que *La Géométrie* ne contienne que peu de véritables nouveautés techniques – François Viète [1540-1603] avait utilisé le calcul littéral, et Pierre Fermat [1601-1665] l'avait appliqué à des problèmes de géométrie – elle peut cependant être considérée comme un symbole de l'avènement des nouvelles techniques, qui y sont organisées pour la première fois dans un formalisme achevé. De plus, cette œuvre eut une influence prépondérante.
[3] Deux autres voies ont été empruntées pour fonder les mathématiques: le logicisme, voie empruntée par Gottlob Frege [1848-1925] et Bertrand Russell [1872-1970], et la voie empruntée par les intuitionnistes et constructivistes. L'entreprise de Hilbert a toutefois joué un rôle historique décisif pour les mathématiciens.
[4] Pont [2001], p. 108.
[5] Pont [1995]. Bien que réalistes et constructivistes ne se satisfassent pas de *consistance* pour assurer l'existence des entités mathématiques, ce paradigme peut être considéré comme dominant à l'heure actuelle.

dans un processus de transformation de la pensée beaucoup plus général, dans un lent bouleversement de l'idée que l'homme se fait de l'objet de la connaissance, et des moyens dont il dispose pour atteindre cet objet[6]. Cette hypothèse s'appuie sur la théorie générale des ruptures épistémologiques, proposée par Robert [1979]. Selon ce dernier, la théorisation des croyances concernant les structures épistémiques et les structures d'organisation du savoir conduit à une inévitable transformation de ces structures[7]. Ce mécanisme produit une continuelle transformation des moyens de production de la *connaissance* et du sens du mot « savoir ». Si l'on accepte la théorie des ruptures épistémologiques de Robert, si « chaque état de développement des structures épistémiques rend possible un type de structures logico-mathématiques »[8], alors les deux révolutions des mathématiques de 1637 et de 1899 s'inscrivent dans un cycle de révolutions du savoir et elles sont à considérer en relation avec des changements survenant dans les théories de la connaissance.

Mon objectif est de décrire, en un lieu et en un temps, l'avènement successif d'une nouvelle théorisation concernant la nature des mathématiques et d'une nouvelle théorie en mathématiques. Il est de montrer l'existence d'une filiation intellectuelle entre les philosophes proposant une nouvelle épistémologie des mathématiques et les théoriciens d'une nouvelle mathématique.

Le choix du lieu et de la période est suggéré par Pont [2001], qui signale l'existence, en Grande-Bretagne dans le courant du 19ème siècle, de deux écoles: l' « École Écossaise du Sens Commun » qui s'engage dans une réflexion épistémologique propice à l'avènement d'un formalisme mathématique abstrait, et l'« École Algébrique Anglaise » dont les travaux contribuent à la création de nouvelles algèbres.

J'adopte une méthode historique. En m'appuyant sur les textes des philosophes et mathématiciens de la fin du 18ème siècle et de la première moitié du 19ème siècle, je fais revivre le débat épistémologique intense qui caractérise cette période en Grande-Bretagne. En retrouvant les questions, réticences, hésitations et enthousiasmes de ces hommes qui subissent et font une *révolution*, je cherche à saisir les prises de conscience successives dont est faite une révolution du savoir. C'est en montrant les coulisses d'un des théâtres où se prépare une rupture de paradigme que je crois pouvoir capter ces instants de vacillement qui précèdent un bouleversement profond et général de la pensée.

Les acteurs auxquels je m'adresse seront principalement britanniques. Je prends pour point de départ les écrits du philosophe George Berkeley [1685-1753], dont l'influence fut déterminante en Grande-Bretagne. Je montre que l'influence du philosophe Dugald Stewart [1753-1828] sur le mathématicien Charles Babbage [1791-1871] fut décisive.

Avant de préciser le plan de mon travail, je décris dans la suite de cette introduction ce que l'on sait, d'après la littérature récente, de la manière dont les mathématiciens, aussi bien français que britanniques, envisageaient leur science durant la période « moderne ancienne ». Les mathématiques se développent en effet selon des scénarios assez différents dans ces deux pays.

---

[6] Pont [2001].

[7] Les structures *épistémiques* désignent les théories concernant le rapport de la connaissance au monde extérieur. Elles se différencient par le degré de distanciation critique de la connaissance relativement aux choses. Les structures *logico-mathématiques* sont les structures d'organisation de la connaissance. Les structures *épistémologiques* comprennent les structures *épistémiques* et les structures *logico-mathématiques*. Cf. Robert [1978], p. 251.

[8] Robert [1978], p. 251.

La double finalité des mathématiques durant l'époque « moderne ancienne »

Dans l'Europe savante du début de l'époque « moderne ancienne », les mathématiciens tombent sous le charme des nouveautés techniques cautionnées par La *Géométrie* de Descartes. Elle reste cependant modelée par les *Éléments* d'Euclide, œuvre considérée comme un modèle d'exposition déductive d'une science exacte, débutant par des principes premiers:

- des *définitions*, supposées des descriptions exactes d'entités réelles,
- des *axiomes*, dont la vérité est évidente par elle-même,
- des *postulats*, propositions qui semblent ne pas être premières, mais que l'on demande d'accepter comme vraies.

Les éléments y sont ensuite exposés dans un ordre tel que chaque proposition se déduit ou bien des principes premiers ou bien de propositions démontrées précédemment. La géométrie est admirée pour sa dimension *esthétique:* elle vise à « trouver ce point d'équilibre où la simplicité de la représentation spatiale et la clarté de l'enchaînement logique se rencontrent, où l'harmonie s'établisse comme d'elle-même entre la fonction d'imagination et la fonction d'intelligence, où l'esprit soit dans cet état de grâce esthétique dont Kant a si finement analysé les conditions »[9]. Son étude est supposée « former l'esprit ».
Or, Descartes a résolu de « quitter la Géométrie abstraite, […] la recherche des questions qui ne servent qu'à exercer l'esprit »[10]. Dans La *Géométrie,* il renonce explicitement aux limitations de la géométrie grecque. Il définit une *courbe géométrique* comme une courbe qu'on puisse « imaginer être décrite par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent»[11]. Les Anciens n'avaient accepté que les droites et les cercles comme courbe géométrique. Il convient, selon Descartes, d'élargir la géométrie à des courbes produites par des instruments plus complexes que la règle et le compas.
Descartes s'est montré audacieux en identifiant la science de l'univers à une *mathématique universelle*. Avec lui, tous les phénomènes de la nature seraient expliqués en termes d'étendue, c'est-à-dire de grandeur géométrique. Descartes s'est montré doublement audacieux, puisqu'il ramène tout problème de géométrie à un calcul littéral[12]. Mais cette audace « exprime une absence de scrupule théorique, à laquelle n'auraient pas cédé les anciens Grecs »[13]. Il s'introduit en effet, par le biais du calcul littéral, de nouvelles entités dont le statut ontologique laisse perplexe*:* les *quantités négatives*, les *quantités imaginaires*, les *quantités infiniment petites*. *La Géométrie* induit sans avertissement une transformation de la signification des objets mathématiques, transformation qui marque une étape essentielle dans le développement de la philosophie mathématique[14].

Une nouvelle acception du terme *algèbre*

Le terme *algèbre* désignait, dans sa première acception occidentale, les méthodes de résolution des équations utilisées dans des problèmes d'arithmétique. Après qu'a été introduit le calcul littéral en géométrie, le terme *analyse* (qui depuis l'Antiquité désignait une méthode

---

[9] Brunschvicg [1993], p. 97.
[10] Lettre du 27 juillet 1638 à Mersenne, citée dans Brunschvicg [1993], p. 125.
[11] Descartes [1984 (1637)], p. 316.
[12] Descartes n'est pas le seul à avoir eu cette audace; sa démarche s'inscrit dans un mouvement que Brunschvicg qualifie d'inéluctable. C'est cependant son nom qui fut le plus souvent associé à cette démarche.
[13] Pont [2001], p. 107.
[14] Brunschvicg [1993], pp. 107-123.

de raisonnement) apparaît aux côtés de celui d'*algèbre* (qui désigne une technique de calcul). Ces deux termes sont de plus en plus utilisés l'un pour l'autre. Leur sens devient difficile à cerner précisément, car leur signification change, sans jamais faire l'objet d'un consensus. Dans l'*Encyclopédie*, Jean Le Rond d'Alembert [1717-1783] donne les définitions suivantes:

- L'*algèbre* est « une méthode de faire des calculs de toutes sortes de quantités en les représentant par des signes très universels», cette méthode servant aussi bien à l'arithmétique qu'à la géométrie.
- L'*analyse* est « proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques en les réduisant à des équations ». Les termes *analyse* et *algèbre* « sont souvent employés comme synonymes ».
- La *quantité* « se dit de tout ce qui est susceptible de mesure, ou qui comparé avec une chose de même espèce peut être dit ou plus grand ou plus petit, ou égal ou inégal ».
- La *grandeur* est « ce qui est susceptible d'augmentation & de diminution », ou « ce qui est composé de parties ».

D'Alembert ne fait pas de différence entre les termes *grandeur* et *quantité*, puisqu'il affirme que « la *grandeur* s'appelle aussi *quantité* ». Il existe deux sortes de grandeurs, continue-t-il: la « *grandeur abstraite* n'est autre chose que les nombres, qu'on appelle aussi *grandeurs numériques* » et la « *grandeur concrete* est celle dont la notion renferme un sujet particulier. Elle peut être composée ou de parties co-existantes, ou de parties successives; & sous cette idée elle renferme deux especes, l'*étendue,* & le *tems* ». Il précise que « la *grandeur* abstraite répond à la quantité *discrette,* & la *grandeur* concrete à la quantité *continue* ».
En résumé et à y regarder de près, les termes *grandeur* ou *quantité*, utilisés pour désigner les objets premiers dont traitent l'algèbre, l'analyse, la géométrie et l'arithmétique, correspondent à des notions assez confuses. Néanmoins, les analystes manipulent ces entités avec habileté, sommant des séries infinies, multipliant ou divisant des *quantités négatives* ou des *quantités imaginaires*. Remarquons que l'*opération*, qu'elle soit arithmétique, algébrique ou géométrique, n'est pas considérée comme un *objet des mathématiques*. Selon l'opinion courante, comme selon l'*Encyclopédie*, l'objet des mathématiques est la grandeur et ses propriétés[15]. La croyance sous-jacente à cette proposition, propre à l'épistémologie réaliste naïve, est la suivante: les *relations* entre les grandeurs sont des *propriétés des grandeurs* (la *grandeur* « 5 » a la *propriété* d'être composée de « 2 » et de « 3 »).
Dans le courant du 18ème siècle, alors qu'en France l'algèbre et l'analyse tendent à supplanter la géométrie dans toutes les questions pratiques, en Grande-Bretagne, où l'influence de La *Géométrie* de Descartes fut moins forte, l'enthousiasme pour les nouvelles techniques est modéré et la géométrie reste le modèle de la science exacte. L'expression «arithmétique universelle», consacrée par Isaac Newton [1642-1727], utilisée jusqu'au début du 19ème siècle, désigne l'algèbre. Elle signifie que l'algèbre ne se différencie pas de l'arithmétique, si ce n'est par la généralité de ses expressions. L'*analyse* (calcul différentiel et intégral) est, elle, souvent dite la *nouvelle géométrie*. Les termes *analyse* et *algèbre* sont, comme en France, utilisés comme synonymes, bien que l'arithmétique et la géométrie soient considérées comme deux branches des mathématiques évidemment différentes[16].
L'algèbre est considérée comme une méthode pour résoudre des problèmes d'*arithmétique*, une *méthode auxiliaire*. L'algèbre est-elle même une méthode mathématique? Autrement dit, les vérités obtenues par la méthode algébrique ont-elles ce caractère de vérité certaine propre

---

[15] D'Alembert [1965], « Grandeur », in *L'Encyclopédie*. Remarquons que dans l'article « Opération », il n'est fait aucune mention d'un sens spécifique aux mathématiques.
[16] J'utilise dans toute la suite de l'introduction le terme d'*algèbre* exclusivement pour désigner ce qui se comprenait à cette époque sous le terme d'algèbre ou d'analyse, et le terme de *quantité* pour désigner cette notion floue qui s'exprimait par un nombre et qui se représentait par une ligne.

aux mathématiques? La question se pose. L'examen des textes parus aux 18ème et 19ème siècles montre en effet l'existence d'un « Problème des Négatifs »[17]. Trois mathématiciens reconnus, Robert Simson [1687-1768], Francis Maseres [1731-1824] et William Frend [1757-1841], rejettent le recours à ces « absurdités » que sont les « quantités moins que rien », ou les « quantités impossibles »[18], des abstractions qui, au contraire des nombres et des figures, n'ont pas de signification (*meaningless*). La plupart des mathématiciens, conscients de la difficulté que posent ces entités, ne recourent à la méthode algébrique qu'avec parcimonie et circonspection. Les *quantités infiniment petites* et les *séries infinies* ne sont guère mieux acceptées. Le manque de fondement du calcul des fluxions et du calcul différentiel a été dénoncé par Berkeley[19]. Par ailleurs, en Grande–Bretagne, subsiste, depuis Newton et Edmond Halley [1656-1762], la croyance que les Grecs disposaient d'une forme d'analyse géométrique rigoureuse dont la puissance surpassait ce que les Modernes avaient découvert. L'*Analyse Géométrique des Anciens* était exposée dans trente-trois livres, dont seuls quelques-uns ont été préservés. Trois de ces livres ont été retrouvés si endommagés que la nature des théorèmes dont ils traitaient, les *porismes*, est restée mystérieuse jusqu'au milieu du 18ème siècle. C'est à Simson qu'il est revenu de restituer le contenu de ces livres. Le succès de la restauration de cette partie de l'*Analyse Géométrique des Anciens* orienta le développement des mathématiques en Grande-Bretagne dans une direction particulière. Ainsi, à la fin du 18ème siècle, alors que, en France, Pierre Simon Laplace [1749-1827] parachève l'œuvre de Newton, rendant compte, grâce à l'algèbre, du mouvement des corps célestes jusque dans leurs anomalies, on discute en Grande-Bretagne du bien-fondé d'innovations telles que les *quantités négatives* et on s'interroge sur les principes de l'algèbre. Rares sont ceux qui, alors, comprennent les traités élémentaires de mathématiques des Français.

La renaissance de l'algèbre en Grande-Bretagne

La parution de La *Mécanique Céleste* (1799), l'ouvrage magistral de Laplace, est ressentie en Grande-Bretagne comme un coup de tonnerre. Dès le début du 19ème siècle, on assiste à une renaissance des mathématiques, en particulier de l'algèbre. John Playfair [1748-1819] à Edimbourg et Robert Woodhouse [1773-1827] à Cambridge sont des quelques-uns qui connaissent les textes des mathématiciens français. Ils s'efforcent à la fois de faire connaître les publications continentales et de consolider les bases de l'algèbre, persuadés qu'ils sont de l'importance de la démarche algébrique. Tous deux ont joué un rôle important dans le mouvement de revitalisation des mathématiques en Grande-Bretagne.
Le processus de réforme se déroule en deux temps, emmené par deux générations de mathématiciens. La première génération œuvre à faire adopter sur sol britannique la notation différentielle et à promouvoir l'approche symbolique de Joseph Louis Lagrange [1736-1813]. La deuxième génération, à partir de 1830, met en question la validité des fondements du calcul des fonctions de Lagrange. On assiste alors à l'émergence d'un *calcul des opérations*. La question de l'*interprétation* des symboles est au centre des discussions[20].
Le mouvement se manifeste tout d'abord en Écosse. Dès le début du 19ème siècle paraissent des articles qui tendent à promouvoir l'analyse telle qu'elle est pratiquée sur le continent.

---

17 Pycior [1976]; Allaire [1997] pp. 20-41.
18 Le terme *impossible quantities* est largement répandu dans les traités, dictionnaires scientifiques et articles de journaux, durant le 18ème siècle et le début du 19ème siècle en Grande-Bretagne. Il désigne les quantités négatives et les quantités imaginaires.
19 Berkeley [1987 (1734)], *The Analyst*.
20 Smith and Wise [1989], chapitre 6.

William Wallace [1768-1843] et James Ivory [1765-1842] appartiennent au cercle d'influence de Playfair. Ils utilisent tôt dans le siècle la notation différentielle et les nouvelles techniques continentales[21].
A Cambridge, la réforme s'organise autour de Babbage, John Frederick William Herschel [1792-1871][22] et George Peacock [1791-1858], dès le début de la deuxième décennie du siècle. Tous trois sont proches de Woodhouse. Ils reconnaissent la valeur de l'algèbre et les lacunes de leurs aînés dans ce domaine. Ils accusent le système universitaire d'avoir entravé le développement des mathématiques et des sciences, figeant l'enseignement dans le passé, perpétuant l'emploi de notations fluxionnelles, qui, à l'usage, se sont révélées malcommodes. Ensemble ils fondent, dans les années 1812-1813, la *Société Analytique*[23], dont l'objectif explicite est d'introduire à l'Université la notation différentielle et de faire connaître les travaux des analystes français par la traduction des ouvrages de ces derniers en langue anglaise. Leur demande de réforme est toutefois largement plus vaste qu'une simple réforme de notation. Ils se révoltent globalement contre l'immobilisme intellectuel, universitaire et social[24].
La *Société Analytique* est un lieu de discussion sur la nature des mathématiques, de l'algèbre et de l'analyse, propice au développement de nouvelles idées. Babbage et Herschel, les membres les plus actifs, développent un *calcul des fonctions* qu'ils considèrent comme une nouvelle branche des mathématiques[25]. Babbage voit dans le calcul des fonctions une généralisation de l'algèbre. Sa philosophie de l'algèbre ainsi généralisée – il utilise le terme *analyse* – est exposée dans un texte inédit, intitulé *Essays on the Philosophy of Analysis* (Babbage [1821]). Dans ce manuscrit, l'algèbre est présentée comme un langage purement formel, séparé de ses applications. Dubbey [1977] reconnaît dans cet essai une parenté de pensée évidente avec les idées développées plus tard par Peacock dans le *Treatise on Algebra* (Peacock [1830]).
Le *Treatise on Algebra* et le *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis* (Peacock [1834 (1833)]) que Peacock présente en 1833 au congrès de la *British Association for the Advancement of Science (*BAAS*),* ont fait l'objet de nombreux commentaires ces trente dernières années. Ce que Peacock a appelé l'« Algèbre Symbolique » peut paraître à un lecteur actuel comme une première tentative de construction d'une algèbre abstraite. Il sera toutefois surpris d'y trouver des contradictions et étonné de constater qu'il aura fallu attendre encore vingt-cinq ans pour que soit donnée, pour la première fois, la définition d'un groupe abstrait.
Quelles circonstances ont-elles favorisé cette première ébauche d'une *algèbre abstraite* en Grande-Bretagne? Et pourquoi le concept de *structure algébrique* ne s'imposa-t-il pas plus rapidement? Helena Pycior [1981], [1982] montre de manière convaincante que le *Treatise on Algebra* de Peacock répond à un malaise concernant les fondements de l'algèbre et son manque de rigueur, que l'« Algèbre Symbolique » est une réponse au problème

---

[21] De nombreux historiens, ignorant les travaux des mathématiciens écossais, ont considéré les mathématiciens de Cambridge comme les premiers et uniques acteurs de la renaissance de l'algèbre. Guicciardini [1989] et Craik [1998], [1999], [2000] ont attiré l'attention récemment sur l'importance des mathématiciens écossais et iralandais dans le processus de réforme des mathématiques en Grande-Bretagne.
[22] John Frederick William Herschel est le fils de l'astronome William Herschel. John Herschel abandonnera les mathématiques pour se consacrer lui aussi entièrement à l'astronomie. Il passa de nombreuses années à l'Observatoire du Cap pour observer le ciel de l'hémisphère Sud.
[23] Les dates exactes de fondation et de dissolution de cette société varient selon les sources. Selon Enros [1983] elle fut fondée en 1812 et dissoute en 1813. Cela est contesté par Fisch [1999], qui assure que la fondation eut lieu en 1811, et que la dissolution est plus tardive (il aurait retrouvé un compte-rendu d'une séance de la société datant de 1817). Pour mon propos, l'incertitude concernant ces dates est sans importance. Je retiens celles proposées par Enros.
[24] Enros[1983]; Durand(-Richard) [1985]; Fisch [1999].
[25] Enros [1983], en particulier pp. 37-38.

épistémologique posé par les nombres négatifs. On doit alors se demander pourquoi, en Grande-Bretagne, les mathématiciens étaient concernés par des questions d'ordre épistémologique, alors qu'en France par exemple, on jongle avec les nombres négatifs, les nombres complexes, les séries infinies, sans que leurs fondements ne soient jamais examinés.

La question épistémologique en Grande-Bretagne

Les questions relatives aux possibilités de connaissance de l'esprit humain trouvent une place importante dans le discours philosophique en Grande-Bretagne au cours des 17ème et 18ème siècles. *An Essay concerning Human Understanding* (1690) de John Locke [1632-1704], *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge* (1710) de Berkeley et *A Treatise of Human Nature* (1739) de David Hume [1711-1756] (ou sa version révisée parue sous le titre *An Inquiry concerning Human Understanding*[26]) constituent une trilogie britannique: en effet, de ces trois hommes, l'un est anglais, le deuxième irlandais et le troisième écossais. Tous trois cherchent à dégager les principes qui fondent la connaissance. Cette trilogie s'achève dans le scepticisme. Selon Hume, l'ordre divin, éternel et nécessaire est hors de portée de la raison. En même temps que Emmanuel Kant [1724-1804], Thomas Reid [1710-1796], le fondateur de l'« École Écossaise du Sens Commun », réagit à la critique humienne. Reid, cherchant à sauver le savoir, confère au « sens commun » un rôle épistémologique fondamental[27]. Sous le nom de *philosophie de l'esprit humain*, il développe une théorie de la connaissance fondée sur l'observation par introspection des lois universelles du fonctionnement de l'esprit humain. Reid, à l'instar de Locke et de Berkeley, s'interroge sur le langage, sur la relation entre le signe et la chose signifiée et sur le statut ontologique des objets de pensée. Il s'efforce, comme Locke, de penser la pensée comme un acte et établit les principes de la *philosophie de l'esprit* comme ceux d'une science des lois qui gouvernent les opérations de l'esprit. Sa philosophie prépare au *réalisme critique*, bien que lui-même reste prisonnier d'un *réalisme naïf*. Stewart, par son enseignement, contribue à la diffusion de la philosophie de Reid et prolonge la réflexion de ce dernier. Il s'interroge sur le rôle du langage et des signes dans la pensée, il décèle une différence quant à la nature des axiomes dans les mathématiques et dans les sciences naturelles. Avec presque un siècle d'avance, il esquisse les grandes lignes d'une mathématique axiomatique fondée sur une logique rationnelle, et il appelle à une extension du formalisme algébrique en une logique mathématique[28]. Bien que son inflluence ait été considérable en son temps, il a été, dès le milieu du 19ème siècle, oublié. Ce n'est que depuis une vingtaine d'années que quelques études tendent à le présenter comme un philosophe de premier plan. Citons par exemple K. Haakonssen qui, en introduction des oeuvres complètes de Stewart, dit de lui qu'il est « l'une des clés les plus importantes pour comprendre la transformation des idées des Lumières »[29]. William Hamilton [1788-1856] édite et commente l'œuvre de Reid et Stewart. Il consacre de longues années à rétablir la logique d'Aristote dans l'état où celui-ci l'a laissée, puis, considérant que ce dernier n'a pas pu achever son œuvre, il se propose de la terminer. Son apport à la logique a souvent été considéré comme de peu d'importance. Ses innovations majeures sont l'introduction de la quantification des prédicats et le développement d'un formalisme inspiré de l'algèbre[30].

---

[26] Hume [1999 (1748)], *Enquête sur l'entendement humain*.
[27] Schulthess [1983].
[28] Pycior [1984].
[29] Haakonssen [1994], p. xiv. Voir aussi Tannoch-Bland [2000], introduction et Macintyre [2003], la première biographie de Dugald Stewart, deux livres dont je n'ai eu connaissance qu'à la fin de ce travail.
[30] Hamilton a revendiqué cette innovation. Il fut néanmoins précédé sur ce point par George Bentham [1800-1884], *Outline of a New System of Logic, with a Critical Examination of Dr Whately's `Elements of Logic'* (1827).

Il est dès lors tentant de mettre en rapport les préoccupations relatives aux fondements des mathématiques et le questionnement épistémologique des philosophes britanniques.
Marie-José Durand-Richard [1990], lisant l'œuvre de Peacock dans le « contexte paradigmatique » de *An Essay concerning Human Understanding* de Locke, montre une parenté de langage entre les œuvres des deux hommes. Ce premier résultat incite à s'interroger plus précisément sur les liens qui unissaient les mathématiciens de l' « École Algébrique Anglaise »[31] et les philosophes de l' « École Écossaise du Sens Commun ».
Le lien entre Babbage et Stewart est signalé par Helena Pycior [1984]. L'existence d'un lien direct entre le *Treatise on Algebra* et les *Essays on the Philosophy of Analysis* de Babbage est reconnu[32]. Peacock apporte une réponse à une préoccupation majeure des mathématiciens et des philosophes de son temps: donner des fondements rigoureux à l'algèbre. L'œuvre de Peacock n'est ainsi pas l'œuvre d'un mathématicien isolé qui propose quelque nouveau développement, mais celle d'un homme de conciliation dont l'intention est d'« écarter les difficultés et imperfections des éléments de cette magnifique science » et de « conférer à l'algèbre le caractère d'une science démonstrative »[33]. Sa réponse comporte des contradictions, car il tente de concilier des idées contradictoires : exposer la théorie d'une pratique mathématique appartenant à la « modernité récente » avec des arguments appartenant à une épistémologie propre à la période « moderne ancienne »[34]. Il s'agit d'une œuvre d'« indécision créative » entre deux positions irréconciliables: le formalisme pur de Babbage et le réalisme pur de Frend[35]. La réponse de Peacock ne satisfait pas. Au moment de sa parution, le *Treatise on Algebra* suscite critiques et perplexité.
Les principaux protagonistes de la nouvelle génération des *algébristes anglais* sont Robert Murphy [1806-1843], Duncan Gregory [1813-1844], Augustus De Morgan [1806-1871], William Rowan Hamilton [1805-1865][36] et George Boole [1815-1864]. Le *calcul des opérations* (une méthode dite de « séparation des symboles de quantité et des symboles d'opération ») est au centre de leur activité. A la lecture des articles, mémoires et traités de cette période, il apparaît que le travail des algébristes s'oriente vers l'étude de systèmes opératoires abstraits donnés par les propriétés de leurs lois de combinaison.
Les années 1840-1850 sont marquées par la *création d'algèbres nouvelles*. Les deux plus connues sont l'algèbre des quaternions de W. R. Hamilton, découverte en 1843 (Hamilton [1853]), et l'algèbre logique de Boole, publiée dans *Mathematical Analysis of Logic* (Boole [1951 (1847)]). Cette algèbre possède deux opérations, qui s'interprètent comme les *actes mentaux* de *sélection* d'une partie des *objets* d'une *classe*, et d'*agrégation* des objets de deux classes en une classe. Elles sont commutatives et distributives entre elles. Boole présente les lois de combinaison de ces opérations dans un formalisme similaire à celui qu'il utilisait dans l'article de 1844, « On a General Method in Analysis ». Son algèbre est un cas particulier de calcul des opérations[37].
Durant l'année 1854 paraissent deux textes qui semblent marquer le franchissement d'une étape vers une autre mathématique et vers une autre logique. Le premier est un mémoire d'Arthur Cayley [1821-1895]. Engagé dans des recherches appartenant au domaine du calcul

---

[31] L'expression « École Algébrique Anglaise », introduite par Novy [1968], fut souvent reprise par les historiens de cette période. Durand-Richard [1999] adopte le terme de « réseau », relevant que ce groupe n'est pas constitué d'un maître et de disciples, mais qu'il s'agit d'un groupe de mathématiciens qui tous participent à l'élaboration d'une nouvelle conception des mathématiques.
[32] Fisch [1999]; Dubbey [1978].
[33] Peacock [1830], *Treatise on Algebra*, p. v.
[34] Durand-Richard [1999], [2000].
[35] Fisch [1999].
[36] Je désignerai dans la suite ce mathématicien par « W. R. Hamilton » pour le distinguer de son homonyme, le philosophe écossais, que je désignerai par « Sir William Hamilton ».
[37] Panteki [2000] établit l'existence d'un lien entre ces deux textes.

des opérations, il donne la première définition générale d'un groupe abstrait[38]. Le second, le célèbre livre de Boole *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (Boole [1992 (1854)]), passa relativement inaperçu à son époque. Il débute par une déclaration d'intention: « Le but de ce traité est d'étudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit au moyen desquelles s'effectue le raisonnement; de les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis, sur un tel fondement, d'établir la science de la logique et de constituer sa méthode»[39]. Algèbre et logique apparaissent ainsi toutes deux émerger du calcul des opérations[40].

<>

Le décor étant posé, il me reste à exposer plus précisément le contenu de ce travail, et à en établir le plan. Ce travail comporte trois parties.

J'expose dans la première partie les éléments de philosophie de l'esprit de trois philosophes de l'« École Écossaise du Sens Commun », Thomas Reid, Dugald Stewart et Sir William Hamilton. Je montre que l'on trouve dans le discours de ces philosophes une épistémologie générale en rupture avec les systèmes réalistes ou idéalistes qui s'opposaient traditionnellement jusqu'au milieu du 18$^{\text{ème}}$ siècle. Ces philosophes constatent le rôle actif de l'esprit dans le processus de construction de la connaissance. Reid révèle la confusion que l'on a faite entre l'*opération de l'esprit* et son *objet* et il s'efforce de les distinguer. Il élabore une théorie de la perception originale, selon laquelle nos représentations du monde sont non des décalques de la réalité, mais des constructions obtenues au moyen d'un procédé, propre à l'esprit, de *traduction* des sensations en perceptions. La validité de la connaissance repose sur le postulat que les propriétés des opérations de l'esprit sont universelles. Stewart diffuse des idées propices à une transformation de l'épistémologie des mathématiques, des sciences et de la logique. Il fournit aux algébristes des générations futures des ingrédients qui se révèleront utiles à l'élaboration d'une algèbre abstraite.

Dans la deuxième partie, je présente un état des lieux des mathématiques en Grande-Bretagne à la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle. Trois mathématiciens du 18$^{\text{ème}}$ siècle, Colin Maclaurin [1698-1746], Simson et Matthew Stewart [1717-1785] ont marqué leur époque, ainsi que l'atteste le fait que leur nom est encore souvent cité au 19$^{\text{ème}}$ siècle. Simson et Stewart ont contribué à la restitution de l'*Analyse Géométrique des Anciens*. Cette forme d'analyse était cultivée presque avec dévotion en Grande-Bretagne durant tout le 18$^{\text{ème}}$ siècle, au détriment de la géométrie analytique en usage sur le continent. Il s'agissait d'une méthode d'analyse de second niveau. Elle peut être dite « méthode de l'invention », car ce procédé, qui n'a rien d'une généralisation ni d'une abstraction, donne naissance à des *entités générales abstraites*. Il s'avère que cette forme d'analyse est à la base du procédé de *thématisation*, mode de constitution des objets mathématiques abstraits spécifique à la période « moderne récente »[41]. L'*Analyse Géométrique* constitue un chapitre important pour l'histoire des mathématiques en Grande-Bretagne. En effet, la plupart des mathématiciens britanniques du 19$^{\text{ème}}$ siècle ont pratiqué cette forme d'analyse durant leurs études. Or, cette forme d'analyse prépare à un niveau d'abstraction d'ordre supérieur. Ce point apparaîtra dans la troisième partie. Je présente dans le chapitre neuf le travail de Simson et Stewart. Ensuite de quoi j'expose quelques extraits du *Treatise of Fluxions* (Maclaurin [1742]), je discute de la philosophie qui s'en dégage et des critiques que son approche cinématique a suscitées à la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle. Je fais appel à Grize [1954] pour discuter du problème du mouvement en géométrie. Je décris

---

38 Cayley [1854], *On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation* $J^{n} = 1$.

39 Boole [1992 (1854)], *Les lois de la pensée*, p. 21.

40 Durand-Richard [2000].

41 Gardies [2001], p. 164, utilise le terme de *thématisation* ou « érection en objet autonome d'une propriété rencontrée sur des objets mathématiques différents » pour parler du procédé de construction des entités mathématiques dans l'épistémologie « moderne récente ».

les problèmes que soulevait en Grande-Bretagne la question des nombres négatifs, et les tentatives de Playfair, Woodhouse et Adrien Quentin Buée [1748-1826] pour justifier l'existence de ces entités *impossibles*. Je conclus que les mathématiciens britanniques avaient une sensibilité aux problèmes épistémologiques que posait le développement « sans scrupule » des mathématiques chez les analystes continentaux, principalement français.
Dans la troisième partie, je discute d'abord de l'origine de la notion de *fonction* et des problèmes logiques liés à ce concept. Puis je lis les travaux de l'« École Algébrique Anglaise » durant la période 1814-1854 à la lumière de l'« École Écossaise du Sens Commun ». Je montre les répercussions sur les algébristes anglais de la rupture épistémologique constatée dans l'œuvre des philosophes écossais. Je montre que Babbage, en particulier, s'est directement inspiré de l'épistémologie de Stewart pour conduire ses recherches mathématiques et métamathématiques, et que le *Treatise on Algebra*, œuvre de « synthèse algébrique» pour Marie-José Durand-Richard, d'« indécision créative» pour Menachem Fisch, s'inscrit dans un débat épistémologique ouvert depuis plusieurs décennies. Cette œuvre s'appuie ainsi indirectement, au travers des *Essays on the Philosophy of Analysis* de Babbage, sur la philosophie de Dugald Stewart, et possède une double descendance: le calcul des opérations (précurseur des premières algèbres d'opérateurs linéaires) et la logique mathématique. Je présente ensuite trois textes qui tentent de fonder les nombres complexes: Dans *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*, John Warren [?-?] propose un fondement géométrique, dans *Treatise on Algebra*, Peacock propose un fondement *philologique* et dans « Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time », W. R. Hamilton propose un fondement *scientifique* (sur l'intuition du temps)[42].
Je présente ensuite cinq articles qui tous relèvent d'une généralisation de l'algèbre. Ces cinq mathématiciens présentent chacun un système opératoire symbolique plus ou moins général. Murphy [1837] (« First Memoir on the Theory of Analytical Operations ») expose une théorie des opérateurs linéaires abstraits. Deux mémoires paraissent ensuite presque simultanément, qui traitent des principes de l'*algèbre*: le premier, de Gregory [1840], « On the Real Nature of Symbolical Algebra » (lu en 1838) et le second, de De Morgan [1841-1847], publié en quatre parties sous le titre « On the Foundation of Algebra » (lues de 1839 à 1844). Boole [1844] est l'auteur du quatrième mémoire qui a pour titre « On a General Method in Analysis ». Boole présente une méthode de résolution des équations différentielles à coefficients variables, dans un formalisme général qui ne fait appel qu'aux propriétés, posées *a priori*, des lois de combinaison des symboles des opérations.
Dans l'épistémologie réaliste naïve de l'époque « moderne ancienne », les mathématiques ont pour objet les *grandeurs* et leurs *propriétés*. Dans ce paradigme, l'*opération* (par exemple l'addition) est confondue avec le résultat de son application (la somme). Je montre que les algébristes anglais prennent conscience de cette confusion. Je montre que c'est en rapport avec la « méthode de séparation des symboles d'opération et des symboles de quantité », utilisée comme un langage symbolique pour exprimer et résoudre les problèmes d'*Analyse Géométrique* au sens des Anciens, qu'émergent les concepts abstraits d'*opération* et de *systèmes de symboles*. De tels systèmes abstraits apparaissent comme des langages de signes arbitraires qui se combinent selon des lois abstraites données par leurs propriétés. L'introduction de ce nouveau langage s'accompagne d'un double retournement: l'algèbre supplante la géométrie dans toutes les questions pratiques, et les opérations prennent la première place dans l'ordre d'existence, reléguant la *grandeur* au rôle de produit dérivé. Quels sont alors les critères qui permettent d'affirmer l'existence de ces pures « créations de l'esprit », et surtout la vérité des assertions à leur sujet? L'évidence intuitive, en effet, ne

42 Warren [1828]; Peacock [1830]; W. R. Hamilton [1837(1835)].

suffit plus, et de nouveaux critères doivent être fixés. C'est à la *logique* que les algébristes anglais ont recouru pour fonder l'algèbre émergeante: une assertion algébrique est *vraie* « sans référence à la signification des symboles », pour autant qu'elle soit une « simple conséquence logique de quelques relations simples »[43]. Une logique rationnelle nouvelle émerge, celle que Stewart appelait de ses vœux.

Je conclus finalement que des liens manifestes existent entre les travaux des mathématiciens de l'« École Algébrique Anglaise » et ceux des philosophes de l'« École Écossaise du Sens Commun ». L'élément novateur commun aux deux écoles est le concept d'*opération:* l'analyse des *facultés opératoires* de l'esprit est au centre de la philosophie de l'esprit des philosophes écossais, et le *calcul des opérations* est au centre des recherches des algébristes anglais. Les algèbres abstraites apparues en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19ème siècle peuvent être considérées comme une réalisation du programme qui se dessine dans l'œuvre du philosophe Dugald Stewart. L'éclairage nouveau qu'il apporte sur le rôle de structuration de la logique et des mathématiques ouvre la voie à une désubstantialisation des mathématiques et de la connaissance en général.

Avant d'entrer dans l'exposé des idées philosophiques et des théories mathématiques qui se développent en Grande-Bretagne entre le milieu du 18ème siècle et le milieu du 19ème siècle, je résume, dans un préambule, la position idéaliste adoptée par Berkeley, philosophe dont l'influence sur les philosophes du « sens commun » fut décisive, et dont l'impact sur les mathématiciens fut non moins déterminante pour l'évolution des mathématiques.

---

[43] De Morgan [1840], « Negative and impossible quantities », *Penny Cyclopaedia*, vol. 16, p. 132.

Préambule: George Berkeley [1685-1753]

La société anglaise a vécu à la fin du 17ème siècle une transformation sociale et politique, cristallisée dans les quelques jours de la Révolution de 1688, au terme desquels la monarchie absolue de Jacques II céda la place à une monarchie constitutionnelle et parlementaire. La « Glorieuse Révolution » est entourée de la parution en Angleterre de deux ouvrages d'une importance majeure pour l'histoire des idées: les *Principia Mathematica* (1687) de Newton et *An Essay concerning Human Understanding* (1690) de Locke[44]. Ces trois événements marquent une rupture profonde dans la société britannique. Ils constituent un point de départ naturel pour ce travail.
Au début du 18ème siècle, « une sorte d'orthodoxie cartésienne »[45] régnait sur toute l'Europe. Aux grands systèmes théologiques d'inspiration cartésienne, qui s'étaient efforcés d'unir la philosophie de la nature et la philosophie de l'esprit, succéda le « gouvernement dualiste » de Newton et Locke, l'un philosophe de la nature, l'autre philosophe de l'esprit. Tous deux s'opposent au rationalisme de Descartes en adoptant une position épistémologique qui relève de l'empirisme baconien. Tous deux domineront la pensée du 18ème siècle.
Les *Principia* de Newton se caractérisent par deux traits en opposition radicale avec la méthode cartésienne. D'une part ils laissent une large place à l'inexplicable et d'autre part ils renouent avec le *mathématisme*[46] *expérimental* de Galileo Galilei [1564-1642][47]: Newton rend compte d'un *événement* en imaginant un modèle mathématique qui prédit ce qu'on observe, là où Descartes imaginait une structure mécanique qui fournirait le résultat observé[48].
Locke, quant à lui, est un philosophe de la liberté de pensée et de l'égalité des droits des hommes. Au cœur de son éthique on trouve une exigence radicale d'autonomie pour les individus, qu'il fonde dans une épistémologie anticipant Kant dans sa critique des pouvoirs de l'entendement. En plaçant à la base de l'édifice de la connaissance des croyances qui tiennent lieu de *postulats*, il introduit un changement fondamental dans les prétentions philosophiques: la connaissance est intrinsèquement liée à la constitution et au fonctionnement de l'esprit, et donc la quête philosophique englobe nécessairement un examen critique des pouvoirs de l'entendement. Locke a donné son épistémologie à la science du 18ème siècle[49].
La plupart des philosophes du 18ème siècle se situent relativement à ces deux hommes[50]. Berkeley, bien que sa philosophie relève elle aussi de l'empirisme, est l'un de ceux qui s'oppose le plus fortement à tous deux. Il conteste la théorie des idées abstraites de Locke et il met en question les fondements et la logique du calcul des fluxions de Newton. Sa démarche

---

[44] La même année, ce dernier donne aussi *Two Treatises on Governement* (1690).
[45] Bréhier [1950], t. 2, p. 312. Bréhier reprend le terme « orthodoxie cartésienne » de Thomas Reid. Ce dernier souligne que l' « orthodoxie cartésienne » a régné en Angleterre jusqu'au début du 18ème siècle. Il situe la fin du règne cartésien en Grande-Bretagne en 1715, date à laquelle James Gregory [1638-1675] enseigne pour la première fois dans une université écossaise la philosophie de Newton.
[46] Le terme *mathématisme* s'oppose au terme *logicisme*. Le *mathématisme* désigne toute philosophie qui vise à substituer l'ordre mathématique à l'ordre physique. On y oppose le *logicisme*, qui place au fondement de toute connaissance (d'ordre physique et d'ordre mathématique) l'ordre logique. A la fin du 19ème, Frege, puis Russell et Alfred North Whitehead [1861-1947] renverseront à nouveau pour quelque temps le rapport entre mathématiques et logique. Cf. Robert [1978].
[47] Brunschvicg [1993], p. 193.
[48] Bréhier [1950], t.2, p. 316.
[49] Michaud [1998], pp. 275-287.
[50] Michaud [1998], p. 16; Bréhier [1950], t. 2, p. 311.

épistémologique résonnera longtemps encore dans le 18ème siècle, particulièrement en Grande-Bretagne, où philosophes et mathématiciens se réfèrent explicitement à sa théorie de la connaissance, à sa philosophie des mathématiques et à sa critique du calcul infinitésimal. Du fait de l'importance de cette influence sur l'intelligentsia de l'*Athènes du Nord* (Edimbourg) je consacre dans ce préambule une large place à l'exposé de la philosophie de Berkeley, puis je discute de son importance pour l'épistémologie des mathématiques.
A la suite de Locke et en référence à lui, Berkeley s'interroge sur les principes de la connaissance humaine. Rejetant aussi bien le conceptualisme de Locke que le principe des *idées innées* de Descartes, il développe une théorie de la connaissance originale qui, s'appuyant sur une nouvelle théorie de la perception, inaugure une conception sémiologique des mathématiques. L'empirisme idéaliste de Berkeley marque une étape importante dans l'histoire des mathématiques en offrant une alternative au modèle épistémologique réaliste dominant[51].
L'œuvre de Berkeley est tournée tout entière vers un but, clairement indiqué dans le sous-titre des *Principles*: «où l'on recherche les principales causes d'erreur et de difficulté dans les sciences, et raisons du scepticisme, de l'athéisme et de l'irréligion ». Au terme de son ouvrage, il se dit satisfait s'il a su inspirer à ses lecteurs « un sens pieux de la présence de Dieu » et montrer « la fausseté et la vanité de ces spéculations stériles qui font l'emploi essentiel des érudits »[52]. Malgré la finalité apologétique de son œuvre, Berkeley propose une réflexion philosophique originale. Refusant la dualité traditionnelle entre *objet* et *idée*, il évite l'insoluble question de la vérification de leur adéquation. Ayant posé une identité *a priori* entre perception et existence, il introduit une distinction entre *perception* et *perception propositionnelle:* ce que je perçois est vrai immédiatement et évidemment, seul ce que je dis percevoir peut être vrai ou faux. Il s'agit dès lors d'expliquer le lien entre la chose perçue et le signe qui la représente, d'examiner le rôle des signes et l'usage que l'on en fait.

Le Nouveau Principe

La philosophie de Berkeley, considérée comme le prototype de la philosophie idéaliste, se bâtit sur un *principe* qui a souvent été résumé par ces quelques mots qu'il formula lui-même: « exister c'est être perçu »[53]. Il pose ce *principe* comme une définition de l'*existence*. Il en tire deux conséquences: premièrement la *matière* n'existe pas, secondement, les *idées abstraites générales* n'existent pas.

L'immatérialisme

L'immatérialisme de Berkeley, en préparation dans *An Essay towards a New Theory of Vision* (1709), développé dans *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge* (1710), et expliqué dans *Three Dialogues between Hylas and Philonous* (1713), repose sur des nuances délicates et des arguments à double tranchant. Berkeley soutient que l'immatérialisme est « du côté du sens commun et du langage ordinaire »[54], il fut accusé d'extravagance. Conscient de la difficulté de son entreprise, il tente de clarifier ses propos:

---

[51] Berlioz [2000], pp. 142-145.
[52] Berkeley [1985 (1710)], p. 407, vol. 1.
[53] Le *nouveau principe philosophique* de Berkeley apparaît pour la première fois dans les *Carnets*, 429 et 429a. Son expression complète est la suivante:« Exister (*existere*) c'est être perçu (*percipi*) ou percevoir (*percipere*) ou vouloir (*velle*), c'est-à-dire agir (*agere*). » Il réapparaît dans les *Principes,* I §3, en latin: « esse est percipi ». Il ne semble pas qu'il faille considérer le changement de l'*existere* à l'*esse* comme significatif (Berlioz [2000] p. 80-81). Je choisis ici l'expression que G. Brykman [1987] utilise dans l'introduction au 2ème volume des *Œuvres* de Berkeley (p. 13) pour exprimer la formule « lapidaire » à laquelle la philosophie de Berkeley fut réduite.
[54] Brykman [1987], vol. 2, p. 13.

> « Je ne discute l'existence d'aucune chose que nous puissions saisir, soit par les sens soit par la réflexion. Que les choses que je vois de mes yeux et touche de mes mains existent, et existent réellement, c'est ce que je ne mets pas le moins du monde en question. La seule chose dont nous nions l'existence, c'est celle de ce que les philosophes appellent 'matière' ou 'substance corporelle'; et ce refus ne touche en rien le reste des hommes, qui, osé-je le dire, ne souffriront jamais de cette perte. L'athée, certes, y perdra la façade d'un mot creux pour soutenir son impiété; et il se peut que les philosophes trouvent qu'ils ont perdu un grand sujet de disputations pointilleuses. » Berkeley [1985, (1710)], vol. 1, p. 336.

La philosophie de Berkeley est *immatérialiste*: Berkeley nie l'existence de la *matière*. Il se débarrasse de la matière de Locke, cette substance imperceptible, support des qualités que nous percevons des corps.
L'immatérialisme nécessite de repenser les bases de la théorie de la perception. C'est l'objectif de la *Nouvelle Théorie de la Vision* que d'analyser le fait perceptif en lui-même. Alors que traditionnellement les sens sont considérés séparément et indépendamment, Berkeley propose un modèle de l'acte perceptif dans lequel les objets immédiats du toucher et de la vue suggèrent ensemble un unique objet sensible – l'objet médiat du toucher et de la vision. Ce nouvel objet est une perception *symbolique*.
Il résulte de la théorie de la perception proposée par Berkeley que l'objet immédiat de la vue n'est que couleur et lumière. Les idées de forme, de grandeur, de position ou de distance, sont données par le toucher. Le visuel pur ne donne qu'une « topologie élémentaire»[55]. Dans cette nouvelle approche, les objets immédiats de la vue ne sont pas les choses placées à distance, mais des apparences qui « n'existent nulle part hors de l'esprit »[56] qui les perçoit:

> « Tout ce qui est proprement perçu par la faculté visuelle se réduit aux seules couleurs, à leurs variations et aux différents degrés d'ombre et de lumière. Mais la mutabilité et la fugacité incessantes de ces objets immédiats de la vue les rendent incapables d'être arrangés à la manière des figures géométriques; et il ne serait aucunement utile qu'ils le fussent. » Berkeley [1985, (1709)], vol. 1, p. 280.

Les conséquences de cette théorie de la perception sont cruciales pour la géométrie.
L'apparence visuelle d'une chose est changeante, elle n'a pas l'immutabilité nécessaire à une figure géométrique, affirme Berkeley. Il signale ainsi que les figures visibles sont relatives à l'observateur. Or la géométrie euclidienne est une géométrie sans point de vue. Berkeley résout cette difficulté en faisant des figures tangibles les objets propres de la géométrie. Les figures visuelles, sans être des copies exactes, en sont les signes naturels, dont le rôle est de suggérer la figure tangible.
La *Nouvelle Théorie de la Vision* propose un modèle symbolique de la perception, fondé sur l'affirmation de l'autonomie de l'activité perceptive relativement à l'activité rationnelle. Le processus de construction de l'objet sensible à partir d'une pluralité de sensations immédiates fait appel l'imagination. Pour dépasser l'immédiateté des sens, Berkeley a placé le *signe*, le *symbole* ainsi que la faculté d'*imaginer* au cœur du processus de construction du savoir.

Le signe et l'idée abstraite

Berkeley est engagé dans la recherche d'une épistémologie nouvelle, dans laquelle le langage joue un rôle essentiel: en organisant les objets sensibles dans un réseau de relations, le langage contribue à rendre la réalité intelligible. Utilisé sans précaution, il peut être source d'erreurs et d'obscurités, car le *mot* donne une apparence de réalité illusoire et souvent le

[55] Berlioz [2000], p. 49.
[56] Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, 339

savant s'égare en prenant le *signe* pour la *chose* et en attribuant l'existence à une *idée* là où le *mot* seul existe. Tel est précisément le cas des *idées abstraites*.

Berkeley, s'interrogeant sur les moyens dont l'homme dispose pour connaître, constate que seuls les gens instruits et les philosophes se plaignent de manquer de lumières, et que ces derniers attribuent l'obscurité dans laquelle ils vivent à la faiblesse de nos facultés. Son opinion est que:

> « Nous devons croire que Dieu a été plus généreux avec les fils de l'homme que de leur donner un fort désir d'une connaissance qu'Il eût, en même temps, placée tout à fait hors de leur atteinte. » Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 300.

Nous avons, nous assure-t-il, les moyens de connaître; mais nous les utilisons mal. Il est donc utile, poursuit-il, de « faire une enquête rigoureuse concernant les premiers principes de la connaissance humaine ». Attribuant l'obscurité dans laquelle les philosophes se débattent à « l'opinion selon laquelle l'esprit a un pouvoir de forger des notions ou idées abstraites des choses »[57], il reproche à Locke d'avoir donné du poids à cette croyance. Il avoue pour sa part:

> « Que d'autres aient cette merveilleuse faculté d'abstraire leurs idées, eux-mêmes peuvent le mieux en juger; pour ma part, j'ose assurer que je ne l'ai pas. » Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 304.

Berkeley développe une théorie de la connaissance novatrice qui rejette aussi bien les idées *innées* que les idées *abstraites* et *générales*. Il distingue trois sortes d'entités: les *idées*, les *intelligences* et les *relations*.

Les *idées* sont des objets passifs et inertes et elles sont les objets immédiats des sens. Berkeley distingue deux ordres d'*idées*: celles « imprimées sur les sens par l'Auteur de la nature »[58] s'appellent des *choses réelles*, celles forgées par l'imagination sont nommées des *fictions:*

> « Les idées des sens sont plus fortes, plus vives et plus distinctes que celles de l'imagination; de même, les premières ont une stabilité, un ordre, une cohérence, et ne sont pas excitées au hasard, comme celles qui ne sont que des effets de la volonté humaine; mais elles se produisent dans une séquence ou série régulière, dont l'enchaînement admirable témoigne suffisamment de la sagesse et de la bienveillance de son auteur. » Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 334.

Les *choses réelles* ne sont rien d'autre que ce que nous percevons qu'elles sont. Nous les connaissons donc immédiatement et évidemment. A la question de la permanence et de l'unicité des *idées*, il répond en instituant une relation *immanente* (au sens métaphysique) entre l'*idée* dans l'esprit humain et son *archétype* (dans l'esprit de Dieu), qui sont deux états d'une même chose. L'un est créé dans le temps et périssable, l'autre est incréé et éternel[59].

Les *intelligences* sont des êtres actifs, dont l'existence consiste à percevoir. Elles sont la seule cause des *idées* ou des *relations*. Les *intelligences* nous sont connues par les effets de leurs *actions*, par les manifestations du *mouvement* qu'elles engendrent. La connaissance d'une *intelligence* n'est pas de même nature que la connaissance d'une *idée:* elle n'est pas immédiate, elle dépend « de l'intervention d'idées qui sont par moi référées en tant qu'effets, ou signes concomitants, à des agents ou esprits distincts de moi-même»[60].

Pour marquer la différence entre ces deux modes de connaissance, Berkeley limite le terme *idée* à ce qui est perçu, à savoir un *être passif*, préférant parler de *notion* s'il s'agit d'une *intelligence* ou d'un *être actif.*

---

[57] Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 301.
[58] Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 335.
[59] Berlioz [2000] p. 117.
[60] Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 400.

Les *relations* que certaines *idées particulières* ont entre elles constituent la troisième sorte de choses que l'esprit puisse connaître. L'esprit appréhende une relation entre deux idées par suite d'une attention sélective portée à quelque *propriété*. Il se sert alors d'un même *signe* (un mot) pour suggérer chacune des idées reliées parce que possédant une propriété commune. C'est ainsi que l'esprit peut se servir de noms généraux, bien que ces mots ne soient que des signes « sans signification précise »:

> « D'abord, l'on pense que chaque nom n'a, ou ne doit avoir qu'une seule signification précise et fixe; ce qui pousse les hommes à penser qu'il y a certaines idées abstraites et déterminées qui constituent la vraie et seule signification immédiate de chaque nom général; et que c'est par l'intermédiaire de ces idées abstraites qu'un nom général vient à signifier une chose particulière. Alors que, en vérité, il n'y a rien qui ressemble à une signification précise et définie associée à un nom général: ils peuvent tous signifier indifféremment un grand nombre d'idées particulières. » Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 312.

Berkeley nie que l'esprit ait la faculté d'abstraire. Il lui substitue celle de signifier[61]. Il développe une théorie du langage dans laquelle le *mot* est un *signe* arbitraire dont la fonction est de suggérer une idée particulière. Aux *mots* correspondent soit une chose réelle, c'est-à-dire une idée existante (le mot est alors un *signe*), soit une signification (le mot est alors un *symbole*). Dans l'entendement, le signe se substitue à l'idée et le symbole à la signification. Signes et symboles n'ont pas à ressembler aux choses qu'ils suggèrent; un même signe peut servir pour différentes idées particulières. Ainsi, les *idées générales* ne sont que des signes mis pour plusieurs idées particulières qui se ressemblent lorsqu'on leur porte une attention sélective. Ce dernier point permet à Berkeley de convenir qu'il existe des énoncés universels pourvus de sens, sans qu'il ne soit nécessaire de conférer une existence aux idées générales. En reconnaissant à l'imagination la faculté de passer immédiatement du signe à l'idée et à l'entendement la faculté d'opérer sur des symboles, Berkeley attribue au langage le rôle de transcender la réalité sensible. Les conséquences pour la géométrie sont évidentes: les théorèmes portent sur une idée particulière, mais ils énoncent une vérité générale en faisant voir que le même raisonnement s'applique à chacune des idées particulières représentée par un même signe. Le *raisonnement* est universel, les *idées* sont particulières. Ainsi la géométrie relève-t-elle du raisonnement et non des sens dans l'épistémologie de Berkeley[62].

Les mathématiques

L'épistémologie de Berkeley ne laisse pas de place aux idées abstraites. Or, traditionnellement, les mathématiques ont pour objet la *quantité* et la *figure*, unanimement considérées comme des idées abstraites. Ayant substitué la relation de signification à la relation d'abstraction, Berkeley se voit contraint d'expliquer la nature des signes et leur signification dans les mathématiques. Son nominalisme l'amène à considérer les mathématiques comme un pur langage.

L'arithmétique et l'algèbre: sciences des signes

Locke avait présenté le nombre comme une *idée complexe*, une collection d'unités où l'*unité* est une *idée simple* « sans aucune apparence de variété ou de composition », et qui « se trouve jointe à chaque objet qui frappe nos sens, à chaque idée qui se présente à notre entendement,

[61] Berlioz [2000], p. 112.
[62] Berkeley tient cette position à partir des *Principes*. Dans ses *Carnets*, il écrivait encore « le sens plutôt que le raisonnement et la démonstration devrait être employé à propos des lignes et des figures ». *Carnets*, 466. Voir Berlioz [2000], p. 151.

et à chaque pensée de notre esprit »[63]. Ainsi, Locke considère l'*unité* comme l'idée la plus simple et la plus universelle en même temps que la plus familière, et il fait dériver tous les nombres de la répétition de l'unité.

Pour Berkeley, le caractère subjectif, arbitraire et variable de l'*unité* rend cette notion impropre à en faire l'objet d'une science. Le nombre est une *création de l'esprit*: « c'est ce qui sera évident à celui qui considère qu'une même chose peut porter plusieurs dénominations numériques différentes, selon que l'esprit la regarde sous différents rapports »[64]. Il donne en exemple la longueur d'une ligne qui est tout à la fois un, trois ou trente-six selon qu'on la mesure en yards, en pieds ou en pouces.

Refusant le modèle de Locke, et allant à l'encontre de l'opinion dominante qui fait du nombre une idée abstraite, Berkeley considère les nombres comme des signes dépourvus d'*idées*. Considérant le système de numération décimal, il en relève le caractère syntaxique: tout nombre est symbolisé par une combinaison de caractères (les chiffres de 0 à 9), dont l'agencement est porteur de signification. Ce système de numération constitue un langage (système de signes articulés) dont Berkeley admire la puissance. L'arithmétique et l'algèbre se présentent comme un langage constitué d'un système de signes se combinant selon certaines règles, qui en sont la grammaire. Ces signes ne prennent un sens que dans leur application à des *idées,* dans différents domaines de la science. La science des nombres ne prend donc sens que dans son application. La forme du langage se trouve distinguée de son contenu. Berkeley ne reconnaît aucune finalité cognitive à une science des nombres. Etudier des théorèmes qui concernent des nombres sans égard aux choses nombrées est « juste aussi avisé » que de combiner des mots, de manière formelle, sans intention sémantique:

> « Donc, les théories en arithmétique, si l'on fait abstraction de noms et de chiffres, ainsi que de tout usage et de toute pratique, aussi bien que des choses nombrées particulières, alors, on peut supposer que ces théories n'ont rien du tout pour objet. D'où nous pouvons voir combien la science des nombres se subordonne entièrement à la pratique, et combien maigre et superflue elle devient, quand on la considère comme un sujet de pure spéculation. » Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 385.

L'approche nominaliste de Berkeley prépare les tendances symbolistes du siècle suivant. C'est en effet à constituer l'algèbre en science des signes que les mathématiciens du 19ème siècle travailleront.

La géométrie et l'analyse

La géométrie, selon Berkeley, traite de l'étendue tangible, et les figures géométriques sont des idées tangibles. Les figures visibles sur lesquelles le géomètre porte son attention constituent les signes naturels entrant dans le langage de la géométrie, signes qui suggèrent naturellement et immédiatement une figure tangible. Berkeley met en évidence là aussi la présence d'un langage, d'un système de signes destinés au discours, distinct de l'objet du discours.

L'*analyse* est une branche de la géométrie, Berkeley la qualifie de « géométrie absconse», qui repose sur l'hypothèse de l'infinie divisibilité de l'étendue tangible. Berkeley examine, à la lumière du « Nouveau Principe », le problème, relatif à cette hypothèse, de la notion de *quantité infiniment petite*. Les *philosophes modernes* nous égarent en s'égarant eux-mêmes, assène-t-il, et il leur reproche d'utiliser « plus d'un terme dont la signification est extrêmement abstraite et obscure »[65], comme celui de *quantité infiniment petite*. Les mathématiciens ne sont pas à l'abri des erreurs qu'engendre l'emploi d'un signe sans signification, poursuit-il. Il le montre dans *The Analyst* (1734), une « Dissertation adressée à

[63] Locke [1998 (1690)], p. 155.
[64] Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 325.
[65] Berkeley [1987 (1721)], vol. 2, p. 155.

un mathématicien incrédule, où l'on examine si l'objet, les principes et les inférences de l'Analyse moderne sont conçus plus distinctement, ou déduits avec plus d'évidence que les Mystères de la religion et les règles de la Foi »[66]. Cet écrit est une attaque violente contre Halley. Son but est de démasquer les analystes: ces hommes si admirés sont des prestidigitateurs dont les raisonnements ne sont que purs sophismes. Ils possèdent un savoir-faire qui ne les éclaire en rien sur les mystères de la vie. En particulier l'irréligion et le libertinage d'un *analyste* sont ceux d'un homme ordinaire. Tel est le message que Berkeley veut faire passer. Par delà le but poursuivi, il pose des questions fondamentales sur la nature des entités mathématiques et à la logique même du calcul des fluxions, qui l'amènent à dénoncer le manque de fondements de l'analyse, qu'il s'agisse du calcul des fluxions ou du calcul différentiel.
L'attaque de Berkeley concerne l'usage des symboles dans le calcul des fluxions. Un symbole est utile lorsqu'il est mis pour quelque chose, dit-il. Or « trop souvent les hommes s'en font accroire à eux-mêmes et aux autres, comme s'ils concevaient et comprenaient des choses exprimées par des signes, alors qu'en vérité, ils n'ont aucune idée, sauf celle de ces signes eux-mêmes»[67]. Berkeley ne nie pas qu'il soit possible de raisonner sur des signes dépourvus de signification, il nie qu'on accède à des vérités par ce biais:

> « Rien n'est plus facile que d'attribuer des noms, des signes ou des expressions à ces fluxions, et il n'est pas difficile de calculer et d'effectuer des opérations au moyen de tels signes. Mais on trouvera beaucoup plus difficile d'oublier les signes et de garder cependant dans nos esprits les choses qu'ils sont censés représenter. » Berkeley [1987 (1734)], vol. 2, p. 316.

Pour celui qui avoue utiliser les fluxions sans se contraindre « à concevoir avec précision les vitesses, incréments et infinitésimaux » ou « toute autre idée de cette sorte d'une nature si délicate, subtile et évanouissante»[68], Berkeley n'a qu'une réplique:

> « Mais alors, on doit se rappeler que, dans ce cas, bien que l'on puisse passer pour un homme de l'art, calculateur ou analyste, on ne peut cependant, à juste titre, être tenu pour un homme de science et de raisonnement. Et l'on ne doit pas s'imaginer qu'après avoir été familier de cette obscure analyse, ses facultés rationnelles soient rendues meilleures que celles des autres hommes qui ont été entraînés de manière différente et sur des sujets différents; et encore moins doit-on se poser en juge et en oracle sur des sujets qui n'ont aucune espèce de liaison ou de dépendance avec ces notations algébriques, symboles ou signes au maniement desquels on est si familier et si habile. » Berkeley [1987 (1734)], vol. 2, pp. 310-311.

Le calcul des fluxions, « la clé universelle à l'aide de laquelle les mathématiciens modernes révèlent les secrets de la géométrie et, par suite, de la Nature »[69], est, selon Berkeley, une construction provisoire et sans solidité:

> «En vérité, il y a des raisons de craindre que toutes les tentatives pour fonder la géométrie absconse et subtile sur une base légitime et éviter la doctrine des vitesses, moments etc., se révéleront vaines jusqu'au jour où l'objet et le but de la géométrie seront mieux compris qu'il ne semble l'avoir été jusqu'ici. Le grand auteur de la méthode des fluxions sentit cette difficulté, et c'est pourquoi il s'abandonna à ces abstractions subtiles et cette métaphysique géométrique sans lesquelles, il le voyait bien, on ne pourrait rien faire à partir des principes reçus; le lecteur sera juge de la qualité des démonstrations qu'il put effectuer avec leur aide. A la vérité, on doit reconnaître qu'il employa des fluxions, comme on emploie un échafaudage pour une construction, comme de choses à laisser de côté ou dont il faut se débarrasser dès qu'on a trouvé des lignes finies qui leur sont proportionnelles. Mais alors ces

---

[66] Sous-titre que Berkeley a donné à son ouvrage.
[67] Berkeley [1987 (1734)], vol. 2, p. 314.
[68] Berkeley [1987 (1734)], vol. 2, p. 310.
[69] Berkeley [1987 (1734)], vol.2, p. 273.

> intermédiaires finis sont trouvés à l'aide des fluxions. Donc, tout ce qui est obtenu au moyen de ces intermédiaires et de ces proportions doit être attribué aux fluxions: on doit donc d'abord les comprendre. Que sont ces fluxions? Les vitesses des incréments évanouissants, et que sont ces mêmes incréments évanouissants? Ce ne sont ni des quantités finies, ni des quantités infiniment petites, ni pourtant rien. Ne pouvons-nous les appeler les fantômes des quantités défuntes? » Berkeley [1987 (1734)], vol. 2, pp. 313-314.

En résumé, les critiques formulées par Berkeley, qui concernent aussi bien le calcul des fluxions que le calcul différentiel, portent sur trois points:

1. Il conteste l'existence des *quantités infinitésimales*: nos sens ne percevant pas de corps plus petits qu'une certaine limite, Berkeley est assuré qu'il n'existe pas d'idées plus petites qu'une certaine limite. L'étendue, objet de la géométrie, n'est pas infiniment divisible, nos sens en témoignent.

2. Il montre que le calcul est approximatif: examinant le raisonnement mis en œuvre dans l'arithmétique des infiniment petits, il donne une explication, qu'il tient pour une démonstration, qui vise à montrer que le calcul des infinitésimaux contient une double erreur. Ces erreurs passent inaperçues, car elles sont de même grandeur et de signe contraire. Elles se compensent exactement. Il n'en reste pas moins que ce calcul est un calcul d'approximation, que Berkeley ne peut concevoir comme faisant partie des mathématiques[70].

3. Il met en doute la logique du passage à la limite: l'explication courante selon laquelle une quantité infinitésimale, bien que non nulle, peut être remplacée par une quantité nulle dans une équation sans changer la validité de l'équation[71] semble obscure à Berkeley, et on ne peut que lui donner raison. Il interprète l'opération du passage à la limite comme un changement d'hypothèse: le calcul commence sous l'hypothèse d'une quantité non nulle, puis brusquement, dit-il, on la suppose nulle. Il appelle cela un « sophisme »[72].

La nature du mouvement et la nature du temps

Dans le *De Motu* (1721), Berkeley s'interroge sur la possibilité d'une science du mouvement abstrait. « Le mouvement ne se présente jamais à nos sens sans la masse corporelle, l'espace et le temps »[73], remarque-t-il. En « physique », où « règnent les sens et l'expérience », on ne peut atteindre que les « effets apparents »[74]. Par l'expérience, seul l'effet d'un mouvement peut être connu. Le *mouvement abstrait* ne peut être perçu. L'idée du mouvement abstrait n'a donc pas d'existence.

---

[70] Dans son argumentation, Berkeley utilise les expressions différentielles pour désigner tantôt la valeur de la limite, tantôt l'expression dont il s'agit de prendre la limite. Cette confusion est générale au temps de Berkeley. Les symboles utilisés pour l'expression dont il s'agit de prendre la limite et ceux représentant la limite atteinte n'étaient pas différenciés, et les critiques de Berkeley sont en partie justifiées.

[71] La quantité infiniment petite a un statut intermédiaire entre la quantité nulle et les quantités non nulles.

[72] Remarquons que Berkeley ne rejette pas pour autant la technique de l'analyse. Il lui suffit que « les mathématiciens abdiquent leur prétention à l'évidence dans les principes, à la rigueur dans les démonstrations, qu'ils renoncent à vouloir régenter les profanes au nom de leur infaillibilité» (Brunschvicg [1993], p. 195). Les mathématiciens possèdent un savoir-faire, qui, à l'expérience, s'est révélé utile.

[73] Berkeley [1987 (1721), vol.2, p. 169.

[74] Berkeley [1987 (1721), vol. 2, p. 181.

Le mouvement est relatif par nature, continue-t-il, et on ne peut le concevoir sans que les corps en relation ne soient donnés[75]. Les mesures de l'effet du mouvement sont relatives, basées sur une distance et une durée. Le *mouvement absolu* ne peut être perçu. L'idée du mouvement absolu n'a donc pas d'existence.
Le point essentiel que je retiens ici est que Berkeley lutte pour séparer un concept physique (les *mouvements d'un corps*) d'un concept métaphysique (*corps en mouvement*) : la mécanique, dit-il, s'occupe des lois du mouvement, alors que la métaphysique traite des causes. Il se bat pour dire que le concept de « mouvement » dont il est question en mécanique est une construction de l'esprit humain et que les lois du mouvement sont une « hypothèse mathématique »[76]. Il en résulte que cette science n'a pas de portée autre que pratique. La métaphysique en revanche fait connaître l'auteur des lois du mouvement, et de cette connaissance naissent, selon lui, les considérations les plus sublimes[77]. Ainsi, les connaissances acquises par l'étude de la mécanique ne sont pas de même nature que la « Connaissance » du métaphysicien.
D'un point de vue métaphysique, le *mouvement d'un corps* n'est pas autre chose qu'un *corps en mouvement*. Selon cette perspective, un corps en mouvement est un corps existant dans différentes parties de l'espace. Il n'est pas de nature différente d'un corps au repos existant dans différentes parties du temps et la cause de l'existence d'un corps en mouvement est la même que celle de l'existence d'un corps au repos.

> « Et il semble en effet qu'il ne faut pas chercher d'autre cause de l'existence successive d'un corps dans différentes parties de l'espace que celle d'où l'on fait dériver l'existence successive de ce corps dans différentes parties du temps. » Berkeley [1987, (1721)], vol. 2, p. 166.

L'expression choisie par Berkeley pour parler d'un « corps en mouvement » suggère une représentation stroboscopique du mouvement. Elle n'est pas sans rappeler une métaphore utilisée par Locke pour expliquer la notion du temps:

> « Qu'on juge après cela, s'il n'est pas fort probable, que pendant que nous sommes éveillés, nos idées se succèdent les unes aux autres dans notre esprit, à peu près de la même manière que ces Figures disposées en rond au dedans d'une Lanterne, que la chaleur d'une bougie fait tourner sur un pivot. » Locke [1998 (1690], p. 137.

Cette citation suggère que la pensée se décompose en une succession de scènes où tout est immobile. Pour Locke comme pour Berkeley, le temps est la succession de nos idées. Berkeley exprime sa perplexité quant à l'idée d'un temps universel et continu:

> « Pour mon compte, quand et toutes les fois que je tente de me former une idée simple du temps, abstraite de la succession des idées dans mon esprit, coulant de façon uniforme et à laquelle tous les êtres participent, je me perds et m'embrouille dans d'inextricables difficultés. Je n'en ai aucune notion du tout. Seulement, j'entends les autres dire que le temps est divisible à l'infini, et ils en parlent de telle manière qu'ils m'amènent à entretenir des pensées bizarres concernant mon existence. » Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 370.

En résumé, d'une part l'appréhension d'un temps objectivé et continu pose problème et d'autre part l'*idée* du mouvement séparé de ce qui est mû n'a pas d'existence. Dès lors se pose la question de la nature d'une science qui traite d'*idées* qui, n'étant pas perçues, n'ont pas d'existence. Berkeley répond à cette question en disant que la connaissance physique n'est pas de même nature que la connaissance métaphysique. En mécanique, on cherche la raison du mouvement, on propose une explication commode pour l'esprit humain, des lois qui

---

[75] Berkeley [1987 (1721), vol. 2, p. 176.
[76] Berkeley [1987 (1721), vol. 2, p. 160, 164.
[77] Berkeley [1987 (1721), vol. 2, p. 169.

permettent de décrire de manière concise et générale un grand nombre de phénomènes particuliers. En métaphysique en revanche, on cherche à connaître les causes des phénomènes, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à l'auteur des lois de la nature.

Importance de la critique de Berkeley pour l'épistémologie des mathématiques

Toutes les théories de la connaissance en vigueur au début du 18ème siècle, comportent des présupposés de nature ontologique: pour le dire simplement, la connaissance a pour objet l'existence. Cette croyance ne limite-t-elle pas la pulsion épistémologique à une quête ontologique ? Ou, pour le dire autrement : comment la science du *mouvement* peut-elle s'insérer dans ce paradigme épistémologique? Les critiques formulées par Berkeley à l'encontre de l'analyse et des doctrines qui admettent l'existence des idées abstraites ainsi que les questions qu'il se pose au sujet d'une science du mouvement mettent en lumière, me semble-t-il, des liens profonds entre théorie de la connaissance, science, mathématiques et logique. En bref, la science du mouvement ne requiert-elle pas un élargissement du cadre de la pensée ? Brunschvicg semble le suggérer lorsqu'il affirme:

> « La philosophie traditionnelle n'avait pas de cadre pour recevoir la forme de pensée que l'humanité venait de conquérir. » Brunschvicg [1993], p. 192.

Plus précisément, il convient d'examiner par quelle opération de l'esprit l'on passe de la conception de la *chose mue* à la conception du *mouvement*? Cette question s'adresse à la logique.

Dans la logique traditionnelle[78], on reconnaît, mis à part la négation, deux opérations : joindre et séparer. L'une est à la base de la généralisation et l'autre à la base de l'abstraction. Les relations entre termes sont du type contenir ou être contenu. Par ailleurs, tout énoncé se réduit à une forme simple: un sujet relié à un prédicat par la copule « est ». Les termes du sujet et du prédicat sont soit des universaux, soit des particuliers. Ces opérations, ces relations et cette structure syntaxique permettent de formaliser le discours d'une science dont l'objet est l'*être*. Elles conviennent pour établir des classifications des *choses* existantes. Mais suffisent-elles pour énoncer des lois de la nature?

Dès le début du 16ème siècle, le courant humaniste a dénoncé l'incapacité de cette logique à organiser la connaissance des *faits*, des *mouvements et transformations* du monde. Le langage formel élémentaire permet de parler de ce qui *est*, mais comment dire ce qui *se passe* ? Comment classer des *événements* ? On a eu alors l'idée que la nature parlait dans le langage des mathématiques et on a demandé aux mathématiques d'apporter les outils formels nécessaires à la nouvelle science. La difficulté ne fut cependant que contournée. Les mathématiciens ont eu recours à l'*analyse* comme méthode de raisonnement pour résoudre les questions de mécanique; ils ont introduit de nouveaux objets, les *fonctions*, des entités qui ne s'obtiennent ni par généralisation, ni par abstraction. Berkeley dénonce le manque de fondement de l'analyse.

Brunschvicg met en évidence le point fondamental, reconnu et formulé par Boole, qui obligera à élargir la logique et les mathématiques:

> « La logique ne s'occupe pas seulement des relations entre les choses; elle s'occupe des relations entre les faits. Or les faits s'expriment par des propositions: *si le soleil est totalement éclipsé, les étoiles deviendront visibles*.» Brunschvicg [1993], p. 378.

---

[78] La logique traditonnelle comprend la syllogistique et le calcul des classes.

Or un *fait* n'est pas une chose, mais est une relation entre des choses, et il s'énonce au moyen d'une proposition et non d'un terme. Une conséquence est que la logique doit s'occuper de propositions qui énoncent des relations entre des propositions (et pas seulement entre des termes). Un détour par l'*Analyse Géométrique des Anciens* s'avère éclairant. On y découvre le raisonnement auquel recouraient les Anciens pour généraliser avec méthode une *relation*. J'examinerai cette méthode appliquée à la géométrie dans la deuxième partie de ce travail et dans la troisième partie, je montrerai qu'elle est aussi à l'œuvre dans l'analyse algébrique. En examinant l'œuvre des algébristes anglais, il apparaîtra que la construction intellectuelle qu'il y a lieu de faire pour passer de la *chose mue* au *mouvement* est analogue à celle qui permet de passer de la *quantité calculée* (résultat d'une opération) à l'*opération* (fonction). Ces deux constructions relèvent du « mouvement de l'intelligence »[79] que Brunschvicg voit à l'œuvre à partir de Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716]. Elles relèvent d'une logique des relations.
La critique de Berkeley est donc, selon moi, cruciale. Elle indique les limites d'une épistémologie réaliste naïve pour les mathématiques et celles d'une logique élémentaire. Elle suggère qu'une adaptation des structures épistémiques (les théories concernant les relations entre pensée et réalité) et des structures d'organisation (la logique et les mathématiques) est nécessaire pour que les scientifiques puissent procéder à l'organisation de la connaissance des faits, à la formulation des lois de la nature. La *philosophie de l'esprit* des philosophes du « Sens Commun » s'inscrit dans ce processus d'adaptation. Elle prélude à l'élargissement du cadre de la pensée contemporaine.

[79] Brunschvicg [1993], p. 208.

PARTIE I: Philosophie de l'esprit humain dans l'« École Ecossaise du Sens Commun »

L'importance de Berkeley est d'avoir examiné la philosophie du calcul infinitésimal. Ses critiques ont mis en évidence ceci: l'*analyse* requiert un cadre de pensée que la philosophie traditionnelle ne peut lui fournir.
Le discours épistémologique se poursuit en Grande-Bretagne, avec l'œuvre de Hume. *A Treatise of Human Nature* (1739), puis *An Inquiry concerning Human Understanding* (1748), prolongent les théories de la connaissance de Locke et Berkeley. Au terme de ces deux ouvrages, Hume conclut que l'homme n'a pas la faculté d'accéder à la *vérité* sur une grande variété de questions tenues jusque là pour décidées.
La critique de Hume eut des conséquences importantes. La réponse de Kant, tiré de son célèbre sommeil dogmatique, est bien connue. Il est un autre philosophe, compatriote de Hume, qui se sentit appelé à réagir à cette critique: Thomas Reid [1710-1796], le fondateur de l'« École Écossaise du Sens Commun ».
Influencé par l'empirisme idéaliste de Berkeley, interpellé par la critique de Hume, Reid s'engage dans une réflexion sur les fondements de la connaissance. Convaincu du rôle actif de l'esprit, il admet l'existence de facultés opératoires inhérentes à l'esprit. Au cœur de sa philosophie se trouve l'analyse du concept d'*opération de l'esprit*. Je m'attarde sur ses efforts pour distinguer ce qui était jusque là confondu, à savoir *opération* et *objet de l'opération*. Qu'il parvienne à isoler le concept d'*opération* comme une entité distincte de son objet est d'une importance cruciale. On verra, dans la troisième partie, les « algébristes anglais », confrontés à un problème similaire, prendre conscience de l'existence des opérations en mathématiques, qui, jusqu'alors, étaient passées inaperçues, confondues qu'elles étaient avec leurs objets.
Deux autres philosophes de cette école retiennent mon attention pour les idées qu'ils ont exprimées en ce qui concerne les mathématiques: Dugald Stewart [1753-1828] et Sir William Hamilton [1788-1856]. On trouve dans les textes de Stewart les germes d'une épistémologie des mathématiques caractéristique de la période « moderne récente ». Ce philosophe pose la *philosophie de l'esprit* comme fondement de toutes les sciences. La « science » en tant que système de connaissances est théorisée, sa signification est définie: l'objet de la science est d'appréhender la *réalité actuelle*, et son but est de guider les hommes, afin que leurs actes soient ajustés à leurs intentions. Le langage apparaît comme une structure organisatrice des connaissances. La logique et les mathématiques s'établissent comme des langages formels propres à structurer la connaissance *scientifique*. Dans l'œuvre de Sir William Hamilton, on trouve une réflexion sur la place de la logique qui en annonce la renaissance.
Dans cette première partie, j'expose les éléments de la philosophie de l'esprit telle qu'elle se développe dans les écrits de ces trois philosophes. Dans le premier chapitre, je situe l'« École Écossaise du Sens Commun » dans son contexte, et je résume quelques éléments biographiques des trois philosophes qui nous occupent dans cette première partie. Dans le deuxième chapitre, je discute de l'analyse des facultés de l'esprit que propose Reid, de leurs opérations et de leurs objets. J'examine dans le chapitre 3 le nominalisme de Stewart. Ce dernier s'interroge sur le rôle du langage dans l'activité de pensée, et sur la possibilité d'une mécanisation du raisonnement au moyen d'un langage formel. Dans le chapitre 4, je traite de

la question de la nature de la vérité telle qu'exposée par chacun de ces trois philosophes. La position de Stewart quant à l'applicabilité des mathématiques aux sciences fait l'objet du chapitre 5. Dans le chapitre 6, je discute du regard critique que Stewart porte sur la nature de la science, son objet, sa méthode et sa logique. Le chapitre 7 est consacré à la question de la place et du rôle de la logique relativement aux sciences et aux mathématiques, telle que Stewart et Sir William Hamilton l'envisagent. Le chapitre 8 conclut cette première partie.

Chapitre 1. L' « École Écossaise du Sens Commun »

L'« École Écossaise du Sens Commun » prend naissance au milieu du 18ème siècle, à Aberdeen, avec Thomas Reid [1710-1796]. Son influence grandit rapidement. Au début du 19ème siècle, elle s'étend à la France, avec et Pierre Paul Royer-Collard [1763-1845], Victor Cousin [1792-1867] et Théodore Simon Jouffroy [1796-1842], puis aux Etats-Unis. Elle connaît ensuite un rapide déclin.
La philosophie de Reid se définit comme une réponse au scepticisme de Hume. Elle présente avec la philosophie de Kant « de frappantes analogies », que Cousin a signalées à plusieurs reprises. Pour lui, « Reid est incontestablement un des plus grands connaisseurs de la nature humaine qu'il y ait jamais eu, et, avec Kant, le premier métaphysicien du dix-huitième siècle »[80].
La philosophie de l'« École Écossaise » est caractérisée par trois éléments que l'on retrouve, séparément ou ensemble, chez chacun des philosophes affiliés à cette école[81]:

- C'est une philosophie issue de l'observation. Les philosophes écossais utilisent l'introspection pour connaître leur propre pensée.
- Elle limite son champ d'investigation aux phénomènes de la conscience, et place le langage au cœur de ses recherches.
- Elle vise à décrire l'esprit humain dans ce qu'il a d'universel, à en atteindre les principes fondamentaux, inhérents à sa constitution. Ces principes ont reçu pour nom *principes du sens commun*, *lois de croyance fondamentale* ou encore *conditions a priori*. Ils ne sont pas des faits dont la connaissance serait innée, ils sont des *règles de fonctionnement de la pensée*.

La philosophie écossaise est une philosophie critique. Elle postule que l'esprit humain, intermédiaire obligé entre le monde mental et le monde matériel, fonctionne selon des principes universels et qu'il existe des lois régulatrices de l'activité de l'esprit. Elle s'appuie pour ce postulat sur le constat que les actions des hommes sont en partie prévisibles. Elle a voulu limiter l'ambition du raisonnement: il n'est pas du ressort de la raison de légitimer la validité de son propre fonctionnement. Le fait que nos connaissances sont vraies repose sur des *axiomes,* les *axiomes du sens commun.* Ces axiomes sont choisis pour leur caractère d'*évidence universelle.* L'évidence est critère de choix. Le terme *axiome* est à prendre dans le sens de *demande:* Reid, adoptant une position qui peut être décrite comme pragmatique, demande que l'on accepte de croire que les axiomes qu'il propose sont *vrais*, sans qu'on lui demande de le prouver. Il donne (sans s'en rendre compte) un sens relatif au mot « vrai »: est vrai ce qui est obtenu par un usage adéquat (conforme au plan de Dieu) de notre esprit. Le « sens commun » et le consensus qui l'entoure jouent dès lors un rôle épistémologique fondamental. Car, selon l'argument de Reid, ce qui est évident pour tous ne peut résulter d'une utilisation inadéquate de notre esprit. Or, les représentations que nous nous forgeons en

---

80 Cousin [1857], *Philosophie écossaise*, p. ix.
81 McCosh [1966 (1875)], *The Scottish Philosophy: Biographical, Expository, Critical, from Hutcheson to Hamilton.*

utilisant adéquatement l'instrument que Dieu nous a donné à tous pour connaître le monde sont conformes à la volonté divine. C'est en ce sens qu'il les dit *vraies*. Que notre représentation du monde soit une copie fidèle du monde réel est une question hors de notre portée et secondaire. L'important est que les hommes s'accordent, et pour cela il suffit que les procédés des facultés cognitives soient universels (identiques pour tous). Reid a ainsi rompu avec la spéculation métaphysique et l'impossible quête de l'assurance d'une conformité exacte entre la chose et l'idée.
A la suite de Berkeley, les philosophes écossais postulent l'existence d'une faculté essentielle à la possibilité de penser: celle d'user de signes. Le *signe* est distinct de la *chose* et distinct de l'*idée*, mais l'esprit a la faculté de passer immédiatement de la chose au signe et du signe à l'idée, et inversement. Cette faculté est inhérente à l'esprit et sur elle est fondée la possibilité du langage. L'esprit substitue à la chose et à l'idée le mot, signe arbitraire et sans ressemblance ni avec la chose, ni avec l'idée.
Il est un autre postulat nécessaire à la possibilité d'une philosophie de l'esprit: l'esprit a la faculté de connaître son propre fonctionnement et de l'expliciter. Cette faculté est fondamentale. C'est sur elle que repose la possibilité d'élaborer la ou une logique. Se dessine alors la possibilité d'une *nouvelle logique*, fondée sur la philosophie de l'esprit, et secondée par un langage formel, inspiré du formalisme algébrique naissant. Stewart s'en fait l'intercesseur.

1.1 Thomas Reid [1710-1796]

Thomas Reid, à ses débuts, avait embrassé l'idéalisme de Berkeley. Il confesse qu'il s'était tranquillement résigné à voir disparaître le monde matériel. Mais il ne put se résoudre à voir disparaître l'esprit dans la même orientation critique, sous la plume de Hume[82]. Sa réponse vient vingt-cinq ans après le *Treatise of Human Nature* sous le titre *An Inquiry into the Human Mind on the Principles of Common Sense* (Reid [1970 (1764)]). Cette même année 1764, Reid est nommé professeur de philosophie morale, à Glasgow, comme successeur d'Adam Smith [1723-1790]. Durant ses années de professorat, il ne publie plus rien. Ce n'est qu'après s'être retiré de ses fonctions d'enseignement qu'il reprend la plume. Dans ses *Essays on the Intellectual Powers of Man* (Reid [1969 (1785)]), il développe avec précision et système la *philosophie de l'esprit humain*, en préparation dans l'*Inquiry*, comme une *théorie de la connaissance.* Il décrit les principes et facultés de l'esprit, les déployant en une *psychologie* qui contient une *théorie de la perception*[83]. Elle s'articule selon deux grands axes: d'une part une réfutation catégorique de la « théorie des idées », par quoi il entend toute théorie selon laquelle les idées seraient les *objets immédiats de la perception*, et d'autre part une invincible conviction qu'on doit s'abandonner à certaines croyances fondamentales, sans exiger de preuve. Le « sens commun » joue un rôle fondamental dans la théorie de la connaissance de Reid, où l'expression « sens commun (*common sense*)» désigne une rationalité commune, découlant de lois de fonctionnement constitutives de l'esprit humain[84].
Je retiens de lui les points suivants:

- Il dynamise le monde intellectuel, en définissant la pensée comme un acte, et il donne un statut « d'existence sans existence » au monde intérieur de l'homme, en faisant des « créatures » de l'entendement des objets de connaissance.

[82] Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 1, pp. 395-396.
[83] Schulthess [1983], p. 359.
[84] Schulthess [1983], pp. 14-15.

- Il élabore une théorie des langages naturels dans laquelle l'influence de Berkeley se fait clairement sentir: la faculté d'user de signes se trouve au cœur de la possibilité de connaître.
- Il ouvre la porte à la *relativité* de la connaissance en définissant une *croyance générale* comme étant vraie pour autant qu'elle soit en accord avec la notion qu'en ont les autres hommes. Bien que lui-même reste convaincu de l'*absolu* de la vérité, il fait de la connaissance une œuvre entièrement façonnée dans et par l'esprit de l'homme, sans modèle préexistant. L'adéquation de notre connaissance à la réalité reste d'origine divine: Dieu a donné à l'homme, les outils qui lui permettent de construire sa représentation du monde conformément à la réalité de celui-ci.

Reid a conféré au « sens commun » un rôle épistémologique fondamental. Il a créé une brèche dans le *réalisme naïf* caractéristique de l'épistémologie traditionnelle, et ouvert la route du *réalisme critique* qu'on verra se développer dès le 19ème siècle.

1.2 Dugald Stewart [1753-1828]

Dugald Stewart, disciple de Reid, est le fils de Matthew Stewart, professeur de mathématiques à Edimbourg de 1747 à 1772, et géomètre de renom[85]. En 1772, Dugald Stewart remplaça son père malade. Il tint la chaire de mathématique jusqu'en 1785. Il fut alors nommé à la chaire de philosophie morale. Son influence fut considérable. On venait en nombre, non seulement d'Écosse, mais d'Angleterre, de France, d'Allemagne et même des Etats-Unis, pour suivre ses cours. Il était étudié en France, en Suisse, en Italie, à Cambridge et à Oxford. Jusqu'au milieu du 19ème siècle, il était considéré comme le plus grand représentant de l'« École Écossaise du Sens Commun » de son temps. Sa popularité s'éteignit brusquement vers le milieu du 19ème siècle, et de nos jours, ce philosophe est négligé des historiens de la philosophie[86].
Les œuvres complètes de Dugald Stewart ont été réimprimées récemment, en onze volumes, avec une introduction qui souligne l'importance majeure de Stewart dans de nombreux domaines (Haakonssen [1994]). Je me référerai principalement à *Elements of the Philosophy of the Human Mind,* (vol. 1: 1792; vol 2: 1814; vol. 3: 1827)[87]. Une traduction française des *Elements* a été réalisée par Pierre Prevost [1751-1839], savant genevois, membre de la *Royal Society of Edinburgh* et ami de Stewart. La traduction de Prevost est parfois approximative, raison pour laquelle j'ai préféré me référer au texte anglais. Toutes les citations sont tirées des œuvres complètes en anglais.
Des *Elements* je retiendrai les points suivants qui marquent une étape dans le développement de la pensée mathématique[88]:

- Stewart s'interroge sur le rôle du langage pour la pensée. Considérant que le langage est un instrument de la pensée, il parvient à définir un statut d'existence logique, différent du statut d'existence métaphysique.

---

[85] Disciple de Simson, Matthew Stewart contribue à la restauration des livres d'Euclide sur les *porismes* appartenant à l'*Analyse Géométrique des Anciens*. Il prolonge la doctrine en énonçant une cinquantaine de théorèmes généraux (Stewart Matthew [1746], *Some General Theorems of Considerable Use in Higher Parts of Mathematics*). La généralité de ces théorèmes rend leur démonstration très difficile. Voir partie 2, chapitre 10.
[86] Tannoch-Bland [2000], pp. 2-8, donne les références récentes qui tendent à reconsidérer l'importance de ce philosophe. Voir aussi Macintyre [1983].
[87] Les *Elements* ont été publiés en trois volumes. Ils se trouvent dans *The Collected Works of Stewart Dugald* II (vol. 1), III (début du vol. 2) et IV (fin du vol. 2 et vol. 3). Stewart [1994, (1792;1814;1827)].
[88] Pont [2001], p. 117.

- Il distingue clairement deux sortes de vérités premières: d'une part les *vérités de faits*, qui sont des données à partir desquelles se déroule toute science. Aristote les nommait *axiomes,* Stewart les nomme *principes premiers de la raison*. D'autre part, les *éléments premiers de la raison* sont les lois qui règlent le fonctionnement de l'esprit (*fundamental laws of belief*).

- Il se distancie de Reid en affirmant que les mathématiques sont d'une autre nature que la philosophie naturelle. La vérité mathématique est *conditionnelle*[89] et n'affirme que la filiation *logique* entre une proposition supposée vraie et une conséquence.

- Il affirme que les sciences naturelles ont un statut fondamentalement différent des mathématiques. La démonstration est le seul critère de vérité en mathématiques, alors qu'en sciences naturelles le critère de vérité est l'observation d'un fait. La méthode propre à la science naturelle est l'expérimentation. Il s'oppose à Reid quant au rôle de l'hypothèse et de l'analogie dans la méthode expérimentale.

- Il demande la constitution d'un système de logique rationnelle, qui, en énonçant des règles générales de l'*art de philosopher,* serait un outil d'une puissance remarquable pour l'avancement des sciences. La nouvelle logique à laquelle il aspire présente, avec le projet leibnizien, une ressemblance frappante.

En dénonçant l'insuffisance de la logique aristotélicienne et en proposant une nouvelle logique, tout à la fois langage philosophique inspiré du formalisme algébrique et méthode scientifique, Stewart aide le lecteur actuel à comprendre comment la bifurcation entre algèbre et logique s'est concrétisée en Grande-Bretagne dans la deuxième moitié du 19ème siècle.

1.3 Sir William Hamilton [1788-1856]

Sir William Hamilton est une figure particulière dans « l'École Écossaise ». Il est gradué de l'Université d'Oxford, qui traditionnellement considère que la logique a valeur de fondement de la connaissance[90]. Sa connaissance des philosophes et logiciens du passé lui permet de situer les différents courants philosophiques dans une perspective historique, et de lire la démarche de Hume comme une étape nécessaire du développement de la pensée[91].
Il est l'auteur de quatre articles qui sont des critiques de publications parues en France ou en Grande-Bretagne. Ces articles ont paru dans l'*Edinburgh Review*:

- « On the Philosophy of the Unconditioned » (1829) est une critique du *Cours de l'histoire de la philosophie* de Cousin,

- « On the Philosophy of Perception » (1830) est une critique de la traduction française de l'œuvre de Reid par Jouffroy,

- « On the Logic » (1833) est une critique sévère de *Elements of Logic* (1826) de Richard Whately [1787-1863], professeur à l'Université d'Oxford[92],

---

[89] Stewart emploie les deux qualificatifs *hypothétique* ou *conditionnel* pour caractériser la nature de la vérité mathématique. Stewart [1994 (1814)], p. 115 (note 1), et p. 153.
[90] Durand-Richard [2001], p. 327.
[91] Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 1, Appendix B.
[92] Les *Elements of Logic* (Whately [1988 (1826)]) furent bien accueillis à l'époque de leur publication, en témoigne le nombre de rééditions. L'exposé que Whately donne de la logique est traditionnel et sans innovation. Il n'en reste pas moins que l'intérêt que ce traité suscita chez ses contemporains pour une science souvent considérée comme sans intérêt pour les scientifiques du 19ème siècle joua un rôle important. John Stuart Mill [1806-1873], vingt ans plus tard, en témoigne :« a writer who has done more than any other person to restore this

- « On the Study of the Mathematics as an Exercice of the Mind » (1836) est un article dans lequel il exprime son désaccord avec l'opinion traditionnelle, défendue par William Whewell [1794-1866], selon laquelle les mathématiques servent à « former l'esprit ».

Ces quatre articles le firent connaître en France et plus largement en Europe. Ils furent traduits en français par Jean Louis Hypolite Peisse [1803-1880] et réunis sous le titre de *Fragments de philosophie écossaise* (Sir William Hamilton [1840])[93].
En éditant les œuvres complètes de Reid et de Stewart, Sir William Hamilton donna, par ses nombreuses notes et commentaires, sa place à la philosophie du « Sens Commun », qui a selon lui «prouvé que l'intelligence suppose des principes qui, étant les conditions de son activité, ne peuvent être des résultats de son exercice »[94].
En 1836, Sir William Hamilton est nommé à la chaire de philosophie et logique à l'Université d'Edimbourg. Son cours est publié après sa mort sous le titre *Lectures on Metaphysic and Logic* (Sir William Hamilton [1970 (1859)]). Sir William Hamilton est l'un des premiers à avoir repoussé « l'anathème lancé contre l'étude de la logique par presque toutes les écoles modernes en France, en Angleterre, et en Italie, depuis Francis Bacon [1561-1626], et replacé la dialectique au rang élevé qu'elle occupa jadis comme la clef et le lien de toutes les sciences»[95]. Il développa une théorie de la quantification du prédicat, qu'il enseigna à ses étudiants dès 1845-46, et dont certains fragments sont publiés en appendice du volume 4 des *Lectures*. De Morgan [2002 (1847)], sans avoir eu connaissance des travaux de Sir William Hamilton, propose lui aussi de quantifier le prédicat. Une querelle de priorité éclata publiquement entre les deux hommes, querelle à l'origine des travaux de Boole[96].
Je retiendrai de Sir William Hamilton les points suivants:

- Il a précisé la séparation entre la logique, les mathématiques, la philosophie, la psychologie et la métaphysique.
- Il a contribué au développement de la logique symbolique dans sa phase préliminaire.

Sir William Hamilton, par son approche de la philosophie et de la logique, eut une influence considérable sur toute une génération. Puis, éreinté par John Stuart Mill, dépassé par les rapides progrès de la logique, il fut oublié. De nos jours, il est souvent considéré comme un terne philosophe de peu d'importance[97]. Signalons toutefois qu'en préface des *Lectures*, Wolf [1970, p. 6] n'hésite pas à le présenter au contraire comme l'un des précurseurs de la logique formelle.

---

study (logic) to the rank from which it had fallen in the estimation of the cultivated class in our own country ». *System of Logic Ratiocinative and Inductive*, in *Collected Works*, vol. 7, p. 4.

[93] Les titres français de ces articles sont: « Philosophie de l'absolu », « Théorie de la perception », « Logique », et « De l'étude des mathématiques ». Je donnerai les citations extraites de ces articles dans la traduction française, qui m'a paru suffisamment fidèle au texte original. Les citations de *Lectures* seront quant à elles en anglais.

[94] Sir William Hamilton [1840], p. 4, « Philosophie de l'absolu », in *Fragments*.

[95] Peisse [1840], « Préface », p. lxxxii, in *Fragments*.

[96] Boole [1951 (1847)] l'indique explicitement dans la préface de *Mathematical Analysis Logic*. L'influence de cette controverse sur Boole a été étudiée par Laita [1979].

[97] Grattan-Guinness, Bornet [1997], p. xl

Chapitre 2. L'analyse des facultés de l'esprit selon Thomas Reid [1710-1796]

Reid ne peut accepter le scepticisme auquel est conduit Hume. Pourtant, malgré une lecture minutieuse de son oeuvre, il ne trouve pas de faille dans son raisonnement. Dès lors, il met en question l'hypothèse de départ, à savoir que les objets immédiats des opérations de l'esprit sont des *idées*. C'est principalement à Locke que Reid s'adresse lorsqu'il attaque ce qu'il appelle la « théorie des idées »[98]. Reid montre que dans la « théorie des idées », Locke confond *opération de l'esprit* et *objet de l'opération*. Je montre ci-dessous comment Reid parvient à séparer ces notions. Dans la dernière partie, je montrerai que les algébristes anglais affrontent une problématique analogue.

2.1 La réfutation de la « théorie des idées »

Locke, dès la première page de *An Essay concerning Human Understanding* (1690), dénonçant la doctrine cartésienne des *idées innées*, affirme que l'esprit est, à la naissance, une *tabula rasa*. Faisant de l'expérience le fondement de toutes nos connaissances, il rapporte à deux sources l'origine de nos *idées*: la sensation et la réflexion. Les *idées*, au sens de Locke, sont ce que « l'Homme apperçoit dans son Ame »[99]. Locke les désigne souvent par le terme « objets de l'esprit ». Il les considère comme des objets intermédiaires dans le processus de la connaissance:

> « Il est évident que l'Esprit ne connaît pas les choses immédiatement, mais seulement par l'intervention des idées qu'il en a. » Locke [1998 (1690)], p. 465.

Selon lui, l'esprit reçoit passivement, par le truchement des *esprits animaux,* les idées des qualités sensibles (les *idées simples*), à partir desquelles il construit des *idées complexes*. Les *opérations de l'esprit* n'ont, dans les termes de Locke, pas d'autre *objet* que les idées simples ou complexes. Locke en conclut explicitement[100]:

> « Puisque l'Esprit n'a point d'autre objet de ses pensées et de ses raisonnements que ses propres idées, qui sont la seule chose qu'il contemple ou qu'il puisse contempler, il est évident que ce n'est que sur nos idées que roule toute notre Connaissance. » Locke [1998 (1690)], p. 427.

Reid cite ce passage qu'il désigne comme la source du scepticisme. Si l'esprit contemple ses propres idées et non les choses du monde extérieur, on ne peut finalement rien savoir ni du monde extérieur, ni de nous-même, et il conclut que le scepticisme est une conséquence logique de toute théorie qui assigne aux idées le statut d'objets immédiats des facultés de l'esprit.

Remarquons, à la suite de Durand-Richard [1990], que Locke utilise une terminologie confuse. Par *opération*, il entend: « les actions de l'ame concernant ses idées », et « certaines Passions qui sont produites quelquefois par ces idées »[101]. Il parle aussi des « opérations de

---

[98] Grave [1977], pp. 11-12.
[99] Locke [1998 (1690)], p. 2.
[100] Ce passage est cité (en anglais) dans Reid [1969 (1785)], p. 572. Voir aussi Grave [1977], p. 54.
[101] Locke [1998 (1690)], p. 62.

son ame, considérées comme des objets de la réflexion qu'elle fait sur les idées qui lui sont venues par les Sens »[102]. L'*opération* désigne donc chez Locke une *action* et un *objet* de réflexion qui, lorsqu'on le contemple, nous procure matière à penser. Utilisant un même mot pour désigner des notions si hétérogènes, Locke n'est pas parvenu à établir avec clarté la nature de la correspondance entre la *chose* et l'*idée*.

2.2 Les opérations de l'esprit et leurs objets

Ayant reconnu la cause de la faillite des systèmes précédents, Reid propose une solution nouvelle qui évite les écueils de ses prédécesseurs. Reid, et c'est là une position qu'il partage avec Leibniz, s'intéresse au langage comme symptôme de la pensée: de l'analyse et de la comparaison des langues il déduit ce qui est universel, originel, constitutif de la pensée humaine. Il puise dans la structure de la langue des informations sur le fonctionnement de l'esprit. S'appuyant sur le fait que dans toutes les langues les opérations de l'esprit sont exprimées par des verbes transitifs, sous une forme active, il affirme que la pensée est un acte. Il distingue dès lors trois éléments: l'esprit qui opère, l'opération et l'objet de l'opération. Reid ne trouve pas de place pour des *idées* au sens de Locke, qui seraient des *objets de l'esprit*, objets que l'esprit possède et contemple. L'*idée* n'est, selon lui, ni le sujet ni l'objet de la pensée, mais bien l'acte[103].

En introduction de *Essays on the Intellectual Powers of the Man*, il définit les termes suivants:

- L'*esprit* désigne ce qui en l'homme « pense, se souvient, raisonne, veut ». L'essence de l'esprit est inconnaissable. On ne peut définir ou décrire l'esprit que par ses opérations.

- Les *opérations de l'esprit:* par ce terme Reid entend tout mode de pensée dont nous sommes conscients. L'esprit est vivant et actif, et il a des facultés qui lui permettent d'agir, au contraire de la matière, inerte et passive. Les opérations de l'esprit sont la perception, la sensation, la conception, l'abstraction, la généralisation et le jugement. Les opérations ont un objet (l'esprit perçoit quelque chose, il conçoit quelque chose, il imagine quelque chose, etc.), et l'objet de l'opération est distinct de l'opération.

- L'*objet d'une opération de l'esprit* est l'objet auquel s'applique l'opération. Il n'est ni le *résultat* de l'opération, ni un *objet intermédiaire - idée* - que l'esprit possèderait, indépendamment de l'acte de penser.

2.2.1 Conception, sensation et perception

Reid élabore une théorie nouvelle de la perception, qui se passe des « idées » objets de la perception. Il s'appuie sur l'expérience commune et sur l'observation intérieure. Il définit la *perception* comme la superposition de deux opérations: la *sensation* et la *conception*[104]. Sensation et conception sont inséparables dans la conscience. La *sensation* produit un signe qui ne ressemble ni à la chose ni à la notion de la chose. Traduire ce signe en une représentation est ce que Reid nomme *conceiving*. Ainsi, de l'activité de la faculté de percevoir résulte ce dont on a conscience, une notion (*notion*).

Prenant grand soin de distinguer l'acte de la conception (*conceiving*) et l'objet de la conception, il définit:

- L'*opération de la conception* (*conceiving*) est l'action de la faculté de *concevoir* d'où découle ce qu'il appelle *notions* ou *conceptions* (*notions*, *conceptions*). La conception

[102] Locke [1998 (1690)], p. 62.
[103] Reid [1969 (1785)], pp. 5-41.
[104] Reid [1969 (1785)], pp. 242-251.

(*conceiving*) est une faculté inhérente à l'esprit. Elle s'exerce conjointement aux autres opérations de l'esprit (la sensation, le jugement, l'imagination, la mémoire).

- L'*objet de la conception* est ce sur quoi opère l'esprit lorsqu'il conçoit. Il est ou bien un objet particulier du monde extérieur (par exemple une pomme), et il a alors une existence, ou bien un universel (par exemple un triangle, ou un éléphant), ou bien une chimère (par exemple un centaure), et il n'a alors pas d'existence.

Reid emploie le terme *conceiving* pour parler de l'opération de concevoir, et le mot *conception*, ou *notion*, pour désigner la *représentation* intellectualisée de l'objet de la conception. Il insiste sur le fait que la *conception* n'est pas un objet de la pensée, mais la pensée elle-même :

> "But if they [philosophers] give that name [idea] to images in the mind, which are not thought, but only objects of thought, I can see no reason to think that there are such things in nature." Reid [1969 (1785)], p. 421.

La conception n'est ni un *objet*, ni une *image*, comme le laisserait entendre le langage courant. Reid reviendra à plusieurs reprises sur la métaphore de l'*image* qu'il déplore. En ce qui le concerne, il est bien sûr qu'il conçoit les *choses* elles-mêmes, et non leur *image*; ses conceptions sont « vivantes, colorées, et animées de mouvement »:

> "This one object which I conceive, is not the image of an animal, it is an animal. I know what it is to conceive an image of an animal, and what it is to conceive an animal; and I can distinguish the one of these from the other without any danger of mistake. The thing I conceive is a body of a certain figure and colour, having life and spontaneous motion. The philosopher says that the idea is an image of the animal, but that it has neither body, nor colour, nor life, nor spontaneous motion. This I am not able to comprehend." Reid [1969 (1785)], pp. 419-420.

Si Reid répète inlassablement tout au long de son essai que l'*idée* n'est pas un *objet*, c'est au sens grammatical du terme *objet* qu'il s'attache. Il s'appuie sur le fait que dans toutes les langues, l'objet du verbe « percevoir » est toujours la chose réelle. En définissant la pensée comme un acte, il a été amené à assigner un rôle aux intervenants d'un processus de pensée. Tout acte met en scène un *sujet* agissant, un *objet* (avant l'acte) sur lequel porte l'acte, et un *objet* (après l'acte), résultant de l'acte. L'esprit établit une relation entre l'objet sur lequel porte l'acte (la chose) et l'objet résultant de l'acte (la représentation de la chose). Analysant l'expression *je conçois la lune*, Reid indique que la *lune* est l'objet du verbe *concevoir*. *Ma conception de la lune*, résultant de l'opération, ne peut être dissociée de l'acte, du sujet et de l'objet. Ainsi, *ma conception de la lune* n'est pas la *lune*, bien qu'une relation étroite lie ces deux termes :

> "In perception, in remembrance, and in conception, or imagination, I distinguish three things, the mind that operates, the operation of the mind, and the object of that operation. That the object perceived is one thing, and the perception of that object an other, I am as certain as I can be of any thing. The same may be said of conception, of remembrance, of love and hatred, of desire and aversion. In all these the act of the mind about its object is one thing, the object is another thing. There must be an object, real or imaginary, distinct from the operations of the mind about it. Now, if in these operations the idea be a fourth thing different from the three I have mentioned, I know not what it is, nor have been able to learn from all that has been written about ideas. And if the doctrine of philosophers about ideas confounds any two of these things which I have mentioned as distinct; if, for example, it confounds the object perceived with the perception of that object, and represents them as one and the same thing, such doctrine is altogether repugnant to all that I am able to discover of the operations of my own mind; and it is repugnant to the common sense of mankind, expressed in the structure of all languages." Reid [1969 (1785)], p. 197.

Reid a comparé ci-dessus l'acte *je pense* à l'acte *je désire*. L'objet du désir est distinct du désir de l'objet et le désir n'est pas un *objet*. De même, l'acte de *concevoir* produit dans l'esprit une *notion* qui n'est pas *l'objet* de la conception.
En résumé, en analysant ses propres processus de pensée, Reid ne trouve que des actes de pensée, actes ayant pour objet ce à quoi l'on pense, et non ce que l'on pense. Dans ce cadre grammatical, Reid ne trouve pas de place pour « l'idée » au sens où Locke l'entendait, qui serait un objet que l'esprit possède et contemple.
L'acte de concevoir, en tant qu'il est un acte, est situé dans le temps. Il y a un *avant l'acte* et un *après l'acte*. La conception (*notion*) existe durant l'acte. L'objet d'une conception existe indépendamment de l'acte :

> "The generality is in the object conceived, and not in the act of the mind by which it is conceived. Every act of the mind is an individual act, which does or did exist. But we have power to conceive things which neither do nor ever did exist. We have power to conceive attributes without regard to their existence. The conception of such an attribute is a real and individual act of the mind; but the attribute conceived is common to many individuals that do or may exist. We are too apt to confound an object of conception with the conception of that object. But the danger of doing this must be much greater when the object of conception is called a conception." Reid [1969 (1785)], p. 506-507.

Ayant distingué conception (*conceiving*) et objet de la conception, et ayant reconnu à l'esprit humain la faculté de former ses propres conceptions (*notions*) et de les nommer, Reid est en mesure de donner un statut au produit de la faculté de concevoir (*conceiving*). Il déclare sans existence ces « créatures de l'imagination » dont il résume le statut ontologique particulier en une phrase révélatrice d'un manque de mot pour désigner leur type d'existence:

> "This is the very nature of this faculty, that its object, though distinctly conceived, may have no existence. Such an object we call a creature of imagination; but this creature never was created." Reid [1969 (1785)], p. 404-405.

Ces « créatures non créées » ont une sorte « d'existence sans existence ». Elles sont néanmoins des objets potentiels pour la faculté de concevoir[105]. En relevant le caractère opératoire des opérations de l'esprit, Reid est en mesure de mettre au jour une propriété particulière de l'action de concevoir, à savoir sa réflexivité: l'esprit a la possibilité de *concevoir* une *conception.* Il en résulte une nouvelle conception, distincte de la première. Le processus est prêt à se répéter, et ceci sans fin. Je montrerai dans la troisième partie que c'est en itérant les opérations mathématiques que les algébristes anglais construiront les premiers systèmes algébriques abstraits. Il convient de rappeler que la construction des nombres réels par Richard Dedekind [1831-1916], Karl Weierstrass [1815-1897] et Georg Cantor [1845-1918] procède de cette même idée. C'est à la puissance de l'esprit qui « se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est possible une fois »[106] que Henri Poincaré [1854-1912] attribue la construction de l'arithmétique et de l'algèbre.

---

[105] Schulthess [1983], p. 257, relève la difficulté que rencontre Reid. Ce dernier se bat contre des idées qui existeraient dans l'esprit. Or, qu'on puisse concevoir des choses qui n'existent pas, n'est-ce pas admettre l'existence d'idées? Car que conçoit-on lorsqu'on conçoit « Pégase » ou un « Centaure »? N'est-ce pas admettre que ce sont là des *idées*? Sir William Hamilton a déjà critiqué Reid pour cette contradiction. Certes Reid est parfois un peu confus, voire contradictoire. Il n'en reste pas moins que l'effort qu'il fait pour distinguer la conception actuelle, un acte dont l'existence est éphémère, et la chose, objet de conception, dont l'existence est permanente, qu'il s'agisse d'une chimère ou d'une chose réelle, est crucial. Ses contradictions révèlent la difficulté de son entreprise.
[106] Poincaré [1968], p. 41.

2.2.2 Les sensations comme signes d'un langage naturel

Ayant défini la sensation et la conception comme des opérations superposées dans la conscience, Reid, s'inspirant de Berkeley, propose une théorie de la perception dans laquelle les sensations jouent un rôle de marqueur entre la chose et la perception de la chose.
Reid interprète la sensation comme le *signe* qui suggère *immédiatement* à l'esprit la *conception* de la chose. Les deux opérations se succèdent sans que la conscience ne puisse habituellement les séparer. Il en résulte une *perception,* se situant dans le champ de la conscience, accompagnée de la croyance en l'existence de la chose perçue. Dans cette théorie, les sensations sont des signes qui ne ressemblent ni aux *choses* ni aux *idées*. Leur traduction est *immédiate*, et s'effectue selon des procédés inhérents à la constitution de l'esprit. Les sensations sont ainsi, au sens de Reid, les signes d'un langage naturel, le langage de la perception :

> "Every different perception is conjoined with a sensation that is proper to it. The one is the sign, the other the thing signified. They coalesce in our imagination. They are signified by one name, and are considered as one simple operation. The purposes of life do not require them to be distinguished." Reid [1969 (1785)], p. 249.

Pour Berkeley les sensations en provenance des différents sens suggèrent une perception *symbolique*, où le terme *symbolique* signifie que le signe est détaché de toute *idée* particulère. Pour Reid, l'esprit, par sa constitution, réunit les différentes sensations en la perception d'une *chose* qui est la source de nos différentes sensations. Il ajoute que la *perception* s'accompagne de la croyance irrésistible en l'existence de la *chose perçue*. Reid rejette ainsi l'immatérialisme de Berkeley: pour lui, la matière existe.
Reid est parvenu à établir une correspondance entre la *chose* et l'*idée*, en décomposant le processus de perception. Gardant de la théorie de la perception de Berkeley que l'esprit a la faculté de passer *immédiatement* du signe à la chose signifiée, quand bien même le signe n'a aucune ressemblance avec la chose, Reid établit à l'intérieur même de l'acte de perception une relation de signification entre la chose et la perception de la chose. Il laisse inexpliqué le principe par lequel l'esprit traduit, se contentant de constater qu'il s'agit d'une faculté inhérente à l'esprit humain.

2.3 Langage naturel et langage artificiel

Reid a décrit le lien entre la chose réelle et la perception de la chose au moyen d'un processus naturel de traduction d'un langage naturel dont les *signes* sont les sensations. Le langage artificiel dérive selon lui de la faculté qu'a naturellement l'esprit d'user de signes.
Pour Reid, la *conception*, en tant qu'acte, est par nature située dans le temps. Son existence est éphémère. Pour garder sa trace, en faire un objet sensible, pour l'exprimer, on lui donne un nom, un son, signe arbitraire. Un mot, qu'il soit un nom, un adjectif ou autre, est un signe artificiel et arbitraire, qui suggère à l'esprit une chose, selon un même processus de suggestion que celui du langage naturel de la perception.
Le mot est un signe arbitraire. Il n'a pas de ressemblance avec la chose qu'il désigne. Il prend sa signification dans une définition. Une chose particulière est désignée par un nom propre, elle est décrite ou définie par une liste de qualités, impossible à rendre exhaustive. Les choses particulières, poursuit Reid, sont regroupées en *espèces*, du fait de l'homme et non de la nature, et un « mot général » leur est associé qui les désigne collectivement. La définition d'un *universel* provient d'un accord souvent tacite entre les usagers. Reid fera du sens que la plupart des hommes (ou que les hommes les plus instruits) donnent au « mot général» l'objet de la *conception* dont ce mot est le signe. Le signe acquiert ainsi une signification par consensus:

> "The common meaning is the standard by which such conceptions are formed, and they are said to be true or false, according as they agree or disagree with it." Reid [1969 (1785)], p. 394.

Ce procédé de définition d'un mot a pour conséquence que la signification d'un mot sera toujours floue, car il se trouve que les hommes associent différentes conceptions à un même mot. Ainsi, même s'ils n'ont pas à relever le défi impossible d'appréhender l'essence réelle d'un objet, les mots généraux[107] ne peuvent pas prétendre à une définition *absolument* exacte. L'homme est ainsi libéré de la quête d'une réalité inaccessible à l'expérience. Les conceptions ne préexistent pas, elles émanent de l'esprit humain. Elles sont vraies, non par évidence, non par révélation, mais par consensus. Les « idées vraies » que le sage appréhendait cèdent la place à des « concepts » créés par l'esprit humain.

Reid, en définissant la pensée comme un *processus dynamique* soumis à des lois constitutives de l'esprit humain se libère de l'impossible exigence d'une conformité exacte entre des entités manifestement hétérogènes : l'*idée* n'est ni le mot ni la chose, elle est en correspondance avec la *chose* à travers le *mot*. Reid explique le passage de la *chose* à l'*idée* par un processus d'encodage et de décodage, faisant intervenir un processus de suggestion inhérent à la constitution de l'esprit, qui l'autorise à élaborer une théorie de la perception ayant, avec un siècle d'avance, l'allure d'une théorie du signe, telle que constituée par Ferdinand de Saussure[108].

---

[107] Reid parle ici des mots du langage courant. Les termes mathématiques font exception, leur signification étant connue exactement par tous. Je reviendrai au chapitre 4 sur la définition des termes mathématiques.

[108] Reid ne prétend pas proposer une *théorie de la perception.* Il donne une *description* du processus de la perception, qui, bien qu'elle laisse inexpliquée la connexion entre les faits perceptifs, se présente sous la forme d'une théorie. Voir Grave [1977], p. 161.

Chapitre 3. Langage et pensée

Dans le courant du 18ème siècle dictionnaires et encyclopédies fleurissent de toute part[109]. L'usage des langues ordinaires pour les choses savantes renforce la prise de conscience du rôle du langage dans la pensée. Le siècle s'achève avec un concours lancé par l'« Institut National de France » sur le thème: « Déterminer quelle a été l'influence des signes sur la formation des idées »[110]. La problématique est exposée en ces termes:

> « Les premiers philosophes qui tournèrent leurs réflexions sur les caractères de l'écriture, sur les accens et les articulations de la voix, sur les mouvements du visage, sur les gestes et les diverses attitudes des corps, ne virent dans tous ces signes que des moyens, ou établis par la nature, ou inventés par les hommes, pour la communication de leurs pensées.
>
> Un examen plus approfondi fit voir que les signes n'étoient pas uniquement destinés à servir de communication entre les esprits, […], on osa avancer qu'un homme séparé du commerce de ses semblables aurait encore besoin de signes pour combiner ses idées. » Prevost [1800], p. 68.

L' « Institut » demande aux concurrents d'examiner si un système de signes parfaits pourrait « rendre toutes les sciences également susceptibles de démonstration ». Cette question n'est certes pas nouvelle puisque, dès la Renaissance, de nombreux projets de langue universelle et philosophique ont vu le jour. Le plus connu et le plus important est celui de Leibniz[111]. Les questions concernant le langage tiennent une place considérable dans l'œuvre de Locke, de Berkeley et de Reid. Stewart poursuivant leurs réflexions, pose deux questions fondamentales: est-il possible de penser sans recourir à des signes? Et surtout est-il possible de penser sans recourir au sens? Si, comme Leibniz, il voit dans le formalisme algébrique un exemple dont s'inspirer pour constituer une *logique rationnelle*, Stewart conteste qu'une langue parfaite suffise à rendre toute connaissance certaine. Il s'affirme explicitement en désaccord sur ce point avec Leibniz et Etienne Bonnot de Condillac [1715-1780].

3.1 Le langage, un instrument de la pensée

La question des signes posée ici est une version moderne de la question du statut ontologique des formes universelles, problème qui occupa les scolastiques durant plusieurs siècles. Une

---

[109] La *Cyclopaedia* de Chambers (1ère édition en 1727; en 1750 paraît déjà la sixième édition), l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, dont les volumes paraissent à partir de 1750, l'*Encyclopaedia Britannica* dont la première édition paraît entre 1768 et 1771 (3 volumes), la deuxième édition entre 1777 et 1784 (10 volumes), et la troisième entre 1788 et 1797 (18 volumes).

[110] Pierre Prevost remporte le second prix. Le titre complet de son mémoire est *Des signes envisagés relativement à leur influence sur la formation des idées* (Prevost [1800]). Le premier prix fut remporté par Joseph Marie Degerando, *Des signes et de l'art de penser considérés dans leurs rapports mutuels* (Degerando [1800]).

[111] Notons que Leibniz s'est inspiré de l'œuvre de Wilkins (*An Essay towards a Real Character and Philosophical Language, with an Alphabetical Dictionary* (1668)) et qu'il présenta l'ébauche de son projet à la *Royal Society* en 1676 (Couturat [1961], Chap 3). La *Langue Caractéristique*, qui resta inachevée, ne fut, jusqu'à la fin du 19ème siècle, connue que par les mentions que Leibniz en fit dans ses lettres. Stewart cite et commente d'assez longs passages de lettres où il est question du projet de langue caractéristique, montrant qu'il avait connaissance, quoique assez vaguement, des recherches de Leibniz.

alternative a été envisagée pour ce problème: ou bien l'*universel* est une réalité transcendante, existant dans un monde d'idées, et le particulier perçu par les sens n'en est qu'une pâle apparence, ou bien il est un signe sans existence, le particulier ayant seul une existence. En logique, les réalistes sont majoritaires jusqu'à la fin du Moyen Âge. Dès la Renaissance, la tendance s'inverse. Le nominalisme domine la pensée philosophique dans l'Europe du 18ème siècle[112]. Prevost rend compte du fait que le *réalisme* en logique est devenu obsolète:

> « Posons d'abord un principe, vainement contesté dans des temps qui sont loin de nous. Un genre n'existe pas dans la nature, comme il est conçu dans l'entendement. L'*homme* ainsi généralisé est un être de raison. Tout homme est un individu complètement déterminé comme tel. » Prevost [1800], p. 7.

On distingue, chez les nominalistes, deux catégories: les premiers sont des nominalistes purs, les seconds sont des conceptualistes[113]. Reid est un conceptualiste, Stewart un nominaliste. Le nominalisme de Stewart trouve sa source directe chez Berkeley[114]. Les mots, si l'on en croit ce dernier, sont des signes mis pour différentes idées, « comme le sont les lettres de l'algèbre où, bien qu'une quantité en particulier soit indiquée par chaque lettre, il n'est pas pour autant requis, pour procéder correctement, qu'à chaque étape, chaque lettre suggère à la pensée la quantité particulière à laquelle elle est censée renvoyer »[115]. Leur fonction est de signifier. Ils servent à désigner l'un quelconque des objets particuliers qu'ils représentent. Ils n'ont pas de signification définie et précise puisqu'ils signifient « indifféremment un grand nombre d'idées particulières »[116].

Stewart affirme à maints endroits de son œuvre que le langage est un *instrument de la pensée* (*instrument of thought*). Par cette expression, que Leibniz utilisait également, et que Boole reprend à de nombreuses reprises, il entend que le langage est non seulement un instrument de communication, mais aussi un instrument indispensable pour penser. Il assiste l'esprit en présentant les nombreux objets candidats à la connaissance regroupés sous un terme générique.

> "According to this view of the process of the mind, in carrying on general speculations, that IDEA which the ancient philosophers considered as the essence of an individual, is nothing more than the particular quality or qualities in which it resembles other individuals of the same class, and in consequence of which, a generic name is applied to it. It is the possession of this quality that entitles the individual to the generic appellation, and which, therefore, may be said to be essential to its classification with that particular genus; but as all classifications are to a certain degree arbitrary, it does not necessarily follow that it is more essential to its existence as an individual, than various other qualities which we are accustomed to regard as accidental. In other words, (if I may borrow the language of modern philosophy), this quality forms its nominal, but not its real essence." Stewart [1994 (1792)], p. 175.

La pensée de Stewart se caractérise par une ouverture à une pensée *diachronique*. Les classifications sont des découpages *arbitraires* de la réalité, qui se transmettent de génération en génération. Le sens des mots est précisé au cours du temps et le langage évolue grâce aux observations et aux réflexions cumulées de nos prédécesseurs:

> "In consequence of the generic terms to which, in civilized society, the mind is early familiarized, the vast multiplicity of things which compose the furniture of this globe are presented to it, *not* as they occur to the senses of the untaught savage, but as they

[112] Robert [1978], p. 52.

[113] Par *conceptualisme*, on entend une doctrine selon laquelle les universaux sont des *constructions de l'esprit*. Pour les conceptualistes, les universaux n'ont pas de réalité en soi (*réalisme*), et ils ne sont pas uniquement des noms *(nominalisme*).

[114] Pycior [1984].

[115] Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 313.

[116] Berkeley [1985 (1710)], vol. 1, p. 312.

> have been arranged and distributed into parcels or assortments by the successive observations and reflections of our predecessors." Stewart [1994 (1814)], pp. 94-95.

Les classifications sont *arbitraires*, dit Stewart. Le terme *arbitraire* est nuancé par l'expression *jusqu'à un certain point*. Il est à comprendre dans le sens de *conventionnel.* Les classifications n'ont pas d'antécédents transcendantaux, elles sont construites par les hommes et pour les hommes. Plus qu'au nominalisme pessimiste de Berkeley, qui conduit à se méfier des mots, facteurs d'illusion, le nominalisme de Stewart s'apparente à celui de Leibniz: une langue bien faite est une aide extraordinaire pour l'esprit pensant. Ce nominalisme instrumental ouvre une alternative à l'opposition classique de la logique traditionnelle, que Stewart explore. J'examine ce point plus précisément ci-dessous.

Le triangle général et le triangle particulier

J'examine ici comment Locke, Berkeley, Reid et Stewart ont successivement envisagé le rapport entre un universel et les particuliers qui lui sont subsumés. Je prends l'exemple du *triangle*, car il a servi d'exemple à tous quatre. En bref, pour Locke, le *triangle* est une forme universelle qui ne désigne ni le particulier, ni la collection. Pour Berkeley n'existent que des *triangles particuliers* alors que, pour Reid, le *triangle* est un universel. Une *figure* de forme triangulaire et de grandeur déterminée ne répond pas exactement à la définition d'un *triangle*. Stewart parvient à articuler logiquement les notions de *triangle général* et de *triangle particulier*. Il fait appel à une opération qui n'est pas sans rappeler la manière dont on construit un ensemble quotient.

Locke

Pour Locke, les *idées générales* sont des « ouvrages de l'Entendement »[117] propres à représenter indifféremment plusieurs choses particulières. Les idées générales sont désignées par un *terme général*, et la sorte de signification à attacher aux termes généraux est difficile à déterminer, selon Locke, car d'une part « ils ne signifient pas simplement une chose particulière », mais d'autre part, « ils ne signifient pas une pluralité de choses », la raison étant que les termes généraux existent au singulier et au pluriel :

> « Ainsi, ce que les termes généraux signifient, c'est une espèce particulière de choses; & chacun de ces termes acquiert cette signification en devenant signe d'une idée abstraite que nous avons dans l'esprit. » Locke [1998 (1690)], p. 332.

Le *triangle* est l'une de ces idées générales:

> « Prenons, par exemple, l'idée générale d'un Triangle: quoiqu'elle ne soit pas la plus abstraite, la plus étendue, et la plus malaisée à former, il est certain qu'il faut quelque peine et quelque adresse pour se la représenter; car il ne doit être ni oblique, ni rectangle, ni équilatére (sic), ni isocéle (sic), ni scaléne (sic), mais tout cela à la fois, & nul de ces Triangles en particulier. » Locke [1998 (1690)], p. 494.

L'idée qui correspond au mot *triangle* n'est donc ni la collection de tous les triangles particuliers, ni un triangle particulier. Elle est d'une catégorie spéciale, que Locke a de la difficulté à préciser, au point qu'il considère les *idées générales* comme des « marques de notre imperfection »[118].

Berkeley

---

[117] Locke [1998 (1690)], p. 332.
[118] Locke [1998 (1690)], p. 494.

Pour Berkeley, « une idée dans laquelle certaines parties de plusieurs idées différentes et incompatibles sont mises ensemble » est quelque chose d'imparfait qui ne peut exister. Il ne nie pas qu'on puisse former des idées générales « mais nous ne les formons pas par abstraction de la manière indiquée par M. Locke » :

> « Mr. Locke reconnaît qu'il faut des efforts et de l'habileté pour former son idée générale du triangle. Il dit plus loin expressément qu'il ne doit être ni oblique, ni rectangle, ni équilatéral, ni scalène, mais à la fois tout cela, et rien de cela. Il dit aussi que c'est une idée où sont regroupées des parties de plusieurs idées différentes et incompatibles. Tout cela ressemble fort à une contradiction. Mais pour mettre le sujet au-dessus de toute discussion, il faut remarquer qu'il affirme que c'est quelque chose d'imparfait qui ne peut exister et donc par conséquent l'idée est impossible ou incohérente. » Berkeley [1987 (1735)], vol. 2, p. 368.

Pour Berkeley, le mot *triangle* est un signe qui suggère l'une quelconque des idées particulières répondant à la définition de ce terme. Seules existent les idées de *triangles* de grandeur déterminée.

Reid

Reid forme la notion générale de *triangle* par abstraction. Le triangle est une qualité, commune à toute figure composée de trois côtés, qu'on considère séparément de son support :

> "I acknowledge it to be impossible, that a triangle should really exist which has no precise proportion of sides and angles; and impossible that any being should exist which is not an individual being; for I think, a being and an individual being mean the same thing: but that there can be no attributes common to many individuals, I do not acknowledge. Thus, to many figures that really exist, it may be common that they are triangles; and to many bodies that exist, it may be common that they are fluid. Triangle and fluid are not beings, they are attributes of beings." Reid [1969 (1785)], p. 527.

Le *triangle* est, pour Reid, l'attribut des formes planes formées de trois côtés. Il n'a pas de grandeur déterminée. Le *triangle* est un universel sans existence.
La *conception* du triangle existe, en tant qu'acte individuel, à l'instant où elle est formée :

> "Suppose I conceive a triangle, that is, a plain figure terminated by three right lines. He that understands this definition distinctly has a distinct conception of a triangle. But a triangle is not an individual; it is a species. The act of my understanding in conceiving it is an individual act, and has a real existence; but the thing conceived is general, and cannot exist without other attributes, which are not included in the definition."

La *conception* du triangle existe réellement en tant qu'acte, et l'esprit peut concevoir une forme triangulaire de dimensions particulières. Mais le *triangle*, donné exactement par sa définition – une forme plane terminée par trois droites – n'a pas de grandeur particulière. Une *figure* ayant trois côtés de grandeur déterminée est une *figure triangulaire*, elle ne correspond pas exactement à ce qu'il est convenu de nommer un *triangle* :

> "Every triangle that really exists must have a certain length of sides and measure of angles; it must have place and time. But the definition of a triangle includes neither existence, nor any of those attributes; and therefore they are not included in the conception of a triangle, which cannot be accurate if it comprehend more than the definition." Reid [1969 (1785)], pp. 477-478.

En résumé, Reid distingue un *objet* de forme triangulaire et de grandeur déterminée qui peut exister, un *triangle*, objet mathématique exactement défini, universel sans grandeur déterminée et sans existence et la *conception* d'un triangle actualisée chez un individu, qui a une existence momentanée et qui peut avoir une forme particulière. L'objet mathématique dit *triangle* est un concept universel sans grandeur déterminée.

Stewart

Stewart soutient dans un premier temps une position nominaliste, calquée sur celle de Berkeley, à savoir que le *triangle* est un signe qui désigne indifféremment l'une quelconque des figures qui répondent à la définition. Dans un deuxième temps, il donne une description de la manière dont se construit l'universel à partir du particulier. Il illustre les étapes de sa construction par un exemple: le processus d'apprentissage d'un étudiant en géométrie. Tout d'abord, il examine la démonstration en portant son attention sur une figure particulière; puis il observe que la démonstration ne fait appel qu'aux propriétés contenues dans la définition du *triangle*. Puisque tous les *triangles* possèdent ces mêmes propriétés, ils sont tous identiques pour le raisonnement et donc interchangeables. Il s'ensuit que la même démonstration s'applique quel que soit le triangle particulier:

> "In such cases, the individuals thus classed together are completely *identified* as subjects of reasoning; insomuch, that what is proved with respect to one individual, must hold equally true of all the others. As it is an axiom in geometry, that things which are equal to one and the same thing, are equal to one another; so it may be stated as a maxim of logic, that whatever things have the same *name* applied to them, in consequence of their being comprehended in the terms of the same definition, may all be considered as *the same identical subject*, in every case where that definition is the principle on which our reasoning proceeds […]. As every conclusion which is logically deduced from the definition must, of necessity, hold equally true of all the individuals to which the common name is applicable, these individuals are regarded merely as so many *units*, which go to the composition of the multitude comprehended under the collective or generic term. Nor has the power of conception anything more to do in the business, than when we think of the *units* expressed by a particular number in an arithmetical computation." Stewart [1994 (1814)], p. 93.

La notion de *triangle* se construit de même en deux temps: dans un premier temps, le mot *triangle* désigne l'une quelconque des figures répondant à la définition. Dans un deuxième temps, toutes les figures triangulaires étant *équivalentes* pour le raisonnement (car répondant toutes exactement à la même définition), elles sont identifiées. La notion de *triangle* issue de cette *identification* ne correspond ni à la notion de collection des figures ni à celle de figure particulière. Cette entité construite dans l'imagination résulte d'une double opération intellectuelle : la réunion des choses qui se ressemblent suivie d'une identification de ces choses. Cette double opération n'est pas sans rappeler l'opération de *quotient par une relation d'équivalence*.

Cette construction n'est pas spécifique aux objets mathématiques, poursuit Stewart, qui décrit un processus analogue de construction d'une notion générale:

> "The word *sort* is evidently transferred to our intellectual arrangements, from those distributions of material objects into separate heaps or collections, which the common sense of mankind universally leads them to make for the sake of the memory; or (which is perhaps nearly the same thing) with a view to the pleasure arising from the perception of order. A familiar instance of this presents itself in shelves, and drawers, and parcels, to which every shopkeeper has recourse for assorting, according to their respective denominations and prices, the various articles which compose his stock of goods. In one parcel (for example) he collects and incloses under one common *enveloppe,* all his *gloves* of a particular size and quality; in another, all his *gloves* of a different size and quality; and, in like manner, he proceeds with the stockings, shoes, hats, and the various other commodities with which his warehouse is filled. By this means, the attention of his shop-boy instead of being bewildered among an infinitude of particulars, is confined to *parcels* or *assortments* of particulars; of each of which parcels a distinct idea may be obtained from an examination of any one of the

> individuals contained in it. These individuals, therefore, are, in his apprehension, nothing more than so many *units* in a multitude, and any one of which units is perfectly equivalent to any other; while, at the same time, the parcels themselves, notwithstanding the multitude of units of which they are made up, distract the attention, and burden his memory as little as if they were individual articles. The truth is, that they become to his mind *individual objects of thought,* like a *box* of counters, or a *rouleau* of guineas, or any of the other material aggregates with which his senses are conversant." Stewart [1994 (1814)], pp. 93-94.

A travers ces lignes, on voit le langage à l'œuvre dans la formation d'un concept. Un signe mis pour représenter l'un quelconque des objets de la collection devient un objet de pensée, résumé de tous les objets de la collection. Cet objet est singulier. Stewart ne désigne pas cette nouvelle conception comme une entité de « niveau différent ». On peut simplement remarquer qu'elle se construit dans un deuxième temps, et qu'elle repose sur une idée de relation d'équivalence.

En conclusion, la formation d'un concept comme celui du *triangle*, « quoiqu'elle ne soit pas la plus abstraite, la plus étendue, et la plus malaisée à former », pour reprendre les mots de Locke, semble avoir posé de grandes difficultés. Ce dernier s'est heurté au problème du nombre. L'« Homme » est un terme singulier, mis pour une multitude. Mais alors que sont les « Hommes »? demande-t-il. Stewart a décrit la procédure mise en œuvre par l'esprit pour construire un concept général (« le triangle»), en partant d'un concept particulier (« un triangle») et en passant par un concept collectif (« les triangles »). En se basant sur l'observation du fonctionnement de son esprit, Stewart parvient à construire le général exemplaire à partir du général collectif (réunion des particuliers) en faisant appel à une sorte d'opération quotient. Il répond ainsi aux difficultés que lui-même et ses contemporains éprouvent à lier le général au particulier. La double articulation qu'il propose manquait aussi bien à Reid qu'à Berkeley ou Locke.

La manière dont les logiciens présentent la relation entre la classe et les individus qui lui sont subsumés est critiquée par Stewart. Le logicien, dit-il, énonce cette relation en disant qu' « une idée plus générale contient une idée moins générale ». Selon Stewart, le « sens commun » nous incite à nous représenter les idées comme des « boîtes ». Ainsi, concevoir qu'une « idée est contenue dans une autre » ne pose aucune difficulté. Mais, constate-t-il, les logiciens donnent au terme « contenir » un sens technique différent du sens habituel, qu'il ne parvient pas à comprendre. Car, dit-il, non seulement le plus général est dit « contenir » le moins général (virtuellement), mais le moins général est aussi dit contenir le plus général (actuellement). Il conclut que l'explication de cette relation est une « énigme incompréhensible », voire dénuée de signification (*unmeaning*)[119].

Sir William Hamilton relève qu'une question a été souvent posée par les philosophes : avons-nous connaissance d'abord des termes particuliers ou d'abord des généraux ? Considérant que le prédicat est une chose de même nature que le sujet, il répond que la connaissance va du vague au précis par réunion et séparation des concepts.

Définir la généralité d'un concept abstrait est une problématique importante. On verra dans la troisième partie que les algébristes anglais seront confrontés au probème de définir une procédure de généralisation qui s'applique à des entités telles que des *opérations*. La logique traditionnelle limite les opérations de généralisation et d'abstraction à des termes. Il s'agit de généraliser la généralisation traditionnelle.

---

[119] Stewart [1994 (1814)], p. 183-201.

3.2 La pensée formelle

Stewart répète à plusieurs reprises que le langage n'a pas seulement fonction de communication. Il est aussi un instrument de la pensée, que l'on utilise dans notre « commerce intérieur ». La pensée se *construit*, inextricablement mêlée au langage. Stewart signale l'importance et la difficulté d'utiliser un vocabulaire précis, seul garant d'une pensée précise, et souligne les efforts réalisés depuis Locke (dont il reconnaît et salue la pertinence des observations sur le sujet) afin d'améliorer « cette branche de la logique qui s'occupe de l'emploi des mots »[120]. A la suite de Leibniz et en référence à lui, il en vient à s'interroger sur la possibilité de développer un formalisme symbolique inspiré de l'algèbre dans lequel la pensée serait conduite selon des règles mécaniques: l'esprit peut-il opérer sur de simples symboles sans recourir à leur interprétation? Si oui, est-ce encore penser ?
Condillac a affirmé à de nombreuses reprises que les mathématiques ne possèdent pas d'autre avantage sur les sciences qu'une phraséologie plus précise, que l'algèbre est une science certaine parce qu'elle possède une langue parfaite, et que toute science peut être réduite à une sorte d'opération mécanique, comparable à une déduction algébrique, ce qu'il résume par: « l'art de raisonner se réduit à une langue bien faite ».

> « Je sens que, lorsque je raisonne, les mots sont pour moi ce que sont les chiffres ou les lettres pour un mathématicien qui calcule; et je suis assujetti à suivre mécaniquement des règles pour parler et pour raisonner, comme il l'est lui-même à faire l'équation $x=b-a$, quand il a fait l'équation $x+a=b$. Quant aux métaphysiciens qui croient raisonner autrement, je leur accorderai volontiers que leurs opérations ne sont pas mécaniques: mais il faudra qu'il conviennent avec moi qu'ils raisonnent sans règle. » Condillac [1981 (1798)], p. 226.

Stewart n'est pas d'accord. Selon lui, la *réflexion* a deux composantes, dont l'une seulement peut être formalisée. La première composante comprend la *constitution* de nos objets de pensée et le *jugement* de leur adéquation aux choses qu'ils suggèrent. La deuxième composante comprend le *raisonnement pur*, c'est-à-dire la faculté d'inférer de nouvelles propositions à partir de propositions données.
Le *raisonnement pur* n'est pas concerné par des questions d'existence. Il est un processus formel dont la validité ne découle que de la forme des énoncés. Tout *raisonnement pur* se déroule sur des signes dénués de sens, Il ne tient compte que des relations entre les signes:

> "All that I assert is, that in so far as our speculations consist of that process of the mind which is properly called reasoning, they may be carried on by words alone; or, which comes to the same thing, that every process of reasoning is perfectly analogous to an algebraical operation." Stewart [1994 (1792)], p. 178.

Le syllogisme est un exemple de raisonnement pur qui ne nécessite pas de recourir à la signification des signes. L'algèbre fournit un autre exemple de raisonnement pur.

> "In algebra, we may proceed with perfect safety through the longest investigations, without carrying our attention beyond the signs, till we arrive at the last result." Stewart [1994 (1792)], p. 179.

Ainsi Stewart répond-il positivement à la question de la possibilité de raisonner formellement, mais il limite la portée des propositions obtenues par ce type de raisonnement. Dans les sciences expérimentales, toute affirmation exige en premier lieu un *jugement* concernant les prémisses du raisonnement, et en second lieu un jugement concernant l'interprétation de la conclusion.

---

[120] Stewart [1994 (1814)], p. 100.

> "Abstracting entirely from the ambiguity of language, and supposing also our reasonings to be logically accurate, it would still be necessary for us, from time to time, in all our speculations, to lay aside the use of words, and to have recourse to particular examples or illustrations, in order to correct and to limit our general conclusions." Stewart [1994 (1792)], p. 179.

Stewart se refuse à réduire une science à une langue: la langue est le moyen de formuler la pensée, elle n'est pas la pensée. Une langue donne les moyens d'exprimer ce que l'on tient pour vrai, mais elle n'est pas la science. L'algèbre par exemple ne se réduit pas à des opérations mécaniques, dit Stewart, faisant allusion au problème des nombres négatifs, car les deux composantes de la réflexion interviennent dans la résolution d'un problème.

> "In algebraical investigations, it is well known that the practical application of a general expression, is frequently limited by the conditions which the hypothesis involves, and that in consequence of a want of attention to this circumstance, some mathematicians of the first eminence have been led to adopt the most paradoxical and absurd conclusions. Without this cautious exercise of the judgement, in the interpretation of the algebraical language, no dexterity in the use of the calculus will be sufficient to preserve us from error. Even in algebra, therefore, there is an application of the intellectual powers perfectly distinct from any process of reasoning, and which is absolutely necessary for conducting us to the truth." Stewart [1994 (1792)], p. 178.

Ainsi, un raisonnement logique ne suffit pas à nous préserver de l'erreur. La composante la plus difficile d'une réflexion est de juger de la validité des prémisses.
Stewart a distingué deux composantes dans le processus de réflexion. Il est amené à définir deux types de vérité. J'en discute dans le chapitre suivant.

Chapitre 4. Le concept de Vérité

Je rends compte dans ce chapitre du sens donné au terme *vérité* par Reid, Stewart et Sir William Hamilton. Reid, dans sa jeunesse, avait embrassé l'*idéalisme* de Berkeley. La critique humienne le place devant deux possibilités: soit accepter le scepticisme, soit fonder la connaissance sur des croyances[121]. Reid choisit la deuxième solution. Il ouvre ainsi une brèche dans ce que réalisme naïf et idéalisme ont de commun: l'exigence d'une conformité exacte entre choses et idées. Après avoir apporté les éléments permettant d'accéder à un *réalisme critique*, il reste cependant attaché à un *réalisme naïf*. C'est à Stewart qu'il reviendra de proposer une *structure épistémique* qui puisse être qualifiée de *réalisme critique.* Sir William Hamilton, dans la continuité de Stewart, trace les limites entre logique, mathématiques, sciences, métaphysique et psychologie.

4.1 Les axiomes du « sens commun » selon Thomas Reid [1710-1796]

La théorie de la connaissance de Reid repose sur le postulat que l'esprit, comme l'entier de l'univers, est soumis à des lois naturelles. Ces lois sont des *principes premiers*, antérieurs et nécessaires à toute expérience. Ils appartiennent à la nature humaine et sont de ce fait communs à tous. Reid les nomme « axiomes du sens commun »[122]. Ni la raison ni les sens ne peuvent rendre compte de la validité des instruments mis à notre disposition pour connaître. Nous ne pouvons que faire acte de confiance ou accepter le scepticisme[123]:

> "The constitution of our understanding determines us to hold the truth of a mathematical axiom as a first principle, from which other truths may be deduced, but it is deduced from none; and the constitution of our power of perception determines us to hold the existence of what we distinctly perceive as a first principle, from which other truths may be deduced, but it is deduced from none." Reid [1969 (1785)], pp. 116-117.

La théorie de la connaissance de Reid est donc fondationnaliste. Elle repose sur ce qu'il nomme *les principes premiers* du « sens commun » dont il a dressé la liste. Il les juge « universels, indépendants des déterminations culturelles [...] Ils sont inscrits dans notre 'nature', constituent les cadres obligés de toute pensée. Notre rapport au monde est conditionné par ces vérités, les rejeter conduit à des absurdités ou à la folie, à poser de faux problèmes ou des questions dénuées de sens, à douter sans point d'appui, comme l'ont fait les philosophes de la 'théorie des idées'. »[124]

Il a fait de l'*évidence universelle* le critère de reconnaissance des axiomes du « sens commun ». Par *évidence universelle* il faut entendre: *ce qui est évident à tous*,

---

[121] Stewart [1994 (1814)], p. 248.

[122] Reid donne une liste d'une quinzaine d'axiomes, parmi lesquels figurent, outre les axiomes de la logique et ceux des mathématiques, des propositions telles que: les choses que je perçois par mes sens existent et sont ce que je perçois qu'elles sont; ce dont je me souviens s'est réellement passé; j'ai une identité et une existence continue; les facultés par lesquelles nous distinguons la vérité et la fausseté ne nous trompent pas. Reid [1969 (1785)], Essay 6.

[123] Griffin [1980], pp. 98-99.

[124] Griffin [1980], p. 190.

indépendamment de l'âge, de l'éducation, de l'origine culturelle. Cette précaution est nécessaire, car Reid est conscient de ce que l'évidence résulte parfois simplement de l'habitude. L'évidence joue un rôle majeur dans la philosophie du « Sens Commun ». Mais alors que, traditionnellement, l'évidence caractérise certains jugements vrais (Descartes), pour Reid, et c'est là une différence essentielle, l'évidence caractérise les principes du fonctionnement de l'esprit. Si, pour Reid, ce qui est vrai ne peut être contraire à l'évidence intuitive, il n'en reste pas moins qu'il ressort clairement des *Essays* que la connaissance du monde s'acquiert par un travail de structuration des données sensibles réalisé par l'entendement:

> "It is acknowledged on all hands, that the first notions we have of sensible objects are got by the external senses only, and probably before judgement is brought forth; but these first notions are neither simple, nor are they accurate and distinct; they are gross and indistinct, and like the *chaos*, *a rudis indigestaque moles*. Before we can have any distinct notion of this mass, it must be analyzed; the heterogeneous parts must be separated in our conception, and the simple elements, which before lay hid in the common mass, must first be distinguished, and then put together into one whole." Reid [1969 (1785)], p. 546.

On reconnaît les deux composantes en lesquelles Kant a résolu la connaissance: l'expérience sensible est aveugle sans l'intervention de la raison, et la raison, sans l'expérience sensible, est vide. Pour Reid, comme pour Kant, c'est par un acte de l'esprit que s'acquiert la connaissance. Sa théorie de la connaissance débute par un examen des possibilités de l'esprit humain.

Les notions de *matière*, d'*espace* et de *temps* sont, dans la philosophie de Reid, des notions premières, qui viennent irrésistiblement à l'esprit lors de ses premiers contacts avec le monde matériel, mais qui, une fois intellectualisées, sont déconnectées de leur origine sensorielle. Ces notions sont des cadres immuables, qui resteraient identiques même si tous les objets matériels disparaissaient.

Les *abstractions*, au sens de Reid, ne sont pas « des choses qui existent, mais des choses conçues »[125]. Elles ne se situent ni dans l'espace ni dans le temps, et « ne sont pas sujettes au changement ». Elles ne sont rien de plus que ce qu'elles sont supposées être:

> "Ideas, in the sense above explained, are creatures of the mind; they are fabricated by its rational powers; we know their nature and their essence; for they are nothing more than they are conceived to be; and because they are perfectly known, we can reason about them with the highest degree of evidence." Reid [1969 (1785)], p. 577.

Quoique les *créations de l'esprit* n'aient pas d'existence, elles ont une signification. Leur *vrai* sens est consensuel, et la représentation que l'on s'en fait est *vraie* pour autant qu'elle soit conforme à la représentation que les autres s'en font.

Les *objets mathématiques*, en tant qu'abstractions, sont de même des objets du monde de l'entendement. Ils ont la particularité d'être exactement définis par le mathématicien lui-même. Dès lors, ils n'ont de qualités que celles qu'on leur a données, ils sont entièrement circonscrits par leurs définitions. Ils n'ont pas d'original antérieur à leur définition. En conséquence, nous en avons une conception exacte.

> "Thus mathematicians have conceived what they call a plane triangle. They have defined it accurately; and when I conceive it to be a plane surface, bounded by three right lines, I have both a true and an adequate conception of it. There is nothing belonging to a plane triangle which is not comprehended in this conception of it, or deducible from it by just reasoning. This definition expresses the whole essence of the thing defined, as every just definition ought to do; but this essence is only what Mr.

---

[125] Reid [1969 (1785)], p 577.

> Locke very properly calls a nominal essence; it is a general conception formed by the mind, and joined to a general word as its sign." Reid [1969 (1785)], pp. 395-396.

L'exactitude des définitions des objets mathématiques explique en partie, selon Reid, la nature certaine de la vérité mathématique. Reid donne cependant une autre raison: la science des mathématiques est achevée, elle est exposée dans une forme finale parfaite.
Selon Reid, toutes les sciences sont de même nature que les mathématiques, et si la philosophie naturelle n'a pas le même caractère de certitude que les mathématiques, c'est que ses principes premiers ne sont pas encore trouvés. L'incertitude que l'on reconnaît à la philosophie naturelle est passagère, un jour viendra où toutes les sciences seront construites avec la même perfection que la géométrie. Elles auront alors le même caractère de certitude que les mathématiques. La certitude dans les sciences n'est, selon Reid, qu'une affaire de temps[126].
Reid se situe entre deux pensées qui s'opposent. Il croit en une vérité absolue. Il rompt toutefois avec la structure épistémique traditionnelle en plaçant le fonctionnement de l'esprit humain au cœur de sa philosophie. Il fournit ainsi les outils conceptuels qui permettront à ses successeurs de dépasser à la fois le réalisme naïf et l'idéalisme.

4.2 Les « principes premiers » et les « éléments premiers » selon Dugald Stewart [1753-1828] : des vérités premières de nature différente

Stewart distingue deux sortes de vérités. Il définit ce qu'il nomme *principes premiers* et *éléments premiers* de la raison humaine. On a l'habitude de comparer un raisonnement à une chaîne, dit-il. Dans cette métaphore, les *principes premiers* sont le point d'ancrage de la chaîne, et les *éléments premiers* sont les liens qui attachent les maillons. Le critère de distinction entre *principe* et *élément* est le suivant: des *principes premiers* se déduisent une série de conséquences, alors que rien ne peut se déduire des *éléments premiers*.
Les *principes premiers* sont des faits de même ordre que les conséquences qu'on en tire. Ils sont des données initiales dont la vérité ne repose sur aucun autre fait. Leur vérité est acceptée, soit qu'elle soit évidente, soit qu'elle soit provisoirement convenable.
Les *éléments premiers* ou *lois fondamentales de notre croyance*[127] sont les lois de fonctionnement de notre pensée, les lois selon lesquelles notre esprit juge de la vérité. Ils sont impliqués dans tous nos raisonnements. Rien ne peut se déduire de ces lois, mais sans elles la sphère de notre connaissance serait réduite à un point. Ils forment une part de ces *original stamina* de la raison humaine. Ils sont les éléments constitutifs de l'esprit humain, dont notre raison ignore l'existence aussi longtemps qu'elle ne réfléchit pas sur son propre fonctionnement. Parler de *vérité* pour qualifier ce qui découle des *lois de croyance* paraît à Stewart un choix peu heureux, car la vérité d'une telle loi est d'une autre nature que ce qu'on entend par la vérité d'un fait.

> "The truths which form their objects are of an order so radically different from what are commonly called *truths*, in the popular acceptation of that word, that it might perhaps be useful for logicians to distinguish them by some appropriate appellation, such, for example, as that of *metaphysical* or *transcendental* truths. They are not *principles* or *data* (as will after appear) from which any consequence can be deduced; but form a part of those original *stamina* of human reason, which are equally essential

[126] Reid [1969 (1785)], p. 599-602.
[127] Stewart [1994 (1814)], p. 23 (en anglais: *fundamental laws of human belief)*.

> to all the pursuits of science, and to all the active concerns of life." Stewart [1994 (1814)], p. 44.

Stewart a distingué deux sortes de vérités premières indémontrables: les vérités de faits et les vérités caractérisant le fonctionnement de notre pensée. Il serait utile, ajoute-t-il de disposer de deux adjectifs distincts pour désigner la véracité d'une assertion: il est *vrai* que « l'air est élastique », il est *vrai* aussi, mais d'une autre manière, que « deux choses égales à une troisième sont égales entre elles »[128].
Sur la base de cette distinction, Stewart montre que mathématiques et sciences diffèrent par la nature de leurs axiomes, par la nature de leurs objets et par la nature de la vérité de leurs propositions.

4.2.1 Les axiomes des mathématiques : des définitions

Stewart reproche à Reid et à la plupart des philosophes de confondre, sous l'appellation d'*axiome*, des vérités de nature différente. Selon la définition d'Aristote, les axiomes sont des *données*, des *principes premiers* dans la terminologie de Stewart. Or, les *axiomes* énoncés par Euclide ne satisfont pas à cette définition. Ils sont des vérités de même ordre que les *éléments premiers de la raison.* De ces axiomes, rien ne peut être déduit[129].
Les *axiomes* des mathématiques, au sens propre de *données premières indémontrables*, sont, affirme Stewart, les *définitions*. Les mathématiques sont donc bien fondées sur des *axiomes*[130]. Mais ces axiomes (les définitions) n'ont pas à être évidemment vrais: les vérités mathématiques ne reposent pas sur l'*évidence* des axiomes – définitions, mais sur la *supposition* de l'existence des entités définies. Les entités mathématiques que sont les figures géométriques et les nombres sont exactement ce que leur définition, posée comme hypothèse, dit d'elles. Nos notions de figure, comme nos notions de nombre, sont assurément dérivées de l'activité de nos sens. Mais ces notions en s'intellectualisant deviennent des attributs d'un espace situé hors du temps.

> "Of these mathematical affections (*magnitude* and *figure*) our first notions are no doubt derived (as well as of hardness, softness, roughness, and smoothness) from the exercise of our external senses; but it is equally certain, that when the notions of magnitude and figure have once been acquired, the mind is immediately led to consider them as attributes of space no less than of body; and (abstracting them entirely from the other sensible qualities perceived in conjunction with them) becomes impressed with an irresistible conviction, that their existence is necessary and eternal, and that it would remain unchanged if all the bodies in the universe were annihilated." Stewart [1994 (1814)], p. 145.

Stewart relève encore qu'il n'existe pas d'ordre naturel dans l'enchaînement des propositions. En conséquence, une théorie mathématique équivalente peut se construire en échangeant axiomes (c'est-à-dire les définitions) et théorèmes. Par commodité, on choisit d'exposer la théorie dans l'ordre du plus simple au plus complexe.

> "In pure mathematics, were the truths which we investigate are all co-existent in point of time, it is universally allowed, that one proposition *is said* to be a consequence of another, only with a reference to our established arrangements. Thus all the properties of the circle might be as rigorously deduced from any one general property of the curve, as from the equality of the radii. But it does not therefore follow, that all these arrangements would be equally convenient: on the contrary, it is evidently useful, and,

[128] Stewart [1994 (1814)], p. 31.
[129] Stewart [1994 (1814)], p. 32, note 1. Stewart précise qu'il parle là des neuf premiers axiomes des *Eléments* d'Euclide (référence à l'édition de Gregory – les axiomes proprement dits, dans la traduction de Tannery). Les axiomes 10 et 11 (postulat de l'égalité des angles droits et postulat des parallèles) sont, selon lui, des théorèmes.
[130] Stewart [1994 (1814)], pp. 23-36

> indeed, necessary, to lead the mind, as far as the thing is practicable, from what is simple to what is more complex." Stewart [1994 (1814)], p. 138

La position de Stewart présente avec celle de Poincaré des ressemblances profondes, sur lesquelles je reviendrai plus loin.

4.2.2 La nature de la vérité mathématique

Avec un siècle d'avance, Stewart se profile comme un *formaliste*: la vérité mathématique ne repose pas sur la validité des définitions, mais s'établit par une démonstration qui consiste à établir une filiation logique entre une *hypothèse* et une *conséquence.* Rien de plus que la justesse du raisonnement ne peut établir un théorème. La seule condition imposée est que les définitions ne soient pas contradictoires:

> "It was already remarked, in the first chapter of this part, that whereas, in all other sciences, the propositions which we attempt to establish express facts real or supposed – in mathematics, the propositions which we demonstrate only assert a connexion between certain suppositions and certain consequences. Our reasonings, therefore, in mathematics, are directed to an object essentially different from what we have in view, in any other employment of our intellectual faculties, – not to ascertain *truths* with respect to actual existences, but to trace the logical filiation of consequences which follow from an assumed *hypothesis*. If from this *hypothesis* we reason with correctness, nothing, it is manifest, can be wanting to complete the evidence of the result; as this result only asserts a necessary connection between the supposition and the conclusion. In the other sciences, admitting that every ambiguity of language were removed, and that every step of our deductions were rigorously accurate, our conclusions would still be attended with more or less of uncertainty, being ultimately founded on principles which may or may not correspond exactly with the fact.
>
> Hence it appears that it might be possible, by devising a set of arbitrary definitions, to form a science which, although conversant about moral, political, or physical ideas, should yet be as certain as geometry. It is of no moment whether the definitions assumed correspond with facts or not, provided they do not express impossibilities, and be not inconsistent with each other. From these principles, a series of consequences may be deduced by the most unexceptionable reasoning; and the results obtained will be perfectly analogous to mathematical propositions. The terms *true* and *false* cannot be applied to them, at least in the sense in which they are applicable to propositions relative to facts. All that can be said is, that they are or are not connected with the definitions which form the principles of the science; and therefore, if we choose to call our conclusions *true* in the one case, and *false* in the other, these epithets must be understood merely to refer to their connexion with the *data,* and not to their correspondence with things actually existing, or with events which we expect to be realized in future. An example of such a science as that which I have now been describing, occurs in what has been called by some writers *theoretical mechanics*; in which, from arbitrary hypotheses concerning physical laws, the consequences are traced which *would* follow, if such was really the order of nature." Stewart [1994 (1814)], pp. 114-115.

Ainsi, pour Stewart, la certitude des mathématiques repose sur la nature particulière de ses axiomes – des définitions – qui n'ont pas d'autre contrainte que d'être consistantes les unes avec les autres. Ils sont vrais par décret. De là provient la particularité des mathématiques. Il ajoute que toute science qui reposerait sur des définitions hypothétiques dont serait déduit un corps de propositions formerait une science de même nature que les mathématiques et présenterait le même caractère de certitude.

La philosophie naturelle est fondamentalement différente, relève encore Stewart. La vérité y est entièrement fondée sur l'évidence des sens. Une assertion est vraie si et seulement si elle est vérifiée par l'observation :

> "An experimental proof, therefore, of any particular physical truth, when it can be conveniently obtained, although it may not always be the most elegant or the most expedient way of introducing it to the knowledge of the student, is as rigorous and as satisfactory as any other; for the intervention of a process of mathematical reasoning can never bestow on our conclusions a greater degree of certainty than our principles possessed." Stewart [1994 (1814)], p. 140.

Pour bien marquer la nature différente de ces sciences, Stewart suggère que le terme de *démonstration* soit réservé aux mathématiques.
Stewart a distingué ce qui est vrai parce que logiquement connecté à des hypothèses, de ce qui est vrai parce qu'en accord avec ce que nos sens perçoivent. Il a séparé les lois de la pensée des lois de la nature, et les faits intellectuels des faits réels. Il a séparé les mathématiques des sciences, mettant les mathématiques en rapport avec le monde de l'entendement et les sciences avec celui de la réalité. Mathématiques et sciences diffèrent quant à leur nature. Les vérités mathématiques sont certaines parce qu'elles sont fondées sur des principes premiers définis comme vrais, c'est-à-dire hypothétiques. Elles n'ont pas de caractère de nécessité absolue, mais elles sont nécessaires sous l'hypothèse spécifiée. Les vérités de la philosophie naturelle ne sont que probables, parce qu'elles sont des vérités qui devront être vérifiées pour chaque cas passé, présent et à venir.
La liberté que les mathématiciens réclament avec insistance dès la fin du 19ème siècle, émerge dans les écrits de Stewart.

4.3 Des vérités formelles et des vérités réelles selon Sir William Hamilton [1788-1856]

Sir William Hamilton, à l'instar de Stewart, distingue les *vérités formelles* et les *vérités réelles*. Il reconnaît deux sciences dont les vérités sont *formelles*: les mathématiques et la logique pure. Il oppose ces sciences aux sciences *réelles*, qui ont à juger de l'adéquation de la pensée à leur objet d'étude.
Selon lui, les objets mathématiques sont d'une nature particulière. Ils ne sont pas obtenus par abstraction ou généralisation, et les objets particuliers sont identiques au genre. Ainsi, la distinction entre général et particulier n'a pas lieu d'être considérée en mathématique:

> « Ainsi donc la science mathématique, dont toutes les conceptions (le nombre et la figure, le mouvement) ne sont que des modifications de ces formes fondamentales [le temps et l'espace], séparées ou combinées, n'établit pas leur universalité a posteriori par l'abstraction et la généralisation; mais elle saisit d'un seul coup le général dans le particulier. » Sir William Hamilton [1840], p. 311.

Cette remarque renvoie au problème de l'articulation entre le particulier et le général, discuté plus haut. Relevons que de nos jours la position la plus courante est de considérer que les objets mathématiques sont obtenus par un processus non pas de *généralisation*, mais de *thématisation*. Je discuterai de ce point dans la deuxième partie.
Pour Sir William Hamilton, les objets mathématiques sont des « formes concrètes de l'imagination et des sens »[131]. Tout comme Stewart, il considère que les objets mathématiques sont suggérés par l'expérience sensible. Mais le mathématicien ne se préoccupe pas de la concordance des objets ainsi suggérés avec les choses du monde extérieur. Il n'appuie pas sa démonstration sur l'observation, ni ne contrôle la concordance de sa conclusion avec la réalité extérieure:

---

[131] Sir William Hamilton [1840], « De l'étude des mathématiques », in *Fragments*, p. 314.

> "Hence it appears, that the necessary truths, such as we find them in Pure Mathematic, and particularly in Arithmetic and Geometry, behove to have principles the proof of which does not depend upon examples, and consequently, not on the evidence of sense; howbeit, that without the senses, we should never have found occasion to call them in consciousness. This is what it is necessary to distinguish accurately, and it is what Euclid has so well understood, in demonstrating by reason what is sufficiently apparent by experience and sensible images." Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 2, p. 355.

En corollaire, les déductions mathématiques n'apportent aucune connaissance du monde:

> « La vérité des mathématiques est l'accord de la pensée avec elle-même; la vérité de la philosophie est l'accord de la pensée avec l'existence. De là l'absurdité de toute application de la méthode mathématique à la philosophie. » Sir William Hamilton [1840], p. 311.

En bref, bien raisonner dans le domaine des mathématiques n'est d'aucune aide dans les domaines de la vie, car on y écarte précisément ce qui rend difficile la réflexion philosophique, c'est à dire le jugement de l'adéquation de la pensée à la réalité. Sir William Hamilton conteste même le rôle éducatif attribué aux mathématiques. Selon lui, « une étude trop exclusive des mathématiques, loin de préparer l'esprit à la philosophie et à la pratique, l'en rend au contraire incapable»[132].

Au terme de cette exploration du concept de *vérité* chez ces trois philosophes, il ressort qu'ils ont contribué à distinguer les deux types de structure épistémologique: la structure épistémique et les structures d'organisation. Le concept de vérité est redéfini, avec Stewart, ce qui ne peut manquer d'avoir des répercussions importantes sur toutes les branches de la connaissance. Je montrerai dans la dernière partie que Babbage s'inspira des écrits de Stewart pour développer ses réflexions sur l'analyse comme langage formel.

[132] Sir William Hamilton [1840], « De l'étude des mathématiques », in *Fragments*, p. 313.

Chapitre 5. Mathématiques et sciences expérimentales

En publiant *La Géométrie*, Descartes propose une méthode qui facilite aussi la résolution des problèmes que l'on se pose dans la philosophie de la nature. Il a encouragé les savants de son temps à poursuivre dans la voie nouvelle, inaugurée par Johanes Kepler [1571-1630] et Galilée: celle de la *mathématisation* de l'univers. Sa méthode repose sur un postulat radical: l'univers se réduit à une *étendue mesurable*. La difficulté fondamentale du cartésianisme est dès lors « de justifier une science qui, ayant sa valeur intrinsèque dans sa conformité stricte à l'ordre de la pensée, puisse s'appliquer d'une façon directe à un univers complètement dépourvu de pensée »[133]. Pour Descartes, l'évidence et la clarté sont les garants de l'adéquation naturelle des êtres mathématiques (les quantités) à un univers réduit à des dimensions spatiales.
Stewart ne se satisfait pas de l'évidence de la réduction cartésienne. Les mathématiques sont une science hypothétique, a-t-il affirmé. Dès lors, la question de leur participation à la découverte des vérités du monde devient problématique. J'expose dans ce chapitre son questionnement quant à la légitimité de la mathématisation de la nature, et quant au caractère incertain de la science. Une nouvelle relation entre sciences et mathématiques se dessine à l'issue de ce double questionnement : les mathématiques servent à structurer le discours scientifique, en fournissant aux sciences expérimentales des modèles abstraits. Les conclusions que l'on tire de l'application d'un modèle n'ont pas force de preuve pour les sciences.

5.1 La légitimité de la mathématisation de la nature

Stewart s'interroge sur ce qu'il appelle la *mécanique théorique*, ou parfois *mechanical philosophy,* et que Lagrange nomme la *mécanique analytique:*

> "It may, I think, be fairly questioned, whether in this department of knowledge, the affectation of mathematical method has not been already carried to an excess; the essential distinction between mechanical and mathematical truths being, in many of the physical systems which have lately appeared on the Continent, studiously kept out of the reader's view, by exhibiting both, as nearly as possible, in the same form." Stewart [1994 (1814)], p.134.

Les propositions mathématiques sont vraies *nécessairement*, mais elles ne concernent que le monde des mathématiques. Comment légitimer l'inférence d'une vérité formelle à une vérité d'expérience? Stewart a conscience de cette difficulté:

> "If the account which has been given of the nature of demonstrative evidence be admitted, the province over which it extends must be limited almost entirely to the objects of pure mathematics. A science perfectly analogous to this in point of evidence may, indeed, be conceived (as I have already remarked) to consist of a series of propositions relating to moral, to political, or to physical subjects; but as it could answer no other purpose than to display the ingenuity of the inventor, hardly anything of the kind has been hitherto attempted. The only exception which I can think of

[133] Brunschvicg [1993], p. 129.

> occurs in the speculations formerly mentioned, under the title of *theoretical mechanics*." Stewart [1994 (1814)], p. 153.

A priori, une science formelle ne peut rien nous apprendre de la réalité. Pourtant, admet Stewart, l'expérience a montré que la *mécanique analytique* apporte une connaissance de la marche du monde réel; la *Mécanique Céleste* de Laplace en est une illustration éclatante. Quand bien même l'inférence d'une vérité mathématique à une vérité d'expérience paraît incompréhensible, il ne fait pas de doute que les mathématiques ont mystérieusement contribué à approfondir nos connaissances du monde matériel:

> "But if the field of mathematical demonstration be limited entirely to hypothetical or conditional truths, whence (it may be asked) arises the extensive and the various utility of mathematical knowledge in our physical researches, and in the arts of life?" Stewart [1994 (1814)], p. 153.

La question est donc posée: quelle est la légitimité de l'application des mathématiques à des problèmes de physique? Stewart propose une explication qui nomme plus qu'elle n'explique: les observations coïncident avec les déductions mathématiques, par cette circonstance particulière que l'extension et la figure sont les *affections mathématiques de la matière*[134]:

> "The answer, I apprehend, is to be found in certain peculiarities of those objects to which the suppositions of the mathematician are confined; in consequence of which peculiarities, real combinations of circumstances may fall under the examination of our senses, approximating far more nearly to what his definitions describe, than is to be expected in any other theoretical process of the human mind. Hence a corresponding coincidence between his abstract conclusions, and those facts in practical geometry and in physics which they help him to ascertain." Stewart [1994 (1814)], p. 153.

Quelques pages plus loin il mentionne encore cette « remarquable et singulière coïncidence entre des propositions purement hypothétiques et des faits observés »[135]. La conformité entre les théories mathématiques et les observations réelles est de l'ordre de la constatation. Il est hors des facultés de la raison de démontrer la nécessité d'une telle correspondance.

5.2 Incertitude fondamentale des sciences expérimentales

Stewart distingue deux sources d'incertitude dans les sciences d'expérience. La première, d'ordre pratique, provient de l'imprécision des mesures. On peut espérer la réduire en améliorant les appareils de mesure. La deuxième est fondamentale et irréductible: la *science* repose sur une hypothèse, une hypothèse qui tient d'une *loi de croyance fondamentale* de l'esprit humain, puisqu'il est impossible de ne pas y adhérer, mais qu'il est impossible de la démontrer: la *stabilité de l'ordre de la nature*. Dans des domaines comme l'*astronomie physique*[136], on énonce des lois de la nature, sous forme de propositions universelles. Elles affirment que les relations découvertes sont invariantes dans le temps. Or, cette invariance repose sur la croyance que le futur ressemblera au passé, ce que la raison ne peut assurer:

---

[134] Stewart [1994 (1814)], p. 145.
[135] Stewart [1994 (1814)], p. 155.
[136] Stewart n'explique pas ce qu'il entend par ce terme. Je me réfère à la définition qu'en donne Mary Somerville [1780-1872]:« Physical astronomy is the science which compares and identifies the laws of motion observed on earth with the motions that take place in the heavens, and which traces, by an uninterrupted chain of deduction from the great principle that governs the universe, the revolutions and rotations of the planets, and the oscillations of the fluids at their surfaces, and which estimates the changes the system has hitherto undergone or may hereafter experience, changes which require millions of years for their accomplishment. »
Somerville [2001 (1831)], *Mechanism of the Heavens, Preliminary Dissertation*, p. 1.

> "In the instances which have been last mentioned [physical astronomy], the evidence of our conclusions resolves ultimately not only into that of sense, but into another law of belief formerly mentioned; - that which leads us to expect the continuance, in the future, of the established order of physical phenomena. A very striking illustration of this presents itself in the computations of the astronomer, on the faith of which he predicts, with the most perfect assurance, many centuries before they happen, the appearances which the heavenly bodies are to exhibit. The same fact is assumed in all our conclusions in natural philosophy; and something extremely analogous to it in all our conclusions concerning human affairs. They relate, in both cases, not to necessary connexions, but to *probable* or *contingent* events, of which (how confidently soever we may expect them to take place) the failure is by no means perceived to be impossible. Such conclusions, therefore, differ essentially from those to which we are led by the demonstrations of pure mathematics, which not only command our assent to the theorems they establish, but satisfy us that the contrary suppositions are absurd."
> Stewart [1994 (1814)], pp. 156-157

Une vérité scientifique énoncée sous la forme de *loi de la nature* s'obtient par une induction dans le temps, elle s'énonce par une proposition quantifiée universellement sur le temps. Elle n'est donc qu'une *induction imparfaite*[137]. Ainsi, toute *loi de la nature* constitue un énoncé dont la vérité n'est que probable, car il est susceptible d'être contredit par un événement futur. Cette position fait penser à l'attitude scientifique critique contemporaine à laquelle on associe le nom de Karl Popper [1902-1994]: une théorie scientifique ne peut pas être prouvée, elle ne peut qu'être falsifiée.

Stewart a cherché à concilier deux argumentations qui s'opposent: les mathématiques sont une science hypothétique qui débute avec ses propres définitions et qui n'a pas de compte à rendre à la réalité; mais, de fait, les mathématiques parviennent à rendre compte du monde réel. L'expérience nous apprend que la géométrie et l'arithmétique peuvent s'appliquer aux objets réels du monde physique. Toutefois, bien que le physicien et le mathématicien soient concernés par les mêmes objets (quantités, figures), il est aussi « illogique », dit-il, d'identifier physique et mathématiques que d'identifier botanique et poésie[138].

Stewart établit ainsi une différence fondamentale entre sciences et mathématiques: les mathématiques participent des structures d'organisation de la connaissance, la science réelle relève d'une structure d'adaptation ou d'adéquation de la pensée à la réalité. La position pragmatiste de Stewart présente une parenté étonnante avec la philosophie de Poincaré. En effet, pour ce dernier, les mathématiques sont une science hypothétique et formelle qui fournit des modèles abstraits des phénomènes naturels. La justification de cet usage des mathématiques n'est pas de l'ordre de la démonstration. Elle relève de l'expérience et d'une certaine forme de croyance. La science ne pourrait « chaque jour agir sous nos yeux », si elle ne nous faisait « connaître quelque chose de la réalité» [139].

---

[137] L'induction est une forme de raisonnement qui permet d'inférer du particulier au général. Une *induction imparfaite* est un raisonnement qui, de l'observation de quelques cas, conclut à tous les cas: quelques animaux à cornes sont herbivores (la vache, la chèvre…), donc tous les animaux à cornes sont herbivores. L'*induction imparfaite* s'oppose à l'*induction complète*. De la constatation qu'un caractère est attribué séparément à chacun des membres d'une classe, elle permet de conclure qu'il peut être attribué à l'ensemble de la classe.

[138] Stewart [1994 (1814)], p. 145.

[139] Poincaré [1968], p. 25. Stewart n'utilise pas le terme de *modèle abstrait*, il parle d'*instrument mathématique* (p. 154). Rappelons qu'il utilise le terme *instrument de la pensée* à propos du langage. Qu'il choisisse le même terme pour parler du rôle du langage et du rôle des mathématiques renforce la thèse selon laquelle il envisage les mathématiques comme une structure d'organisation de la connaissance.

Chapitre 6. Une nouvelle attitude « scientifique »

En affirmant que ce qu'on appelle *cause* est une *relation* construite intellectuellement entre des *événements* qui apparaissent habituellement liés dans le *temps*, Hume bouleverse l'idée que l'on se fait de l'objet même de la connaissance. Alors que depuis Aristote on parlait de la cause des *choses*, Hume parle de la cause des *événements*. Cela marque un changement considérable: l'objet de la connaissance au sens traditionnel était considéré comme une systématisation de ce qui *est*. Hume fait remarquer que les Modernes procèdent à une systématisation de ce qui *change*.
Cette nouvelle lecture de la causalité marque le début d'une ère nouvelle dans l'histoire des idées. Kant parle d'une « étincelle », de celle, complète Deleule « qui soudain fait jaillir la lumière », et en même temps « qui met le feu à la plaine »[140].
Stewart reconnaît l'importance du *Treatise*, qui a selon lui contribué plus que toute autre œuvre au progrès de la philosophie de l'esprit humain. Il souligne en particulier l'importance de sa « Theory of Causation ». Reid et Stewart ont tous deux contribué à la transformation de la théorisation de la science à laquelle on assiste après Hume[141].
Stewart critique la notion de « cause » au sens où l'entendaient les philosophes de la fin du 18ème siècle en Grande-Bretagne. Les *Anciens*, relève-t-il, ont confondu physique et métaphysique lorsqu'ils ont cherché à découvrir les causes *efficientes* dont ils croyaient qu'elles étaient des relations nécessaires et démontrables[142]. Il s'engage dès lors dans la recherche d'une nouvelle définition pour la science. Il s'interroge sur son objet, sa méthode et sa logique. Il se montre novateur relativement à Reid par la place et l'importance qu'il donne à l'*analogie* en mathématique et à l'*hypothèse* dans l'expérimentation. Il respecte la tradition baconienne lorsqu'il fait de l'induction le procédé de raisonnement scientifique fondamental. Il se sent seul lorsqu'il reconnaît que l'*induction* peut être un raisonnement de nature spécifiquement mathématique. Là encore, Stewart surprend par la similitude de ses positions avec celles de Poincaré.

6.1 Objet de la science

6.1.1 Le concept de loi de la nature

Stewart se réfère à la célèbre phrase de Bacon: « L'homme est un interprète de la nature »[143]. Ayant accepté la critique de la causalité de Hume, il affirme que l'objet de la science est de repérer des régularités et de les exprimer sous forme de *lois*. Lorsqu'un observateur remarque qu'un événement précède régulièrement un autre événement, il interprète ce premier

[140] Deleule [1999], p. 9.
[141] Voir par exemple Olson [1975], Smith and Wise [1989]. Stewart et la plupart des philosophes du « Sens Commun » ont accepté de substituer à la notion antique de *cause* celle de *relation de causalité*. Pour marquer la mutation profonde qui touche la théorisation de la connaissance, je ne parle plus dans la suite de *philosophie naturelle*, bien que Stewart utilise lui-même les termes de *science* et de *philosophie* comme synonymes, mais je désigne par le terme de *science* le nouveau système de connaissance qui se met en place, et je qualifie de *scientifique* sa méthode, son objet et sa logique. Remarquons que la pertinence d'introduire le terme *scientist* fut discutée en 1833 lors du premier congrès de la *British Association for the Advancement of Science* (BAAS).
[142] Stewart [1994 (1814)], p. 231.
[143] Stewart [1994 (1814)], p. 238.

événement comme un signe avant-coureur du deuxième événement. L'influence de Berkeley, pour qui la *cause* est un *signal* annonciateur d'un événement, est manifeste.
Le concept de *loi de la nature* est un concept fondamental de la physique newtonienne[144]. Pourtant, au terme des *Principia*, les lois de la nature ne suffisent pas par elles-mêmes à rendre compte de la stabilité du système solaire. Newton a laissé la possibilité à un agent extérieur (Dieu) d'intervenir. Stewart discute de la signification de l'expression *loi de la nature*. Selon lui, la loi n'est pas interne aux phénomènes, elle n'est pas non plus l'expression d'une volonté divine. Elle est définie comme un acte de pensée: la *loi de la nature* est relative à l'esprit qui la pense, elle est un concept intellectuel visant à organiser notre expérience. Une *loi de la nature* est un *fait général*, simple résumé de *faits particuliers observés*[145]. Son énoncé est utile pour soulager l'esprit. Cette vision de la science comme *économie de la pensée* est habituellement associée au nom de Ernst Mach [1838-1916][146].

6.1.2 L'analogie

Le concept de causalité tel que Hume le définit pose le problème suivant: que signifie la proposition « deux événements apparaissent constamment ensemble » ou « un événement se répète »? Un événement est un fait particulier. Il ne peut ni apparaître « constamment » ni « se répéter ». Deux événements ne sont jamais identiques et un événement arrive toujours pour la première fois. Stewart pose la question:

> "Upon what ground do I conclude that the thrust of a sword through my body, in a particular direction, would be followed by instant death? According to the popular use of language, the obvious answer would be – upon experience, and experience alone. But surely this account of the matter is extremely loose and incorrect; for where is the evidence that the internal structure of *my* body bears any resemblance to that of any of the other bodies which have been hitherto examined by anatomist?" Stewart [1994 (1814)], pp. 171-172.

Et il ajoute quelques lignes plus bas:

> "Something more than experience, in the strictest sense of that word, is surely necessary to explain the transition from what is identically the same, to what is only similar." Stewart [1994 (1814)], p. 172.

Stewart attribue à une *loi de croyance fondamentale* notre faculté d'inférer de ce qui est arrivé à une *chose*, à un moment, ce qui arrivera à une *autre chose*, à un autre moment: notre esprit, dit-il, a la faculté de percevoir des *analogies,* et il définit l'analogie comme une *similitude entre des relations*.
La constitution d'un *fait général* apparaît comme une démarche intellectuelle visant à identifier (i.e. considérer comme identiques) des circonstances qui sont *indifférentes* pour le déroulement d'une succession d'événements, c'est-à-dire qui peuvent être modifiées sans que la relation de succession entre les événements ne soit modifiée.
En somme, selon Stewart, de même que nous avons la faculté de reconnaître les ressemblances entre les choses qui possèdent une propriété commune, et de regrouper sous un concept général tous les particuliers semblables, nous avons la faculté de reconnaître des

---

[144] Le concept de loi de la nature est déjà présent chez Kepler ou chez Galilée. En Grande-Bretagne, au 19ème siècle, c'est cependant au nom de Newton qu'on associe ce concept.
[145] Stewart emploie abondamment le terme de *fait*, qu'il emploie comme synonyme de *événement*. J'utilise de même ces deux termes comme synonymes.
[146] Olson [1975], p. 107. Cette conception de la science est habituelle parmi les scientifiques britanniques du 19ème siècle. Elle découle de l'analyse humienne de la causalité.

ressemblances de relations et de regrouper les événements liés par une relation de même sorte dans une expression commune. L'expression commune s'appelle une *loi de la nature*[147]. Notre faculté de percevoir une *analogie*, c'est-à-dire une correspondance entre des relations, permet d'établir des *faits généraux*, notre faculté de percevoir une *ressemblance*, c'est-à-dire une correspondance entre des qualités permet de définir des *concepts généraux.* La correspondance entre des relations ou entre des qualités est perçue par la raison. Les relations entre des choses sont perçues par la raison, les qualités des choses sont perçues par les sens. La raison de cette activité est d'ordre pragmatique, relève encore Stewart: l'homme cherche à expliquer le passé dans le but de prévoir l'avenir. Le but ultime de cette sorte de savoir est d'éviter le plus possible les contrariétés et les malheurs, d'être mieux en mesure d'agir en accord avec ses intentions :

> "From what has been said, it is sufficiently evident, that the *ultimate* object which the philosopher aims at in his researches, is precisely the same with that which every man of plain understanding, however uneducated, has in view, when he remarks the events which fall under his observation, in order to obtain rules for the future regulation of his conduct." Stewart [1994 (1814)], p. 241.

Le but et l'objet de la science se trouvent clairement plongés dans le monde de la temporalité, de l'actuel, du réel. L'homme veut connaître dans le but de diriger sa vie, ou celle de la collectivité. Peu importe dès lors au scientifique de connaître les causes premières ou les causes dernières. Afin que nos actions, *hic et nunc*, soient en adéquation avec nos intentions, il suffit de connaître l'ordre qui régit les *événements*. Ce changement de perspective entre le monde de la Grèce antique et le monde moderne est décrit par Pierre Boutroux en ces termes:

> « Pour les Grecs, la science mathématique est avant tout une et harmonieuse […]. Chez les modernes, au contraire, – qui ne croient plus à une harmonie préétablie entre la matière et la forme des théories – le travail de la pensée mathématique prend un caractère tout différent. Le but est de saisir, de forcer un objet qui nous résiste. Ainsi, l'on ne cherchera pas à faire une œuvre « belle », mais seulement à parvenir au résultat voulu, en employant pour cela les moyens et les artifices les plus variés. La recherche scientifique ne sera par conséquent plus une contemplation passive, mais bien une industrie active, utilisant tous les procédés que les progrès des méthodes algébriques et logiques viennent mettre à notre disposition. » Boutroux [1920], pp. 212-213.

6.2 La méthode scientifique

L'objet de la science étant précisé, Stewart s'interroge sur la méthode à utiliser. Si, depuis Bacon au moins, expérience et induction sont les mots clés de la philosophie naturelle, la méthode à utiliser est encore à préciser. L'un des points importants prêtant à controverse est le rôle de l'hypothèse dans la méthode expérimentale. La controverse vient de ce que le terme *hypothèse* a été pris dans des acceptions différentes. Stewart en précise le sens. Il souligne la différence fondamentale entre une *hypothèse scientifique* et une *hypothèse mathématique*.

6.2.1 L'expérimentation

L'objet de la science est de décrire les *faits généraux* (c'est-à-dire les *lois de la nature*). Concevoir un événement dans sa généralité consiste à isoler les circonstances qui particularisent l'événement: circonstances de temps, de lieu, de matière. Plus précisément, un événement particulier est entouré d'une multitude de circonstances déterminées, dont seules

[147] Stewart, bien qu'il l'utilise, trouve le terme de *loi* peu judicieux. En effet, sa connotation normative est susceptible de faire croire à tort, dit-il, à l'existence d'une intention extérieure, à laquelle serait soumise la nature. Stewart [1994 (1814)], pp. 157-160.

certaines ont un lien avec un fait corrélé (lié dans le temps). Déterminer les facteurs *explicatifs*, c'est-à-dire les circonstances particulières dont la présence favorise l'apparition du fait corrélé, n'est possible que par l'expérimentation:

> "The only way, in such a case, of coming at the truth, is to repeat over the experiment again and again, leaving out all the different circumstances successively, and observing with what particular combinations of them the effect is conjoined." Stewart [1994 (1814)], p. 245.

C'est donc en interrogeant la nature que le scientifique découvre la généralité d'un événement. Grâce à l'expérimentation méthodique, il va un pas plus loin que celui qui n'observe que ce qui se présente spontanément à lui :

> "While the experiments which his ingenuity devises, enable him to place nature in situations in which she never presents herself spontaneously to view, and to extort from her secrets over which she draws a veil to the eyes of others." Stewart [1994 (1814)], p. 243.

De ces affirmations découle implicitement que la vérité, dans les sciences, n'est de loin pas évidente. Une deuxième implication émerge de ce texte: la science est une affaire de professionnels[148].

6.2.2 L'hypothèse

La conception du rôle de l'hypothèse dans la recherche scientifique se modifie radicalement à la fin du 18ème siècle, et le changement d'attitude est perceptible entre Reid et Stewart. Pour Reid, le terme d'hypothèse porte les stigmates de l'esprit scolastique, d'une époque où les théories trouvaient leur source dans la rationalité pure. Il rejette donc sans appel les hypothèses, les considérant comme trompeuses: on est trop enclin à voir ce qu'on a supposé. Reid adopte une attitude contemplative: les phénomènes parlent d'eux mêmes, il suffit d'observer les faits, et les lois de la nature qui les gouvernent apparaissent d'elles-mêmes à l'esprit. Stewart, au contraire de Reid, conçoit que le scientifique a un rôle actif et créateur à jouer. Revenu du radicalisme anti-scolastique, il voit dans l'hypothèse un guide dans la recherche scientifique. L'hypothèse et l'expérimentation sont les deux piliers solidaires de la méthode scientifique et la science se construit dans une démarche dialectique: l'hypothèse suggère une expérience, et l'expérience confirme ou infirme l'hypothèse. Une hypothèse rejetée est aussi propice à l'avancement des sciences qu'une hypothèse vérifiée[149].
Stewart a distingué ce qui chez Reid était confusément mêlé: l'hypothèse n'est pas la théorie, elle est une étape qui conduit à la théorie. Il met en exergue que le rôle de l'hypothèse en mathématique est différent de celui de l'hypothèse dans les sciences: l'hypothèse mathématique est toujours tenue pour vraie et la conclusion est momentanément tenue pour incertaine. La démonstration du théorème une fois achevée, la conclusion devient (sous l'hypothèse) une assertion dont la vérité est certaine. En science, l'hypothèse est ce qui est incertain au début de l'expérimentation, et qu'on cherche à confirmer. Au terme de l'expérimentation, l'hypothèse perd en général son statut d'hypothèse pour devenir une assertion dont la vérité est tenue non pour *certaine*, mais simplement pour *probable* (le seul élément pouvant être tenu pour certain est le résultat particulier de l'expérience) [150].

---

[148] En Angleterre, la science est au début du 19ème siècle une activité de loisir pour les gentlemen. L'organisation sociale en général, de l'université en particulier, se modifiera dans les années 1830, suite à une série de réformes importantes qui permettront aux scientifiques de gagner leur vie en se consacrant à la recherche. Cf. Chambers [1983], Smith [1989].
[149] Olson [1975], pp. 106-110.
[150] Stewart [1994 (1814)], pp. 298-316.

6.3 La logique de la science

Près d'un demi-siècle avant les œuvres plus connues traitant de logique inductive, dues à Whewell, Mill et plus tard John Venn [1834-1923] ou William Jevons [1835-1882], Stewart consacre un long chapitre de ses *Elements* à la *logique inductive*[151]. La logique de la science est une logique inductive, affirme-t-il. Il relève que l'induction au sens de Bacon est d'une autre nature que l'induction au sens d'Aristote[152]. Il établit une distinction entre l'induction en logique, en mathématique et en science.

6.3.1 L'induction en logique et en mathématiques

Stewart relève que l'*induction complète* en logique (forme de raisonnement qu'il attribue à Aristote) qui affirme sous forme générale ce qui est connu de tous les particuliers, n'apporte pas de connaissance nouvelle, puisqu'elle ne permet que d'affirmer en une proposition une multitude de propositions connues. Ce type d'induction purement logique conduit à une certitude, mais ne convient pas pour les sciences naturelles.
Stewart discute aussi de l'induction en mathématique, mettant en doute une affirmation généralement admise alors, à savoir qu'aucune proposition mathématique ne peut être prouvée par induction, c'est-à-dire que toute démonstration mathématique est déductive. Il critique aussi les pratiques inductives incomplètes souvent utilisées. Par exemple, le théorème du binôme est considéré comme démontré pour toutes les puissances, alors qu'il est simplement vérifié pour quelques puissances. Une simple vérification sur quelques exemples, dit Stewart, ne peut être tenue pour une démonstration. Semblant ignorer que la démonstration par récurrence a déjà été utilisée, il affirme sa conviction qu'il doit exister un procédé qui permette de démontrer ce genre de théorèmes rigoureusement[153].
Cette remarque est d'une importance considérable. Je reviendrai sur cette question dans le chapitre treize, où je présente l'œuvre de Babbage. Ce dernier a en effet présenté la démonstration par récurrence comme une méthode légitime de démonstration mathématique. Il insiste sur la différence radicale entre ce raisonnement et la méthode inductive pratiquée en sciences.

6.3.2 L'induction dans les sciences naturelles

Tout différent est en effet le procédé de raisonnement inductif pratiqué dans les sciences naturelles. Dans cette seconde acception, qui est celle de Bacon, le raisonnement inductif repose sur une hypothèse concernant la continuation de l'ordre de la nature et conduit à une probabilité.
Au sens de Bacon, l'*induction* est une méthode qui consiste à « connecter à leur *cause physique* un grand nombre de cas particuliers qui se ressemblent par certaines circonstances et diffèrent par d'autres et qui tous concourent au même résultat »[154]. Demander que les faits

---

[151] Le titre de ce chapitre est « Of the Method of inquiry pointed out in the experimental or inductive logic », in Stewart [1994 (1814)], pp. 230-357.
[152] Stewart [1994 (1814)], pp. 253-263.
[153] Stewart [1994 (1814)], pp. 316-322. Cajori [1985(1893)] mentionne Maurolycus [1494-1575] comme le premier chez qui on trouve une formule de récurrence. Après lui, on trouve occasionnellement une démonstration par induction. Pascal entre autres en fit usage. Cependant, Cajori [1985(1893)] relève que la première apparition du terme *induction mathématique* revient à De Morgan. Il semble que, jusqu'à De Morgan, l'induction incomplète, comparable à celle connue dans les sciences naturelles, était une pratique courante en mathématiques.
[154] Stewart [1994 (1814)], p. 246 (ma traduction).

soient connectés à une *cause physique,* c'est exiger, explique Stewart, que le terme *loi de la nature* désigne plus qu'une simple collection de cas particuliers. La loi doit refléter un *principe* naturel. La *loi* doit être *générale*, c'est-à-dire qu'elle doit résister à l'épreuve de nouvelles observations. L'exigence d'un *principe* est ce qui assure que la science n'est pas une création du scientifique, ou une simple convention :

> "Of all philosophical systems, indeed, hypothetical or legitimate, it must be allowed that, to a certain degree, they both please the imagination and assist the memory, by introducing order and arrangement among facts, which had the appearance before of being altogether unconnected and isolated. But it is the peculiar and exclusive prerogative of a system fairly obtained by the method of induction, that while it enables us to arrange facts already known, it furnishes the means of ascertaining, by synthetic reasoning, those which we have no access to examine by direct observation." Stewart [1994 (1814)], p. 251.

Le processus d'induction tel que Bacon l'entend, et tel que Stewart l'adopte, permet d'énoncer des *lois de la nature* qui représentent plus que la sommation des cas observés. La loi de la nature est une expression générale qui englobe les faits non encore survenus, ou non observés. L'induction, dans ce sens, ne permet cependant pas d'affirmer qu'une loi est vraie ou fausse. Stewart la dit *légitime* si elle est capable de prédire des faits inobservés au moment de l'énonciation de la loi[155].

6.3.3 La nécessité d'une nouvelle logique pour la science

A partir de Hume, il devient manifeste que la science a changé d'objet. Hume a introduit une nouveauté dans le paysage intellectuel: le temps. Il a établi que la causalité est une relation que l'esprit construit entre deux événements qui apparaissent *régulièrement* dans un *ordre temporel* déterminé, et que nous lions dans notre esprit, sous le nom de *moi*, ce que nous percevons comme une collection de perceptions, qui se *succèdent dans le temps*. Avec la prétention avouée d'organiser les *choses* et leurs *relations* dans l'espace et dans le temps, la science se sépare de la métaphysique pour s'installer dans la temporalité d'un monde accidentel et incertain. Elle doit abandonner la recherche des causes premières et se limiter à décrire et prédire des *événements* dans un référentiel qu'elle emprunte aux mathématiques. Cette nouvelle orientation a des conséquences formidables pour les structures d'organisation du savoir lui-même, qu'il s'agisse de logique ou de mathématiques. Une conséquence importante, qui tardera à être reconnue, est que la logique des classes ne suffit plus. En effet, l'objet de la science nouvelle est d'établir des *lois de la nature*, des faits universels ou des successions régulières de classes d'événements. Une loi de la nature énonce souvent une relation entre des faits ou entre des événements. Or, l'énoncé d'un fait ou d'un événement demande une proposition et non un simple terme. En conséquence, l'énoncé d'une loi de la nature nécessite une structure syntaxique plus complexe que la structure prédicative traditionnelle : terme de sujet – copule « être » – terme de prédicat.
Dès lors, il semble que la forme prédicative traditionnelle, dont la structure suffisait pour l'organisation des concepts de *choses*, ne suffit plus pour l'organisation des concepts de *faits* ou d'*événements*. Une structure d'organisation formelle apte à organiser des propositions complexes se révèle nécessaire.

[155] Stewart [1994 (1814)], p. 251. Poincaré [1970], pp. 22-23, formule une exigence similaire, lorsqu'il demande que les lois soient l'expression de « l'harmonie interne du monde ».

Chapitre 7. Mathématiques et logique

L'épistémologie contemporaine reconnaît deux types de structures d'organisation de la connaissance: les structures logiques et les structures mathématiques[156]. Au cours de l'histoire, cependant, le rôle de la logique et des mathématiques n'a pas toujours été clairement reconnu. De fait, les philosophes se caractérisent par leur recours exclusif à l'un ou à l'autre de ces modes d'organisation, sans toujours en reconnaître la fonction organisationnelle.
Durant le 17ème et le 18ème siècle, on a cherché à élever la science sur les mathématiques. La logique durant cette période a été négligée. En Écosse, comme un peu partout en Europe, au début du 19ème siècle, la logique est considérée par beaucoup comme une science obsolète. Suivant les traces de Bacon, Stewart dénonce avec véhémence l'insuffisance de la logique d'Aristote. Il remet en question l'utilité de l'enseignement de la logique d'Aristote pour les sciences expérimentales. Il s'acharne tout particulièrement à ridiculiser la syllogistique. Reconnaissant pourtant le rôle important de la logique comme science du raisonnement, il réclame avec insistance l'élaboration d'une nouvelle logique, une logique *rationnelle*, fondée sur la philosophie de l'esprit. Remarquons que l'importance historique de la position de Stewart sur le raisonnement est loin d'être négligeable, puisque John Stuart Mill reconnaît avoir trouvé chez lui l'idée directrice de sa théorie du syllogisme[157]. J'examine dans ce chapitre la critique que Stewart adresse à la logique aristotélicienne, et ce qu'il attend d'une nouvelle logique. Je considère ensuite la réponse de Sir William Hamilton. J'examine à la fin de ce chapitre une question dont l'importance est cruciale pour l'avenir des mathématiques d'alors, à savoir le sens de l'*égalité* en mathématiques. Stewart donne au terme *égalité* une interprétation dynamique. Cette lecture lui permet de réfuter l'idée que les mathématiques sont un système tautologique. Avant même l'avènement du logicisme, Stewart donne des arguments contre la réduction des mathématiques à la logique.

7.1 Insuffisance de la logique aristotélicienne selon Dugald Stewart [1753-1828]

Stewart, à la suite de Bacon, parle en termes sévères de la syllogistique d'Aristote. Il lui reproche d'avoir « caché la nudité et la pauvreté de cette science sous le voile du langage abstrait »[158], et « déguisé » des vérités bien connues « sous une grossière phraséologie cabalistique »[159]. Du syllogisme, il dit:

> "It is surely a strange mode of proof, which should establish the truth of what is obviously, and what was never doubted of, by means of an argument which appears quite unintelligible, till explained and illustrated by an instance perfectly similar to the very thing to be proved." Stewart [1994 (1814)], p. 191.

Plus loin, il relève que les scolastiques, experts dans l'art du raisonnement, n'ont apporté aucune idée neuve à l'humanité:

---

[156] Robert [1978], p. 251-256.
[157] Tannoch-Bland [2000], p. 5.
[158] Stewart [1994 (1814)], p. 190.
[159] Stewart [1994 (1814)], p. 191.

> "And yet, I believe, it will be now very generally admitted, that never were labour and ingenuity employed, for so many ages, to so little purpose of real utility." Stewart [1994 (1814)], p. 207.

Il est absurde, dit-il, de vouloir élever la science par l'art du raisonnement seulement, et, pour appuyer ses dires, il cite John de Salisbury, un scolastique distingué qui étudia avec Abélard, et qui souligna l'inanité d'un raisonnement purement logique :

> "I went to visit the companions of my early studies. I found them, in every respect, precisely as I had left them; not a single step advanced towards a solution of their old difficulties, nor enriched by the accession of one new idea: - a strong experimental proof, that, how much soever logic may contribute to the progress of other sciences, it must for ever remain barren and lifeless, while abandoned to itself." Salisbury, cité dans Stewart [1994 (1814)], p. 207.

Les objections que Stewart fait à la logique d'Aristote sont fondamentales: il conteste que la *réflexion* se réduise à un *raisonnement*[160]*,* et il conteste que tout *raisonnement* se réduise à une chaîne de *syllogismes*[161]. De plus, le statut de la logique aristotélicienne lui semble contradictoire. D'une part, science formelle de la déduction, elle donne les règles de validité de la démonstration. D'autre part, on lui demande de conduire la science. La contradiction provient, souligne Stewart, de ce qu'une démonstration n'est pas un argument qui permet de décider de la vérité d'un énoncé scientifique. Seule l'observation est à même de donner cela. Stewart rapporte que selon Aristote, toutes nos croyances proviennent soit d'un syllogisme, soit d'une induction, où par induction il entend une inférence obtenue « à partir de tous les particuliers compris dans le général »[162]. Cette forme de raisonnement permet certes de conclure avec certitude, mais elle est une manière « puérile d'employer son esprit », dit Stewart (il cite Bacon pour appuyer ses dires). Il relève que John Wallis [1616-1703] a signalé que cette induction complète est, en fin de compte, équivalente à un syllogisme[163].
Le syllogisme, qui affirme que ce qui est vrai du général est vrai du particulier, n'est pas utile à la science dans la mesure où la science avance du particulier au général. Les prémisses sur lesquelles le syllogisme s'appuie sont ce dont le scientifique cherche à établir la vérité, alors que la conclusion du syllogisme est ce dont il a connaissance avec certitude. La syllogistique ne s'adresse qu'aux mathématiques, seul domaine de la démonstration formelle[164]. Et dans ce domaine elle est insuffisante. Il existe d'autres procédés de démonstration que le syllogisme, et il appartient à la logique de les formaliser[165].
Dans les sciences d'expérience, la grande difficulté, affirme Stewart, consiste à juger de la vérité des prémisses, à éviter de se laisser abuser par des préjugés et à récolter des informations complètes et précises. La syllogistique n'est d'aucune utilité dans ces cas[166].
La critique est donc double; d'une part, les mathématiques ont besoin d'un élargissement des procédures de démonstration, et d'autre part les sciences ont besoin d'une méthode qui les guide dans l'art de l'expérimentation scientifique.

---

[160] Stewart [1994 (1792)], p. 178.
[161] Stewart [1994 (1792)], p. 176.
[162] Stewart [1994 (1814)], pp. 257.
[163] Stewart reprend un exemple donné par Wallis: "if a person should argue, that all the planets (the Sun excepted) borrow their light from the Sun, by proving this separately of Saturn, Jupiter, Mars, Venus, Mercury, and the Moon. It is, in fact, a syllogism in Darapti, of which this is the form: Saturn, Jupiter, etc… each borrow their light from the Sun: But this enumeration comprehends all the Planets, the Sun excepted: Therefore all the Planets (the Sun excepted) borrow their light from the Sun". Stewart [1994] (1814)], pp. 257-258.
[164] Stewart [1994 (1814)], pp. 206-207.
[165] Stewart [1994 (1814)], pp. 316-322.
[166] Stewart [1994 (1814)], p. 205.

En dénonçant l'insuffisance de la logique aristotélicienne, Stewart reconnaît la nécessité d'une *logique rationnelle:*

> "To employ with skill the very delicate instrument which nature has made essentially subservient to general reasoning, and to guard against the errors which result from an injudicious use of it, require an uncommon capacity of patient attention, and a cautious circumspection in conducting our various intellectual processes, which can only be acquired by early habits of philosophical reflexion. To assist and direct us in making this acquisition, ought to form the most important branch of a rational logic, a science of far more extensive utility, and of which the principles lie much deeper in the philosophy of the human mind, than the trifling art which is commonly dignified with that name. The branch, in particular, to which the foregoing observations more immediately relate, must for ever remain in its infancy till a most difficult and important desideratum in the history of the mind is supplied, by an explanation of the gradual steps by which it acquires the use of the various classes of words which compose the language of a cultivated and enlightened people". Stewart [1994 (1792)], p. 205.

Il attend de cette nouvelle science qu'elle fournisse une classification des différents domaines de recherche et de leurs relations, une méthode d'investigation, les règles du raisonnement et un langage pour exposer les connaissances. Ce système de logique rationnelle doit émerger de la connaissance des lois de l'esprit humain, objet de la philosophie de l'esprit. Elle constituera une base solide sur laquelle toutes les autres branches de la connaissance viendront s'ériger en une *superstructure*[167].

7.2 L'algèbre: science suggestive pour une nouvelle logique

Stewart s'interroge sur l'origine de la « puissance de l'algèbre ». Il compare l'accroissement de force intellectuelle que donne le formalisme algébrique à l'esprit, à l'accroissement de force physique que procure une machine: de même que dans une forme algébrique sont contenues une infinité de vérités particulières, de même une machine peut produire d'un même mouvement répété une quantité innombrable d'objets. Il résulte de l'emploi d'une forme algébrique, comme de l'emploi d'une machine, une économie d'effort considérable :

> "The advantage our animal strength acquires by the use of mechanical engines, exhibits but a faint image of that increase of our intellectual capacity which we owe to language. - It is this increase of our natural powers of comprehension, which seems to be the principal foundation of the pleasure we receive from the discovery of general theorems. Such a discovery gives us at once the command of an infinite variety of particular truths, and communicates to the mind a sentiment of its own power, not unlike to what we feel when we contemplate the magnitude of those physical effects, of which we have acquired the command by our mechanical contrivances." Stewart [1994 (1792)], p. 205.

Il relève aussi l'analogie entre l'écriture algébrique et l'écriture formelle d'un syllogisme.

> "In general, it might be easily shewn that all the rules of logic, with respect to syllogisms, might be demonstrated without having recourse to anything but letters of the alphabet; in the same manner (and I may add, on the very same principles) on which the algebraist demonstrates, by means of these letters, the various rules for transposing the terms of an equation." Stewart [1994 (1792)], p. 177.

L'algèbre, comme la syllogistique, possède un formalisme qui soulage l'esprit, en écartant tout ce qui ne contribue pas au raisonnement. Stewart explique l'analogie entre formalisme algébrique et logique en disant qu'il y a une validité dans le *raisonnement pur* qui n'est pas liée au sens des mots, mais aux relations que les mots entretiennent entre eux. Dans ces deux

---

[167] Stewart [1994 (1792)], pp. 76-90.

systèmes, il y a des règles formelles qui permettent de déduire une conclusion à partir de prémisses. Le résultat (en algèbre comme en logique) est indépendant du contenu des expressions. Il ne dépend que de la forme de l'expression.

> "In all the sciences, this process of the mind [reasoning] is perfectly analogous to an algebraical operation; or, in other words, (when the meaning of our expressions is once fixed by definitions), it may be carried on entirely by the use of signs, without attending during the time of the process to the thing signified." Stewart [1994 (1792)], p. 180.

Ainsi, pour Stewart, le *raisonnement pur* a un caractère mécanique, qui provient de ce qu'il y a des règles universelles pour déduire ou pour inférer d'une combinaison de signes une autre combinaison de signes équivalente du point de vue de la valeur de vérité. Ces règles, selon Stewart, constituent les lois de la pensée. Il revient à la philosophie de l'esprit de les découvrir, et de les expliciter[168].

La science de la logique a besoin d'un langage qui lui soit propre. Ce langage est à inventer. Il ne constituera toutefois pas le *savoir*, contrairement à ce qu'affirme Condillac, mais contribuera à organiser, à structurer le savoir. Stewart pense que la logique bénéficierait d'un formalisme comparable au *langage de l'algèbre:*

> "It appears farther [sic], from the remarks which have been made, that the perfection of philosophical language, considered either as an instrument of thought, or as a medium of communication with others, consists in the use of expressions, which, from their generality, have no tendency to awaken the powers of conception and imagination; or, in other words, it consists in its approaching, as nearly as possible, in its nature, to the language of Algebra." Stewart [1994 (1792)], p. 181.

A la lecture de cet appel à une logique rationnelle que Stewart réitère à plusieurs reprises, on pense évidemment à Leibniz. Il est certain que Stewart a eu connaissance du projet de langue universelle de Leibniz, la *lingua characteristica universalis* et le *calculus raciotinator*[169]. Il reconnaît lui-même quelque analogie entre la logique rationnelle à laquelle il aspire et la langue universelle de Leibniz :

> "That such a query is not altogether chimerical, appears from the wonderful effects of Algebra (which is precisely such an instrument of thought, as I have been now alluding to) in facilitating the inquiries of modern mathematicians. Whether it might not be possible to realize a project which Leibniz has somewhere mentioned, of introducing a similar contrivance into other branches of knowledge, I shall not take upon me to determine; but that this idea has at least some plausibility, must, I think, be evident to those who have reflected on the nature of the general terms which abound more or less in every cultivated language." Stewart [1994 (1792)], p. 82.

Une différence essentielle existe pourtant entre Leibniz et Stewart. Leibniz, en effet, désire appliquer sa *lingua characteristica* aux sciences, afin de leur donner la rigueur et la certitude qui semblent être le privilège des mathématiques, alors que Stewart, ayant admis le caractère fondamentalement incertain des sciences, est à même de séparer ce qui était souvent confusément confondu: la méthode algébrique et les résultats obtenus en utilisant cette méthode dans différents domaines (tels la mécanique).

Condillac, Leibniz et Stewart cherchent tous trois dans le formalisme algébrique un modèle pour une nouvelle logique. La raison en est que l'algèbre possède toutes les caractéristiques requises par un langage formel, à savoir: deux sortes d'entités symbolisées (des objets et des

---

[168] Stewart [1994 (1792)], p. 87.

[169] Stewart a eu l'occasion de lire quelques lettres de Leibniz mentionnant son projet. Il semble toutefois que Stewart n'ait eu qu'une idée vague de ce dont il s'agissait. Les écrits de Leibniz furent peu connus jusqu'au 19ème siècle.

opérations), des règles pour combiner les objets et les opérations (syntaxe pour composer des formules valides) et des règles qui permettent d'établir des équivalences (axiomes)[170].
L'élément important et nouveau qui fait la richesse de l'algèbre et dont les mathématiciens prendront conscience est la *symbolisation des opérations.* Playfair, Babbage et De Morgan en soulignent tous trois l'importance. Je reviendrai sur ce point en présentant leurs travaux.

7.3 Nécessité d'une nouvelle logique selon Sir William Hamilton [1788-1856]

Sir William Hamilton a une connaissance approfondie des œuvres d'Aristote, de Leibniz et de Kant, et plus largement de celles de tous les logiciens occidentaux. Il dresse un tableau très sombre de l'état de la logique dans les universités britanniques[171].
Hamilton a travaillé de nombreuses années à prolonger la logique d'Aristote, œuvre qu'il admirait, mais qu'il considérait comme inachevée. Ses innovations sont généralement considérées comme de peu d'importance. Son apport majeur concerne la quantification du prédicat. Il considère les termes de sujets et ceux de prédicats comme des *choses* avec certains atributs. Sujets et prédicats occupent dès lors des positions symétriques interchangeables, ce qui permet à Sir Hamilton d'adopter un formalisme algébrique. La copule *est* se traduit par un signe analogue au signe de l'égalité. Hamilton introduit un symbole pour indiquer la négation d'une proposition, et il établit les règles formelles de conversion et de transposition des propositions. Il est à relever que l'énoncé « tout A est B » est exprimé dans ses écrits par: « A *est contenu* dans B » ou « tout *élément* de A est *élément* de B ». Cette formulation prépare le terrain pour une conception ensembliste de la logique[172].
L'importance de Hamilton n'est pas tant dans ses innovations en logique, mais bien dans le regard qu'il a porté sur elle. Affirmant que l'esprit a la faculté de connaître ses propres règles de fonctionnement, il fait de l'explicitation des *lois de la pensée* l'objet de la logique pure :

> "Here, the term faculty […] is employed […] to denote […] the power the mind has of being the native source of certain necessary or *a priori* cognitions; which cognitions, as they are the conditions, the forms, under which our knowledge in general is possible, constitute so many fundamental laws of intellectual nature. It is in this sense that I call the power which the mind possesses of modifying the knowledge it receives, in conformity to its proper nature, its Regulative Faculty." Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 2, p. 347.

Hamilton établit une classification des branches de la connaissance. Il distingue deux sortes de sciences: les sciences *formelles* dont l'objectif est l'harmonie de la pensée avec elle-même, et les sciences *réelles* qui recherchent l'harmonie de la pensée avec l'objet.

---

170 Couturat [1961], pp. 84-85, relève que l'invention du calcul infinitésimal procède d'une recherche de symbolisation générale, dont l'originalité consiste à représenter par des signes appropriés des notions et des opérations qui n'ont plus rien d'arithmétique, et de l'application d'un algorithme formel.

171 Il lance un cri d'alarme: cette science est à l'abandon. En deux siècles, dit-il, les manuels sont devenus squelettiques. A l'aube du 19ème siècle, les professeurs et les tuteurs chargés d'enseigner cette matière ne savaient rien de cette science, considérée par la plupart comme poussiéreuse et ennuyeuse, inutile vestige, emblème d'une époque où l'enseignement se donnait pour mission de transmettre un savoir établi par l'autorité de quelques pères, un savoir figé, considéré comme achevé. Sir William Hamilton [1840], «Logique », in *Fragments*.

172 Laita [1979] étudie une influence possible de Sir William Hamilton sur Boole. Il relève de nombreuses similitudes entre l'œuvre de Hamilton, celle de De Morgan et celle de Boole. Remarquons que l'opération de sélection introduite par Boole est une idée proche de l'interprétation que Hamilton donne à la prédication (elle s'obtient par un acte de séparation). Laita invoque *l'air du temps* pour expliquer ces similitudes.

A l'instar de Stewart, il admet deux sciences formelles: les mathématiques et la logique pure. Il définit la *Logique* comme « la Science des Lois de la Pensée en tant que Pensée »[173]. La logique pure s'intéresse à la pensée pure, abstraite de toute matière. Elle est une science qui « ne sait rien de la vérité ou de la fausseté des propositions en elles-mêmes », une science dans laquelle « tout ce qui n'est pas contradictoire est vrai »[174]. Si le lien formel qui lie prémisses et conclusion est correct, la proposition est vraie en logique quand bien même les prémisses seraient fausses.
La logique est la science des *lois de la pensée* (*laws of thought*). Ces dernières sont universelles, immuables, non créées. Invisibles, elles ne se manifestent pas, tant que nos sens internes ou externes ne les tirent pas de leur sommeil. Elles sont en nous dès la naissance, et de là vient que la vérité logique est une vérité *nécessaire*.

> "They lie hid in the profundities of the mind, until drawn from their obscurity by the mental activity itself employed upon the materials of experience. Hence it is, that our knowledge has its commencement in sense, external or internal, but its origin in intellect." Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 2, p. 351

Si la logique pure s'intéresse à la pensée pure abstraite de tout objet, si elle ne se préoccupe pas de la réalité, elle n'apporte aucune connaissance du monde, et en ce sens mathématiques et logique sont des sciences de même nature:

> "In this respect, Logic and Mathematics stand alone among the sciences, and their peculiar certainty flows from the same source. Both are conversant about the relations of certain *a priori* forms of intelligence: - Mathematics about the necessary forms of Imagination; Logic about the necessary forms of Understanding; Mathematics about the relations of our representations of objects, as out of each other in space and time; Logic about the relations of our concepts of objects, as in or under each other, that is, as, in different relations, respectively containing and contained. Both are thus demonstrative or absolutely certain sciences only as each develops what is given, - what is given as necessary, in the mind it self. The laws of Logic are grounded on the mere possibility of a knowledge through the concepts of the Understanding, and through these we know only by comprehending the many under the one." Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 3, p. 43

Sir William Hamilton a adopté une position proche de celle de Stewart: logique et mathématiques sont des sciences certaines, qui n'ont pas à juger de la conformité du discours à la réalité. Mais pour Hamilton, logique et mathématique se distinguent par leur utilité: la logique est une science utile à toutes les sciences, alors que les mathématiques sont simplement inutiles. La logique est utile, car elle explicite les lois de la pensée. Elle énonce les conditions dans lesquelles il nous est possible de construire notre connaissance, elle donne les règles à respecter pour organiser nos connaissances en un savoir structuré. Au contraire, les mathématiques sont une science formelle, dont les objets sont des créations de l'imagination, situées dans un *temps* et un *espace* mathématiques, formes *a priori* de l'imagination. La question de l'adéquation de ces images intellectuelles que sont le *temps et l'espace mathématiques* à une réalité extérieure (un temps et un espace physiques) n'appartient pas aux mathématiques. Une vérité mathématique ne dit rien de la validité des prémisses, par exemple sur l'infinie divisibilité du temps ou l'infinité de l'Univers, elle n'affirme que la légitimité de la conséquence, les principes étant supposés. Les mathématiques sont donc à son avis une science inutile, dans la mesure où elles relient des connaissances certes selon les lois de l'esprit, mais en partant de principes relevant purement de l'imagination.

---

[173] Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 3, p. 4. Par *pensée*, il entend *les actes de l'entendement*. Il ne fait pas entrer la volonté ou le désir dans ce concept (p. 13).
[174] Sir William Hamilton [1840], « Logique », in *Fragments*, p. 226.

Les sciences *réelles* s'opposent aux sciences *formelles*, par le fait qu'elles ont à juger de l'adéquation de la pensée à l'objet réel de leur étude. Sir William Hamilton classe dans les sciences du réel les sciences de la nature, la psychologie et la métaphysique. La *psychologie* est concernée par les modifications ou états de l'esprit du sujet pensant. Elle est une science empirique qui observe et décrit des phénomènes. La logique puise son matériel dans la psychologie, mais elle ne s'intéresse qu'à la forme de la pensée et non aux états de pensée[175]. La *métaphysique* est la science qui traite des inférences nécessaires. La raison ne peut atteindre la connaissance de l'absolu, mais il est légitime de poser l'existence d'un être inconnaissable si cette existence est nécessaire à l'explication rationnelle du monde. Cette existence ainsi posée n'appartient pas à la connaissance logique ou rationnelle des choses, elle est d'une autre nature et relève de la croyance.
En résumé, Sir William Hamilton situe la logique dans un autre plan que les sciences réelles. Il la définit comme une science organisatrice du savoir. Les possibilités de structuration sont de deux types: tout acte de pensée consiste à *joindre* ou à *séparer*, ce qui ne laisse comme possibilité de relation entre deux termes que l'alternative *contenir* ou *être contenu*[176].

7.4 L'égalité mathématique est-elle une identité logique?

Dans l'épistémologie contemporaine, la logique et les mathématiques sont considérées comme des sciences formelles. Elles sont les « structures mises en œuvre par une intelligence opératoire »[177]. Alors que la logique est considérée comme une science purement déductive qui n'apporte pas d'élément de connaissance nouveau, les mathématiques sont une science formelle inductive, capable de générer des *objets* nouveaux. Cette différence provient d'une différence structurelle fondamentale: en logique, les objets sont donnés *a priori*, la structure d'inclusion est fixée (être tout ou partie est une propriété de l'objet), et les opérations (négation, intersection et réunion) sont *idempotentes*. En mathématiques, les opérations sont premières, elles sont *itératives* et *génératrices* de nouveaux objets; être *ensemble* ou *élément* n'est pas un attribut des objets, mais une *relation* entre deux objets. De ces différences fondamentales, il découle que les mathématiques sont une science inductive, productrice de nouvelles connaissances, alors que la logique est une science déductive qui vise à exprimer le contenu d'un donné sans apporter de nouvelles connaissances[178].
Jusqu'au 19ème siècle, les mathématiques étaient généralement tenues pour une science purement déductive, dont les premiers principes étaient tenus pour « vrais » par évidence. La nécessité, la certitude et le consensus qui découlaient de cette construction parfaite caractérisaient la vérité mathématique. Cependant, la croyance en la *nécessité* de tout énoncé mathématique a posé un problème de fond: les mathématiques ne sont-elles pas qu'une éternelle variation sur un même thème, une incessante répétition d'une même proposition?

> « Si […] toutes les propositions qu'elle [la science mathématique] énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A? » Poincaré [1968], p. 31.

---

175 Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 1 pp. 130-140 et vol. 3, pp. 1-40.
176 Toute notre connaissance se construit par séparations et agrégations successives:le premier acte de séparation consiste à séparer le moi du non-moi (Sir William Hamilton [1970 (1859)], vol. 3, pp. 1-80.) Il est à noter qu'on reconnaît en général à Freud d'avoir supposé que le premier acte de raisonnement du bébé est de distinguer le moi de ce qui n'est pas moi.
177 Robert [1978], p. 223
178 Robert [1978], pp. 223-226. Voir aussi Poincaré [1968], chapitres 1 et 2. Cette distinction entre mathématique et logique est contestée actuellement par certaines écoles de logique, notamment par Da Costa [1997].

L'opinion selon laquelle toute vérité mathématique n'est que l'expression du *principe d'identité* découle, affirme Poincaré, de la croyance que les mathématiques sont une science purement déductive. Il en résulte que « la possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble »[179].
La question soulevée ici fut déjà longuement débattue au 18ème siècle. Leibniz a tenté de démontrer que 2+2=4. D'Alembert, dans le *Discours Préliminaire*, s'interroge sur la connaissance qu'apporte une proposition mathématique : « Celui qui dit deux et deux font quatre, a-t-il une connaissance de plus que celui qui se contentait de dire que deux et deux font deux et deux?»[180]. Diderot, de son côté, s'inquiète de cette « redondance » des mathématiques:

> « Interrogez des mathématiciens de bonne foi, ils vous avoueront que leurs propositions sont toutes identiques et que tant de volumes sur le cercle, par exemple, se réduisent à nous répéter en cent mille façons différentes que c'est une figure où toutes les lignes tirées du centre à la circonférence sont égales. Nous ne savons donc presque rien »Diderot [1951 (1749)], pp. 860-861,

Pour Pierre Prevost[181]:

> « Il [le mathématicien] avance de supposition en supposition, et, retournant sa pensée sous mille formes, c'est en répétant sans cesse, *le même est le même*, qu'il opère tous ses prodiges. […]. Il est si vrai que cette science n'est qu'un continuel retournement de la pensée, qu'on peut concevoir une intelligence qui l'invente et la porte à sa perfection sans autre moyen que la méditation seule. Il est si vrai que cette science tire tout de son propre fonds, qu'on y a proposé l'usage de quelques machines ingénieuses, capables de rendre sous forme d'application ou de conséquence ce qu'on leur confie sous forme de principe. » Prevost [1800], p. 14.

Prevost se déclare convaincu que le raisonnement mathématique s'appuie « constamment sur le principe d'identité ». Ainsi, selon lui, « la conséquence d'une vérité [mathématique] n'est que cette vérité elle-même présentée sous un autre aspect ». C'est « la reconnaissance de quelque identité qui autorise chacune de ses conclusions », et le seul moyen de vérifier une assertion mathématique est d'établir l'identité entre le principe et la conséquence, car « la conséquence doit être toute entière contenue dans le principe »[182].
Stewart met en question que toutes les « vérités mathématiques » se réduisent à la perception d'*identités:*

> "It may be fairly questioned, too, whether it can, with strict correctness, be said even of the simple arithmetical equation 2+2=4, that it may be represented by the formula *a=a*. The one is a proposition asserting *the equivalence of two different expressions*; - to ascertain which equivalence may, in numberless cases, be an object of the highest importance. The other is altogether unmeaning and nugatory, and cannot, by any possible supposition, admit of the slightest application of the practical nature." Stewart [1994 (1814)], p. 129.

Il accorde à Prevost que « la conséquence est contenue toute entière dans le principe». Il lui semble qu'en acceptant une définition ou une hypothèse, on n'a pas d'autre choix que d'en accepter toutes les conséquences. Ce manque de choix, selon Stewart, peut faire croire que le

---

[179] Poincaré [1968], p. 31.
[180] D'Alembert [1965 (1751)], p. 39.
[181] Pierre Prevost, philosophe genevois, ami de Stewart. Voir ci-dessus, sous 1.1.2.
[182] Lettre de Prevost à Stewart, in Stewart [1994 (1814)], p. 408-414. Prevost, en général en plein accord avec Stewart, se trouve sur ce point précis en opposition. Il le dit dans une lettre qu'il lui écrivit afin d'éclaircir certaines de ses positions que Stewart semble avoir mal interprétées. Il souligne qu'ils sont d'accord sur le fait que les définitions sont les principes premiers des mathématiques, et que les vérités mathématiques sont des déductions logiques tirées de données hypothétiques.

mathématicien n'apporte aucune connaissance en énonçant ses théorèmes. Pourtant, affirme Stewart, la perception d'une *conséquence logique* n'est pas la perception d'une *identité*. Stewart relève qu'Aristote a semé la confusion entre les notions d'*égalité* et d'*identité,* confusion qui a obscurci la pensée de la plupart des philosophes:

> "I am strongly inclined to suspect, that most of the writers who have maintained that all mathematical evidence resolves ultimately into the perception of identity […] have imposed on themselves, by using the words identity or *equality* as literally synonymous and convertible terms." Stewart [1994 (1814)], p. 127.

La confusion entre *égalité* et *identité* vient, d'après Stewart, de ce qu'on a tendance à confondre l'évidence du principe par lequel une vérité est établie et l'évidence de la vérité elle-même. Et il donne un exemple: un texte écrit dans un langage codé est décodé par une opération dont le principe est évident; néanmoins, l'opération n'est pas triviale. Les deux membres d'une équation peuvent être vus comme le texte codé et le texte décodé. Ils représentent une seule quantité, tout comme le texte décodé et le texte codé représentent un seul message. On passe de l'un à l'autre par un principe évident. Néanmoins, ni dans un cas ni dans l'autre, il ne s'agit d'une *opération tautologique*.
Pour Stewart, les termes *égalité* et *identité* sont bien différents: le signe de l'égalité signifie que les deux termes de part et d'autre du signe sont *interchangeables* dans le cadre d'une activité de calcul. Dans ce contexte, les deux expressions sont *identifiées*, avant d'être *considérées comme identiques*. De même, dans le cadre d'un problème de géométrie, deux figures *égales* sont interchangeables, car leurs différences (de place et de position) n'entrent pas en considération pour le géomètre. Il n'est dès lors pas pertinent de les distinguer en tant qu'*objets de pensée;* on les *identifie* donc dans la pensée comme un seul *objet*. Plus précisément, Stewart stipule que l'identité des figures géométriques repose sur une « application imaginaire » dont le rôle est d'*identifier* des triangles *superposables,* dans un même acte de pensée*:*

> "The object of which imaginary application is merely *to identify* the two triangles together, in every circumstance connected both with magnitude and figure." Stewart [1994 (1814)], p. 125.

L'*identité* des figures géométriques égales repose sur un mouvement imaginaire, qui constitue une *identification* d'objets différents. De même, le signe de l'égalité placé entre deux quantités algébriques dissimule un mouvement au sens aristotélicien du terme, et constitue une *identification* de deux expressions différentes, et non pas la *perception d'une identité existante*. Le mouvement est représenté par l'*opération*.
Les partisans de la théorie selon laquelle « toutes les évidences mathématiques se réduisent ultimement à la perception d'identités »[183], en considérant que l'expression *calculée* est *identique* à l'expression *à calculer*, ont « secrètement » ignoré l'existence d'une *opération*. Ils ont confondu l'objet sur lequel porte l'opération et l'objet résultant de l'opération. Dans l'épistémologie traditionnelle des mathématiques, l'*avant* et l'*après* ne sont pas distingués, le signe « = » écrase le temps. Stewart, en affirmant que l'expression *calculée* est *identifiée* à l'expression *à calculer,* apporte un élément essentiel qui assure que les mathématiques ne sont pas une tautologie. Son interprétation *dynamique* du signe de l'égalité donne un sens (une orientation) à l'expression algébrique. Il s'ensuit que la relation d'égalité est à considérer comme une relation attributive, transporteuse de signification: c'est par elle que transite la signification d'une expression pourvue de sens à un pur symbole.

[183] Stewart [1994 (1814)], p. 127.

Stewart met en exergue le caractère opératoire de l'opération mathématique, et le caractère dynamique et attributif du signe de l'égalité. Cette interprétation offre pour les mathématiciens de la génération suivante une philosophie apte à soutenir les mathématiques, ce que la logique élémentaire n'est plus à même de faire. Dans la troisième partie de ce travail, je montrerai que Babbage, en s'appuyant sur la philosophie de Stewart, développera un calcul des fonctions en un système algébrique d'opérations abstraites. Il expose la philosophie de la généralisation de ce calcul dans *Essays on the Philosophy of Analysis* (1821). L'algèbre y est présentée de telle manière qu'on a l'impression de se trouver au point de bifurcation entre la théorie des structures algébriques et la logique symbolique.

Chapitre 8. Conclusion

Je conclus cette partie en résumant les éléments importants vus aux sept chapitres précédents. Le début du 18ème siècle est marqué, on l'a vu, par deux critiques cruciales: l'idéalisme de Berkeley révèle que le calcul infinitésimal nécessite une logique plus vaste que la logique aristotélicienne. La critique empiriste de Hume met en évidence que la science a besoin d'une logique plus vaste que la logique des classes, dépourvue de moyens pour classer des relations et organiser des faits.

La réponse apportée à Hume en Grande-Bretagne vient de Reid. Ce dernier propose, comme Kant, une philosophie critique, reconnaissant le rôle actif de l'esprit dans l'appréhension de la réalité, dans sa transformation sous forme de *concepts*, et dans l'organisation des concepts sous forme d'un *système de connaissances*. La philosophie écossaise du « Sens Commun » s'inscrit ainsi dans une dialectique épistémologique qui s'étend sur plusieurs siècles, elle répond à la critique de Hume, dans une tradition empiriste remontant à Locke, et s'inspire de l'idéalisme de Berkeley.

Les philosophes écossais se retrouvent sur les points suivants, qui montrent des philosophes engagés dans un processus d'appropriation active de la vérité:

- La connaissance est ancrée dans des vérités qui ne viennent pas des sens et qui ne se démontrent pas par la raison, des vérités qui appartiennent à un fonds commun de l'humanité.
- L'esprit et les sens jouent un rôle fondamental dans l'acquisition de la connaissance. Jamais on ne verra sans nos yeux, et jamais on ne percevra sans notre esprit. L'esprit, en saisissant la vérité, y laisse inévitablement ses empreintes.
- Le langage est un système de symboles arbitraires, créé par l'homme. Les symboles prennent sens par consensus. Le langage, sorte d'ARN de transfert de la pensée, n'est pas dissociable de la pensée. Plus qu'un véhicule, il en est un instrument.

Reid inscrit la connaissance dans le *hic et nunc*. Il la lie inextricablement à l'*activité* de l'esprit du sujet pensant. Il fonde la connaissance sur des principes premiers. Il les nomme les « axiomes du sens commun ». Ces principes premiers explicitent le fonctionnement de la raison. Ils doivent être acceptés comme vrais, car la raison ne peut valider son propre fonctionnement. Elle doit le présupposer. Reid a mis beaucoup d'énergie à faire de la pensée une activité. Il s'est battu contre l'existence des idées innées claires et distinctes, les idées « forgées », les idées « objets de l'esprit ». Il a fait de la pensée une création continue. De son analyse du fonctionnement de l'esprit humain émerge la notion d'opération, une entité abstraite dont l'existence est distincte de son objet.

Stewart est un philosophe trop peu connu dont l'influence fut considérable entre 1800 et 1850. Il a distingué forme et contenu du langage, et il a fait du langage un instrument de la pensée. Il a distingué la nature hypothétique de la vérité mathématique de celle, réelle, de la vérité scientifique. Il a attribué la certitude mathématique non à son langage mais à sa qualité de science hypothétique. Il a affirmé que les mathématiques sont une science formelle, à laquelle on peut demander de structurer le discours scientifique. Il critique sévèrement la logique aristotélicienne, mais il reconnaît le besoin d'une *logique*. Ses *Elements of the Philosophy of the Human Mind* contiennent de nombreux appels à la construction d'une nouvelle logique,

une science première, fondamentale pour toutes les sciences, relevant de la philosophie de l'esprit. Il suggère que l'on s'inspire de l'algèbre pour constituer la nouvelle logique. Il indique la spécificité des mathématiques relativement à la logique; il reconnaît le caractère opératoire des opérations mathématiques et donne une interprétation dynamique au signe de l'égalité.
Sir William Hamilton, le dernier des philosophes du « Sens Commun », en éditant et en commentant les œuvres de Reid et de Stewart, contribue à constituer la philosophie du « Sens Commun » en une École qu'il situe dans le courant philosophique européen. C'est par lui que cette philosophie fut connue en France et aux Etats-Unis. Homme d'une grande culture, il avait une connaissance exceptionnelle de l'œuvre des logiciens de tous les temps. Cette culture lui permet de se livrer à une critique forte de l'état de la logique en Grande-Bretagne. Lui-même travaille à développer un formalisme pour la logique. Il introduit une notation symbolique dans laquelle une proposition s'écrit comme une équation, et il établit des règles de transformation des propositions pour lesquelles la valeur logique de la proposition est invariante. La critique impitoyable de John Stuart Mill et la querelle qui l'opposa à De Morgan eurent raison de sa réputation. Son œuvre fut généralement négligée par les historiens.
La théorie de la connaissance qui se dégage de l'analyse de Reid a rompu avec les gnoséologies traditionnelles. Mais c'est à Stewart qu'il revient d'avoir dessiné pour les mathématiques une épistémologie en rupture avec la tradition. Les mathématiciens trouveront chez lui une épistémologie générale qui donne aux mathématiques et à la logique un statut de langage formel, et leur demande de structurer nos connaissances des choses et des faits.
Stewart et Sir William Hamilton ont non seulement accepté que *savoir* et *réalité* sont des entités irrémédiablement hétérogènes. Mais ils ont été en mesure de distinguer le savoir lui-même des structures d'organisation du savoir. Tous deux reconnaissent la nécessité d'une logique et l'insuffisance de la logique aristotélicienne. Tous deux reconnaissent que logique et mathématiques sont deux sciences formelles qui s'opposent aux sciences réelles (la philosophie, la métaphysique et la psychologie). Ils ne sont toutefois pas d'accord sur la place à accorder aux mathématiques dans ce triangle. Les questions qu'ils abordent concernant les relations entre la logique, les mathématiques et les sciences constituent une introduction naturelle à l'œuvre de Boole, prélude à l'avènement de la logique symbolique contemporaine.
Il est dès lors surprenant que tant l'Algèbre Symbolique de Peacock (science de purs symboles ayant une valeur de langage) que l'algèbre de Boole aient été considérées comme des œuvres isolées, surgissant sans signes annonciateurs. Il apparaît en effet que les ingrédients nécessaires à l'avènement de ces nouvelles structures se trouvent dans le discours philosophique de l'« École Écossaise du Sens Commun ».
Avant d'examiner, dans la troisième partie, les travaux des mathématiciens de l'« École Algébrique Anglaise », et les liens qui unissaient mathématiciens et philosophes de l'« École Écossaise », je m'interrogerai sur les mathématiques pratiquées en Grande-Bretagne au 18ème siècle. Je montrerai l'existence de problèmes liés à l'analyse: les questions concernant la nature de la grandeur, de la figure géométrique, la possibilité du mouvement en géométrie, ainsi que celles concernant la nature des nombres négatifs et des nombres complexes. Tous ces problèmes sont soulevés par des mathématiciens britanniques, préoccupés par l'épistémologie des mathématiques plus que par des techniques internes aux mathématiques.

Partie II: La tradition géométrique écossaise et le problème des quantités « impossibles »: deux aspects spécifiques des mathématiques britanniques dans la deuxième moitié du 18ème siècle

La publication de La *Géométrie* de Descartes en 1637 marque, selon la périodisation de Pont [2001], le début de la période « moderne ancienne » pour les mathématiques. Ce livre est une charnière à double titre: d'une part, la notation symbolique que Descartes propose paraît suffisamment achevée pour que la puissance du calcul littéral y soit manifeste; d'autre part, il se présente comme le « lieu de réconciliation ou de fusion d'une arithmétique traitant de nombres et d'une théorie des grandeurs fondée sur un support géométrique »[184]. Il marque le début d'une période caractérisée par une pratique mathématique nouvelle. Grâce à la méthode proposée, les problèmes de géométrie se résolvent avec facilité et rapidité. Descartes, identifiant l'*expression algébrique* (équation) avec la *courbe géométrique* par un processus indéterminé qui passe pour un processus d'*abstraction* et de *généralisation,* a assuré « un parallélisme complet entre nombres et étendue »[185]. Il déclare assez fièrement:

> «Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des Géomètres, se réduit à un même genre de Problèmes, qui est de chercher la valeur des racines d'une équation.» Descartes [1984 (1637)], p 401.

Plus qu'une application de l'algèbre à la géométrie, c'est à une fusion de l'algèbre avec la géométrie qu'on assiste après lui, fusion dont Lagrange se félicite, tant elle se révèle féconde dans ses débuts:

> «Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques. » Lagrange [1973 (1795)], vol. 7, p. 271

Or, cette fusion se révèlera funestement à l'origine des paradoxes qui surgissent au sein de l'*analyse*. En témoigne, entre autres, Dedekind, qui, dans l'introduction de *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) critique l'habitude de rechercher dans des évidences géométriques un soutien intuitif aux notions de *continuité*, ou de *limite*. C'est en coupant le « cordon ombilical » entre la fonction et sa représentation graphique que l'on parviendra à surmonter les difficultés apparues au sein de l'analyse[186].

---

[184] Pont [2001], p. 109.
[185] Cavaillès [1962] p. 31.
[186] Pont [2001], p. 123; pp. 120-124; 132

En attendant, la méthode proposée dans La *Géométrie* rend possible la manipulation d'expressions dont le statut ontologique laisse toutefois perplexe: les *quantités impossibles*[187], auxquels s'ajouteront les *quantités infiniment petites*, et les *quantités universelles*[188]. Ces êtres étranges ne sont pas des objets traditionnels des mathématiques: ils ne sont ni des *grandeurs*, ni des *nombres*, ni des *figures*[189]. Nonobstant ces étrangetés, la *géométrie analytique* (géométrie cartésienne et calcul différentiel) se développe, entre algèbre et géométrie, en s'appuyant sur l'évidence intuitive propre à la philosophie cartésienne, d'une corrélation entre expression algébrique et courbe géométrique.

Durant le 18ème siècle, les mathématiciens continentaux exploitent les avantages techniques découlant de la *géométrie analytique* et développent de nouvelles méthodes de résolution des calculs qu'ils utilisent pour décrire et expliquer les phénomènes de la nature. Ce nouveau domaine des mathématiques, assez vaguement délimité, est appelé l'*analyse*. En donner une définition précise et saisir ce qui le distingue de l'*algèbre* est une tâche malaisée. En effet, l'*algèbre / analyse* issue de La *Géométrie* (1637) est une « mathématique amphibie, géométrique par son objet, mais arithmétique d'esprit et de méthode »[190]. Science ou méthode, ses objets ne sont ni des nombres, ni des grandeurs ni des figures géométriques, mais des équations / courbes dont les rapports aux objets mathématiques traditionnels sont mal définis. Cette mathématique a perdu la pureté que lui avaient conféré les Grecs (selon l'historiographie traditionnelle). Boutroux [1920] le souligne, ajoutant que « ceux qui ont réussi dans cette science sont ceux qui n'avaient pas de scrupules théoriques »[191]. Telle est peut-être l'une des caractéristiques de la période « moderne ancienne ».

Les Britanniques, de leur côté, n'ont pas cette audace pragmatique. Après la publication de *The Analyst*, ils hésitent à recourir aux nouvelles techniques *analytiques*, bien qu'ils en reconnaissent la puissance[192]. Ils cherchent dans la *géométrie*, une géométrie *à l'ancienne*, une rigueur dont la nouvelle *géométrie analytique* leur semble dépourvue. De ce fait, on a dit que les mathématiciens britanniques avaient pris du « retard » sur les mathématiciens français[193]. Les scientifiques britanniques du début du 19ème siècle parlent eux-mêmes du déclin de leurs sciences, en recherchent les causes et discutent des réformes universitaires et sociales susceptibles de remédier à cette situation[194]. Je m'interroge dans cette deuxième

---

[187] J'utilise l'expression *quantité impossible* (en traduction de *impossible quantity*) pour désigner les quantités négatives ou leurs racines. J'utilise le terme *quantité* en traduction du terme anglais *quantity*, dont la définition est: « any thing capable of estimation or mensuration or which being compared with another thing of the same kind, may be said to be either greater or less, equal or unequal to it ». (Hutton [2000 (1796)], *A Mathematical and Philosophical Dictionary*, article "quantity"). Dans les textes français de cette époque, on trouve plus souvent le mot *grandeur* que *quantité*, bien qu'ils soient considérés comme synonymes (voir introduction).

[188] Les Britanniques utilisent souvent l'expression *arithmétique universelle* pour désigner l'algèbre. Les continentaux utilisent l'expression *algèbre spécieuse*. L'expression *quantité universelle* est utilisée (on la doit à Euler) pour désigner une quantité indéterminée ou variable. Je préfère utiliser ce terme plutôt que celui de *fonction*, dont la signification a pris, au cours des ans, une précision qui ne se trouvait pas durant la période que j'étudie. Je reviendrai dans la troisième partie sur les difficultés liées à l'élaboration de la notion de *fonction*.

[189] Descartes n'acceptait pas de considérer des grandeurs négatives. Il écrivait une équation pour chacun des quadrants. Ce point fait dire à Gardies [2001], p. 115, que Descartes n'a pas fait usage des coordonnées cartésiennes.

[190] Boutroux [1920], p. 78.

[191] Boutroux [1920], p. 89.

[192] Olson [1971].

[193] Cajori [1985 (1893)].

[194] John Toplis [1774/1775-1857] est l'un des premiers à reconnaître publiquement le besoin de réforme dans l'enseignement universitaire, l'insuffisance en particulier dans le domaine des mathématiques et des sciences (Toplis [1805], *On the Decline of Mathematical Studies and the Sciences Dependent on Them*). John Playfair [1808a], dans « Review of *Laplace's Mécanique céleste* » (1808), constate que les Britanniques ne connaissent pas les nouvelles méthodes qui se développent sur le Continent. Il critique les Universités, restées figées dans des structures passéistes. Babbage [1830] publie un pamphlet sous le titre de *Reflections on the*

partie sur le caractère spécifique des recherches mathématiques effectuées en Grande-Bretagne et particulièrement en Écosse[195]. Pour répondre à ces questions, je me tourne vers des mathématiciens dont les travaux ont eu une influence considérable au 18ème siècle.
Je m'intéresse tout d'abord à deux géomètres écossais: Simson[196] et Matthew Stewart [197]. Je décris dans le chapitre neuf l'étrange acharnement de ces deux hommes qui ont consacré leur vie à restaurer une partie de l'œuvre perdue des Anciens, ainsi qu'à la perpétuer. Les Anciens se servaient d'une méthode d'analyse pour l'étude des propriétés des courbes. Il s'agit d'une méthode d'analyse différente de celle pratiquée en géométrie analytique. Elle fut cultivée en Grande-Bretagne et passa presque inaperçue sur le continent. Elle est cruciale pour comprendre la nature des objets mathématiques dans l'épistémologie « moderne récente ».
Dans le chapitre dix, je discute des problèmes philosophiques posés par l'introduction du *calcul des fluxions*. Berkeley a attaqué avec force la logique de ce calcul. Sa critique a été entendue et de nombreuses réponses ont été données. La réponse la plus influente fut celle de Maclaurin[198]; elle dominera toute la seconde moitié du siècle. Maclaurin, dans *A Treatise of Fluxions* (1742), fonde le calcul des fluxions sur une présentation cinématique de la grandeur, suivant en cela l'approche de Newton[199]. Il a recours à des *méthodes génétiques*, aussi bien dans le calcul des grandeurs que dans l'étude des propriétés des courbes. Je présente les vues de Maclaurin sur la théorie des fluxions. Je présente et discute ensuite des positions de Leslie[200] et Playfair[201], ainsi que celles du philosophe Dugald Stewart, concernant la question du *mouvement* en géométrie, question liée à la présentation cinématique choisie par Maclaurin. Je discute pour terminer de l'incursion des images temporelles dans les textes d'analyse, et des efforts constants des mathématiciens pour les éliminer. Je me réfère pour cette discussion à la remarquable étude de Grize [1954].
Il est un autre problème majeur auquel les mathématiciens britanniques se sont heurtés jusqu'au début du 19ème siècle: le *problème des quantités impossibles*. Cette problématique est

---

Decline of the Science in England and on Some if its Causes (1830), dans lequel il fait d'amères comparaisons entre France et Angleterre, en particulier en termes de salaires et de reconnaissance sociale pour les professeurs d'université et pour ceux qui s'engagent dans le développement des sciences ou des techniques.

[195] A ces questions, certaines réponses ont déjà été proposées. La réponse la plus fréquente et la plus immédiate consiste à invoquer une rivalité chronique entre France et Angleterre et à évoquer la vexation des Anglais suite à la querelle de priorité entre Newton et Leibniz. Olson [1971] explique l'attitude britannique par l'influence des philosophes écossais qui auraient privilégié la géométrie, fondée sur les sens, et rejeté l'analyse parce que cette science serait trop abstraite. Je discute de l'interprétation d'Olson dans la conclusion.

[196] Robert Simson [1687-1768] fut professeur de mathématiques à l'Université de Glasgow de 1711 à 1768.

[197] Matthew Stewart [1717-1785] est le père de Dugald Stewart. Après avoir suivi les cours de Maclaurin à Edimbourg, et sur la recommandation de celui-ci, il se rendit à Glasgow pour étudier la géométrie avec Simson. Fort de ces deux enseignements, il succéda à Maclaurin dans la chaire de Mathématique d'Edimbourg en 1746. Il resta proche de Simson et contribua avec lui à restituer l'*Analyse Géométrique des Anciens*. Sa renommée fut considérable à son époque,.

[198] Colin Maclaurin [1698-1746].

[199] Newton a fondé le calcul des fluxions sur la notion de *quantité fluente*. Le concept de *fonction* est contenu dans l'idée de comparaison de vitesse de génération des quantités. Le principe de génération des quantités est déjà utilisé par le mathématicien écossais John Napier [1550-1617] (ou Neper), l'un des inventeurs des logarithmes.

[200] John Leslie [1766-1832], mathématicien écossais, étudia avec Stewart et Playfair. Il fut nommé professeur de mathématiques à l'Université d'Edimbourg en 1805, succédant à Playfair, avant d'obtenir, en 1819, la chaire de philosophie naturelle.

[201] John Playfair [1748-1819], mathématicien et géologue, succéda à Dugald Stewart dans la chaire de mathématiques de l'Université d'Edimbourg de 1785 à 1805. Il fut nommé ensuite professeur de philosophie naturelle. Les liens d'amitié qu'il entretint avec Matthew Stewart et Dugald Stewart contribuèrent à faire de lui un homme au cœur de la réflexion philosophique et mathématique de son temps. Il se situe au carrefour de deux courants: d'une part, il a reçu dans sa jeunesse une culture mathématique exclusivement géométrique propre à la tradition écossaise, mais d'autre part il a acquis de lui-même une excellente connaissance des méthodes d'analyse continentale.

abordée dans trois textes parus entre 1792 et 1806. Leurs auteurs, Playfair, Woodhouse[202] et Buée[203], cherchant à légitimer ces *quantités*, tendent à faire de l'algèbre un langage de symboles. Dans le onzième chapitre, après avoir donné quelques éléments du *Treatise of Algebra* (1748) de Maclaurin (considéré jusqu'à la fin du 18ème siècle comme le livre de référence) je présente les interrogations et commentaires de ces trois mathématiciens sur la nature des symboles de l'algèbre, en particulier sur la nature des « symboles d'opérations ». Ces travaux annoncent les approches symbolistes de l'« École Algébrique Anglaise ».
La conclusion de cette revue des problèmes débattus sur le sol britannique est que les critiques émises en particulier par Berkeley sur le manque de fondement logique des techniques *d'analyse infinitésimale* ont sensibilisé les mathématiciens aux questions de langage et de logique. Les questions sur l'*évanouissement des quantités* et sur l'usage des *quantités négatives* tendent à remettre en question la nature des objets mathématiques. La restitution d'une partie de l'*Analyse Géométrique des Anciens* met en évidence la nécessité de distinguer entre raisonnement et langage formel propre à exposer un raisonnement. Elle montre que le raisonnement analytique est plus vaste que ce qu'on en connaît par son application au nombre. Elle montre aussi que géométrie et algèbre diffèrent par leur langage. Cette constatation met en évidence la différence entre le contenu et la forme d'une expression. Finalement, il apparaît que la question centrale pour l'avenir des mathématiques est « Qu'est-ce que l'analyse? » La question, d'ordre épistémologique, est en effet essentielle en cette fin de 18ème siècle.

---

202 Robert Woodhouse [1773-1827] entra au Caius College de Cambridge en 1790. Il fut nommé professeur de mathématiques en 1820, puis professeur d'astronomie en 1822, poste qu'il occupa jusqu'en 1827. Il fut élu membre de la *Royal Society* en 1802. Woodhouse est considéré comme un précurseur de la réforme des mathématiques (Enros [1983], Guicciardini [1989], p. 129). Sa connaissance des mathématiques françaises le rendit très tôt conscient de l'écart qui se creusait entre les mathématiques pratiquées à Cambridge et en France. Il fait connaître à ses compatriotes les travaux des analystes français par trois livres d'introduction à ces nouvelles techniques: *Principles of Analytical Calculation* (1803) est une introduction au calcul différentiel et intégral, présenté dans le formalisme lagrangien. *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry* (1809) est une introduction à « l'analyse trigonométrique ». Aux dires d'un critique anonyme de l'*Edinburgh Review* (1810), ce livre est: "A very concise, luminous and analytical view of an important science, which has never been so fully treated of by any writer of our own country" (p. 129). Le troisième, *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century* (1810) est une introduction au calcul des variations, branche alors peu connue en Grande-Bretagne.
203 Adrien Quentin Buée [1748-1826] est un Français exilé en Angleterre, sans emploi académique, ni en France, ni en Grande-Bretagne.

Chapitre 9. L'Analyse Géométrique au sens des Anciens

Le terme *analyse* dans son sens premier signifie *dénouer* (αναλυειν). Ce terme apparaît en premier lieu dans le champ de la logique. L'analyse logique est un *art de raisonner*, une méthode, un « moyen de trouver (euresis) »[204]. La pensée procède, au cours d'un raisonnement analytique, en *remontant*, en parcourant à l'envers les étapes du raisonnement synthétique, qui, lui, avance par déduction, de la connaissance du tout à la connaissance des parties.

Les Anciens avaient développé une autre forme d'analyse. Elle visait à répondre à une forme interrogative inverse de la forme habituelle, qui demande non pas les propriétés de l'objet donné, mais l'objet dont on a donné les propriétés. De la reconnaissance de cette deuxième forme d'analyse découle notre compréhension de la nature des objets mathématiques dans la période « moderne récente ». Gardies montre que le nouveau mode de constitution des entités mathématiques qui apparaît chez les Modernes se décèle déjà chez Apollonius dans son *Traité sur les Coniques*. Apollonius définit une *parabole* comme la courbe qui possède la propriété que le carré de l'ordonnée verticale est proportionnel à l'abscisse. Il montre que la section orthogonale d'un cône droit a cette propriété. Cette définition procède d'un retournement de l'ordre naturel, puisqu'elle pose la propriété comme définition de l'entité[205]. Ce procédé définitionnel qui consiste à ériger en objet autonome « une propriété rencontrée sur des objets mathématiques différents »[206] est ce que Gardies [2001] nomme, à la suite de Cavaillès, une *thématisation*. Il est à remarquer qu'un objet thématisé ne résulte ni d'une généralisation ni d'une abstraction au sens habituel. *Thématiser* une propriété revient à *identifier* (considérer comme identiques) toutes les entités qui possèdent une certaine propriété. La propriété ainsi thématisée est une entité autonome. Le résultat est comparable à ce qu'on obtient en effectuant un quotient par une relation d'équivalence. Il n'est pas sans rappeler le procédé décrit par Dugald Stewart pour expliquer la construction du concept *triangle*[207].

L'*Analyse Géométrique des Anciens*, qui servait à l'étude des propriétés des courbes, relevait de cette deuxième forme d'analyse. Elle était exposée sous la forme synthétique d'une théorie dans plusieurs traités dont la plupart ne nous sont pas parvenus. On en a connaissance par un traité de Pappus qui a dressé une liste des livres ressortissant à cette branche de la géométrie (dite aussi la *Géométrie Pure*). Le premier des livres appartenant à l'*Analyse des Anciens*, les *Données,* est d'Euclide et fut préservé dans son intégralité. Il s'agit d'une série de propositions de géométrie plane. Ces propositions ne sont ni des théorèmes ni des problèmes. Leur syntaxe particulière (forme verbale au présent) montre qu'ils sont d'une nature différente des propositions élémentaires (exprimées à l'infinitif). Dans ces propositions, on demande de montrer qu'une ligne – ou une figure – est déterminée, en grandeur, en espèce, ou en position, par un certain nombre de *données* – lignes ou figures. Elles traitent des relations de dépendance entre des lignes ou figures géométriques, sans préciser la forme de la relation. Ce

[204] Gardies [2001], p. 8.
[205] Gardies [2001], chapitre 6.
[206] Gardies [2001], p. 164.
[207] Voir Part 1, chapitre 3.

livre constitue une introduction à la notion de *fonction*, bien que ce terme n'y apparaisse pas explicitement[208].
En Grande-Bretagne, l'intérêt pour l'*Analyse Géométrique des Anciens* remonte au moins à Newton et Halley. Il fut renforcé par le succès qui a couronné les efforts de Simson pour restituer, à partir de textes très fragmentaires, le contenu des trois livres d'Euclide intitulés *Porismes,* du nom du type particulier de propositions qu'ils contenaient. Ces livres constituaient probablement une suite du livre des *Données*. Matthew Stewart, ami et disciple de Simson, a contribué à en étendre le champ d'application, proposant de nouveaux théorèmes « d'une très grande généralité », selon ses propres termes.
L'histoire de la restitution de l'*Analyse Géométrique des Anciens* est peu connue. Elle est cependant une donnée indispensable à la compréhension du développement des mathématiques en Grande-Bretagne. Elle éclaire sous un jour nouveau le fait que les Britanniques n'ont que peu contribué au développement de l'*analyse* au sens où on entend ce terme actuellement. Je présente les travaux de Simson et M. Stewart, avant d'en discuter l'interprétation. J'examine ce qui différencie l'analyse géométrique de la géométrie analytique. Je préciserai dans la troisième partie le lien entre l'*analyse* pratiquée par les Britanniques et le développement de l'algèbre, auquel ils contribuent de manière décisive. Je montrerai par exemple que Babbage a puisé dans l'étude des porismes la matière de sa réflexion pour développer l'analyse sous la forme d'une langue des signes.

9.1 Les livres des *Porismes* d'Euclide restitués par Robert Simson [1687-1768]

Euclide avait laissé un traité, composé de trois livres, comprenant des propositions d'une sorte particulière, dites des porismes. De ces trois livres, il n'est resté que des extraits, cités par Pappus et accompagnés de ses commentaires. Or, les livres dans lesquels Pappus y faisait allusion ont été très endommagés. De nombreux mathématiciens, parmi lesquels Fermat et Halley, ont essayé d'en reconstituer le contenu. Tous renoncèrent, se heurtant à de trop grandes difficultés. C'est à Robert Simson que revint l'honneur de redonner vie aux porismes et à l'*Analyse géométrique des Anciens*.
Les premiers travaux de Simson portèrent sur le calcul des fluxions, auquel il a essayé, sans y parvenir, de donner une base plus solide. Il se consacra ensuite entièrement à la restitution de l'œuvre des Anciens. Il publie quelques-uns des *porisme*s qu'il a restitués dans les *Philosophical Transactions* (Simson [1723]), puis l'œuvre restaurée d'Apollonius sur les *Lieux Plans* (Simson [1749]). Enfin, on lui doit une traduction des *Elements* d'Euclide (Simson [1806 (1756)], qui servit de texte de base pour toutes les éditions britanniques ultérieures, jusqu'au 20ème siècle. On doit à Stanhope la publication posthume du traité sur les *Porismes* que Simson a restaurés (Simson [1776]).
L'œuvre de Simson parut en latin. Une traduction allemande date de 1837, due à Auguste Richter, et il existe une traduction française de Chasles [1860], *Les Trois Livres de Porismes d'Euclide*[209]. Tweddle [2000] donne la première traduction anglaise.

9.1.1 Origine et définition des *porismes*

La définition même du terme *porisme* pose de grandes difficultés. Albert Girard [1595-1632], Fermat, et Halley se sont penchés sur cette énigme sans parvenir à décrypter la nature de ces propositions. Pappus affirme que les porismes d'Euclide sont une « ingénieuse collection de

---

208 Gardies [2001], chapitre 4.
209 Chasles a donné non seulement une traduction mais une explication de la nature des porismes.

beaucoup de choses qui ont trait à l'analyse des problèmes les plus difficiles et généraux »[210]. Il donne la définition suivante: « un porisme est une proposition où l'on demande de trouver ce qui est proposé»[211].
Simson suppose que la définition de Pappus ne correspond pas à celle d'Euclide. Selon lui:

> "A Porism is a Proposition in which it is proposed to show that something or several things are given when it is required that a certain common property described in the Proposition is satisfied by it or by them as well as by any one of innumerable things which are not in fact given but which have the same relation to those things that are given." Tweddle [2000], p. 17.

Chasles traduit fidèlement la définition donnée ci-dessus :

> « Le porisme est une proposition dans laquelle on demande de démontrer qu'une chose ou plusieurs choses sont données, qui, ainsi que l'une quelconque d'une infinité d'autres choses non données mais dont chacune est avec les choses données dans une même relation, ont une certaine propriété commune, décrite dans la proposition. » Chasles [1860], p. 27.

Pour comprendre cette formulation, il est plus aisé de recourir au langage algébrique, en nommant par des symboles les figures dont il est question. Les choses données (φ_0) et les choses non données (φ) sont des courbes, représentées par une fonction avec paramètre. La « propriété » décrite dans la proposition est représentée par une équation fonctionnelle $F(h) = 0$. La « chose donnée » qui possède la propriété est une solution particulière de l'équation: $F(\varphi_0) = 0$. L'expression « Chacune [des choses non données (φ)] est, avec les choses données (φ_0), dans une même relation » et « ont une propriété commune », signifie que toutes les solutions φ de l'équation fonctionnelle $F(\varphi) = 0$ sont liées à la solution particulière par une relation : $\varphi = \psi(\varphi_0)$
Simson donne une définition précise de ce qu'est un *théorème* (une proposition dans laquelle il est proposé de démontrer quelque chose), un *problème* (une proposition dans laquelle il est proposé de construire ou de trouver quelque chose), une *donnée* (un théorème dans lequel il est proposé de montrer (*show*) que quelque chose est donné (c'est-à-dire déterminé) lorsqu'on demande que cette chose soit dans une certaine relation avec les choses données dans l'hypothèse), et un *lieu* (une proposition dans laquelle il est proposé de montrer qu'une chose est donnée (*show given*), ou de trouver (*find*) quelque chose (courbe ou surface) dont tous les points ont une propriété commune décrite dans l'hypothèse. Le *lieu* demande de trouver une relation (courbe ou surface) entre des grandeurs. La relation est donnée (déterminée), il s'agit de la trouver (de donner son genre, sa grandeur et sa position).
Le *porisme* est une proposition plus générale que le *lieu*, dans la mesure où la relation (courbe ou surface) demandée n'est pas donnée (elle est indéterminée). Dans le *porisme*, une infinité de relations (courbes ou surfaces) satisfont la propriété donnée. On demande de prouver la possibilité de trouver une relation entre les choses qui possèdent la propriété (une transformation qui permet de passer d'une courbe à l'autre). Je donne en Annexe 1 trois exemples.

9.1.2 Les théorèmes généraux de Matthew Stewart [1717-1785]

Matthew Stewart, initié à l'*Analyse des Anciens* par Simson, reprend et prolonge l'œuvre de ce dernier. Il découvre de nouveaux *porismes*. Leur publication en 1746 sous le titre *Some*

[210] Tweddle [2000], p. 14.
[211] Chasles [1860], p. 15

General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics (Stewart [1746]) fit sa réputation. Ces théorèmes énoncent des propriétés générales des courbes. Seuls les cinq premiers théorèmes sont démontrés; les autres sont simplement énoncés et illustrés par des exemples. Ces théorèmes sont « si généraux et si difficiles » que pour les démontrer il devrait « passer plus de temps et plus de pensée qu'il ne peut y consacrer »[212]. Il les publie, espérant que d'autres y parviendront.
La géométrie au sens de M. Stewart est une science purement intellectuelle. En restaurant et prolongeant l'analyse des Anciens, il a espéré pouvoir substituer à l'analyse utilisée sur le Continent une analyse fondée sur des bases géométriques solides. M. Stewart avait l'ambition de traiter tout problème de *philosophie naturelle* par une méthode géométrique sans jamais recourir à des expressions algébriques. Ses théorèmes généraux visaient à constituer, sous forme d'un catalogue de théorèmes, une liste des propriétés des courbes, liste à laquelle les physiciens pourraient faire appel au cours de leurs recherches. La croyance en la faisabilité de ce projet fut renforcée par le fait qu'il parvint à résoudre, d'une manière purement géométrique, plusieurs problèmes de physique non encore résolus à son époque[213].
Les théorèmes de M. Stewart resteront sans démonstration durant une cinquantaine d'années. Stewart a poussé la géométrie jusqu'aux limites des possibilités de l'esprit. Il laisse entrevoir que le langage de la géométrie n'est pas adapté à l'étude de situations *générales*, où « général » est à prendre dans le sens de « indéterminé », et non pas de collection de particuliers.

9.1.3 Interprétation de John Playfair [1748-1819]

Chasles [1860, p. 13] relève la difficulté qu'il y avait à découvrir le sens de ces propositions, sans connaître les théories du *rapport anharmonique*, des *divisions homographiques* et de l'*involution*. La nature des propositions restituées par Simson est en effet restée « mystérieuse » pour les mathématiciens britanniques. L'article de Playfair [1792] (« On the Origin of Porisms ») est l'un des premiers à proposer une explication de leur origine et à en donner une interprétation. Cet article, à en juger par les commentaires parus dans la presse de l'époque, semble avoir été reçu non seulement avec intérêt, mais aussi avec gratitude.
Playfair, en introduction, fait remarquer que le livre de Pappus était si endommagé que le contenu des livres d'Euclide aurait été perdu s'il s'était agi de tout autre sujet que de mathématiques. La reconstitution du livre d'Euclide à partir d'allusions fragmentaires à son contenu ne fut possible que grâce à cette caractéristique que possèdent les mathématiques: leurs vérités sont des vérités *nécessaires*. De là découle que quelques bribes d'une théorie suffisent à sa reconstitution:

> "The *necessary connection* that takes place among the objects of every mathematical work, […], by excluding whatever is arbitrary, makes it possible to determine the whole course of an investigation, when only a few points in it are known. […] Mathematics has enjoyed an advantage of which no other branch of knowledge can partake; and while the critic or the historian has only been able to lament the fate of those books of LIVY and TACITUS which are lost, the geometer has had the high satisfaction to behold the works of EUCLID and APOLLONIUS reviving under his hands." Playfair [1792], p. 154.

[212] Stewart [1746], p. i.
[213] En 1755, M. Stewart publie dans les *Essays* de la *Philosophical Society of Edinburgh* une solution à un problème de Kepler lié à la seconde loi du mouvement des planètes, en n'utilisant que la géométrie. En 1761, il fait paraître ses *Tracts Physical and Mathematical* dans lesquels il donne une théorie très étendue des forces centripètes. Il donne aussi une estimation de la distance du soleil à la terre – estimation très approximative en raison des hypothèses simplificatrices qu'il dut faire, ainsi qu'une série de propositions visant à résoudre géométriquement le problème des trois corps.

Playfair donne une définition du porisme quelque peu différente de celle de Simson[214]:

> "A proposition affirming the possibility of finding such conditions as will render a certain problem indeterminate, or capable of innumerable solutions." Playfair [1792], p. 170.

Il l'illustre par le problème suivant: *Construire le point d'intersection de deux lignes données a et b.*
Il s'agit, en langage actuel, de déterminer la position d'un point *P* satisfaisant à deux conditions: *P* appartient à la ligne *a* et *P* appartient à la ligne *b*. Ce problème donne lieu à trois situations, suivant les positions relatives des droites *a* et *b*. Une première situation, banale, dans laquelle les lignes a et b sont concourantes, auquel cas le point *P* est déterminé et unique. Une deuxième situation est celle où les droites *a* et *b* sont parallèles. Dans ce cas le point *P* n'est pas constructible, et la solution est dite impossible. Une troisième situation est celle où les droites a et b sont confondues. Dans ce cas il y a une infinité de solutions et le point *P* est impossible à déterminer. Cette dernière situation est dite *porismatique*. Elle survient lorsque deux conditions sont incluses l'une dans l'autre. Dans cette circonstance, tous les points satisfaisant la condition [a] satisfont aussi la condition [b]. Déterminer la position des lignes *a* et *b* qui rendent la solution du problème *porismatique*, c'est résoudre le *porisme* du problème précédent.
Playfair relève les trois points suivants: les situations porismatiques sont courantes; elles sont liées à des questions de *minima* ou de *maxima;* elles surviennent dans des conditions similaires à celles qui produisent des solutions impossibles. Il montre sur un exemple que les cas où la solution est indéterminée et les cas où la solution est impossible sont comme *co-terminaux*, c'est-à-dire si proches l'un de l'autre, que pour un point la solution peut être impossible, alors qu'elle est indéterminée dans le voisinage de ce point. Il fait remarquer que la transition de l'indéterminé à l'impossible est extraordinairement rapide. Il souligne qu'on découvre les situations *porismatiques* et les situations *impossibles* en faisant varier les conditions d'un problème. Cette réflexion l'amène à considérer la différence entre les méthodes anciennes et nouvelles de la géométrie. Les Anciens inspectaient « tous les changements qu'un changement dans la donnée entraîne dans la construction»[215], et ils donnaient une solution particulière pour tous les cas de figures. Dans la « géométrie traditionnelle », les situations données sont des cas particuliers, alors que dans la « géométrie moderne », elles sont des formes générales. Les figures sont désormais reliées par une chaîne de *gradations insensibles*, qui fournit une loi de transition entre les figures. Playfair en appelle à un *principe,* qu'il nomme la *loi de continuité*:

> "That principle which we call the *law of continuity*, and which connects the whole system of mathematical truths by a chain of insensible gradations, was scarcely known to them [the ancients], and has been unfolded to us, only by a more extensive knowledge of the mathematical sciences, and by that most perfect mode of expressing the relations of quantity, which forms the language of algebra; and it is this principle alone which has taught us, that though in the solution of a problem, it may be impossible to conduct the investigation without assuming the data in a *particular state*, yet the result may be perfectly *general*, and will accommodate itself to every case with such wonderful versatility, as is scarcely credible to the most experienced mathematician, and such as often forces him to stop, in the midst of his calculus, and to look back, with a mixture of diffidence and admiration, on the unforeseen harmony of his conclusions. All this was unknown to the ancients; and therefore they had no resource, but to apply their analysis separately to each particular case, with that extreme caution which has just been described; and doing so, they were likely to

[214] Cette définition fut généralement acceptée. Elle a longtemps figuré dans le *Oxford English Dictionary*, comme le signale Tweddle [2000]. Chasles [1860] en conteste l'exactitude. L'interprétation de Playfair est cependant importante d'un point de vue historique.
[215] Playfair [1792], p. 202.

> remark many peculiarities, which more extensive views, and more expeditious methods of investigation, might perhaps have induced them to overlook." Playfair [1792], p. 203.

Ce passage pourrait servir de réponse à la question suivante, qui paraît sous la plume de Jean-Victor Poncelet [1788-1867] dans le *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (1822).

> « Quelle est donc cette influence, cette puissance en quelque sorte extensive de l'Analyse Algébrique? Pourquoi la géométrie ordinaire ou ancienne en est-elle naturellement privée, et quel moyen pourrait-on mettre en usage pour l'en faire jouir? Voilà des questions qu'il semble utile de résoudre et de méditer pour les progrès de la simple Géométrie. » Poncelet [1865-1866 (1822)], p. xi.

Cinquante ans après Playfair, Poncelet énonce lui aussi un concept de *loi de continuité*. Il le présente dans des termes proches de ceux de Playfair, relevant que certaines relations sont préservées lors de certaines transformations des figures:

> « N'est-il pas évident que si, en conservant ces mêmes données, on vient à faire varier la figure primitive par degrés insensibles, ou qu'on imprime à certaines parties de cette figure un mouvement continu d'ailleurs quelconque, n'est-il pas évident que les propriétés et les relations trouvées pour le premier système, demeureront applicables aux états successifs de ce système […]? » Poncelet [1865-1866 (1822)], p. xiii.

Playfair explique que le *langage de l'algèbre* a l'avantage de permettre d'écrire une quantité *en fonction* d'une ou plusieurs autres quantités *indéterminées*. En liant entre elles, continûment, des figures par nature fixes et isolées, le langage algébrique permet d'exprimer une multitude de cas en une seule expression et d'étudier en une fois toutes les *variantes* d'une situation que le géomètre étudie séparément, comme autant de problèmes différents et isolés. L'analyste considère une expression là où le géomètre considère une multitude de cas de figures. Le formalisme de l'*algèbre* induit une *généralisation* simplificatrice. Cette forme d'écriture est adéquate pour exprimer ce qui est permanent dans le changement graduel, continu et imperceptible, lorsque ce changement est soumis à une loi.
En résumé, le *porisme*, selon l'interprétation de Playfair, est une proposition associée à un problème ou à un théorème, où l'on demande de déterminer les positions relatives des *données* qui rendent le problème indéterminé ou le théorème d'un niveau de généralité supérieur. Playfair n'est pas parvenu à formuler le problème dans des termes actuels : déterminer les transformations qui conservent une propriété. Il a néanmoins établi une correspondance entre la *Géométrie Pure* et non pas l'algèbre, mais ce que de nos jours nous appellerions un groupe de transformations[216]. L'exclamation de Boutroux [1920] concernant la géométrie de Poncelet me paraît s'appliquer tout aussi bien à la théorie des porismes expliquée par Playfair: « C'était, au fond, une algèbre déguisée.»[217] Par cette expression, Boutroux signifie que les symboles qui se combinent dans cette algèbre ne sont pas des symboles de quantité, mais des symboles d'*opération*.
Un nombre considérable de travaux paraissent en Grande-Bretagne qui traitent de questions liées à cette forme d'analyse: Small[218] a démontré un grand nombre des théorèmes généraux de M. Stewart; Leslie, Henry Brougham [1778-1868] et Wallace ont chacun écrit un article

---

[216] Playfair promet un deuxième article dans lequel il traitera les *porismes* dans un langage algébrique. Ce dernier article, très attendu par ses contemporains, n'a jamais paru. Dans la troisième partie, je discute des liens que Babbage, poursuivant le travail de Playfair, établit entre le calcul des fonctions et la théorie des porismes.
[217] Boutroux [1920], p. 135.
[218] Small [1788], « Demonstrations of some of Dr Matthew's General Theorems ».

sur ce sujet[219], citant élogieusement l'article de Playfair. Babbage donne des démonstrations de quelques-uns des théorèmes généraux de M. Stewart, ainsi que de quelques porismes en utilisant le *calcul des fonctions*; Wallace et Babbage écrivent pour les encyclopédies de longs et substantiels articles sur ce thème[220]. John Herschel rend hommage à l'article de Playfair[221]. Davies discute d'une approche analytique des théorèmes de M. Stewart[222]. Il démontre tous les théorèmes de M. Stewart en recourant à des coordonnées polaires. Cayley publie un résultat qu'il a obtenu en développant les porismes[223]. Tous qualifient ce genre d'étude de très difficile et très générale.

9.2 Analyse géométrique versus géométrie analytique

En Grande-Bretagne, le travail de « divination », selon les termes de Chasles, effectué par Simson et M. Stewart, a constitué une aventure extraordinaire, qui a laissé des traces dans la mémoire collective des Écossais. Un monument fut élevé à la mémoire de Simson dans le cimetière de West Kilbride, avec l'inscription: « *The Restorer of Grecian Geometry, and by his Works the Great Promoter of its Study in the Schools* ».
Cet enthousiasme contraste avec la situation en France, où cette forme d'analyse destinée à l'étude des propriétés des courbes était peu étudiée. Chasles, l'un des géomètres français qui, en s'intéressant à l'histoire de la géométrie, renouera avec la *Géométrie Pure* (l'étude des propriétés des courbes), le dit assez nettement, dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1875), avant de consacrer une large place à la question des *porismes*. Le traité d'Euclide, dit-il, « brillait d'un génie pénétrant et profond et il était éminemment utile pour la résolution des problèmes les plus compliqués. »[224] Dans le *Traité de Géométrie supérieure* (Chasles [1852]), il rend déjà hommage à Simson pour avoir restauré cette œuvre:

> « Jusque vers le milieu du siècle dernier, cette question des porismes n'a présenté qu'une obscurité profonde dans toutes ses parties. Alors seulement R. Simson fit les premiers pas vers la découverte du sens caché des idées de l'auteur, tant en rétablissant la définition du terme *porisme*, et surtout la forme particulière des énoncés des propositions ainsi appelées, qu'en donnant l'explication de six ou sept sur une trentaine, des énoncés de porisme que Pappus nous a transmis en termes laconiques et obscurs. Cette divination a fait beaucoup d'honneur à R. Simson. Depuis, plusieurs générations ont continué de traiter ce sujet si digne d'intérêt. » Chasles [1852], p. xliv.

Chasles inscrit Simson et Stewart dans la ligne des Newton, Halley, Maclaurin, qui tous ont utilisé la *Géométrie Pure* pour expliquer les phénomènes naturels. Il considère ces géomètres britanniques comme des précurseurs de la renaissance de la géométrie en France dans la deuxième moitié du 19ème siècle:

> « Ces recherches […] offrent […] la preuve manifeste des ressources que renferment les méthodes de la pure Géométrie. Elles démontrent l'erreur où l'on est tombé quand, l'imagination remplie des merveilleux résultats de l'analyse dans ses premiers développements, on a pensé que ces méthodes avaient peu de portée, et qu'elles

---

219 Leslie [1788], « On the Resolution of Indeterminate Problems », Brougham [1798], « General Theorems, chiefly Porisms, in the Higher Geometry »; Wallace [1798], « Some Geometrical Porisms with Examples of their Application ».
220 Wallace [1801], in *Encyclopaedia Britannica*; Babbage [1830], in *Edinburgh Encyclopaedia*.
221 Herschel [1832], « Mechanism of the Heaven, by Mrs Somerville», p. 544.
222 Davies [1844], « An Analytical Discussion of Dr Matthew Stewart's General Theorems ».
223 Cayley [1854], « Developments of the Porisms of the In - and Circumscribed Polygon »; Cayley [1855], « On the Porism of the In-and-circumscribed Triangle, and on an Irrational Transformation of the Ternary Quadratic Forms each onto Itself ».
224 Chasles [1875], p. 12.

> n'avaient plus de valeur que comme aliment offert à la curiosité et à l'esprit inquiet de l'antiquaire et de l'érudit. » Chasles [1852], p. lxviii.

Et Chasles de conclure que la *théorie des transversales* développée par Carnot [225] constitue la suite des œuvres de Simson et Stewart. Ces recherches lui paraissent « rentrer essentiellement dans la doctrine des porismes d'Euclide »[226].
Ainsi, en préférant la géométrie analytique à l'*Analyse Géométrique des Anciens*, les Modernes n'ont pas privilégié une méthode féconde à la place d'une méthode difficile. Ils ont laissé l'étude d'une branche difficile de la géométrie (les propriétés des courbes) pour cultiver une branche facile (la mesure des grandeurs). En effet, mesure des grandeurs et propriétés des figures sont deux domaines distincts de la géométrie. La *géométrie analytique* est une méthode pour déterminer les grandeurs des lignes et des surfaces en les représentant par des expressions algébriques[227]. L'*Analyse Géométrique des Anciens* est une méthode pour déterminer les courbes qui possèdent une propriété donnée. Ainsi, la géométrie analytique et l'*Analyse Géométrique* appartiennent à deux domaines distincts de la géométrie. Chasles aussi bien que Gardies le soulignent. Tous deux regrettent que l'étude des propriétés des courbes ait été, sur le Continent, si négligée.
En conclusion, la théorie des porismes visait à l'étude des propriétés des courbes et devait contribuer à leur classification. Une classe de courbes est définie par une propriété commune, qui s'exprime comme une invariance pour un groupe de transformations. Une *courbe générale* est définie par des caractéristiques non pas évidentes pour les sens, mais évidentes pour la raison. La théorie des *porismes* trouve son prolongement dans les travaux de Carnot, Gaspard Monge [1746-1818], Poncelet, voire le programme d'Erlangen.
Ce mode de classification des courbes sur la base de propriétés relatives à des *transformations* pose un problème majeur: ces *êtres* de raison (une courbe géométrique est une représentation d'une *relation*, et non d'un *objet*) ne peuvent être fondés logiquement au moyen de la logique traditionnelle, qui vise à classer des *objets*, sur la base de propriétés constitutives, essentielles, de l'objet. Ce domaine de la géométrie traite d'objets d'un niveau d'abstraction plus grand que les objets mathématiques habituels. Les courbes générales dont il s'agit sont plus générales que les courbes habituelles parce que moins déterminées, définies par moins de propriétés. Il s'agit d'un sens nouveau du terme « général », sans que le fait ne soit reconnu à cette étape. On verra dans la suite l'importance de cette nouvelle sorte de *généralisation* pour l'évolution des mathématiques.

---

[225] Lazare Carnot [1753-1823] étudie les propriétés des courbes invariantes pour certaines classes de changement de coordonnées. Carnot [1803], *Géométrie de position* et Carnot [1806], *Mémoire sur les relations qui existent entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace*.

[226] Chasles [1852], p. lxxviii.

[227] On a l'habitude aussi de considérer séparément la partie qui s'occupe des figures rectilignes et circulaires (la géométrie élémentaire) et la partie qui s'occupe des figures curvilignes (la géométrie supérieure). La géométrie analytique de Descartes s'étend, grâce aux méthodes infinitésimales, à la mesure des grandeurs curvilignes.

Chapitre 10. La géométrie: science de l'espace réel ou science d'idéalités?

La géométrie d'Euclide est une science dont la philosophie a souvent été considérée comme relevant du platonisme. Son étude, a-t-on dit, est propice à l'élévation de l'âme, qui accède par ce moyen à la contemplation de vérités éternelles et immuables, et le caractère intemporel et statique de la géométrie d'Euclide est caractéristique de l'ontologie dans laquelle Platon inscrit la mathématique.

Avec le projet de mathématisation de la nature s'introduit dans les mathématiques la notion de *temps*. Grize [1954] met en évidence un effort constant de la part des mathématiciens pour éliminer du discours mathématique les images temporelles, alors même que cette notion si « riche » et « familière », selon ses termes, semblait jouer un rôle important et fertile au sein de l'analyse. Il relève qu'une des raisons de cet effort est la volonté des mathématiciens de préserver le caractère intemporel que possèdent les mathématiques dans la philosophie platonicienne. Remarquons que la géométrie d'Euclide a un caractère non spatial autant qu'intemporel. Elle ne parle pas plus de l'espace physique que du temps physique. Or les sciences physiques, la mécanique en particulier, sont érigées sur fond de géométrie. Les *physiciens* ont ainsi modifié tacitement l'*esprit* de la géométrie euclidienne.

La notion du temps pose un problème non seulement aux mathématiciens, mais encore aux logiciens. Il n'est pas possible, en effet, dans la logique traditionnelle, de formaliser les notions intuitives qui nous viennent de la conceptualisation du temps dont le mathématicien a besoin pour répondre à la demande qui lui est faite de mathématiser le mouvement. Dans la logique classique bivalente L, « le temps apparaît comme L-non signifiant »[228]. Cette incapacité de la logique d'Aristote à parler du temps n'est pas apparue immédiatement. Elle se révèle à travers les diverses solutions techniques apportées au problème de la modélisation du mouvement, qui seront elles-mêmes, semble-t-il, la source de difficultés de plus en plus complexes.

L'histoire ici se montre particulièrement généreuse, puisque deux voies distinctes ont été suivies, l'une en France et l'autre en Grande-Bretagne. Cette situation est heureuse pour l'historien des idées, car lorsque deux groupes avancent indépendamment, ils se préservent de la dérive insensible dans laquelle chacun des groupes est entraîné à son insu. Les retrouvailles provoquent un choc des cultures, et les réactions des uns et des autres sont susceptibles de faire apparaître les principes auxquels on a tacitement renoncé ou ceux auxquels on accorde une foi nouvelle.

En France, dès la fin du 17ème siècle, la *perfection* du système d'Euclide – l'ordre des propositions, la place des définitions et l'importance des axiomes – est mise en doute. En 1667 déjà, Arnauld avait exposé les *Éléments* dans un ordre nouveau[229]. Son exemple ne fut pourtant suivi que lentement, puisque la plupart des manuels présentent encore les *Eléments* en partant des axiomes, ce que d'Alembert regrette: « Quel besoin a-t-on des axiomes sur le tout et sur la partie, pour voir que la moitié d'une ligne est plus petite que la ligne entière? »[230]. Il soulève une question fondamentale: pourquoi vouloir démontrer ce que tout le

[228] Grize [1954], p. 95.
[229] Brunschvicg [1993], p. 95.
[230] D'Alembert [1965(1751)], « Géométrie », in *L'Encyclopédie*, vol. 7, p. 632.

monde voit et accepte immédiatement pour vrai? Poser la question, c'est déjà dialectiser l'épistémologie des mathématiques.
La philosophie des mathématiques dominante en France tout au long du 18ème siècle est un réalisme naïf. La géométrie est dite la science des parties finies de l'étendue, les figures géométriques sont supposées être des « corps » dont on fait abstraction des propriétés sensibles, et la mécanique est considérée comme une extension de la géométrie, une branche des mathématiques. Le langage de la mathématique est confondu avec son objet. D'Alembert se fait le porte-parole de cette philosophie :

> « Objet de la Géométrie [...] Nous commençons par considérer les corps avec toutes leurs propriétés sensibles; nous faisons ensuite peu-à-peu & par l'esprit la séparation & l'abstraction de ces différentes propriétés; & nous en venons à considérer les corps comme des portions d'étendue pénétrables, divisibles, & figurées. Ainsi le corps géométrique n'est proprement qu'une portion d'étendue terminée en tout sens. […] C'est par une simple abstraction de l'esprit, qu'on considere les lignes comme sans largeur, & les surfaces comme sans profondeur: la Géométrie envisage donc les corps dans un état d'abstraction où ils ne sont pas réellement; les vérités qu'elle découvre & qu'elle démontre sur les corps, sont donc des vérités de pure abstraction, des vérités hypothétiques; mais ces vérités n'en sont pas moins utiles. » D'Alembert [1965 (1751)], « Géométrie », in *Encyclopédie*, vol. 7, p. 632

En Grande-Bretagne, au 18ème siècle, les mathématiques sont régies, en revanche, par une philosophie de type platonicien. La géométrie n'est pas considérée comme une science de l'espace physique, et la mécanique ne fait pas partie de la géométrie. La mécanique est une science expérimentale, d'une autre nature que les mathématiques, ce que Poincaré souligne encore à l'aube du 20ème siècle :

> « Les Anglais enseignent la mécanique comme une science expérimentale; sur le continent, on l'expose toujours plus ou moins comme une science déductive et *a priori*. Ce sont les Anglais qui ont raison; cela va sans dire; mais comment a-t-on pu persévérer si longtemps dans d'autres errements? » Poincaré. *Mémoire sur les principes de la mécanique* (1900). Cité dans Brunschwicg [1993], p. 304.

En Écosse tout particulièrement, mathématiciens et philosophes aiment à proclamer explicitement leur croyance en une géométrie rationnelle. Les figures sont considérées comme de pures idéalités, et c'est à la raison que l'on recourt pour décider de la vérité d'une proposition. Les *Éléments* d'Euclide sont généralement tenus pour avoir été organisés parfaitement. Maclaurin est l'un des mathématiciens écossais qui, fidèle à la philosophie des mathématiques caractérisant l'œuvre d'Euclide, eut une influence considérable durant le 18ème siècle.
Quelques géomètres écossais, toutefois, se laissent séduire par le style français. S'opposant aux partisans d'une géométrie *à l'ancienne*, ils proclament que la géométrie est une science d'expérience et entendent réorganiser les *Éléments* d'Euclide dans une forme plus simple, en recourant à l'évidence des sens pour asseoir les propriétés des figures. Leslie est l'un des mathématiciens écossais appartenant « à cette école qui affecte de ne rien voir dans le raisonnement géométrique qu'un appel à l'observation»[231]. L'attitude de Leslie peut prêter à confusion, car il admire aussi bien l'analyse algébrique, dont il se sert avec habileté, que l'*Analyse Géométrique des Anciens*. Lorsqu'il regrette que sur le continent on ait adopté l'algèbre et ses « opérations mécaniques », et qu'on néglige la rigueur et la pureté de la démonstration géométrique à l'ancienne, c'est en tant qu'enseignant qu'il s'exprime. Lorsqu'il utilise l'analyse pour une question scientifique, il recourt au formalisme algébrique, et on l'entend alors encenser les facilités que procurent les méthodes « modernes ». Ce double enthousiasme fait qu'on le classe parfois comme un analyste moderne qui rejette la géométrie

[231] Playfair [1812], p. 50.

traditionnelle (Craik [2000]) et parfois comme un géomètre traditionnel qui rejette l'analyse des Modernes (Olson [1975]).
Dans ce chapitre, je présente les positions philosophiques de Maclaurin et ses réflexions au sujet de la géométrie. J'expose et j'évalue les arguments, invoqués par Leslie, en faveur du recours à l'évidence des sens dans la démonstration géométrique ainsi que ceux que Playfair et de D. Stewart lui opposent. J'aborde pour terminer le problème philosophique que soulève la question du *mouvement en géométrie*.

10.1 La philosophie des mathématiques de Colin Maclaurin [1698-1746]

Maclaurin [1742] présente les mathématiques comme la science qui traite des *relations* entre les quantités, des *propriétés* des figures et des *mesures* du mouvement (grandeur et direction de la vitesse et de l'accélération). Les *objets* mathématiques n'existent pas *hors de l'esprit*, affirme-t-il, et il précise que les spéculations des mathématiciens ne portent pas sur des choses *réelles*. Il ajoute que l'esprit a la capacité de raisonner sur des relations, sans que ce qui est relié ne soit clairement conçu:

> "We enquire into the relations of things, rather than their inward essences, in these sciences. Because we may have a clear conception of that which is the foundation of a relation, without having a perfect or adequate idea of the thing it is attributed to, our ideas of relations are often clearer and more distinct than of the things to which they belong; and to this we may ascribe in some measure the peculiar evidence of the mathematics. It is not necessary that the objects of the speculative parts should be actually described, or exist without the mind; but it is essential that their relations should be clearly conceived and evidently deduced: and it is useful, that we should chiefly consider such as correspond with those of external objects, and may serve to promote our knowledge of nature." Maclaurin [1742], p. 52.

Il rappelle ce qui fit la réputation de la géométrie: son caractère d'*évidence*. Les Anciens ont construit cette science avec grand soin. Ils n'ont admis que quelques principes premiers qu'ils tiennent pour vrais sans démonstration. Toutes les autres propositions se déduisent des principes ou de propositions qui en sont déduites. Les démonstrations sont de nature telle qu'elles ne laissent de place ni au doute ni à la discussion[232].
En résumé, pour Maclaurin, les mathématiques sont une science purement intellectuelle. L'évidence de la science mathématique découle de ce que la vérité mathématique n'affirme rien des *choses réelles* : elle est détachée de l'évidence des sens.

10.1.1 Le calcul des fluxions

Le calcul des fluxions est une méthode introduite par Newton pour déterminer des grandeurs données en fonction d'autres grandeurs. Newton n'a cependant pas exposé sa méthode dans une forme achevée. Il s'en est servi à titre privé pour résoudre certaines questions concernant le mouvement des corps physiques. Dans les *Principia*, les résultats obtenus en ayant recours à ce calcul sont exposés dans une forme géométrique traditionnelle.
Berkeley a relevé le manque de fondements de cette méthode, soulignant que les fluxions, ces « fantômes de quantités défuntes », sont des symboles dont la signification est incompréhensible. Berkeley a critiqué non seulement la métaphysique des fluxions, mais aussi sa logique[233].

[232] Maclaurin [1742], p. 1.
[233] Voir Préambule.

A Treatise of Fluxions (1742) est écrit en réponse à Berkeley. Il vise d'une part à montrer que cette méthode de calcul ne contient pas d'erreurs qui se compenseraient, ni d'approximations, et d'autre part à fonder rigoureusement, c'est-à-dire à la manière des anciens géomètres, les notions de *fluxion* et de *fluente*.
Maclaurin tente de fonder le calcul des fluxions à l'intérieur de la géométrie sur des bases solides, comme il l'indique dans le sous-titre: *The Elements of the Method of Fluxions Demonstrated after the Manner of the Ancient Geometricians.* L'existence de *quantités infiniment petites*, que Berkeley a mise en doute, est une supposition si « abstruse », dit-il, qu'elle ne « mérite pas de place au sein des principes évidents de l'ancienne géométrie »[234]. Il déclare que le problème des infiniment petits a surgi lors de l'introduction de la *quantité* dans la géométrie. Devant l'impossibilité de déterminer *la plus petite quantité non nulle*, l'unité indivisible, on a assisté, dit Maclaurin, à un « glissement »: de la supposition de l'existence d'indivisibles non assignables, on a passé à l'affirmation de l'existence d'éléments infiniment divisibles. Ce faisant, les analystes ont accepté que des « choses étaient faites », alors qu'elles sont « impossibles à effectuer »:

> "But when the principles and strict method of the ancients, which had hitherto preserved the evidence of this science entire, were so far abandoned, it was difficult for the Geometricians to determine where they should stop. After they had indulged themselves in admitting quantities of various kinds, that where not assignable, in supposing such things to be done as could not possibly be effected (against the constant practice of the ancients) and had involved themselves in the mazes of infinity; it was not easy for them to avoid perplexity and sometimes error, or to fix bounds to these liberties when they were once introduced." Maclaurin [1742], pp. 38-39.

Maclaurin situe le problème dans le champ de la théorie de la connaissance. Il cite Locke:

> « Si cependant après tout ce que je viens de dire, il se trouve des gens qui se persuadent à eux-mêmes qu'ils ont des idées claires et positives de l'*Infinité*, il est juste qu'ils jouïssent de ce rare privilège: et je serois bien aise (aussi bien que d'autres personnes que je connois, qui confessent ingénûment que ces idées leur manquent) qu'ils voulussent me faire part de leurs découvertes sur cette matière: car je me suis figuré jusqu'ici, que ces grandes et inexplicables difficultés qui ne cessent d'embrouiller tous les discours qu'on fait sur l'Infinité soit de l'Espace, de la Durée, ou de la Divisibilité, étoient des preuves certaines des idées imparfaites que nous nous formons de l'Infini, et de la disproportion qu'il y a entre l'Infinité et la compréhension d'un Entendement aussi borné que le nôtre. Car tandis que les Hommes parlent et disputent sur un Espace infini, ou une Durée infinie, comme s'ils en avaient une idée aussi complette et aussi positive, que des noms dont ils se servent pour les exprimer, ou de l'idée qu'ils ont d'une aune, d'une heure, ou de quelque autre quantité déterminée, ce n'est pas merveille que la nature incompréhensible de la chose dont ils discourent, les jette dans des embarras et des contradictions perpétuelles, et que leur esprit se trouve accablé par un Objet qui est trop vaste et trop au-dessus de leur portée, pour qu'ils puissent l'examiner, et le manier, pour ainsi dire, à leur volonté. » Locke [1998 (1690)], pp. 170-171.

S'appuyant sur ce texte, Maclaurin affirme que la notion d'infini est positivement inaccessible à l'esprit humain. Il se montre d'une prudence clairvoyante en soupçonnant que, à supposer même que l'esprit puisse manipuler des quantités infinies, il serait nécessaire de prendre des précautions particulières:

> "In general, magnitude is capable of being increased without end; that is, no term or limit can be assigned or supposed beyond which it may not be conceived to be further increased; but from this it cannot be inferred that we are able to conceive or suppose magnitude to be really infinite, or, if we are able to join infinity to any supposed idea

[234] Maclaurin [1742], p. 1.

> of a determinate quantity, and to reason concerning magnitude actually infinite, it is not surely with that perspicuity that is required in geometry." Maclaurin [1742], p. 40.

Le problème soulevé par l'*existence des quantités infiniment petites* est d'une importance épistémologique majeure: le résultat d'une *opération impossible* existe-t-il[235]? Maclaurin répond par la négative: il n'accepte pas de considérer des quantités infiniment petites comme des *grandeurs géométriques*. Ses raisons sont d'ordre épistémologique. L'acte intellectuel nécessaire à la constitution d'une quantité infiniment petite est impossible, car il comprend une infinité de divisions. Aussi Maclaurin, à l'instar de Berkeley, mais pour des raisons différentes, rejette-t-il l'*existence* des quantités infiniment petites. Il annonce son intention de démontrer tous les théorèmes proposés par Newton en respectant les *principes* de la géométrie des Anciens[236].

10.1.2 Les méthodes génétiques

Comment dès lors définir la *continuité*? Maclaurin recourt à une *méthode génétique* en géométrie, suivant en cela Newton[237]. La *nouvelle géométrie*, par quoi Maclaurin désigne le calcul des fluxions, traite, dit-il, de la *génération* des quantités. Elle diffère ainsi fondamentalement de la *géométrie usuelle*, qui traite de quantités déjà *forgées* et des relations existantes entre des grandeurs existantes.
La *méthode génétique* suppose qu'il existe des *formes* génératrices de quantités. Toutes les quantités générées par la même *forme* constituent une classe de quantités, ou *quantité universelle*. La classe se caractérise par la *vitesse* de génération de ses quantités. On compare les classes de quantités en comparant leurs propriétés, c'est-à-dire la *vitesse* de leurs *formes* génératrices:

> "In the common geometry, we suppose the magnitudes to be already formed and compare them or their parts, immediately, or by the intervention of others of the same kind, to which they have a relation that is already known. In the doctrine which we propose to explain, and demonstrate in this treatise, we have recourse to the genesis of quantities, and either deduce their relations, by comparing the powers which are conceived to generate them; or by comparing the quantities that are generated, we discover the relations of these powers and of any quantities that are supposed to be represented by them. The power by which magnitudes are conceived to be generated in geometry, is motion; and therefore we must begin with some account of it." Maclaurin [1742], p. 52.

Cette conception *cinématique* de la *quantité* contient implicitement l'idée de limite.
Dans le domaine de la *Géométrie Pure*, Maclaurin adopte aussi l'idée de la *génération* des figures. Il décrit les coniques comme les points d'intersection de deux droites mobiles (dont l'une décrit le cône, et l'autre un plan). Il découvre et démontre, par cette méthode, quelques propriétés remarquables des coniques et des courbes du 3$^{\text{ème}}$ degré[238]. Les *méthodes génétiques* appliquées en géométrie permettent, et ce point est peut-être le plus fondamental, de générer des objets d'une dimension supérieure à partir d'objets de dimension inférieure: la ligne est générée par le mouvement d'un point, la surface par le mouvement d'une ligne et le

---

[235] La question divise encore aujourd'hui. Les intuitionnistes n'acceptent pas des entités générées par une infinité d'opérations dans l'ontologie des mathématiques.
[236] L'examen des preuves que Maclaurin a données des théorèmes de Newton sort du cadre de ce travail.
[237] Newton, dans un passage souvent cité du *De Quadratura*, affirme qu'il ne considère pas les lignes comme constituées de petites parties, mais comme générées par le mouvement d'un point. Newton s'est inspiré des idées de Isaac Barrow [1630-1677] dont il suivit les cours (Windred [1933]). Maclaurin relève aussi le lien entre la méthode suivie pour l'« invention » des logarithmes et celle des fluxions.
[238] Maclaurin [1720], *Geometrica Organica sive descriptio linearum curvarum universalis*. Cette géométrie s'apparente aux travaux de *Géométrie Pure* de Gérard Desargues [1591-1661], Blaise Pascal [1623-1662] et Philippe de La Hire [1640-1719].

solide par le mouvement d'une surface. C'est précisément ce point qui est difficile à fonder logiquement, car une ligne n'est pas une généralisation simple du point, et de même, une fonction n'est pas une quantité générale au sens habituel de ce terme. Concevoir une ligne comme le mouvement d'un point revient à donner une structure à la collection des points formant une ligne particulière. De même, concevoir une *fonction* comme une opération permet de concevoir une collection structurée de quantités, et non une simple généralisation de la quantité. L'opération de substitution est fondamentale pour ce passage à une entité générale structurée. Admettre une telle opération au sein de la logique est l'enjeu des années à venir.

L'approche cinématique pose cependant problème. Elle fut critiquée pour avoir introduit le temps, la vitesse ou le mouvement dans les mathématiques[239]. Maclaurin justifie cette approche:

> "The time is ever perishing; but an image or representation of it is preserved and presented to us at once in the space described by the motion." Maclaurin [1742], p. 53.

Le temps est un concept philosophique difficile, inextricablement lié au concept de mouvement. Or, comment mathématiser le mouvement sans recourir à l'idée de temps? Maclaurin distingue le *mouvement actuel*, qui a besoin de temps et d'espace, et une *représentation mathématique du mouvement*, exprimée par une relation entre la vitesse, la distance et la durée. Les mesures de mouvement sont des mesures de relations entre des quantités de temps et des quantités d'espace. Pour le mathématicien, peu importe qu'il s'agisse de quantités de temps ou d'espace. Il précise que la définition d'une vitesse instantanée ne suppose pas l'existence d'un mouvement instantané, sans distance, sans durée et sans matière. Elle est une définition opératoire, un procédé qui indique comment calculer une *quantité* à laquelle on donne le nom de *vitesse instantanée*.

La *fluxion* est la limite du rapport de l'accroissement de la variable dépendante relativement à l'accroissement de la variable indépendante. La théorie des fluxions repose sur le principe qu'un *mouvement* (une relation entre deux grandeurs variables) peut être approximé au voisinage d'un point par un mouvement uniforme (une relation entre deux grandeurs dont le rapport est constant) dont la vitesse (constante) est égale à la vitesse instantanée du mouvement en ce point. La limite est naturellement définie comme la valeur du rapport constant du mouvement uniforme.

> "When we suppose that a body has some velocity or other at any term of the time during which it moves, we do not therefore suppose that there can be any motion in a term of time or in an indivisible point of space: and as we shall always measure this velocity by the space that would be described by it continued uniformly for some given finite time, it surely will not be said that we pretend to conceive motion or velocity without regard to space and time." Maclaurin [1742], p. 56.

La *vitesse* dont parle Maclaurin apparaît comme un concept mathématisé à partir de l'expérience que nous avons du mouvement, sous la forme d'une relation entre deux quantités dépendantes, à savoir d'une *fonction*.

Près d'un siècle plus tard, pour répondre aux critiques qu'on continue d'adresser à la théorie des fluxions, William Wallace, dans l'article « Fluxion » de l'*Encyclopaedia Britannica,* défend le principe *génétique* à la base de ce calcul:

> "Sir Isaac Newton, however, in first delivering the principles of the method, thought proper to employ considerations drawn from the theory of motion. But he appears to have done this chiefly for the purpose of illustration, for he immediately has recourse to the theory of limiting ratios; and it has been the opinion of several mathematicians

[239] Cette critique fut récurrente durant tout le 18ème siècle. Lagrange est de ceux qui ont rejeté la méthode des fluxions pour cette raison. W.R. Hamilton soutient au contraire que la notion de temps est intrinsèquement liée à la notion de nombre. Je reviendrai sur cette question dans la partie 3, chapitre 2.

> of great eminence [Lagrange, Cousin, Lacroix, Landen] that the consideration of motion was introduced into the method of fluxions at first without necessity, and that succeeding writers on the subject ought to have established the theory upon principles purely mathematical, independent of the ideas of time and velocity, both of which seem foreign to investigations relating to abstract quantity.” Wallace [1817 (1810)], p. 705.

Un peu plus bas, il poursuit ainsi:

> “Having thus found that by conceiving variable quantities as generated by motion and taking their velocities, or rates of increase, as an object of the mind to contemplate and reason on, we are in the end led to the consideration of the limiting ratios of their increments, a subject which is purely mathematical and independent of the ideas of time or velocity.” Wallace [1810], p. 705.

Les *fluxions* sont des *objets de l’esprit* suggérés par les notions de temps, d’espace et de vitesse. Dès lors qu’elles ont été mathématisées, elles sont indépendantes de ces notions physiques. On reconnaît dans ce texte de Wallace l’esprit de la philosophie de Stewart, pour qui les objets mathématiques sont suggérés par des objets des sens ; mais, étant ensuite définis mathématiquement, ils deviennent des entités autonomes de la raison. Poincaré ne dit pas autre chose lorsqu’il déclare:

> « On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l’esprit, mais que c’est l’expérience qui lui en a fourni l’occasion. » Poincaré [1968 (1902)], p. 51.

Finalement, il apparaît que Maclaurin a privilégié la méthode géométrique pour décrire les phénomènes physiques pour la raison que la géométrie est une science purement intellectuelle dont la structure logique est solide et dont les procédés de démonstration sont rigoureusement établis. *A Treatise of Fluxions* est un exposé d’une grande rigueur. Des fondements qu’il donna au *Calcul*, on a toutefois retenu non l’intention de rigueur mais le choix *géométrique*. Maclaurin a été désigné par certains historiens des sciences comme en partie responsable du déclin des mathématiques en Grande-Bretagne[240].

10.2 La géométrie et l’évidence des sens

John Leslie adopte pour présenter les éléments de géométrie un ordre encore inhabituel pour les Britanniques[241]. Il rejette les axiomes qu’il qualifie d’« inutiles » et « propices à produire de l’obscurité ».

> “The founders of mathematical learning among the Greeks were in general tinctured with a portion of mysticism, transmitted from Pythagoras, and cherished in the school of Plato. Geometry became thus infected at its source. By the later Platonists, who flourished in the Museum of Alexandria, it was regarded as a pure intellectual science, far sublimed above the grossness of material contact. Such visionary metaphysics could not impair the solidity of the superstructure, but did contribute to perpetuate some misconceptions, and to give a wrong turn to philosophical speculation. It is full time to restore the sobriety of reason. Geometry, like the other sciences which are not concerned about the operations of mind, must ultimately rest on external observation. But those ultimate facts are so few, so distinct, and obvious, that the subsequent train of reasoning is safely pursued to unlimited extent, without ever appealing again to the evidence of the senses. The science of Geometry, therefore, owes its perfection to the extreme simplicity of its basis, and derives no visible advantage from the artificial

[240] Ewald [1999], vol. 1, p. 94.

[241] Leslie [1811 (1809)], *Elements of Geometry*. Thomas Simpson [1710-1761] est l’un des seuls à avoir précédé Leslie en modifiant, pour des raisons pédagogiques, la présentation des éléments de géométrie d’Euclide.

> mode of its construction. The axioms are rejected, as being totally useless and rather apt to produce obscurity." Leslie [1811 (1809)], p. 396-397.

Il adopte pour la géométrie une épistémologie réaliste naïve. Il déclare que la géométrie traite de l'*espace*, et que les *figures géométriques* sont des *objets du monde extérieur*, dont on ne retient que les qualités de grandeur. L'idée de surface s'obtient en dépouillant les corps réels de toutes leurs qualités, (il signale qu'en grec le terme de superficie, επιφανεια, désigne ce qui se présente à la vue), celle de ligne comme le bord de la surface et celle de point comme l'extrémité d'une ligne[242]:

> "In contemplating an external object, we can, by successive acts of abstraction, reduce the complex idea which arises in the mind into others that are progressively simpler." Leslie [1811 (1809)], p. 2.

La certitude mathématique provient de la simplicité de ses objets et non d'une nature particulière des mathématiques. En conséquence, il juge inutile de *démontrer* l'égalité de triangles, alors qu'il suffit de *voir* qu'ils sont superposables, arguant que l'évidence des sens est aussi convaincante que l'évidence du raisonnement:

> "Figures are said to be *equal*, when, applied to each other, they wholly coincide; they are *equivalent*, if, without coinciding they yet contain the same space." Leslie [1811 (1809)], p. 9.

Dans ses *Éléments de Géométrie* (Playfair [1795]), Playfair, au contraire de Leslie, respecte l'ordre d'Euclide et n'abrège aucune démonstration. A la question du rôle des sens dans la démonstration géométrique, Playfair répond que « ceux qui font l'objection mentionnée ne semblent pas avoir assez réfléchi à la finalité d'une démonstration mathématique qui n'est pas seulement d'établir l'exactitude d'une certaine proposition, mais aussi de montrer ses connexions nécessaires avec d'autres propositions et la dépendance dans laquelle elles sont ». Et il ajoute que l'intérêt d'une démonstration n'est pas seulement d'établir un résultat, mais de déterminer « les propositions qui doivent cesser d'être vraies si cette proposition est supposée fausse»[243].

Playfair, dans une critique sévère du livre de Leslie, affirme que ce qui fait la valeur de l'œuvre d'Euclide est sa structure:

> "This distinction it owes to the great perspicuity and rigid accuracy of its demonstrations, and the skilful arrangement of the propositions, by which each is placed, where it most readily receives the support of those that go before, and most readily transmits it to those that come after." Playfair [1812], p. 82.

Et plus loin, il souligne encore cette différence importante entre les vérités d'expérience et les vérités mathématiques :

> "That the mere experimenter only shows that the things *do* coïncide, - that geometer shows that they *must*." Playfair [1812], p. 86.

Il précise que le raisonnement géométrique est un « processus purement intellectuel », qui repose sur des « vérités que l'esprit perçoit intuitivement »[244]. Il précise l'avantage d'expliciter les principes sur lesquels on s'appuie:

> "What an advantage to know, before hand, in all cases, the precise extent of the demands which an author is to make on the credulity of the reader." Playfair [1812], p. 87.

---

[242] Leslie [1811 (1809)], *Elements of Geometry,* p. 396
[243] Playfair [1795], Préface.
[244] Playfair [1812], p. 86.

Ce commentaire suggère que Playfair, en énonçant un *axiome*, ne juge pas de sa vérité, mais demande qu'on l'accepte pour vrai. L'évidence intuitive de l'axiome est un critère de choix, mais non de vérité. L'axiome relève de la *croyance*. Il constitue une base consensuelle. Sur ce point, le langage de Playfair s'apparente à celui des philosophes du « Sens Commun ».
Quant à Dugald Stewart, il a apporté une réponse claire à la question du rôle des sens dans la démonstration géométrique. Dans le deuxième volume des *Elements* (1814), il affirme que les mathématiques sont une science hypothétique, et que la validité de leurs propositions repose sur l'évidence du raisonnement[245]. En conséquence de quoi une démonstration géométrique ne peut pas s'appuyer sur l'évidence des sens:

> "In pure geometry, no reference to the senses can be admitted, but in the way of illustration; and any such reference in the most trifling step of a demonstration, vitiates the whole." Stewart [1994 (1814)], p. 140.

Stewart attaque encore Leslie sur un second point. Pour démontrer que deux triangles sont égaux, il suffit, selon Leslie, de les poser l'un sur l'autre et de *voir* qu'ils coïncident exactement. Or, en superposant *actuellement* deux triangles et en *vérifiant* leur égalité, on établit un fait, dit Stewart. Il ne s'agit dès lors pas de mathématiques mais de physique:

> "[However] it is not to an actual or *mere* superposition, but to an imaginary or ideal one, that any appeal is ever made by the geometer. Between these two modes of proof the difference is not only wide, but radical and essential. The one would indeed level geometry with physics, in point of evidence, by building the whole of its reasonings on *a fact* ascertained by mechanical measurement; the other is addressed to the understanding, and to the understanding alone, and is as rigorously conclusive as it is possible for demonstration to be." Stewart [1994 (1814)], p. 149.

Stewart rappelle qu'Euclide a eu recours à une superposition *idéale*, qui ne fait pas appel aux sens, mais à la *définition de l'égalité*. Par cet argument, Stewart réaffirme que selon lui le caractère premier de la vérité mathématique est sa déductibilité logique à partir de définitions *posées* comme vraies.
En conclusion, D. Stewart et J. Playfair affirment la nature rationnelle de la géométrie. Les propositions géométriques sont dites vraies quand elles peuvent se déduire de propositions vraies, en suivant les règles de la démonstration. L'évidence des sens n'est pas légitime dans le cadre de la géométrie. Tous deux désapprouvent donc la position de Leslie.
Il n'en reste pas moins que la démonstration par *superposition* pose un problème majeur, que Stewart affronte sans le résoudre complètement. Le terme de *superposition* contient la notion de *mouvement*, or les parties de l'espace géométrique sont dites *immuables* et les objets de la géométrie sont réputés *incréés* et *non soumis aux changements*. Stewart, en introduisant la notion de *superposition idéale*, ne lève pas l'ambiguïté du terme *immuable* lorsque ce dernier qualifie des concepts: quelle est la nature du *temps* dans lequel un objet idéel se meut? Et en quoi, s'il se meut, est-il *immuable*?

10.3 La géométrie et le mouvement

On a souvent répété, en France comme en Grande-Bretagne, que le *temps* est étranger aux mathématiques et que les termes évoquant une idée de *mouvement* sont à bannir du langage mathématique. Ces termes apparaissent pourtant de manière récurrente dans les textes traitant de l'analyse. Playfair, par exemple, parlant de grandeurs qui doivent « devenir infinies en même temps », ou « s'annuler en même temps», demande qu'on l'excuse pour ce langage emprunté à l'« analyse moderne », qui donne un « air de paradoxe » à une démonstration qui semble « s'écarter de la forme stricte du raisonnement de la géométrie des anciens », mais qui

[245] Voir chapitre 4.

selon lui est « parfaitement consistante »[246]. Par ailleurs, les expressions qu'il utilise pour comparer *l'Analyse Géométrique des Anciens* et la géométrie analytique des Modernes (*transition, varier, co-terminaux* etc…) sont des termes qui évoquent une idée de *mouvement*. Pourtant Playfair émet des réserves au sujet du langage « vague, fleuri et métaphorique » de Leslie, langage « qui ne convient pas du tout à la géométrie ». Il fait allusion à des expressions comme « une droite qui tourne autour d'un point », « qu'un angle s'ouvre » ou encore « qu'une ligne rencontre la circonférence d'un cercle »[247]. Par ailleurs, dans les textes du début du 19ème siècle, on assiste à un changement de vocabulaire: les *quantités indéterminées* de l'algèbre sont de plus en plus souvent dites des *quantités variables*.
Un demi-siècle plus tard, au milieu du 19ème siècle, le ton a changé. La *géométrie moderne*, selon Chasles, est caractérisée par l'introduction de nouveaux objets mathématiques: les *transformations*. Il considère de La Hire comme le premier *géomètre moderne*, car il est le premier à offrir une « méthode suffisamment générale pour la *transformation des figures en d'autres figures du même genre* »[248], il signale que Newton et Maclaurin ont utilisé des transformations pour étudier des propriétés des courbes, mais il considère que la *géométrie moderne* prend véritablement son essor avec Carnot qui exprime explicitement, dans sa *Géométrie de position* (1803), l'idée d'une science des mouvements géométriques, Monge qui propose, dans sa *Géométrie descriptive* (1799), une méthode de transmutation des figures de l'espace dans le plan, et Poncelet qui présente une théorie des transformations projectives, dans son T*raité des propriétés projectives des figures* (1822). Il a ce commentaire:

> « Mais au surplus, en réfléchissant sur les procédés de l'Algèbre, et en recherchant la cause des avantages immenses qu'elle apporte dans la Géométrie, ne s'aperçoit-on pas qu'elle doit une partie de ces avantages à la facilité des transformations que l'on fait subir aux expressions qu'on y introduit d'abord? transformations dont le secret et le mécanisme font la véritable science, et l'objet constant des recherches de l'analyste. N'était-il pas naturel de chercher à introduire pareillement, dans la Géométrie pure, des transformations analogues, portant directement sur les figures proposées et sur leurs propriétés? » Chasles [1889 (1875)], p. 196.

D'une manière qui semble inéluctable, le vocabulaire des analystes s'enrichit de termes évoquant des idées dérivées de la notion de temps. Grize [1954] relève ce fait, et souligne aussi la constance avec laquelle les mathématiciens ont tenté d'éliminer toutes les images temporelles de leur discours. Il s'interroge sur la raison qui pousse les mathématiciens à éliminer de leur discours toute image temporelle, alors même que naturellement ces images se présentent dans tous les textes traitant de l'analyse. Il montre qu'une extension de la logique serait nécessaire pour que les images temporelles puissent être incluses dans un langage formalisé. Il suggère qu'on introduise un nouveau foncteur, « puis », à côté de « et » et « ou ».
Grize [1954] a montré que les caractéristiques du temps que les mathématiciens ont tenté de mathématiser sont contenues dans les notions de *continuité*, de *dépendance* et d'*ordre* et traduites en termes mathématiques par les notions de *courbe géométrique* et de *fonction*. Ces notions sont présentées comme des objets de la géométrie et respectivement de l'algèbre. Or, l'introduction de ces *objets* pose un problème logique car, de même que les propriétés du *mouvement* s'expriment par des relations – la vitesse est une mesure d'une relation entre temps et espace –, les fonctions et courbes géométriques sont, sur le plan de la logique, des *relations*, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas des *objets* au sens de la logique classique.
Les paradoxes surgissent dès lors qu'il s'agit de définir ces notions en extension et en compréhension et d'en constituer une classification. Les procédures traditionnelles

---

[246] Playfair [1792], pp. 179-180.
[247] Playfair [1812], p. 96. Leslie a adopté les principes de la *géométrie organique* de Maclaurin
[248] Chasles [1889 (1875)], p. 128, montre la similitude des idées de La Hire avec celles de Poncelet [1865-1866 (1822)].

d'abstraction ou de généralisation échouent. La ligne n'est pas un point généralisé, et la fonction n'est pas une quantité généralisée. Lignes et fonctions sont d'une nature spéciale. Elles sont des entités universelles, mais elles ne sont pas des collections d'objets particuliers. L'idée de *variation*, qui s'immisce ainsi dans la géométrie, traduit, d'une manière figurée, l'idée de quantification universelle des figures. Faire varier une figure revient à considérer *toutes les figures semblables*. Il reste à définir ce qu'on entend par *figure semblable*, et finalement ce qu'est une *figure*. L'*Analyse Géométrique des Anciens* semble indiquer qu'une figure ne se définit que relativement à des transformations qui conservent certaines propriétés. C'est la voie qu'emprunteront les nouveaux géomètres dès la fin du 18ème siècle pour définir les objets de la géométrie.
L'idée de *variation* s'est introduite dans le langage de l'algèbre, avec le concept de *quantité variable*. Faire varier une quantité dans une expression algébrique (par exemple $f(x)=y$), c'est considérer la valeur de l'expression algébrique pour toutes les valeurs de la variable x, c'est-à-dire que $f(x)$ représente une *quantité générale* (*universelle*). L'expression algébrique $f(x)=y$ apparaît ainsi comme une *relation générale*. La notation algébrique qui représente la fonction par un symbole donne les moyens d'opérer avec les quantités variables aussi facilement qu'avec les quantités fixes. Le langage de l'algèbre est ainsi plus général que celui de la géométrie (je reviendrai sur ce point dans la troisième partie). Pourtant, si les notations algébriques aident à la manipulation de ces nouveaux objets, leur statut logique reste incertain. Les algébristes britanniques de la première moitié du 19ème siècle s'atteleront à ce problème.

Chapitre 11. L'algèbre et le problème des *quantités impossibles*

En Grande-Bretagne, durant le 18ème siècle, de nombreux textes relèvent l'existence d'un problème lié à la doctrine des *quantités impossibles*, par quoi on entend les nombres négatifs et les nombres complexes. Les termes de *paradoxe*, *absurdité*, *mystère*, reviennent régulièrement lorsqu'il est question de l'algèbre. Ces termes montrent la perplexité dans laquelle les nombres négatifs, aussi souvent appelés « quantités moins que rien », et les nombres complexes plongent les mathématiciens[249]. Simson, au début du 18ème siècle déjà, avait critiqué le manque de définition logiquement acceptable de la notion de *quantité négative*. En 1784, William Greenfield [?-?] s'interroge lui aussi devant la *Royal Society of Edinburgh* sur *l'usage des quantités négatives dans la solution de problèmes au moyen d'équations algébriques*[250].
Greenfield attribue à Girard d'avoir introduit, dans *Invention Nouvelle en Algèbre* (1629), une symbolisation nouvelle pour représenter les nombres négatifs. Le signe « – », placé devant une *grandeur* ou devant une lettre représentant une *grandeur*, indique que cette *grandeur* est à prendre *en reculant* là où le « + » *avance*[251].
Les mathématiciens eurent cependant des réticences à utiliser ces quantités. Greenfield relève que pour Halley et Wallis, elles avaient quelque chose de magique. Il constate que leur nature est en effet difficile à saisir, car les *nombres*, dit-il, représentent ou bien des *grandeurs géométriques*, c'est-à-dire des lignes sans direction et sans orientation, ou bien des *grandeurs discrètes*, c'est-à-dire des collections d'unités, ou bien encore des *proportions*. Dans aucun de ces cas un *nombre négatif* ne trouve une signification.
Confrontés à la nature obscure de ces *grandeurs*, quelques mathématiciens adoptent une attitude de rejet catégorique, que Greenfield déplore. Qu'un habile mathématicien comme Maseres[252] par exemple n'ait pas cherché à consolider cette doctrine plutôt qu'à balayer d'un jugement catégorique tout le travail des plus éminents « algébristes modernes » déçoit Greenfield.
Au début du 19ème siècle, Frend est l'un des opposants les plus virulents à l'utilisation des quantités négatives. La plupart des mathématiciens, toutefois, perçoivent une cohérence dans l'algèbre ainsi généralisée. Plusieurs essais visant à légitimer leur usage sont publiés à la fin du 18ème siècle et au début du 19ème siècle.
Après avoir exposé les vues de Maclaurin au sujet de l'algèbre et les raisons de l'attitude de Frend, je présente les textes de Playfair, Woodhouse et Buée qui tendent à donner une justification, une légitimation, voire un fondement aux nombres négatifs et aux nombres

---

[249] Pycior [1976].
[250] Greenfield [1784], « On the Use of Negative Quantities in the Solution of Problems by Algebraic Equations ».
[251] Girard désigne ces grandeurs du nom de *solution impossible*. Le terme de *nombre imaginaire*, pour désigner la racine carrée d'un nombre négatif a été introduit par Descartes. Par ailleurs, Descartes n'utilise pas de coordonnées négatives. Il écrit une équation pour chacun des quadrants, de telle sorte que les coordonnées soient toujours positives. L'habitude s'est prise toutefois d'utiliser les quantités négatives dans des problèmes de géométrie pour n'avoir à écrire qu'une seule équation pour tous les cas de figures, quel que soit le quadrant dans lequel la figure se situe.
[252] Maseres [1758], *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*.

imaginaires. Je termine avec un texte de Playfair dont les réflexions de 1819, au terme de sa vie, fournissent des indications sur les difficultés qu'il eut lui-même à surmonter pour comprendre la nature des *quantités impossibles*. Il affirme que le rôle primordial de l'*opération* est passé inaperçu.

11.1 Colin Maclaurin [1698-1746]: Essai de définition des symboles de l'algèbre

En Grande-Bretagne, on utilise souvent l'expression *arithmétique universelle*, introduite par Newton, à la place d'*algèbre*. Elle dit que l'algèbre ne se différencie de l'arithmétique que par le fait qu'on y opère sur des grandeurs indéterminées, c'est-à-dire qu'on ne précise pas la valeur de la grandeur. L'algèbre, dans cette acception, n'est pas plus étendue, dans ses objets, que l'arithmétique, mais plus générale dans ses énoncés.
Maclaurin expose ses vues sur l'algèbre dans *A Treatise of Algebra* (Maclaurin [1748]), un traité publié après sa mort. Il présente l'algèbre comme une science indépendante qui doit être fondée sur ses propres principes. Le *Treatise* débute ainsi:

> "Algebra is a general method of Computation by certain Signs and Symbols which have been contrived for this Purpose, and found convenient. It is called an UNIVERSAL ARITHMETICK, and proceeds by Operations and Rules similar to those in Common Arithmetick, founded upon the same Principles. This, however, is no Argument against its usefulness or Evidence." Maclaurin [1748], p. 1.

Le caractère général de cette définition, qui semblait ouvrir la voie à une algèbre abstraite, s'estompe dès les lignes suivantes. Les *opérations* de l'algèbre sont dites les *mêmes* que celles de l'arithmétique: addition, soustraction, multiplication, division, involution et évolution, et la *quantité* semble jouer un rôle central. La définition qu'il donne du terme *quantité* est semblable à celle que D'Alembert donne du terme *grandeur*:

> "Quantity is what is made up of parts or is capable of being greater or less. It is increased by Addition and diminished by Substraction; which are therefore the two primary Operations that relate to Quantity. " Maclaurin [1748], p. 3.

Le nombre intervient en algèbre comme *multiplicateur*. Dans l'expression *2a, 2* est un nombre, *a* représente une quantité. Les *symboles* de l'algèbre sont, comme les *lignes*, des signes représentant une *grandeur*.
Maclaurin, à l'instar de Berkeley, introduit une distance entre le symbole et l'objet symbolisé, distance qui lui permet de séparer le symbolisme algébrique du contenu de l'algèbre. Géométrie et algèbre sont, selon Maclaurin, deux sciences qui traitent des mêmes choses, mais dans des langages différents. Le langage de la géométrie est naturel, celui de l'algèbre est artificiel:

> "In geometry, Lines are represented by a Line, Triangles by a Triangle, and other Figures by a Figure of the same kind; but in Algebra, Quantities are represented by the same Letters of the Alphabet; and various signs have been imagined for representing their Affections, Relations and Dependencies. In Geometry the Representations are more Natural, in Algebra more Arbitrary: The former are like the first Attempts towards the expression of Objects, which was by drawing their Resemblances; the latter correspond more to the present use of Languages and Writing. Thus the Evidence of Geometry is sometimes more simple and obvious; but the Use of Algebra more extensive, and often more ready: especially since the mathematical Sciences have acquired so vast an Extent, and have been applied to so many Enquiries." Maclaurin [1748], p. 2.

Les nombres négatifs et les nombres imaginaires sont présentés par Maclaurin sans mention de difficultés inhérentes à leur fondement. Pourtant, la présentation qu'il en fait n'est pas exempte de problèmes. Il définit deux sortes de quantités: les *quantités positives* qui sont des quantités *à ajouter*, et les *quantités négatives* qui sont des quantités *à soustraire:*

> "A quantity that is to be added is likewise called a *Positive* Quantity and a Quantity to be substracted is said to be a *Negative*." Maclaurin [1748], p. 6.

Ces quantités se représentent par un *signe* « + » ou « – » précédant le symbole de la quantité. Le signe « + » ou « – » n'est pas le signe d'une *opération* dans ce cas, il est le signe d'une *affection* de la quantité:

> "Hence it is, that a Quantity may be supposed to enter into algebraic Computations two different ways which have contrary Effects; either as an *Increment* or as a *Decrement*; that is, as a Quantity to be added, or as a Quantity to be subtracted. The sign + (*plus*) is the Mark of *Addition,* and the sign –(*minus*) of *Subtraction*. Thus the quantity being represented by *a,* +*a* imports that *a* is to be added, or represents an Increment; but –*a* imports that *a* is to be subtracted and represents a Decrement." Maclaurin [1748], p. 4.

Il présente l'addition de deux quantités de signe opposé comme la réunion de deux quantités qui se détruisent elles-mêmes. Il semble que le principe annihilant dans ce cas soit interne aux quantités elles-mêmes:

> "When two Quantities equal in respect of Magnitude, but of those opposite Kinds, are joined together, and conceived to take place in the same Subject, they destroy each other's Effect, and their Amount is Nothing." Maclaurin [1748], p. 5.

Maclaurin démontre la *règle des signes* dans la multiplication, ce que peu de mathématiciens avant lui avaient entrepris, en s'appuyant sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition, et sur la distributivité de l'addition relativement à la multiplication, propriété supposée valide, que les quantités soient positives ou négatives:

> "By definition $+a-a=0$; therefore, if we multiply $+a-a$ by n, the product must vanish or be 0, because the factor $+a-a$ is 0. The first Term of the Product is $+na$ […]. Therefore the second Term of the Product must be $-na$ which destroys $+na$; so that the whole Product must be $+na-na=0$. Therefore $-a$ multiplied by $+n$ gives $-na$." Maclaurin [1748], p. 12.

Malgré ce point, qui semble révéler chez Maclaurin une conception formelle de l'algèbre, il est intéressant de remarquer qu'il a quelque difficulté à exposer d'une manière cohérente les notions de nombre négatif, et que ces difficultés sont liées à la notion d'opération. Sa présentation est empreinte de confusions, similaires à celles remarquées chez Locke. En effet, en analysant précisément les termes qu'utilise Maclaurin pour définir ce qu'est une *quantité positive* ou *négative*, on se heurte à des difficultés majeures: le signe +*a* désigne à la fois une action à exécuter (*l'acte d'ajouter a*), et l'accroissement lui-même (la *quantité à ajouter*). Le signe « + » placé avant la quantité est considéré comme un *qualificatif* de la quantité. Or le terme « à ajouter » ne peut être considéré comme *qualifiant* la quantité. Il appartient à une autre catégorie logique, il indique une *opération à effectuer,* il est un verbe et non un adjectif. La définition d'une *quantité imaginaire* présente les mêmes difficultés. Elle est un symbole qui marque aussi bien une *opération à effectuer* que *l'impossibilité de faire l'opération*. Toutefois, en comparant algèbre et géométrie, Maclaurin aperçoit une différence importante qui ouvre des possibilités nouvelles à l'algèbre. En algèbre, le symbole garde la trace de l'opération qui a échoué, en géométrie, aucun symbole ne permet de représenter cette situation. Le statut du symbole de l'imaginaire est dès lors ambigu. Il ne désigne pas une nouvelle quantité, mais en conservant la trace de l'opération qui a échoué, ce *symbole* est susceptible de se combiner avec une autre opération. En combinant les opérations elles-mêmes, avant toute application, l'opération impossible est susceptible d'être neutralisée, à la source, pourrait-on dire. Il se peut que, de la combinaison d'une *opération impossible* avec une *opération possible*, il résulte une *opération possible*. Cette interprétation ouvre la voie à un calcul des opérations, un calcul où les opérations ne sont pas effectuées, mais combinées les unes avec les autres. La combinaison de deux opérations forme une nouvelle opération, résultante de la combinaison. Dans ce nouveau calcul, l'opération est considérée comme un objet. Cette voie sera mentionnée par Playfair, puis développée par Babbage et ses successeurs[253].

Maclaurin a défini l'*algèbre* comme une méthode de calcul utile pour résoudre des problèmes de géométrie. En effet, des relations peuvent s'établir entre ces deux sciences:

> "In the first two Parts we considered Algebra as independent of Geometry; and demonstrated its Operations from its own Principles. It remains that we now explain the use of Algebra in the Resolution of Geometrical Problems; or reasoning about Geometrical Figures; and the use of Geometrical Lines and Figures in the Resolution of Equations. The mutual Intercourse of these Sciences has produced many extensive and beautiful Theories, the chief of which we shall endeavour to explain, beginning with the Relation betwixt Curve Lines and their Equations." Maclaurin [1748], p. 298.

Néanmoins, Maclaurin déclare que l'algèbre doit être établie sur des principes qui lui sont propres, des principes indépendants de la Géométrie[254]. Or, séparer l'algèbre de la géométrie est l'un des thèmes majeurs des travaux des mathématiciens du début du 19ème siècle.

En conclusion, malgré les difficultés signalées plus haut liées au manque de distinction entre le résultat de l'opération et l'opération elle-même, le *Treatise* de Maclaurin apporte des éléments novateurs qui seront utiles aux algébristes du 19ème siècle, et d'ailleurs contestés par les opposants aux nouveaux usages.

William Frend, l'un des plus virulents opposants à l'utilisation des *quantités négatives*, accuse Maclaurin d'avoir propagé de faux principes en introduisant des *quantités négatives*. La critique de Frend sera examinée par Peacock qui cite le passage suivant:

> "The first error in teaching the first principles of algebra is obvious on perusing a few pages only of the first part of Maclaurin's Algebra. Numbers are there divided in two sorts, positive and negative: and an attempt is made to explain the nature of negative numbers by allusions to book debts and other arts. Now when a person cannot explain the principles of a science, without reference to a metaphor, the probability is, that he has never thought accurately upon the subject." Frend, *The Principles of Algebra,* (1796), cité dans Peacock [1834], p. 190

Frend se montre attentif à débusquer les mots ou les signes qui ne désignent aucune *idée*. Or l'expression « enlever quelque chose » est incompréhensible. Selon lui, seule l'expression « enlever quelque chose de quelque chose » a un sens, à la condition, ajoute-t-il, que ce qui est à enlever soit contenu dans ce dont on l'enlève.

L'attitude de Frend se comprend à partir de la théorie de la connaissance de Berkeley. Dans sa forme incomplète, l'expression *enlever quelque chose* désigne une action abstraite de l'un de ses objets. C'est précisément ce que Berkeley considère comme absurde: une action ne peut être connue qu'en rapport avec un objet particulier. L'action, dans une acception générale, n'a pas d'existence.

En résumé, la position de Frend repose sur les trois points suivants:

[253] Le développement du calcul des opérations sera présenté dans la troisième partie.

[254] Il l'affirmait déjà dans Maclaurin [1726]. Il propose une démonstration de la règle de Newton pour déterminer le nombre de racines impossibles. Cette démonstration ne s'appuie que sur les propriétés des quantités. Il affirme explicitement que, selon lui, les démonstrations de l'algèbre n'ont pas à s'appuyer sur des considérations concernant quelque courbe que ce soit.

- Les *quantités* existent et sont les idées premières des mathématiques.
- Les *opérations* de l'arithmétique découlent de la contemplation des propriétés qu'entretiennent les quantités entre elles. Elles n'ont pas d'existence indépendante des quantités sur lesquels elles opèrent.
- L'*égalité* mathématique exprime la *perception d'une identité* entre deux termes. En aucun cas l'égalité n'attribue une signification à une expression.

Dès lors, Frend ne peut que s'opposer à toute *méthode génétique*. Les *quantités négatives* n'existent pas et l'homme ne possède pas la faculté de les créer.

11.2 John Playfair [1748-1819]: l'utilité des *quantités impossibles*

John Playfair est conscient de la difficulté de la « doctrine des quantités négatives ». Néanmoins, il reconnaît une certaine cohérence à l'algèbre complétée de ces nouvelles entités. Dans « On the Arithmetic of Impossible Quantities » (Playfair [1778]), il propose une réflexion sur la nature des *expressions imaginaires*. Il examine d'une part si les *quantités impossibles* peuvent être considérées comme des quantités et d'autre part si les *expressions imaginaires* peuvent être considérées comme *démontrées* selon des principes des mathématiques lorsqu'elles sont obtenues en élargissant l'application de règles établies pour des conditions restreintes.
Cet article débute par la constatation que la « doctrine des quantités négatives » a introduit dans l'algèbre des « paradoxes »:

> "The paradoxes which have been introduced into algebra, and remain unknown in geometry, point out a very remarkable difference in the nature of those sciences. The propositions of geometry have never given rise to controversy, nor needed the support of metaphysical discussion. In algebra, on the other hand, the doctrine of negative quantities and its consequences have often perplexed the analyst, and involved him in the most intricate disputations." Playfair [1778], p. 318.

Playfair s'interroge sur la constatation suivante: à la relation suivante entre les fonctions trigonométriques sphériques[255]:

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$$

correspond une relation analogue entre les fonctions trigonométriques hyperboliques[256]:

$$2\sinh a\cosh b = \sinh(a+b)+\sinh(a-b)\,.$$

A la première de ces identités ne correspond aucune propriété connue du cercle, alors que la deuxième exprime une propriété de l'hyperbole et se démontre géométriquement. On démontre ces deux identités algébriquement en recourant à la relation entre l'exponentielle et les fonctions trigonométriques. Une différence importante vient de ce que pour les fonctions hyperboliques, la relation avec l'exponentielle est réelle, alors que pour les fonctions

---

[255] Les relations entre l'exponentielle et les fonctions trigonométriques du cercle sont: $\sin a = \dfrac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}, \cos a = \dfrac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$

[256] Les relations entre l'exponentielle et les fonctions trigonométriques de l'hyperbole sont: $\sinh a = \dfrac{e^{a}-e^{-a}}{2}, \cosh a = \dfrac{e^{a}+e^{-a}}{2}$.

trigonométriques ordinaires, la relation est imaginaire. Néanmoins, les opérations nécessaires pour obtenir les deux identités ci-dessus sont analogues.

L'analogie formelle entre ces deux identités convainc Playfair d'une cohérence dans *l'arithmétique des quantités imaginaires*, qui justifie à ses yeux qu'on s'y intéresse. C'est l'objectif de l'article que d'examiner la nature des « expressions imaginaires », symboles « obscurs et mystérieux », mais d'une « puissance extraordinaire », dit-il, et de donner une justification de leur utilisation.

L'algèbre et la géométrie ont, selon Playfair, le même objet. Elles ne diffèrent que par leur mode d'expression. Chaque problème peut se représenter aussi bien dans un langage géométrique par une figure que dans un langage algébrique par un assemblage de symboles (expression algébrique). A l'instar de Maclaurin, il affirme que le mode d'expression utilisé en géométrie est naturel alors que celui de l'algèbre est artificiel. La géométrie a adopté une symbolique transparente qui fait que tout signe a une signification. Les symboles de la géométrie sont ainsi à l'abri de tout questionnement métaphysique. La transparence de la symbolique géométrique fait que lorsqu'un problème n'a pas de solution, sa représentation géométrique est impossible.

> "In geometry every magnitude is represented by one of the same kind; lines are represented by a line and angles by an angle. The genus is always signified by the individual, and a general idea by one of the particulars which fall under it. By this means all contradiction is avoided, and the geometer is never permitted to reason about the relations of things which do not exist, or cannot be exhibited." Playfair [1778], pp. 318-319.

L'algèbre, au contraire, a inventé des symboles qui n'ont pas de ressemblance avec les objets qu'ils représentent. L'expression algébrique se formule aisément, quand bien même le problème n'a pas de solution. Elle est un signe sans référent (et donc sans signification) ou, selon les termes de Playfair, un « caractère » qui « n'exprime rien ». Les « paradoxes » qui encombrent l'algèbre proviennent de ce que l'algébriste opère avec ces expressions comme s'il s'agissait du signe d'une quantité, sans s'apercevoir que le lien qui unit le signe et ce qu'il désigne est rompu. En perdant de vue le référent désigné par le signe, on risque de raisonner sur des signes vides de sens.

> "In algebra again every magnitude being denoted by an artificial symbol, to which it has no resemblance, is liable, on some occasions, to be neglected, while the symbol may become the sole object of attention. It is not perhaps observed where the connection between them ceases to exist, and the analyst continues to reason about the characters after nothing is left which they can possibly express: if then, in the end, the conclusions which hold only of the characters be transferred to the quantities themselves, obscurity and paradox must of necessity ensue. " Playfair [1778], p. 319.

L'expression imaginaire est un signe qui sert à attirer l'attention sur le fait que les conditions du problème sont inconsistantes:

> "The natural office of imaginary expressions is, therefore, to point out when the conditions, from which a general formula is derived, become inconsistent with each other; and they correspond in the algebraic calculus to that part of the geometrical analysis, which is usually styled the determination of problems." Playfair [1778], p. 320.

Ayant assigné aux expressions imaginaires le rôle de bornes indicatrices, Playfair pose la question de la nature des vérités obtenues par des opérations arithmétiques appliquées à de telles expressions. Il constate qu'il est d'usage d'opérer sur ces signes comme s'il s'agissait de quantités. Maclaurin, dit-il, affirme que, de même que $a-a=0$, $\sqrt{-1}-\sqrt{-1}=0$. Playfair n'accepte pas cette explication car, dit-il, l'opération de soustraction est définie sur des quantités, et donc soustraire des expressions imaginaires, c'est déjà supposer qu'il s'agit de quantités. Or, Playfair demande ce qui légitime que l'on considère les expressions impossibles comme des quantités:

> "When combined according to certain rules, they have been put to denote real quantities, and though they are in fact no more than marks of impossibility, they have been made the subjects of arithmetical operations; their ratios, their products, and their sums, have been computed, and, what may seem strange, just conclusions have in that way been deduced. Nevertheless, the name of reasoning cannot be given to a process into which no idea is introduced. Accordingly geometry, which has its modes of reasoning that correspond to every other part of the algebraic calculus, has nothing similar to the method we are now considering; for the arithmetic of mere characters can have no place in a science which is immediately conversant with ideas." Playfair [1778], *pp.* 320-321.

Les *expressions imaginaires* sont des signes auxquels ne correspond aucune « idée ». En conséquence, les relations contenant de telles expressions ne peuvent être considérées comme énonçant des vérités mathématiques. Il s'explique: seule une *démonstration* permet d'établir qu'une proposition est une vérité d'ordre mathématique. L'analogie n'a pas de portée démonstrative:

> "All that we are assured of by the imaginary investigation is, that its conclusion may, with all the strictness of mathematical reasoning, be proved of the hyperbola; but if from thence we would transfer that conclusion to the circle, it must be in consequence of the principle which has been just now mentioned. The investigation, therefore, resolves itself ultimately into an argument from analogy; and, after the strictest examination, will be found without any other claim to the evidence of demonstration." Playfair [1778], p. 326.

La conclusion de Playfair est que *l'arithmétique des quantités impossibles* est une « méthode d'investigation ». Ses symboles sont dénués d'interprétation, mais ils servent à l'étude des propriétés des courbes. Les propriétés découvertes doivent cependant être *démontrées* avant d'être acceptées comme des *vérités mathématiques*.
Pour résumer l'opinion de Playfair en cette année 1778, je dirai que les mathématiques sont une science possédant deux langages: un langage naturel (la géométrie) et un langage symbolique (l'algèbre). Les *expressions imaginaires* n'ont pas le statut de *quantité*, ce sont des symboles sans signification, qu'il est techniquement possible de manipuler.
L'arithmétique des quantités impossibles est une méthode d'investigation. Elle ne donne pas accès à des vérités certaines, mais elle a une cohérence qui en fait une technique utile. Dans cet article, Playfair a analysé avec discernement le problème posé par les *quantités impossibles*. Il n'a pas eu l'audace de poser les définitions nécessaires pour constituer une *arithmétique des simples caractères* en théorie mathématique indépendante. Il ne semble pas remettre en question la nécessité de la dépendance entre algèbre et géométrie, bien qu'il reconnaisse une « différence remarquable dans la nature de ces deux sciences ». Pour lui, algèbre et géométrie sont deux langages d'une même science. Au contraire, comme on va le voir ci-dessous, Woodhouse, après Maclaurin, prône l'indépendance de l'algèbre relativement à la géométrie.

11.3 Robert Woodhouse [1773-1827]: la légitimité des *quantités impossibles*

Woodhouse consacre deux articles à la métaphysique des mathématiques. Dans le premier article, il répond à Playfair en tentant de légitimer l'introduction des *quantités impossibles* dans les sciences mathématiques sans recourir à l'analogie entre le cercle et l'hyperbole. Dans

le second, il défend la thèse que l'algèbre est une science indépendante de la géométrie[257]. Ses réflexions relatives à la signification du signe de l'égalité, à la nature des mathématiques et à l'indépendance de l'algèbre annoncent les développements futurs de l'algèbre.
En introduction de son premier article, Woodhouse précise le sens qu'il entend donner au terme *algèbre* et en souligne le caractère distinctif. A l'instar de Playfair et Maclaurin, il relève que l'algèbre possède un système de signes arbitraires, à la différence de la géométrie dont les signes « ressemblent » aux choses représentées:

> "The terms analysis, analytical, algebra, algebraical, have been so often distinguished, and so often confounded, that I shall not take the trouble again to distinguish them. I use the words analytical, algebraical, indifferently, in contradistinction to geometrical. The first relate to an arbitrary system of characters; the latter to a system of signs, that are supposed to bear a resemblance to the things signified, and in which system, lines and diagrams are used as the representatives of quantity." Woodhouse [1802], p. 87.

Convaincu qu'il ne peut y avoir « ni paradoxe ni mystère inhérent à un système de caractères de notre propre invention et combinés selon des règles dont l'origine est précise et certaine »[258], Woodhouse vise à établir l'algèbre sur des principes qui en font un système de signes cohérents, possédant les caractéristiques d'une doctrine mathématique.
Woodhouse répond d'abord aux opposants aux *quantités impossibles*, pour qui l'algèbre est « un langage sténographique, un système de caractères ou de signes, inventés dans le but de faciliter la comparaison et la combinaison des idées »[259]. Il résume leurs arguments: les caractères ou symboles de l'algèbre représentent des *quantités particulières* (momentanément) inconnues. Le symbole dans ce cas est un simple signe d'ignorance, qui dénote l'existence de quelque chose. Dans cette arithmétique universelle, il n'y a pas de place pour les *quantités impossibles*. Les identités sont vraies, disent-ils, si on peut montrer qu'elles sont vraies pour toutes les valeurs que le signe est susceptible de prendre, c'est-à-dire si les opérations sont « indépendantes des choses signifiées ». Woodhouse en déduit que l'opération a une existence indépendante de son objet. Ce point est crucial pour la suite, car de là découle la possibilité de définir de nouveaux objets, tels des nombres négatifs et des nombres imaginaires.
Si l'on veut fonder ces nouvelles entités, il faut encore donner un sens nouveau au signe de l'égalité. C'est ce que Woodhouse entreprend dans la suite de son article.

Le sens du signe de l'égalité algébrique

L'égalité est habituellement considérée comme indiquant une relation d'identité entre deux *grandeurs*. Woodhouse donne à l'égalité algébrique une signification plus étendue, à savoir, une signification attributive. Le signe « = », dans ce sens, n'est pas l'affirmation de la perception d'une identité, mais un acte d'assignation, un acte qui donne un sens.

> "But nothing can be affirmed concerning the product $(a+b\sqrt{-1})$, and $(c+d\sqrt{-1})$, nor concerning the form $na=b\sqrt{-1}$; and all that can be meant by the form $(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$ is, that the characters are to be combined after the same manner that the signs of real quantities are; so that $(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$ and $(ac+ad\sqrt{-1}+cb\sqrt{-1}-bd$, are two forms equivalent to each other, not proved

---

[257] Woodhouse [1801], « On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by Means of Imaginary Quantities »; Woodhouse [1802], « On the Independence of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation; and on the Advantages to be Derived from their Separation ».
[258] Woodhouse [1801], p. 93.
[259] Woodhouse [1801], p. 90.

equivalent, but put so, by extending the rule demonstrated for the signs of real quantities to characters that are insignificant." Woodhouse [1801], p. 93.

Et il répète plus loin:

"In like manner $(a+b)^{x\sqrt{-1}}$ can never be proved equal to $a^{x\sqrt{-1}} + x\sqrt{-1}a^{x\sqrt{-1}-1}b + \ldots$ it is only an abridged symbol for the series; there can be no ambiguity in the meaning of $(a+b)^{x\sqrt{-1}}$, since it is intended to represent the series which arises from developing $(a+b)^{x\sqrt{-1}}$, after the same manner that $(a+b)^x$ is developed." Woodhouse [1801], p. 94.

Ainsi, selon lui, les expressions imaginaires n'ont pas de sens et pas d'existence avant leur définition. C'est leur définition qui les crée comme le résultat d'une opération. Cette modification radicale du sens de l'égalité a des répercussions importantes sur la nature des objets impliqués dans une expression algébrique. Le point crucial est le rôle primordial que joue l'opération dans un tel système. En effet, si l'opération n'est pas une relation assertorique, mais une relation attributive, elle doit être définie avant et indépendamment des objets auxquels elles s'applique et qu'elle produit. Il précise qu'on les définit non en leur donnant un sens, mais en donnant les lois de combinaison des symboles. Ainsi, on a:

$$x\sqrt{-1} - x\sqrt{-1} = 0,$$

non parce que cette formule est vraie pour les quantités, mais parce que l'addition et la soustraction sont des « opérations inverses »: l'une défait ce que l'autre fait[260]. De même, la division est l'opération inverse de la multiplication et de cette relation entre les opérations découle que:

$$\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = x.$$

Woodhouse insiste sur le fait que cela est possible moyennant une définition plus étendue du signe de l'égalité, extension qui est rarement mentionnée:

"But, if the definition given of it in elementary treatises be adhered to, I believe it will be impossible to shew the justness and legitimacy of most mathematical processes. It scarcely ever denotes numerical equality. In its general and extended meaning, it denotes the result of certain operations." Woodhouse [1802], p. 103.

Distinguer les différents usages du signe de l'égalité est une étape importante dans la constitution des mathématiques dans leur forme « moderne récente ». Dans la troisième partie, on retrouvera cette problématique chez Peacock et De Morgan.

La nature de la vérité mathématique

Woodhouse examine ce qui nous autorise à dire d'une proposition mathématique qu'elle est *vraie*. Il définit un processus formel de démonstration pour l'algèbre: pour démontrer l'égalité de deux expressions, imaginaires ou non, on forme une chaîne d'expressions équivalentes, où deux expressions sont équivalentes si la « conversion » de l'une en l'autre s'effectue selon des règles données:

"[D]emonstration would be defined to be, a method of shewing the agreement of remote ideas by a train of intermediate ideas, each agreeing with that next it; or, in other words, a method of tracing the connection between certain principles and a conclusion, by a series of intermediate and identical propositions, each proposition

260 Woodhouse [1801], p. 99.

> being converted into its next, by changing the combination of signs that represent it, into another shewn to be equivalent to it." Woodhouse [1801], p. 107.

Il est dès lors en mesure de démontrer les relations entre cosinus, sinus et exponentielles imaginaires, sans recourir à l'analogie. Après avoir défini le symbole $e^{x\sqrt{-1}}$ comme un symbole mis pour abréger la série dont la forme est celle de e^x et dans laquelle on remplace x par $x\sqrt{-1}$, il démontre les égalités suivantes en remplaçant le signe de l'exponentielle par la série dont elle est l'abréviation, puis en sommant les termes homogènes selon les lois de l'arithmétique:

$$A(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} - e^{y\sqrt{-1}}) = Ae^{x\sqrt{-1}} + Ae^{-x\sqrt{-1}} - Ae^{y\sqrt{-1}}$$, où A est un symbole quelconque,

$$e^{x\sqrt{-1}}(e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}) = e^{x\sqrt{-1}}e^{y\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}}e^{-y\sqrt{-1}}$$, et $e^{x\sqrt{-1}}e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$.

Il démontre de même les formules:

$$\cos x = (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})/2 \text{ et } \sin x = (e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})/(2\sqrt{-1})$$

en remplaçant l'exponentielle, le sinus et le cosinus par leur série, puis en sommant les termes. Cette démonstration constitue un raisonnement mathématique, selon la définition ci-dessus.

Woodhouse s'est donné des critères qui lui permettent d'apporter une réponse à Playfair: l'arithmétique des *quantités impossibles* est une branche des mathématiques. Les propositions contenant des expressions imaginaires sont démontrables au sens où il l'a défini. Elles sont *vraies* parce qu'elles se déduisent des définitions. Le but qu'il s'était fixé (montrer la logique de l'arithmétique des *quantités impossibles*) est atteint:

> "I have endeavoured to establish a logic for impossible quantities; to fix the meaning of certain ambiguous expressions; […] I indulge the hope that what I have said may deter mathematicians from attempting to found demonstration on so frail and narrow a basis as analogy; or from reposing in the dangerous notion, that there are either unaccountable paradoxes, or inexplicable mysteries, in a system of characters entirely of their own invention." Woodhouse [1801], p. 119.

Woodhouse a établi les principes de la construction d'une algèbre distincte et indépendante de l'arithmétique universelle. Il y est parvenu en introduisant des règles concernant les opérations. Il a donné l'existence au concept d'*opération*, conçu comme détaché de l'idée de *quantité*, en définissant les opérations auxquelles il a recours, en isolant les propriétés de ces opérations[261].

L'indépendance de l'algèbre

En 1802, Woodhouse publie un second article qui tend à rendre l'algèbre indépendante de la géométrie. Le langage de l'algèbre est « universel », dit-il, et en tant que tel il est « capable d'exprimer les conditions de tout sujet de recherche »[262]. Le problème une fois posé dans ce langage, les déductions dérivées des expressions algébriques sont vraies, car elles découlent de connexions logiques entre des hypothèses et leurs conséquences. Ainsi, il faut construire l'algèbre sur des bases qui lui sont propres, sans s'appuyer sur la géométrie:

> "In fact, each science ought to be kept distinct; and be made to derive its riches from its proper sources". Woodhouse [1802], p. 117.

C'est l'objectif de son article que de le montrer:

---

[261] Becher [1980a], p. 393.
[262] Woodhouse [1802], p. 87.

> "The principal object of the present paper is to shew, that the analytical calculus needs no aid from geometry, and ought to reject it, relying entirely on its own proper resources". Woodhouse [1802], p. 124.

Il précise dans un troisième article[263] que le calcul d'une intégrale ne dépend pas de l'existence d'une figure:

> "From the preceding analysis it is clear that the computation of the integral of $\int dx \sqrt{(1-e^2x^2)\Big/(1-x^2)}$ is perfectly independent of the existence of the ellipse and its properties." Woodhouse [1804], p. 237.

L'algèbre et la géométrie sont également exactes, précises et rigoureuses, et l'une comme l'autre peut servir à expliquer les phénomènes naturels. Laquelle des deux employer? A cette question, Woodhouse répond sans hésitation : l'algèbre parce qu'elle est plus commode. A qui ne serait pas convaincu, il rappelle le souvenir de M. Stewart qui a utilisé exclusivement la méthode géométrique:

> "And to me it seems, his reasonings, from their intricacy, call up so great *a contention of the mind*, that they prove, in no small degree, the unfitness of the geometrical method in all abstruse and intricate investigations." Woodhouse, p. 123.

En résumé, Woodhouse a travaillé à mettre en évidence le caractère formel de l'algèbre, et son indépendance relativement à la géométrie. Il a défini, en l'élargissant, le signe de l'*égalité*: de signe d'identité, il en fait un signe d'identification. Dans ce contexte, le signe de l'égalité se lit *est défini par* et non *est égal à*, et il a la faculté de créer de nouvelles entités mathématiques. L'algèbre se profile comme un système purement formel qui annonce les développements futurs.

Woodhouse n'a laissé que peu de traces. Son influence sur Peacock et Babbage est toutefois attestée[264]. Ses idées sont proches de celles de Playfair et de celles de Dugald Stewart, mais aucune trace de relation entre eux, ni de correspondance n'est connue. On est cependant certain que ses articles ont été lus et commentés en Écosse.

11.4 Adrien Quentin Buée [1748-1826]: la double signification des symboles de l'algèbre

Une troisième tentative pour légitimer l'usage des *expressions imaginaires* est due à Buée. Dans son « Mémoire sur les Quantités imaginaires » (Buée [1806]), il propose une interprétation géométrique pour les quantités imaginaires. Les points importants et originaux de ce mémoire sont d'une part la duplication de l'algèbre en une *arithmétique universelle* et une *langue mathématique*, d'autre part la recherche d'une interprétation des expressions imaginaires en termes d'*opération* (et non d'*objet)*, opération qui fait *sortir de la ligne*. Ce très long mémoire est assez confus[265]. Il est important dans la mesure où il fut souvent cité durant la période qui nous occupe. Playfair en rend compte pour l'*Edinburgh Review* (Playfair [1808b], « Review of *Mémoire sur les Quantités imaginaires,* by Buée »). Il montre la confusion qui règne dans ce mémoire entre différentes sortes d'opération. L'idée d'une double

[263] Woodhouse [1804], « On the Integration of Certain Differential Expressions, with which Problems in Physical Astronomy are Connected ».
[264] Becher [1980a] retrace cette filiation.
[265] L'idée développée par Buée s'apparente à celle que Jean Robert Argand [1768-1822] présente la même année dans l'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Argand [1806]).

algèbre sera explorée à nouveau dans les années suivantes par Peacock, Warren, De Morgan entre autres.
Buée débute son article par la constatation qu'une ligne est déterminée par sa longueur et par sa direction. Or, l'arithmétique ne considère que les longueurs, abstraction faite de leur direction, et la géométrie ne considère que les directions, abstraction faite des longueurs. Il lui vient donc l'idée de définir une opération arithmétique qui consiste à « donner une longueur à une ligne » et une opération géométrique, qui consiste à « donner une direction à une ligne ». Lorsqu'on considère les longueurs et les directions, on effectue, dit-il, une opération *arithmético-géométrique*. Les signes « + » et « – » prennent dès lors une signification différente selon qu'ils appartiennent à une expression d'arithmétique ou de géométrie. En tant que signes d'arithmétique, ils désignent l'addition ou la soustraction. En tant que signes géométriques, ils indiquent le sens dans lequel prendre la quantité.
Afin de bien marquer que l'algèbre est une langue mathématique, Buée traduit les expressions algébriques en langage ordinaire. Par exemple, l'expression « -3×-4 » signifie, dit-il, « –3 *pris* 4 *fois avec un signe contraire* à celui que donnerait -3×4 »[266]. Curieusement, bien que les signes « + » et « - » désignent des *opérations*, Buée les nomme des *qualificatifs* de la quantité. Les *quantités* jouent dans la langue algébrique le rôle du *nom* dans le langage ordinaire. Dans cette langue, $\sqrt{-1}$ désigne une opération purement géométrique. Il est un *signe de perpendicularité* qui indique une direction, sans longueur. Mis devant *a* (le signe d'une ligne) il signifie qu'il faut donner à *a* une « situation perpendiculaire à celle qu'on lui donnerait si l'on avait simplement $+a$ ou $-a$ »[267]. La perpendicularité dont il est question est « indéterminée », relève-t-il, puisque n'importe quel rayon d'un « cercle étant supposé perpendiculaire au plan de ce papier »[268] est perpendiculaire à la direction de $+a$ ou $-a$. Cette remarque amusante semble avoir pour but de respecter l'imaginaire associé à $\sqrt{-1}$.
Buée donne une interprétation différente au signe $\sqrt{-1}$ suivant qu'il est un caractère de la « langue algébrique » ou un caractère de l'« arithmétique ». En tant que caractère arithmétique, ce signe est une marque d'impossibilité. En tant que caractère algébrique, il est une opération à faire. Buée s'attache à redéfinir le sens du mot *multiplication*. Il propose pour l'expression: $\sqrt{-1}\times(-\sqrt{-1})$, la traduction suivante : « La quantité concrète $\sqrt{-1}$ prise une fois, dans un sens également éloigné des sens que présenteraient $\sqrt{-1}\times-(+1)$ et $\sqrt{-1}\times-(-1)$ »[269]. Playfair relève l'incohérence (*inconsistency*) de cette explication. Il souligne que le signe $\sqrt{-1}$ désigne, au sens de Buée, non pas une *quantité* mais une *opération*. Ce signe ne peut donc pas entrer dans une multiplication :

> "If the quantity be impossible, to multiply or divide by it, or to make it the subject of any arithmetical operation, must be impossible also. The operations performed with the symbols are therefore destitute of meaning; they are as imaginary as the symbols themselves." Playfair [1808b], pp. 315.

Pourtant, Playfair reste impressionné par les possibilités d'un langage symbolique :

> "[A]nd yet they have led to a conclusion that is true, and by no means obvious. The efficacy of signs taken distinctly from the ideas they represent, was never so strongly evinced; and the result now obtained, by considering the former and neglecting the latter, is a triumph which the imagination of the most sanguine *nominalist* could never have anticipated." Playfair [1808b], pp. 315-316.

266 Buée [1806], p. 33.
267 Buée [1806], p. 28.
268 Buée [1806], p. 30.
269 Buée [1806], p. 33.

Il réaffirme sa croyance en un principe « qui n'est pas évident, mais dont l'existence est indéniable »[270], qui régit la légitimité de la pratique courante. Ce principe est encore à découvrir. Playfair n'est satisfait d'aucune des explications proposées jusque là. Il souligne que l'article de Woodhouse ne l'a pas convaincu[271].
De cette critique, il ressort que pour Playfair, l'arithmétique des *quantités impossibles* tend à se détacher d'une *arithmétique universelle*, pour se constituer en *langage formel.* Le terme *language of algebra* revient à plusieurs reprises. Ce langage ne concerne pas seulement, selon lui, les mathématiciens, mais aussi les philosophes. A plusieurs reprises il souligne l'aide qu'un système de signes utilisés sans référence à une idée fournit à l'esprit. Sa revue du Mémoire de Buée commence par ces lignes, qui montrent une grande congruence avec la philosophie de Stewart :

> "The language of algebra deserves the attention, not of the mathematician only, but of all philosophers who would study the influence which signs have on the formation of ideas and the acquisition of knowledge. […] Algebra, on the other hand, is a language invented expressly for the purpose of assisting the mind in the management of thought: this is its primary destination; and the business of communicating knowledge, which is principal with respect with other languages, with respect to it is secondary and accidental." Playfair [1808b], p. 306.

11.5 La logique des opérations de l'algèbre

Dans les dernières années de sa vie, Playfair affiche une tranquillité rassurée. L'algèbre est devenue à ses yeux une science dont les idées sont claires et simples. Retraçant l'histoire des mathématiques pures, il se souvient du temps où l'algèbre était embarrassée de « mystères » et de « paradoxes », et constate les progrès très lents de cette science, qui sans avoir fait fausse route, a progressé avec peine. Playfair relève que cette lenteur est étonnante, dans la mesure où, la « vérité » une fois connue, il ne paraît pas qu'elle eût été si difficile à découvrir. Il suggère une explication:

> "Their slow progress arose from this, that they worked with an instrument, the use of which they did not fully comprehend, and employed a language which expressed more than they were prepared to understand; – a language which, under the notion, first of negative and then of imaginary quantities, seemed to involve such mysteries as the accuracy of mathematical science must necessarily refuse to admit." Playfair [1824], vol. 2, p. 19.

N'est-ce pas dire en termes de son temps que la difficulté est d'ordre épistémologique ? Quelques pages plus loin:

> "The leading principles of algebra were now unfolded, and the notation was brought, from a mere contrivance for abridging common language, to a system of symbolical writing, admirably fitted to assist the mind in the exercise of thought." Playfair [1824], vol. 2, p. 19.

Pour Playfair, le langage algébrique, symbolique et artificiel, est devenu le langage principal des mathématiques, remplaçant avantageusement le *langage géométrique*. Auparavant langage trop vaste pour ce qu'on était « préparé à comprendre », l'algèbre est devenue, pour Playfair, « une méthode qui traite de la quantité de manière claire et simple ». La géométrie au contraire est une méthode compliquée et obscure.

> "Of the first of these, the idea is so clear, and the work so simple; of the second, the idea is comparatively so obscure, and the process so complex, that the substitution of the former for the latter could not but be accompanied with great advantage. This is,

[270] Playfair [1808b], p. 316.
[271] Playfair n'indique pas les raisons de son insatisfaction.

> indeed, what constitutes the great difference in practice between the algebraic and the geometric method of treating quantity." Playfair [1824], vol. 2, 20.

Playfair a évolué et il le sait. Il attribue ce changement à la *symbolisation des opérations:*

> "The happy idea, indeed, of expressing quantity, and the operations on quantity, by conventional symbols, instead of representing the first by real magnitudes, and enunciating the second in words, could not but make a great change on the nature of mathematical investigation. The language of mathematics, whatever may be its form, must always consist of two parts; the one denoting quantities simply, and the other denoting the manner in which the quantities are combined, or the operations understood to be performed on them." Playfair [1824], vol. 2, 19.

Playfair attire l'attention sur le fait que toute expression algébrique représente à la fois une *quantité* et les instructions à suivre pour obtenir ladite *quantité* (la succession des opérations à effectuer). Il précise que l'expression « x^2 » se lit aussi bien « x carré », et elle représente le calcul *effectué*, que « élever x au carré », et elle représente le calcul *à effectuer*. La puissance du langage de l'algèbre vient de ce qu'il comprend deux sortes de symboles: ceux de *quantités* et ceux d'*opérations*. Les *opérations* représentent les instructions à exécuter sur les *objets* donnés.
Playfair a ainsi révélé que son changement d'attitude relativement à l'algèbre est lié à sa prise de conscience de l'existence d'entités mathématiques qui ne sont ni des *quantités* ni des *figures*, mais des *opérations*. Ce commentaire prend toute son importance lorsque l'on découvre que, vingt ans plus tard, De Morgan souligne à quel point, dans toute l'histoire des mathématiques, l'*opération* est passée inaperçue[272].

[272] Je reviendrai sur ce point dans le dernier chapitre de la troisième partie.

Chapitre 12. Conclusion

Au terme de cette deuxième partie, il apparaît manifeste que :

> "Something much stronger than a mere passive cultural inertia maintained geometry at the center of Scottish education after the usefulness of applied algebra was recognized." Olson [1971], p. 44.

La tradition géométrique propre aux Britanniques durant le $18^{ème}$ siècle tient à des raisons profondes. Elle est certes motivée par les succès obtenus par Newton et Halley, puis par Maclaurin et Simson. Mais elle repose plus fondamentalement sur des raisons épistémologiques: la géométrie est une science dont tous les résultats sont démontrés rigoureusement, alors que *l'algèbre / analyse* est quelque chose d'hybride: mi-méthode, mi-science, ses objets ont un statut incertain. Ce sont des objets de la géométrie (des quantités continues) connectées par des opérations de l'arithmétique (addition, multiplication). A la fois des quantités (des lignes ou des nombres) et des relations entre des quantités (courbes géométriques ou équations), ces objets ne sont ni des particuliers ni des universels.
L'hésitation des Britanniques à participer au développement de l'*analyse* vient de ce que les fondements de cette méthode leur semblent peu solides. En témoignent les multiples paradoxes qui apparaissent. La géométrie, au contraire, leur paraît reposer sur des principes bien établis. Leurs efforts se portent dans deux directions: d'une part, ils cherchent à retrouver les méthodes d'analyse des Anciens pour l'étude des propriétés des courbes et leur classification, d'autre part, ils tentent d'établir l'algèbre sur des principes solides et indépendants de la géométrie.
Simson parvient à restituer une partie de l'*Analyse Géométrique des Anciens.* M. Stewart établit une collection de théorèmes généraux visant à décrire les propriétés des courbes et à les classer en des genres d'un niveau de généralité supérieur à celui connu jusque là. Tous deux supposaient pouvoir obtenir ainsi une méthode aussi rigoureuse que la géométrie et aussi puissante et utile dans la résolution de problèmes de physique que l'analyse continentale.
Pour Maclaurin, géométrie et algèbre sont deux langages d'une même science. Il s'efforce de fonder le calcul des fluxions sur des bases rigoureuses et affirme que l'algèbre doit s'établir sur des principes indépendants de ceux de la géométrie. Il pose des *principes* premiers qui définissent les propriétés des opérations. Dans son *Treatise of Algebra*, on peut voir les prémisses d'une algèbre présentée comme un langage de signes. Dans sa présentation l'idée d'*opération* n'est pas encore tout à fait séparée de celle de *quantité*.
Woodhouse réaffirme à la suite de Maclaurin la nécessité d'établir l'algèbre sur ses propres principes sans recourir à l'intuition géométrique. Il précise que l'algèbre repose sur la logique pure. Playfair souligne l'importance des opérations. La tentative de Buée de constituer l'algèbre en langage, si naïve et confuse soit-elle, a suscité sur le moment un intérêt certain.
Olson [1971] montre que les philosophes écossais, en particulier Reid et Stewart, ont joué un rôle important dans la persistance des Britanniques à préférer les méthodes géométriques. Il soutient cette affirmation en relevant que la philosophie du « Sens Commun » reconnaît aux sens un rôle prépondérant dans le processus de connaissance, et que tant Reid que Stewart ont affirmé que les figures géométriques avaient une origine sensorielle. Il en conclut que la géométrie était considérée comme plus fiable car plus proche des sens, alors que l'analyse, plus abstraite, était plus sujette à erreur. Or, à mon avis, ces points ne suffisent pas à conclure que Reid et Stewart considéraient que la géométrie reposait sur le témoignage des sens.

Reid, en qualifiant, à la suite de Berkeley, la géométrie habituelle de « géométrie du tangible » et en proposant une « géométrie du visible »[273] peut faire croire que la géométrie était pour lui ancrée dans le sensoriel. Néanmoins, il ressort de *Intellectual Powers* qu'il considère que les objets mathématiques sont des abstractions sans existence, entièrement contenues dans leurs définitions, lesdites définitions étant le fait des mathématiciens eux-mêmes. Quant à Stewart, il adhère certes aux *axiomes du sens commun* établis par Reid, y compris à la maxime que ce que nos sens nous transmettent est « vrai » et qu'on peut s'y fier. Mais il distingue deux sortes de vérités: les vérités mathématiques, qui s'établissent par le raisonnement pur, et les vérités de faits, qui s'établissent par le truchement des sens. Pour Stewart, les mathématiques sont une science hypothétique, dont les principes premiers sont les définitions. Ces dernières sont libres de toute contrainte autre que la non-contradiction.
Les critiques qui se sont élevées en Grande-Bretagne contre l'*analyse* datent du début du 18ème siècle. Les questions de Berkeley n'ont pas trouvé de réponse satisfaisante. Au contraire, le siècle s'achève avec deux problèmes supplémentaires: au problème de l'existence des quantités infiniment petites sont venus s'ajouter le problème de la légitimité des méthodes génétiques et celui des *quantités impossibles*. Les quantités infiniment petites et les *quantités impossibles* ont en commun d'être des créations de l'esprit qui résultent d'opérations mentales *impossibles à effectuer*. Les *méthodes génétiques* sont critiquées, que ce soit en géométrie ou en algèbre, car ce qui touche à la *connaissance* se doit d'être dépouillé de tout attribut de nature temporelle.
L'épistémologie traditionnelle des mathématiques, qu'elle soit réaliste naïve ou réaliste platonicienne, se caractérise par la croyance que les mathématiques traitent des relations entre des *entités* dont l'existence précède la connaissance qu'on en a. Les *opérations* du calcul ne peuvent avoir d'existence en tant qu'objets, dans ce paradigme, elles ne peuvent être ni comparées ni généralisées : on ne leur reconnaît aucune propriété. Seul existe le résultat de l'opération. Notons que le terme *opération* vient du latin (*operatio*), où il signifie « travail, ouvrage, œuvre ». Il désigne le résultat et non l'action. Les ambiguïtés du traité d'algèbre de Maclaurin rappellent les ambiguïtés de Locke; elles sont révélatrices de la difficulté conceptuelle qui entoure la notion d'opération. Playfair rapporte qu'il a pris conscience tardivement de l'existence des opérations en mathématique. Dans la dernière partie, je citerai aussi De Morgan qui témoigne de ce que l'opération en mathématique est longtemps passée inaperçue.
La question de l'existence d'une *opération* en tant qu'objet distinct de l'objet de l'opération et du résultat de l'opération s'inscrit ainsi dans une problématique plus large de théorie de la connaissance. Berkeley a clairement rejeté l'existence des idées d'*opération*, de *mouvement abstrait*, ou d'*action*. Son attitude est en accord avec la croyance, caractéristique des théories de la connaissance pré-kantiennes, selon lesquelles une *idée* est vraie s'il y a une conformité exacte entre l'idée d'une chose et la chose. En reconnaissant à l'esprit un rôle actif dans le processus d'appropriation de la connaissance, les philosophes écossais donnent les moyens de dépasser cette croyance. Confrontés au problème de l'hétérogénéité de l'idée et de la chose, ces philosophes ont admis l'existence d'un principe inhérent à l'esprit, qui relie la *chose* et l'*idée* dans un processus actif de traduction. Un troisième élément s'introduit entre l'idée et la chose: le signe. Le processus de traduction, quoique non *évident*, n'appartient pas en propre au sujet pensant. Sa validité repose sur les propriétés universelles des facultés opératoires constitutives de l'esprit humain.

---

273 On trouve une présentation de cette géométrie, parfois citée comme annonciatrice de la géométrie non euclidienne, dans Schulthess [1983]. Remarquons que, en parlant de géométrie du tangible pour la géométrie euclidienne, Reid met en évidence une caractéristique de la géométrie euclidienne: elle est une géométrie sans point de vue. Dans cette géométrie, le regard est soit à l'infini, et ce pourrait être le regard de Dieu, soit en chacun des points que l'on considère, ce qui caractérise l'observation tactile.

Dans la troisième partie, je m'intéresse au concept d'*opération sur des symboles dépourvus de sens*. Confrontés au problème des *quantités impossibles*, les mathématiciens s'interrogent sur le langage qu'utilise l'analyste. Renonçant à la croyance selon laquelle les figures et les nombres sont les objets premiers des mathématiques, ils définissent l'*opération* comme une entité mathématique première et autonome. Les résultats sont déterminés par les propriétés des opérations et non par celles des objets, ces derniers étant de simples éléments « acratopèges »[274]. Cette évolution s'observe en analyse, où la fonction est définie par une équation fonctionnelle, et en géométrie, où la figure est définie par ses propriétés d'invariance relativement à un groupe de transformations. L'idée que l'on se fait de la nature des objets mathématiques s'en trouve modifiée: les objets de l'analyse sont les fonctions (Lagrange) et ceux de la géométrie les transformations (Klein). Cette inversion de l'ordre d'existence des *objets* et des *opérations* marque le début d'une mutation de la pensée mathématique, qui se manifeste par le recours de plus en plus fréquent à des *méthodes génétiques*[275].
Incorporer les *opérations* (opérateurs, fonctions ou transformations géométriques) à l'ontologie des mathématiques sera la tâche des mathématiciens du 19ème siècle. L'acceptation de ces entités nouvelles se fera au prix d'un renversement radical des ordres d'existence au sein des mathématiques. Cette inversion va découler du recours systématique à la deuxième forme de l'analyse, à savoir une démarche qui consiste à « trouver l'objet » dont les propriétés sont données. Cette deuxième forme d'analyse est proprement la *méthode de l'invention*. En mathématique, elle conduit à créer des *êtres de raison* indépendants de tout référent sensible, des êtres qui sont de pures propriétés « érigées en objets autonomes de pensée », par un processus de *thématisation*. C'est donc à une nouvelle philosophie de l'analyse que le 19ème siècle est convié.

---

[274] Ce mot signifie « sans vertus particulières ».

[275] « L'irruption des méthodes génétiques en mathématiques a initié une révolution non seulement en mathématique, mais simultanément en philosophie. » Vuillemin [1962], p. 65. Par « méthode génétique », Vuillemin fait allusion aux méthodes introduites par Lagrange. Il est à souligner que la *géométrie organique*, que Maclaurin, Newton, Leslie entre autres utilisent, procède de cette même idée « révolutionnaire », consistant à supposer donné le principe de génération des objets de la géométrie, avant l'objet lui-même.

Partie III. De l'introduction de l'*analyse* en Grande-Bretagne à l'émergence de la conception d'une structure algébrique

En France, à la fin du 18ème siècle, paraissent quatre ouvrages importants qui parachèvent le projet de mathématisation de la mécanique: la *Mécanique Analytique* (1788) et la *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797) de Lagrange, la *Mécanique Céleste* (1799) de Laplace et le *Traité Elémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* (1802) de Lacroix. Lagrange et Laplace ont rendu compte de la marche des corps célestes jusque dans leurs moindres irrégularités. Lacroix a exposé la théorie du calcul différentiel et intégral, indispensable à cette connaissance. Or, ces traités sont hors de portée de la plupart des scientifiques britanniques. Les résultats obtenus par les analystes français les surprennent et d'une certaine manière les choquent: l'œuvre de Newton s'est achevée sans eux, sous d'autres cieux. Ces ouvrages produisent en Grande-Bretagne une réaction que Becher [1980b] nomme la « révolution analytique ». Dès le début du 19ème siècle, un mouvement se dessine tout d'abord en Écosse puis à Cambridge pour encourager l'étude de l'analyse dans sa forme continentale. Playfair et Woodhouse ont été parmi les premiers à reconnaître la puissance de ces méthodes.
Quelques décennies après l'introduction en Grande-Bretagne des méthodes de l'*analyse* développées sur le continent, les Britanniques font des progrès importants dans le domaine de l'algèbre. C'est en effet en Grande-Bretagne qu'apparaissent les premiers systèmes opératoires abstraits. On reconnaît habituellement que la première définition d'un *groupe algébrique* date de 1854 et qu'elle est donnée par Cayley[276]. C'est à décrire le cheminement qui a mené à l'émergence du concept de *groupe algébrique* que je consacre cette partie[277].
Je centre mes recherches sur la période 1814-1854, en Grande-Bretagne. L'année 1814 correspond à la publication du deuxième volume de *Elements of the Philosophy of the Human Mind* de Stewart. L'année 1854 est celle de la parution de l'article où Cayley présente ce que les historiens s'accordent à reconnaître comme la première définition d'une structure algébrique de groupe. Cette période se subdivise en deux périodes, correspondant à deux générations de mathématiciens. La date charnière est 1834, année où Peacock publie son *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis*. Durant la première période, les mathématiciens s'interrogent sur les notions de *fonction* et de *nombre*. A partir de 1835, de nombreux travaux portent sur le *calcul des opérations*.
L'adoption des méthodes continentales en Grande-Bretagne s'est accompagnée d'une réflexion fondamentale sur la nature des objets de l'*algèbre.* La notion de *fonction* pose en effet des problèmes logiques que j'examine ci-dessous.

---

[276] Bourbaki [1964].

[277] Pour une analyse contextuelle de cette période à Cambridge, je renvoie à Garland [1980], Durand-Richard [1985],[1996], [2001] et Smith [1989]. Craik [1999] et [2000] discute du contexte écossais.

L'Algèbre: son origine et ses objets premiers

Le terme *algèbre* est apparu en Europe dès le $14^{ème}$ siècle pour désigner l'ensemble des *méthodes* de résolution des équations. L'algèbre, dans ce premier sens, est donc une méthode. Cette méthode fut utilisée, dans un premier temps, pour résoudre des problèmes d'arithmétique, au moyen de règles de transformation d'une expression de calcul.
Avec Viète, la méthode algébrique acquiert une puissance nouvelle. La nouveauté consiste à exprimer les « connues » sous une forme indéterminée, en les désignant par des signes (des lettres) comme les inconnues. L'expression *algèbre spécieuse* désigne cette nouvelle technique de résolution des problèmes. Viète et Fermat étendent aussi l'usage de l'algèbre à la résolution de problèmes géométriques.
Le raisonnement qui soutient la méthode de l'algèbre est de type *analytique*, où analytique peut être entendu dans les deux sens de ce terme[278]. D'une part, elle est une technique qui vise à décomposer un tout en ses composants; d'autre part, elle est une technique qui permet de répondre à une question *de type inverse* où ce qui est donné, ce sont les relations ou propriétés d'un nombre, et où l'on demande le nombre – les questions de *type direct* qui se résolvent par *synthèse*, sont celles où l'on donne l'objet et où l'on demande les propriétés.
L'analyse est une méthode dont on pensait que les Anciens se servaient comme d'un guide pour l'*invention*[279]. Il n'est ainsi pas étonnant que l'algèbre, qui est une méthode analytique, ait conduit à l'*invention* de nouveaux objets, définis comme une *propriété*, ou comme une *relation*. C'est ce procédé définitionnel qui a été mis en oeuvre pour *créer* les nombres complexes ou les nombres négatifs. Il ne peut toutefois être reconnu comme légitime. En effet, l'épistémologie traditionnelle des mathématiques impose aux objets mathématiques une référence réelle de laquelle ils seraient abstraits. Or, pour opérer avec ces expressions, il faut « oublier la signification des éléments combinés »[280] et ne porter son attention que sur le « mécanisme de la combinaison ». Les mathématiques sont ainsi sorties, sans qu'on n'y prenne garde, du cadre qui leur avait été donné. C'est, dès lors, à un changement de la signification même des mathématiques que l'on doit procéder.
De facto, l'algèbre du $17^{ème}$ siècle repose (tacitement) sur l'idée que le résultat d'une opération impossible peut être considéré comme une réalité mathématique. Elle s'est enrichie de nouvelles expressions sans légitimité logique. Boutroux [1920] en distingue deux sortes. Les unes (les quantités négatives, imaginaires ou infiniment petites) sont données comme de « pures fictions introduites pour des raisons de commodité, ou du moins représentant des grandeurs et combinaisons de grandeurs sur lesquelles l'algèbre classique n'aurait pas de prise » [281]. Ces *pures fictions* désignent le résultat d'une opération impossible. Les autres ne sont nouvelles que par la forme. Elles sont définies au moyen des algorithmes de l'algèbre élémentaire; seul le symbolisme « permettant d'abréger l'écriture et révélant le secret de leur composition »[282] est nouveau. De cette sorte sont les *fonctions*.

La fonction

L'origine du concept de *fonction* est difficile à situer et les opinions des historiens sur ce point diffèrent substantiellement. Certains voient des traces de la notion de *fonction* dans l'Antiquité déjà, d'autres durant le Moyen-Âge, et d'autres soutiennent qu'il s'agit d'un

---

[278] Gardies [2001], p. 177, relève que le terme *analytique* est employé à juste titre dans les deux cas, si l'on s'en tient à son étymologie. Les deux démarches n'ont cependant rien de commun. Voir l'introduction de la partie 2 pour une discussion de cette question.
[279] Stewart [1994 (1814)], p. 263
[280] Boutroux [1920], p. 87.
[281] Boutroux [1920], p. 138.
[282] Boutroux [1920], p. 137.

concept moderne. Les divergences d'opinion proviennent des critères que l'on fixe pour reconnaître la présence du concept de *fonction*[283]. Je présente ci-dessous les étapes majeures du développement de cette notion à partir de la période moderne.
Dans l'époque moderne, la dépendance fonctionnelle se manifeste tout d'abord sous la forme de tables de correspondance. Les logarithmes, par exemple, considérés comme des grandeurs, sont présentés sous forme de tables. Le principe opératoire à mettre en œuvre pour les obtenir est « oublié » dès lors que le cacul est effectué.
On entrevoit, aujourd'hui, la notion de *dépendance entre deux quantités variables* dans les écrits de Fermat et de Descartes. Aucun terme n'est utilisé dans leurs écrits pour désigner ce concept. Descartes représente une courbe par une expression symbolique donnant la relation de dépendance qui caractérise la courbe. La relation de dépendance n'est pas isolée de la courbe et l'objet d'étude est, pour les successeurs de Descartes tout au moins, la courbe, considérée comme une portion d'étendue.
En Grande-Bretagne, James Gregory définit en 1667 une *quantité composée* comme une « quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou (…) par n'importe quelle opération imaginable »[284]. La *quantité composée* est, selon cette définition, le résultat d'une opération. Une même opération sert pour des quantités différentes. Le terme *fonction* n'apparaît pas encore.
Le mot *fonction* est apparu pour la première fois dans un texte de mathématique en 1673 sous la plume de Leibniz. Il est pris dans son sens courant : dans une figure, certaines lignes remplissent certaines *fonctions*. En 1718, ce terme est repris par Jean Bernoulli, qui lui donne une définition : « on appelle *fonction* d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».
Au milieu du 18ème siècle, Leonhard Euler [1707-1783] définit une *fonction d'une quantité variable* comme « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes »[285], où par *quantité variable* il entend « une quantité indéterminée ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées ». Une *fonction* est ainsi une *expression*. Il s'ensuit qu'une fonction est dite continue si elle est donnée par une seule expression. Le mot *analytique* signifie que l'expression est constituée de grandeurs symboliques, de nombres et d'opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division, évolution et involution) ou d'opérations transcendantes (logarithmes ou exponentielles). Sortant des limitations algébriques posées par Descartes, Euler admet les séries infinies, les nombres complexes, les expressions contenant des fonctions trigonométriques ou des logarithmes (y compris des logarithmes des nombres de complexes). Il obtient aussi des méthodes pour résoudre des équations différentielles et des équations fonctionnelles.
A la fin du 18ème siècle, Lagrange relève que la signification du terme *fonction* s'est élargie, et que ce terme « exprime que la valeur d'une quantité dépend suivant une loi donnée d'une ou de plusieurs autres quantités données »[286]. Il ajoute qu'il désignera par la caractéristique f ou F placée devant une variable toute fonction de cette variable. Le concept de loi de dépendance fixe entre quantités variables est explicite. Le 19ème siècle explorera le domaine des fonctions pouvant être représentées analytiquement. Encore s'agira-t-il de définir ce qu'est une « expression analytique ».

---

[283] Youschkevitch [1976]. On trouvera dans cet ouvrage une histoire étendue de ce concept. Voir aussi Dahan-Dalmedico [1986].
[284] Cette définition apparaît dans *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667). Il s'agit ici d'une paraphrase, telle quelle est donnée dans Dahan-Dalmedico [1986], p. 216.
[285] *Introductio in analysin infinitorum* (1748), cité in Dahan-Dalmedico [1986], p. 221.
[286] Lagrange [1973 (1808)], t. 10, pp. 9-10.

Ainsi, entre *quantité universelle* ou *expression symbolique d'une courbe géométrique*, la *fonction* s'est frayée un passage vers l'existence. Premier signe de reconnaissance, on la désigne par une lettre caractéristique[287]. Son statut ontologique est cependant précaire. En effet, le symbole de la fonction semble indissociable du symbole de son argument. Or, quelle est la nature de la relation qu'entretiennent une fonction et son argument? La *fonction* a été considérée comme une *grandeur*, ou comme une *grandeur universelle*. Il apparaît cependant que la *grandeur* n'est pas une partie de la *fonction*, et que la *fonction* est plus qu'une *collection de grandeurs*. Elle n'a les caractéristiques ni d'un particulier, ni d'un universel. La *fonction* est ainsi une entité d'un genre inconnu dans la logique traditionnelle. En effet, elle ne s'obtient ni par une généralisation ni par une abstraction, mais par une *thématisation:* une fonction f n'est pas la collection de tous les couples de grandeurs reliés par elle, elle est la *propriété* qu'ils ont en commun: celle d'être dans la *même relation* $y = f(x)$. Elle peut être vue comme le principe qui génère la correspondance entre les nombres. Elle est représentée par une expression opératoire.
La *fonction* apparaît comme un objet mathématique dès lors qu'elle est l'objet d'une opération (la différentiation). Son sens, alors, s'*élargit* sans d'ailleurs que son statut ne s'éclaircisse. De grandeur *résultant* d'une *opération*, la *fonction* devient l'*opération* elle-même. A la fin du 19ème siècle, elle est considérée comme « définissant un mécanisme opératoire »[288].

> « Grâce à cette extension du sens primitif du mot 'opération', il sera possible de formuler très simplement les questions relatives aux combinaisons formées d'expressions algébriques. Il s'agit de déterminer l'effet de plusieurs mécanismes opératoires, dont les actions se groupent et se combinent de telles manières qu'on voudra. Pour faire cette étude, l'algébriste considère les *opérations* comme des unités, comme des éléments simples, et il fait abstraction de leur structure, de même que, en étudiant les *expressions*, il a fait abstraction de la valeur numérique des lettres assemblées. Et ainsi s'ouvre un nouveau chapitre de la science combinatoire: l'algèbre des opérations, qui a ses définitions, ses notations, ses formules propres. » Boutroux [1920], p. 142.

La *fonction* peut être considérée comme un « mécanisme opératoire », si l'on veut indiquer qu'elle est plus qu'une simple *correspondance*. En effet, plus que le simple constat d'une correspondance terme à terme entre deux ensembles, elle est une instruction. La *fonction* est une relation opératoire qui érige en entité le résultat du calcul.
Avec la notion de *fonction*, avant même que le caractère de « mécanisme opératoire » ne soit explicitement reconnu, s'introduisent, au sein des mathématiques, des *méthodes génétiques*[289]. La *fonction* crée, et elle est une création. Ainsi, à la base des *méthodes génétiques* en mathématiques, la *fonction* est elle-même le produit d'une *méthode génétique* au sein des théories de la connaissance.

La notion de structure

Vuillemin [1962] établit un parallèle entre l'introduction de *méthodes génétiques* au sein des théories de la connaissance (Fichte) et au sein des mathématiques (Lagrange). Il argue que ni Lagrange ni Fichte ne sont parvenus à donner une autonomie complète à la raison[290]. Lagrange, certes, innove dans sa manière d'exposer la théorie des fonctions analytiques. La nouveauté de l'exposition frappe par le fait qu'aucune figure ne vient soutenir l'intuition.

---

[287] Leibniz désignait déjà une fonction par une lettre « caractéristique ». Il écrivait la fonction et son argument par deux lettres juxtaposées. C'est Euler qui introduit les parenthèses.
[288] Boutroux [1920], p. 142.
[289] Vuillemin [1962], p. 59, appelle génétique la méthode « qui construit tous les concepts de la philosophie pure uniquement à partir des opérations du Moi fini ».
[290] Vuillemin [1962], pp. 112-122.

Pourtant, il ne s'agit que d'un changement de langage. Les *méthodes génétiques* de Lagrange restent compatibles avec des procédés « naïvement intuitifs »[291]. Lagrange, comme le souligne Vuillemin, n'est pas parvenu à dégager la notion de *structure*, pourtant assez nettement contenue dans la *Mécanique Analytique*. Vuillemin explique cet échec par le fait que Lagrange est resté dans les limites assignées par les formes de l'espace et du temps. L'épistémologie qui sous-tend l'*analyse algébrique* lagrangienne est de type réaliste naïve. Le formalisme développé par Lagrange reste « asservi aux êtres à propos desquels il est développé »[292]. C'est aux successeurs de Lagrange, (et Vuillemin cite Evariste Galois [1811-1832], Cantor ou Hermann Grassmann [1809-1877]), qu'il revient d'avoir mis à jour les notions de *structure de groupe*, de *structure d'ensemble* et de *structure d'espace vectoriel*:

> « Ce qui les oppose ensemble à Lagrange, c'est moins tel trait de leurs génies singuliers dans la découverte que l'idée révolutionnaire de développer pour eux-mêmes et abstraction faite des objets auxquels ils peuvent s'appliquer les formalismes et les structures qu'ils mettent au jour: groupes, ensembles et vecteurs. » Vuillemin [1962], p. 122.

Entre les mathématiques de Lagrange et celles de Galois, de Cantor et de Grassmann, il y a donc une différence de nature métamathématique. Vuillemin [1962] indique plus précisément la nouveauté des mathématiques de Galois:

> « Ainsi l'opération est comme abstraite de son résultat: comme le dit Galois, les permutations désignent les substitutions, mais comme je puis composer n'importe quelle permutation avec n'importe quelle autre, cette liberté indique qu'en réalité j'opère avec les substitutions et non les permutations mêmes, autrement dit que les éléments du groupe sont toujours des opérations, bien qu'on puisse désigner ces opérations par leurs résultats. » Vuillemin [1962], *pp.* 260-261.

La puissance créatrice de la *méthode génétique* au sein d'une théorie de la connaissance se réalise au moment où la question de la connaissance est envisagée sous sa forme inverse, dans toute son ampleur, selon Vuillemin, qui ajoute que ce n'est qu'en détachant les objets de connaissance des conditions de possibilité d'expérience que le philosophe pourra se libérer de l'obligation d'expliquer l'accord entre l'idée et la chose. De ce détachement va résulter le concept de *structure*, une abstraction formelle de second niveau, qui « de la considération des êtres et des objets », fait passer à « celle des formes et des opérations »[293]. C'est d'une manière analogue que la méthode de « séparation des symboles d'opération des symboles de quantités » laissera apparaître la *structure algébrique* des différents systèmes opératoires auxquels les mathématiciens du 18$^{\text{ème}}$ siècle sont confrontés (calcul différentiel, calcul des différences finies, calcul des fonctions, algèbre, etc…). Le statut d'existence que les opérations mathématiques acquièrent au cours de ce procédé de séparation est légitimé par le fait que ces nouveaux objets sont obtenus par un procédé analytique du deuxième type, celui de l'*Analyse Géométrique des Anciens*.
L'habitude de l'*Analyse Géométrique* et la légitimation donnée aux *méthodes génétiques* en théorie de la connaissance par Reid et Dugald Stewart semblent dès lors des circonstances propices à l'apparition en Grande-Bretagne du concept de *structure algébrique.* Dans cette partie, je présente tout d'abord les travaux des mathématiciens de l'« École Algébrique Anglaise » qui ont préparé l'émergence du concept de *groupe*. Je montre que les théories de la connaissance des philosophes de l' « École Écossaise du Sens Commun », principalement de Dugald Stewart, ont eu une influence sur ces mathématiciens.

---

[291] Vuillemin [1962], p. 120.
[292] Vuillemin [1962], p. 117.
[293] Vuillemin [1962], p. 120.

Cette partie comprend trois chapitres et une conclusion. Le chapitre treize est consacré à l'introduction de l'*analyse* en Grande-Bretagne. Babbage en est le personnage central. Je présente deux de ses textes: « An Essay towards the Calculus of Functions » (1815; 1816) et *Essays on the Philosophy of Analysis* (1821). Ce deuxième texte est un manuscrit inédit, dans lequel Babbage soulève des questions ressortissant de l'épistémologie générale. Babbage le présente comme un essai d'application de la philosophie de l'esprit à des questions de mathématiques. Ses interrogations sur le fonctionnement de l'esprit humain, sur les notations, sur le rôle des signes dans la pensée, ses réflexions sur l'analogie, sur l'induction et la généralisation sont directement inspirées des écrits de Stewart. Les idées que Babbage développe dans ce texte laissent entrevoir les prémisses d'un changement dans le regard porté sur les mathématiques. En effet, il présente l'algèbre comme un langage purement formel, qui doit être déconnecté de ses applications. Ce langage formel est l'outil dont a besoin l'esprit pour raisonner selon un mode *analytique*, où analytique est à prendre dans le sens de processus de pensée inverse et créatif propre à l'*Analyse Géométrique des Anciens*. Je termine ce chapitre par des extraits de la correspondance entre Babbage et Stewart, qui témoignent des liens non seulement d'amitié mais de la filiation intellectuelle entre les deux hommes.

Je présente dans le chapitre suivant trois essais parus entre 1829 et 1835, qui traitent du fondement des nombres négatifs et des nombres complexes: Warren[294] fonde les nombres complexes sur leur représentation géométrique; Peacock[295], s'inspirant de Babbage, construit l'algèbre comme un langage symbolique; W. R. Hamilton[296] fonde l'algèbre en tant que science sur l'idée fondamentale du Temps *Pur*. Ces trois textes représentent chacun l'une des voies décrites par W. R. Hamilton pour l'algèbre: Warren fait de l'algèbre un art, Peacock une langue et W.R. Hamilton une science[297]. Ces travaux participent d'une démarche unique, à savoir une réflexion sur les notions de *nombre* et d'*opération*.

Après 1835, s'ouvre un nouveau domaine, le *calcul des opérations.* Dans le dernier chapitre, j'expose les travaux de cinq mathématiciens qui tous présentent une généralisation, les uns du calcul différentiel, les autres de l'algèbre: Murphy[298] procède à une généralisation du calcul différentiel. Il présente une algèbre d'opérateurs sous une forme abstraite. Gregory[299] procède à une généralisation des opérations de l'algèbre au sens ordinaire. Il introduit la notion de *classes d'opérations,* dans laquelle on reconnaît l'idée de *structure algébrique*. Je me tourne ensuite vers De Morgan[300], historien et philosophe autant que mathématicien. Ses réflexions

---

[294] Warren [1828], *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*; Warren [1829] « Consideration of the Objections raised against the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities »; Warren [1829] « On the Geometrical Representation of the Powers of Quantities, Whose Indices Involve the Square Roots of Negative Quantities ».

[295] Peacock [1830], *Treatise on Algebra*; Peacock [1834], *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analyses.*

[296] W. R. Hamilton [1837 (1835)], « Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time ».

[297] W. R. Hamilton [1837 (1835)] propose une classification des algébristes en trois catégories. Les algébristes *théoriques* sont ceux qui demandent une algèbre dont les symboles ont une signification. Il les oppose aux *purs philologues* qui demandent une organisation cohérente d'expressions symboliques, et aux *techniciens* qui demandent des règles de manipulation.

[298] Murphy [1837], « First Memoir on the Theory of Analytical Operations ». Robert Murphy [1806-1843], Irlandais, étudia au Caius College de Cambridge.

[299] Gregory [1840(1838)], « On the Real Nature of Symbolical Algebra ». Duncan Farquharson Gregory [1813-1844] appartient à la grande famille écossaise des Gregory. Il vécut jusqu'à l'âge de 19 ans à Edinburgh, puis il étudia au Trinity College de Cambridge. Il se porta candidat pour la chaire de mathématiques de l'Université d'Edinburgh, lorsque William Wallace se retira, en 1838. Il ne fut cependant pas nommé.

[300] Augustus De Morgan [1806-1871] étudia au Trinity College de Cambridge. Il débuta sa carrière de mathématicien en 1828, comme professeur à l'Université de Londres. Il fut un défenseur de l'éducation libérale, garante d'une société équilibrée et harmonieuse, nécessaire au bonheur individuel. Dans cette perspective, il

et commentaires mettent en lumière les transitions conceptuelles qu'il a perçues. Je conclus ce chapitre en situant l'article de Boole[301] qui présente une généralisation du calcul différentiel sous la forme d'une théorie d'opérateurs linéaires, et l'article de Cayley[302].

participa activement aux projets de la « Society for the Diffusion of the Usefull Knowledge », rédigeant quelque 850 articles pour la *Penny Cyclopaedia*.

[301] Boole [1844], « On a General Method in Analysis ».

[302] Cayley [1854], « On the Theory of Groups, as epending on the Symbolic Equation $J^n = 1$ »; Arthur Cayley [1821-1895] étudia au Trinity College de Cambridge.

Chapitre 13. La « révolution analytique » en Grande-Bretagne au début du 19ème siècle

A la fin du 18ème siècle, les mathématiciens britanniques étaient isolés. Eux seuls appliquaient et développaient des méthodes d'*Analyse Géométrique*, alors que sur le continent, et en France en particulier, l'*analyse moderne* se développait dans un langage algébrique.
La situation change rapidement au début du 19ème siècle. Ce changement a été beaucoup commenté ces trente dernières années. L'*Analytical Society*, fondée en 1812 autour de Charles Babbage et John Herschel à Cambridge, a souvent été considérée comme étant à l'origine du mouvement de revitalisation des mathématiques. Soulignons que depuis une quinzaine d'années, plusieurs sources tendent à montrer que le rôle de l'*Analytical Society* a été exagéré. Enros [1983] montre que les réformes des cursus universitaires n'ont lieu que quinze ans plus tard, alors que seul Peacock appartient encore au monde académique. Il en conclut que l'*Analytical Society* est un mouvement précurseur des réformes universitaires des années 1830. Panteki [1987], Craik [1999] et [2000] et montrent que les étudiants de Cambridge ne sont ni les seuls ni les premiers à utiliser les notations et techniques d'analyse continentale. En Écosse, quelques mathématiciens (Wallace et Ivory entre autres) connaissent, comprennent et utilisent ces méthodes plusieurs années avant que l'*Analytical Society* ne soit créée.
Néanmoins, Babbage est une figure cruciale pour comprendre cette « révolution ». Je présente ci-après le calcul des fonctions qu'il a développé. Je discute des applications de ce calcul, en particulier à des problèmes porismatiques. La philosophie qui sous-tend le calcul des fonctions est exposée dans Babbage [1821]. Dans ce manuscrit, Babbage s'interroge sur le rôle des signes dans le raisonnement mathématique, et discute de l'importance des notations. Il s'interroge sur le processus de l'*analogie*, de la *généralisation* et de l'*induction* et leur validité. Il reconnaît dans la méthode algébrique une application du raisonnement *analytique* propre à l'*Analyse Géométrique des Anciens*. Il transpose cette méthode pour l'appliquer à la découverte de *fonctions* inconnues, données par des propriétés. Il la généralise en une *langue de signes dépourvus de sens*, un système indéterminé quant à la signification de ses objets et de ses opérations, caractérisé par sa *structure*, c'est-à-dire par des relations entre les objets. Babbage présente le calcul différentiel comme un tel système de signes abstraits, où la différentielle est définie comme un opérateur qui se combine avec d'autres symboles selon certaines lois (par exemple linéarité). Je discute de l'originalité des écrits de Babbage. Je termine ce chapitre par des extraits de deux lettres de Babbage, l'une à Dugald Stewart et l'autre à Helen d'Arcy Stewart, son épouse, qui, toutes deux, attestent de l'influence des écrits de Stewart sur Babbage.

13.1 Les promoteurs de la « révolution analytique »

Entre 1750 et 1850, les mathématiciens britanniques n'ont que peu contribué à l'avancement de l'analyse, au sens où on l'entend actuellement[303]. Au début du 19ème siècle se profile un changement au sein aussi bien des mathématiques que des sciences, changement dont l'aspect le plus manifeste consiste en l'introduction des notations leibniziennes à la place des notations

[303] Par exemple, le cours d'introduction à l'analyse de Hairer et Wanner [1995] ne mentionne le nom d'aucun texte britannique entre Maclaurin [1742] et W. R. Hamilton [1853].

newtoniennes. Qu'ils l'appellent renouveau, renaissance, revitalisation ou révolution, tous les historiens s'accordent à dire que l'introduction des notations et des méthodes de l'*analyse continentale* est un événement majeur.
En Écosse, où premièrement l'*Analyse Géométrique des Anciens* a été restituée grâce aux efforts de Simson et Stewart, où deuxièmement les problèmes d'ordre logique liés à la méthode analytique appliquée à la détermination de grandeurs représentées par des signes arbitraires et données par une équation, ont été dénoncés par plusieurs philosophes, à la suite de Berkeley, et où troisièmement la possibilité même de la connaissance a été mise en doute par Hume, les efforts ont porté sur les aspects métamathématiques plus que mathématiques. On reconnaît ainsi un « style écossais » caractérisé par une réflexion sur les fondements de la connaissance en général et des mathématiques en particulier[304].
Playfair a joué un rôle important dans le mouvement de revitalisation des mathématiques. Dans son article de 1808, il souligne l'infériorité des mathématiciens britanniques et il critique la sclérose de l'enseignement dans les Universités[305]. Wallace, Ivory et Leslie, qui, tous trois, avaient étudié avec Playfair, appartiennent à la première génération des analystes britanniques. Deux autres mathématiciens peu connus, William Spence [1777-1815] et John West [1756-1817], produisent des résultats d'analyse avancés. Les travaux de Spence ne seront publiés qu'à titre posthume par John Herschel[306]. West, qui passa plusieurs décennies en Jamaïque, est présenté par Craik [1998] comme un « interprète accompli de l'analyse continentale », en particulier des œuvres de Lagrange, Laplace et Arbogast.
A Cambridge, l'intérêt pour l'analyse fut initié par Woodhouse, et promu par les membres de l'*Analytical Society*[307]. C'est dans ce but qu'en novembre 1812, ils décident de publier leurs travaux dans un volume, les *Memoirs of the Analytical Society* (1813). Seuls Babbage et John Herschel apportent des contributions[308]. Dans la préface, ils indiquent les objectifs de cette société.

> "Discovered by Fermat, concinnated and rendered analytical by Newton, and enriched by Leibniz with a powerful and comprehensive notation, it was presently seen that the new calculus might aspire to the loftiest ends. But, as if the soil of this country were unfavourable to its cultivation, it soon drooped and almost faded into neglect, and we have now to re-import the exotic, with nearly a century of foreign improvement, and to render it once more indigenous among us." Babbage [1989 (1813)], p. iv.

La réforme se focalise apparemment sur le problème des notations. Mais c'est en réalité une réforme beaucoup plus profonde qui est visée, comme le suggère le titre proposé par Babbage pour le volume de leurs *Transactions* : « The Principles of pure D-ism in opposition to the Dot-age of the University »[309].
Babbage et Herschel mentionnent les développements les plus récents de l'analyse: calcul intégral (fonctions transcendantes logarithmiques, intégrales elliptiques), calcul différentiel

---

304 Craik [2000], p. 141. En Écosse, tous les étudiants suivent une formation en philosophie durant les deux premières années du cursus.
305 Playfair [1808a], « Review of Laplace's *Mécanique Céleste* ».
306 Spence [1820], *Mathematical Essays with a brief memoir of the Author*. Les travaux de Spence, en particulier ses résultats concernant les *transcendants logarithmiques* sont mentionnés par Babbage [1813], et Herschel [1814]. Tous deux sont très élogieux.
307 Babbage, Herschel et Peacock ont tous trois suivi les cours de Woodhouse.
308 Durand(-Richard) [1985], pp. 171-178 présente les articles de ce volume. Relevons qu'une abondante correspondance entre Babbage et Herschel témoigne des liens étroits qu'ils entretinrent durant leurs jeunes années.
309 Babbage [1989 (1864)], « Passages from the Life of a Philosopher», in *Works*, vol. 11, p. 21. Il s'agit d'un jeu de mots subtil, puisque *Dot-age*, qui signifie *sénilité*, *gâtisme*, fait aussi allusion à la méthode des fluxions de Newton – où la dérivée d'une fonction est représentée par un point et se lit « dot ». L'expression *D-ism* fait, elle, allusion à la notation différentielle de Leibniz – où la dérivée est notée "dx".

(différentielles partielles, calcul des variations, équations différentielles), calcul des différences finies, équations aux différences finies, séries récurrentes, théorie des fonctions données sous condition, calcul des fonctions génératrices, équations aux différences ordinaires et partielles, équation aux différences mixtes, intégrales définies, calcul des fonctions, *théorie des nombres*[310], analyse indéterminée[311], géométrie de situation. Cette vue générale de l'état de la recherche montre qu'ils avaient une connaissance étendue des œuvres de leurs prédécesseurs et de leurs contemporains. Ils relèvent que, sous le nom d'*analyse*, se regroupent un grand nombre de techniques, d'artifices, de fragments de théories sans lien, sans unité et sans fondement:

> "One inconvenience however, results as a necessary consequence from the continued accumulation of indestructible knowledge. The beaten field of analysis, limited as it is when compared with the almost boundless extent which remains to be explored, is yet so considerable with respect to the powers of human reason, and (if we may be allowed to pursue the metaphor a little farther) so intersected with the tracks of those who have traversed it in every direction, as to become bewildering and oppressive to the last degree. The labour of one life would be more than occupied in perusing those works on the subject which the labour of so many has been spent in composing. The multitude of different methods and artifices, which for the most part lead only to the same results, and whose power is limited by the same points of difficulty, is at length grown into a very serious evil. Our continental neighbours seem sensible of this, if we may judge from the number of works which have appeared within these few years, digesting various points into a systematic form. But there is still much to be done in this line. That man would render most invaluable service to science, who would undertake the labour of reducing into a reasonable compass the whole essential part of analysis, with its applications, curtailing its superfluous luxuriance, rejecting its artificial difficulties, and giving connection and unity to its scattered members" Babbage [1989 (1813)], p. xxii.

Ainsi, bien loin de penser, comme Lagrange que l'analyse est un domaine achevé, Babbage et Herschel considèrent qu'il reste beaucoup à faire pour lui donner une forme systématique.
Les *Memoirs*, écrits « avec fougue »[312], furent reçus avec indifférence. Babbage estime à deux le nombre de personnes qui ont lu le volume en entier: Herschel et lui-même[313]. A la fin de 1813, la plupart des membres de l'*Analytical Society* ont obtenu leur grade et quittent Cambridge. Ils cessent de se réunir régulièrement dès 1813. Herschel publie encore quelques articles présentant soit des innovations techniques (amélioration de méthodes et de notations, généralisation de théorèmes), soit des commentaires sur les techniques[314]. En 1815, Babbage présente devant la Royal Society la première partie de son article sur le calcul des fonctions, la deuxième partie sera lue l'année d'après[315]. En 1816, Babbage, Herschel et Peacock publient leur traduction du *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* de Sylvestre François Lacroix [1765-1843]. Cette traduction connaîtra un succès immédiat auprès des étudiants[316].
Le changement qui s'opère dans le domaine des mathématiques à partir de la publication de la traduction de Lacroix est tangible. Les imprimeurs en sont les témoins malgré eux : il leur manque un grand nombre de signes nécessaires à l'impression des traités utilisant l'*analyse moderne*. Ainsi, l'ouverture aux techniques d'analyse continentale se manifeste par un

---

[310] Babbage utilise ce terme dans son sens naïf. Il mentionne les recherches de Fermat, Carl Friedrich Gauss [1777-1855], Adrien-Marie Legendre [1752-1833] sur les nombres premiers.
[311] Il s'agit de recherches sur les relations entre les solutions d'équations indéterminées.
[312] Durand(-Richard) [1985]
[313] Durand(-Richard) [1985], p. 167, qui cite une lettre de Babbage à Herschel du 1er juin 1813 (Crowe [1998], lettre n° 73, p. 13; RS HS 2.13).
[314] Herschel [1814], [1816], [1818].
[315] Babbage [1815; 1816], « An Essay towards the Calculus of Function ».
[316] Durand(-Richard) [1985], pp. 192-198.

changement scriptural: l'adoption des notations différentielles de Leibniz, généralement reconnues plus performantes que les notations fluxionnelles. Or, cette réforme apparemment superficielle s'insère dans une autre réforme beaucoup plus profonde et fondamentale. Et en effet, de nombreux historiens l'ont souligné, l'introduction des méthodes continentales s'accompagne d'une réflexion fondamentale sur les mathématiques[317]. Durand(-Richard) [1985] relève que les mathématiciens britanniques introduisent et développent un *calcul* éminemment plus général, une « science conçue comme globale, celle de l'analyse algébrique »[318], et dont le calcul différentiel et intégral n'est qu'un des multiples aspects. Ainsi, les *méthodes d'analyse continentales* introduites par la *Société Analytique* sont moins un calcul différentiel écrit en notation leibnizienne qu'une réintroduction du calcul des différences finies, dans la forme symbolique que lui ont donnée Lagrange et Arbogast, et qui sera généralisé au cours des années suivantes en un calcul des opérations abstraites, domaine duquel émergeront les premières algèbres abstraites.
Avant de présenter les travaux de Babbage, je mentionne quelques-uns des résultats du calcul des différences finies auxquels étaient parvenus les mathématiciens britanniques aux environs de 1750, ainsi que les formules du calcul symbolique utilisées par Lagrange et Arbogast.

13.1.1 Le calcul des différences finies

Le calcul des différences finies remonte à Brook Taylor [1685-1731] et James Stirling [1692-1770]. Jacques Bernoulli [1654-1705], Daniel Bernoulli [1700-1782], Euler et Maclaurin ont apporté des contributions importantes à ce domaine. Un grand nombre de formules d'interpolation, utilisées encore de nos jours, en sont issues. L'une des plus fondamentales est celle du *polynôme d'interpolation*, qui donne les coefficients du polynôme $p(x)$ qui a pour solutions n valeurs déterminées:

$$y_i = p(x_i), i = 1, \ldots, n .$$

La solution a été donnée par Thomas Harriot [1560-1621]. Newton l'a exprimée sous la forme de différence finie, de la manière suivante:

$$p(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{1 \cdot 2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n} .$$

Taylor [1715], après avoir postulé que la limite des rapports d'incréments d'ordre k tendait vers la $k^{\text{ème}}$ dérivée:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} = p^{(k)}(x_0)$$

obtient la célèbre série qui porte son nom [319]:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots$$

Aujourd'hui, le terme *différence finie* désigne un *opérateur*, représenté habituellement par le symbole Δ. La *différence finie* d'une fonction est une nouvelle fonction. Si u représente une fonction, x son argument, Δx un incrément déterminé, la différence finie de la fonction u pour l'incrément Δx est la fonction définie par [320]:

$$\Delta u_x = u_{x+\Delta x} - u_x .$$

Le calcul des différences finies traite des rapports des incréments

[317] L'influence des philosophes écossais est quelque fois mentionnée pour expliquer cette attitude britannique. Voir par exemple Olson [1975], Enros [1983], Craik [1999].
[318] Durand(-Richard) [1985], p. 179
[319] Taylor [1715], *Methodus incrementorum directa et inversa*.
[320] Dans cette branche, on utilise cette notation plutôt que la notation $\Delta u(x) = u(x + \Delta x) - u(x)$.

$$\frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \frac{u_{x+\Delta x} - u_x}{\Delta x},$$

pour un incrément Δx fini, déterminé et non nul. Souvent on pose $\Delta x = 1$.
L'opérateur Δ s'applique à une fonction, le résultat est une fonction, de même nature que la fonction initiale. Ainsi, l'opération peut être répétée. La composition de Δ avec lui-même est un nouvel opérateur Δ^2. L'itération de ce processus génère une infinité d'opérateurs. La notation indicielle exprime le nombre de répétitions de l'opération de composition.
L'opérateur inverse est défini comme l'opérateur qui *défait* ce que Δ *fait*, et il est noté Σ. Les relations entre les opérateurs ainsi définis s'expriment par des formules analogues à des expressions algébriques ordinaires.
Le calcul des différences finies est « la science qui traite des rapports des incréments simultanés de quantités mutuellement dépendantes »[321]. Boole fait apparaître le rapport entre calcul des différences et calcul différentiel et met en lumière la nature profonde de leur analogie:

> "In the following exposition of the Calculus of Finite Differences, particular attention has been paid to the connexion of its methods with those of the Differential Calculus – a connexion which in some instances involves far more than a merely formal analogy." Boole [1970 (1860)], p. i.

Afin de mieux mettre en évidence l'analogie des deux calculs, il suit dans ce dernier traité le même plan que dans le *Treatise on Differential Equations* (1859).

13.1.2 Le calcul symbolique

L'idée d'un calcul symbolique remonte à Leibniz qui mit en lumière « l'analogie qui règne entre les différentielles de tous les ordres du produit de deux ou de plusieurs variables, et les puissances des mêmes ordres de binôme en des polynômes composés de la somme de ces mêmes variables »[322]. C'est par ces mots que Lagrange introduit la formule symbolique qui lie l'opérateur de différence finie et celui de la différentielle :

$$\mathrm{e}^{hDf} = f(x) + hDf + \frac{h^2D^2}{2}f + \frac{h^3D^3}{2.3}f + ...$$

Cette formule symbolique provient de l'analogie que Lagrange constate entre l'expression du développement d'une fonction en série de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hDf + \frac{h^2D^2}{2}f + \frac{h^3D^3}{2\cdot 3}f + ..., \text{ où } Df = \frac{df}{dx},$$

et la série de l'exponentielle:

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2\cdot 3} + ...$$

Le principe de cette analogie n'est pas « évident par lui-même », reconnaît Lagrange; il l'utilise néanmoins abondamment, car ces formules sont très utiles et les résultats obtenus sont *a posteriori* exacts[323].

---

[321] Boole [1970 (1860)], *Finite Differences*, p. 1. Ce traité, le plus important sur ce sujet au 19ème siècle, reste le manuel de référence jusqu'au début du 20ème siècle.
[322] Lagrange [1973 (1772)], « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à l'intégration et à la différentiation des variables », t. 3, p. 441.
[323] Lagrange [1973 (1772)], « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à l'intégration et à la différentiation des variables », t. 3, p. 442.

Il obtient un certain nombre de formules en appliquant les règles de combinaison des opérations arithmétiques à des symboles qui ne représentent ni des nombres ni des grandeurs. Par exemple:

$$\Delta f = (e^{hDf} -1) \text{ , où } \Delta f = f(x+h) - f(x) \text{, ou}$$

$$\Delta^n f = (e^{hDf} -1)^n .$$

Lagrange développe cette dernière expression en procédant par analogie avec la formule du binôme.
Une deuxième étape est franchie par Louis François Antoine Arbogast [1759-1803]. Ce dernier traite les expressions fonctionnelles « tout de même que si les signes d'opérations qui y entrent étaient des quantités »[324]. Ensuite de quoi il lui reste à « multiplier le résultat par la fonction ». Il appelle ce procédé la « séparation des échelles d'opérations ». Suivant ce principe, il écrit la formule de Lagrange sous la forme suivante: $\Delta f = (e^{h\frac{d}{dx}} - 1) f$. En séparant le signe de la fonction *f* des signes indiquant l'échelle des opérations, la formule devient: $\Delta = e^{h\frac{d}{dx}} - 1$. Il suffit de manipuler cette formule, comme si ces signes étaient des signes de quantité, pour l'écrire sous la forme: $\Delta + 1 = e^{h\frac{d}{dx}}$. Il reste à « remultiplier » les deux membres par le signe de la fonction *f* pour obtenir l'égalité:

$$(\Delta + 1) f(x) = e^{h\frac{d}{dx}} f(x) .$$

Arbogast, de même que Français et Brisson, produit un grand nombre de résultats symboliques de ce type. Ces mathématiciens sont convaincus de la *justesse* de leurs manipulations même s'ils n'en comprennent pas bien la raison.
François Joseph Servois [1767-1847] a cherché à justifier la technique de la *séparation des échelles*. Pour en comprendre le principe, il suffit de « simplement considérer les deux propriétés qu'elles [la différentielle, les nombres, la différence, l'état varié] possèdent en commun, d'être distributives et commutatives entre elles »[325]. Le terme *distributif*, introduit par Servois, désigne une fonction ayant la propriété que nous appelons aujourd'hui la linéarité: $j(x+y) = j(x) + j(y)$.
En dépit de cette explication, le calcul symbolique est abandonné en France au moment où il s'introduit sur sol britannique. La première publication importante traitant des techniques symboliques en Grande-Bretagne est celle de l'Irlandais John Brinkley [1763-1835][326]. Il propose une démonstration et une généralisation du théorème symbolique de Lagrange. John Herschel sera l'un des premiers *supporters* de cette forme d'Algèbre Symbolique.

13.2 Charles Babbage [1791-1871]

13.2.1 Le calcul des fonctions

Babbage s'est intéressé au fonctionnement des machines, des industries, de l'économie, de l'esprit humain, ainsi qu'aux moyens de transmission des informations, aux systèmes de signes comme médias de communication. Son invention d'un système de notations destiné à

[324] Arbogast [1800], *Du Calcul des Dérivations*, p. ix.
[325] Servois [1814], *Réflexions*, p. 142.
[326]Brinkley [1807], « An Investigation of the General Term of an Important Series in the inverse Method of Finite Differences ».

communiquer le fonctionnement d'une machine est exemplaire de la démarche qui l'habite. La *Machine Analytique* représente la quintessence de sa quête[327].
Aussi n'est-on pas surpris que ses premiers travaux en mathématiques portent sur la notion de *fonction*. Dès 1809 il a l'idée d'un *calcul de fonction*, c'est-à-dire d'un calcul dans lequel les fonctions elles-mêmes sont les objets du calcul[328]. Il le mentionne en 1813:

> "It now points out a calculus perhaps more general than any hitherto discovered, and which should be called the calculus of functions, a name that more naturally belongs to it, than to that which Lagrange has so classically treated in the work which bears this name, although this latter is a branch of it." Babbage [1989 (1813)], p xvi.

Au contraire de Lagrange qui pensait avoir épuisé le domaine de l'analyse, Babbage y voit un domaine à peine ébauché, promis à de grands développements:

> "The foundations of a vast edifice have been laid; some of its apartments have been finished; others yet remain incomplete: but the strength and solidity of the basis will justify the expectation of large additions to the superstructure." Babbage [1989 (1813)], p. xxi.

Publié en deux parties dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society*, l'article « An Essay towards the Calculus of Functions » (1815; 1816) constitue la forme la plus achevée des recherches de Babbage dans ce domaine. Dans un deuxième article, « On the Application of Analysis to the Discovery of Local Theorems and Porisms » (1823; lu en 1820), il donne des exemples d'applications[329]. Je présente le contenu de ces deux articles.

Résumé de l'article de 1815

Babbage décrit le calcul des fonctions comme un nouveau[330] calcul « d'une très grande généralité et difficulté » et qui « demandera probablement l'invention de nouvelles méthodes »[331]. Dans la première partie, il propose des méthodes pour résoudre certaines équations fonctionnelles d'ordre supérieur. Dans la deuxième, il traite le cas général des équations de fonctions à plusieurs variables. Je m'intéresse au contenu philosophique de ces deux articles plus qu'aux méthodes mises en œuvre[332].
Babbage cite les travaux de D'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Monge et Arbogast, ainsi que ceux de Herschel[333] sur le sujet des équations fonctionnelles du premier ordre. Il critique les méthodes proposées par ces derniers, qui consistent à réduire l'équation fonctionnelle à une équation aux différences finies, pour leur manque de généralité. Les équations d'ordre supérieur n'ont jamais été ne serait-ce que mentionnées, fait-il remarquer[334].

---

[327] Je renvoie à Hyman [1982] pour une présentation des machines à calculer inventées par Babbage.
[328] Dubbey [1978], p. 52.
[329] Dans cet article, il donne du porisme une interprétation proche de celle de Playfair [1792]. Quelques années auparavant, il avait déjà utilisé le calcul des fonctions pour démontrer les théorèmes de Matthew Stewart (« Demonstrations of some of Dr Matthew Stewart's General Theorems » (1816)). Il donne d'autres exemples dans « Solutions of some Problems by Means of the Calculus of Functions » (1817). Babbage fait figure de spécialiste du domaine en Écosse même, puisque Brewster lui demande de rédiger l'article sur les porismes pour l'*Encyclopédie d'Edimbourg*, ce que Babbage accepte.
[330] Dans la correspondance de Babbage (Add. MSS 37182), plusieurs lettres témoignent de la nouveauté de ce sujet, de l'intérêt qu'il suscite et aussi de sa difficulté: Ivory (ff. 34-35, sept 1815), Bromhead (f. 46, février 1816), Herschel (RS HS 2.33 (lettre 126 in Crowe [1998]), octobre 1814) ou Augustin Louis Cauchy [1789-1857] (f. 235, mars 1820).
[331] Babbage [1815], p. 389.
[332] Les méthodes de résolutions proposées par Babbage sont décrites et commentés dans Dubbey [1978], chap. 4.
[333] Herschel [1814] propose une amélioration d'une méthode de Laplace.
[334] Babbage [1815], p. 391.

Dès les premières lignes de l'article, il affirme que l'introduction de la notion de *fonction* a été un grand progrès dont on n'a pas encore exploité toute la richesse.

> "The term function has long been introduced into analysis with great advantage, for the purpose of designating the result of every operation that can be performed on quantity. This extent of signification has rendered it of essential use, but the various applications of which it admits, and the questions to which it gives rise, do not appear to have met with sufficient attention." Babbage [1815], p. 389.

La définition traditionnelle que Babbage rappelle ci-dessus laisse entendre que la *fonction* est le *résultat d'une opération*. Pourtant, le terme *fonction*, au sens où Babbage l'entend dans cet article, désigne une *opération* qui fait correspondre une grandeur indéterminée à une autre grandeur. Le principe selon lequel on transite d'une grandeur à l'autre est déterminé[335].
Babbage distingue deux sortes d'*opérations*: l'opération directe, et l'opération inverse. Il range dans les opérations directes l'exponentiation et la dérivation, et dans les opérations inverses l'extraction de racine et l'intégration[336]. Il distingue aussi deux sortes de questions: les « directes », où l'on donne l'objet et l'on en demande les propriétés, et les « inverses », où l'on donne les propriétés et l'on demande l'objet.
Les problèmes de type inverse appartiennent à l'*analyse* (au sens de *l'Analyse Géométrique des Anciens*). Ils se résolvent par une méthode *algébrique,* au sens habituel de ce terme: le problème est considéré comme résolu, et la solution est exprimée *en fonction* des conditions posées.
Or la méthode algébrique traditionnelle a été « généralisée », dit Babbage, à un degré d'indétermination supérieur. Ce processus de généralisation a été mis en œuvre par la pratique introduite par Viète, qui consiste à représenter les quantités connues sous une forme indéterminée, de sorte que la quantité cherchée est obtenue *en fonction* de quantités indéterminées (supposées connues). On obtient ainsi une *relation* déterminée qui lie l'inconnu au connu. Dans ce type de problème, l'objet à trouver n'est pas une *quantité*, mais une *fonction*.
Ayant expliqué le processus permettant d'accéder à une forme d'interrogation d'un degré d'indétermination supérieur à la forme simple habituelle, Babbage itère le processus. Il suppose qu'une *fonction* inconnue est donnée par une relation fonctionnelle (par exemple: $y(y(x)) = y(x)$). Il suppose d'emblée que les conditions ne suffisent pas à déterminer une fonction de manière univoque, et donc qu'une infinité de fonctions satisfont l'équation. Son article de 1815 donne des méthodes pour résoudre de telles équations.
La méthode de Babbage repose sur l'hypothèse que toutes les solutions d'une équation sont liées par une certaine relation. Babbage suppose qu'une solution particulière est connue. Il donne la solution *générale* en fonction de la solution particulière connue, comme une expression fonctionnelle sous forme indéterminée[337]. La solution donne la forme générale des transformations pour lesquelles la propriété exprimée par l'équation fonctionnelle est invariante.

---

[335] Babbage, comme nombre de ses contemporains anglais, utilise fréquemment le terme *opération* pour *fonction*. On peut supposer que l'amalgame entre les deux termes a pour origine le travail de tabulation des fonctions, qui occupait de nombreux mathématiciens. Ces derniers n'avaient d'autre choix que de répéter inlassablement la même opération: "The intolerable labour and fatiguing monotony of a continued repetition of similar arithmetical calculations, first excited the desire, and afterwards suggested the idea, of a machine, which, by the aid of gravity or any other moving power, should become a substitute for one of the lowest operations of human intellect." Babbage [1989 (1822)], *Works* II, p. 6.
[336] Notons qu'il est habituel à cette époque de considérer sur un même plan les opérations arithmétiques, les opérateurs de différentiation et d'intégration, et les fonctions.
[337] Je renvoie à Dubbey [1978] pour une évaluation de la méthode elle-même.

La nouveauté du calcul des fonctions tient au rôle central qu'y joue la *loi de composition des fonctions*, qui à tout couple de fonction associe une nouvelle fonction, définie par l'application successive des deux fonctions. La composition de deux fonctions est une nouvelle fonction. Le calcul des fonctions n'est ainsi ni le calcul ordinaire, ni le calcul différentiel, ni le calcul des différences finies, mais véritablement un calcul dont les objets sont les *fonctions*. L'itération de la composition d'une fonction avec elle-même génère une suite infinie de nouvelles fonctions. Babbage utilise la notation indicielle pour indiquer le nombre de répétitions de la composition. Ainsi, l'exposant ne représente pas la répétition de la multiplication, mais la répétition de la fonction. Il utilise des indices négatifs pour indiquer la fonction inverse. Il définit l'*ordre* d'une équation fonctionnelle comme l'indice le plus élevé.
Exemple 1: Composition d'une fonction $\psi x = a + x,\ \psi^2 x = 2a + x,\ \psi^3 x = 3a + x, ...$

Exemple 2: Equation fonctionnelle: $\psi^n x = x$.
Babbage qualifie ces équations fonctionnelles de *très générales*. Par celà il faut entendre qu'elles possèdent une infinité de solutions. De même qu'une *équation* numérique ordinaire possédant une infinité de solutions détermine une *forme* (une fonction), de même une *équation fonctionnelle* possédant une infinité de solutions détermine une *forme fonctionnelle*. *Formes* et *formes fonctionnelles* sont des entités définies non comme la multitude des objets ayant telle ou telle propriété, mais bien comme une entité singulière, à savoir la propriété elle-même[338].

Applications du calcul des fonctions

Pour Babbage, le calcul des fonctions est un outil particulièrement adapté à la description des lois d'action des phénomènes dans tous les domaines de la philosophie naturelle:

> "In a former paper […] I endeavoured to explain the nature of the calculus of functions, and I proposed means of solving a variety of functional equations containing only one variable quantity. My subsequent enquiries have produced several new methods of solving these, and much more complicated functional equations, and have convinced me of the importance of the calculus, particularly as an instrument of discovery in the more difficult branches of analysis; nor is it only in the recesses of this abstract science, that its advantages will be felt: it is peculiarly adapted to the discovery of those laws of action by which one particle of matter attracts or repels another of the same or of a different species; consequently, it may be applied to every branch of natural philosophy, where the object is to discover by calculation from the results of experiment, the laws which regulate the action of the ultimate particles of bodies. To the accomplishment of these desirable purposes, it must be confessed that it is in its present state unequal; but should the labours of future enquirers give to it that perfection, which other methods of investigation have attained, it is not too much to hope, that its maturer age shall unveil the hidden laws which govern the phenomena of magnetic, electric, or even of chemical action." Babbage [1816], pp. 179-180.

Le ton de ce premier paragraphe est celui d'un visionnaire. Une remarque introductive extraite d'un livre récent sur les équations fonctionnelles en témoigne:

> "Though the theory of functional equations is very old, not only technicians but many mathematicians are still unaware of the power of this important field of mathematics. Functional equations arise in many fields of Applied Science, such as Mechanics, Geometry, Statistics, Hydraulics, Economics, Artificial Intelligence, Engineering, etc. One of the most appealing characteristics of functional equations is the capacity for models design. In fact, conditions required by many models to be adequate replicas of reality can be written as functional equations." Castillo [1992], p. 1-2

---

[338] Je reviendrai sur ce point sous 13.2.3.

Malgré les vastes domaines d'application que Babbage suggère, la suite de l'article traite de problèmes purement géométriques. Il signale qu'il a été amené à développer ce calcul en cherchant à résoudre le problème suivant: quelle est la courbe pour laquelle le rapport des aires des cercles tangents à la courbe et tangents les uns avec les autres est égal à une constante donnée? Ce problème est apparenté à un problème mentionné par Pappus, concernant l'inscription d'un certain nombre de cercles dans un demi-cercle. Les autres exemples d'application que Babbage offre à notre curiosité sont du même type: il s'agit de déterminer des courbes qui possèdent une certaine propriété. Par exemple, on demande la nature d'une courbe ABC telle que, si les abscisses x_1 et x_2 de deux points sont dans une relation telle que $x_1 x_2 = a^2$, les ordonnées sont dans la relation $y_1 y_2 = c^2$, où a et c sont des constantes données. Babbage résout ce problème au moyen de l'équation $f(x) f(\frac{a^2}{x}) = c^2$ où f représente la courbe (générale) cherchée. Il résout facilement cette équation à l'aide de ses méthodes. Une infinité de solutions satisfont l'équation.

Résumé de l'article de 1823

En mai 1820, Babbage expose devant la *Royal Society of Edinburgh* un exemple d'application du calcul des fonctions à des questions porismatiques:

> "Those propositions which have received the appellation of Local Theorems and Porisms, may, in one point of view, be considered as differing from theorems and problems, by having something more general, or indeterminate, in their nature; by affirming that some property is possessed not merely by one individual, but by every one, of some class or species. It is on this circumstance that the algebraic investigation of porisms is founded: the arbitrary constants of an equation of two variables, are made to submit to certain conditions, which shall leave the variables themselves still indeterminate. By generalising this process, we take, instead of arbitrary constants, unknown functions of the variables themselves; and instead of the resulting algebraic equations, we find functional equations which determine the form of the functions we have assumed." Babbage [1823], p. 338.

Le lien entre le calcul des fonctions et les porismes apparaît aussi dans l'article « Porisms » de l'*Edinburgh Encyclopaedia*, où Babbage affirme:

> "Here, then, an infinity of solutions appeared, yet they were all connected by a certain law." Babbage [1830], p. 108.

Pour illustrer l'application que Babbage fait du calcul des fonctions aux questions porismatiques, je reprends un de ses exemples.
Problème direct: Soit a une fonction *périodique*, d'ordre 2, c'est-à-dire $\mathrm{a}(\mathrm{a}(x)) = x$. On demande de trouver une fonction y telle que $\mathrm{y}(x) + \mathrm{y}(\mathrm{a}(x)) = c$. La solution de cette équation est:

$$\mathrm{y}(x) = \frac{c\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(\mathrm{a}(x))},$$ où f est une fonction quelconque.

La fonction y a la propriété suivante: à tout couple de points $(x_1, \mathrm{y}(x_1))$ est associé un point $((x_2, \mathrm{y}(x_2))$ tel que la somme des ordonnées de ces points est constante, où x_2 est défini par la relation: $x_2 = \mathrm{a}(x_1)$
Problème inverse: soit y une fonction telle que $\forall x_1 \; \exists x_2$ avec $\mathrm{y}(x_1) + \mathrm{y}(x_2) = c$. Trouver une fonction a périodique de période 2, telle que $\mathrm{a}(x_1) = x_2$.
Babbage ne discute pas de la question de l'existence et de l'unicité de la solution.

Porisme:

> "Any of this family of curves being given, a periodic curve of the second order (ABC), may always be found such, that if we take any two abscissae in the curve given, respectively equal to any two corresponding ordinates of the curve found, and draw ordinates to the given curve, and if we prolong either of these ordinates (EG) above the curve, until the part above (GH) is equal to the first of the two ordinates, the extremity of the ordinate, thus increased, will always be situated in a right line given by position." Babbage [1823], p. 341.

La ligne donnée par position est une droite parallèle à l'axe des x et d'ordonnée c.
Le problème inverse est manifestement une traduction algébrique du porisme énoncé ci-dessus.
Babbage, à l'instar de Maclaurin et Playfair, considère qu'algèbre et géométrie sont deux langages qui peuvent servir à résoudre une même question. Or, si la plupart des problèmes ou théorèmes locaux peuvent s'énoncer dans le langage de la géométrie, les porismes sont de nature trop générale pour ce langage:

> "Several of more restricted porisms and local theorems, might have admitted of a geometrical dress […]. The greater part are, I believe, beyond the power of geometry." Babbage [1823], p. 339.

La différence que Babbage voit entre ces deux langages réside dans la possibilité de généralisation des énoncés. Le symbolisme de l'algèbre permet de considérer les problèmes dans une perspective plus générale que le langage géométrique. Les Anciens n'abordaient pas les questions de géométrie avec autant de généralité que les Modernes, constate Babbage, et la raison en est qu'ils manquaient d'une symbolique adéquate pour une telle généralité.
Le porisme est un problème envisagé sous une perspective plus indéterminée que ne le sont les problèmes ordinaires de géométrie. L'application que Babbage fait du calcul des fonctions à la résolution de porismes indique bien le niveau de *généralité* des *courbes* envisagées par Euclide, dans ce domaine.
Les termes *général*, *généralité*, *généralisation* sont omniprésents dans les textes de Babbage. Cependant, les termes *générique, générateur, génération* seraient plus appropriés à cette nouvelle forme de mathématiques. En effet, le calcul des fonctions illustre une forme de *généralisation* de second ordre, puisqu'elle porte sur des propriétés ou des relations. Cette généralisation ne procède pas par extension d'un concept, mais par indétermination. Ce mode de généralisation s'applique aussi bien en algèbre (*fonction générale*), qu'en géométrie (*courbe générale*). Cette forme de généralisation est fondée sur une idée d'invariance relativement à certains changements, plus que sur une idée d'immutabilité; la ressemblance provient du mode de génération des entités.
La philosophie des mathématiques qui régit le *calcul des fonctions* n'est qu'ébauchée dans ces articles. Elle est développée plus tard dans *Essays on the Philosophy of Analysis*.

13.2.2 La philosophie de l'analyse

Essays on the Philosophy of Analysis (1821) est un manuscrit composé de onze essais, dont la plupart n'ont pas été publiés[339]. Les titres des *Essays on the Philosophy of Analysis*, sont: *On the Influence of Signs*, *On Notation, General Notions Respecting Analysis, Of Induction, Of Generalization, Of Analogy, Of the Law of Continuity, Of the Use of a Register of Ideas which occasionnally Strike the Mind, Of Artifices, Des rapprochements, Of a Variety of Problems*

[339] Ce document est conservé à la British Library, Additional MSS 37202.

Requiring the Invention of New Modes of Analysis. De ces *Essays*, seuls les deux premiers ont été publiés par Babbage.
Ce manuscrit fut découvert et présenté par Dubbey [1978] qui en donne une présentation assez complète. Il commente et évalue les techniques proposées par Babbage, mais discute assez peu des questions philosophiques débattues par Babbage[340].
Selon Dubbey, le troisième essai, *General Notions Respecting Analysis*, le plus intéressant, donne un éclairage nouveau sur le développement des idées concernant l'algèbre durant cette période. Dubbey montre en effet que les points les plus novateurs de Peacock [1830] sont déjà présents dans cet essai. Il montre de plus que Peacock a lu cet essai, et qu'il en fut impressionné[341]. Les autres essais sont sous la forme très inachevée de premiers brouillons. Aucun de ces essais n'a été publié, ne serait-ce que partiellement.
Peu d'études sont venues compléter les premières analyses de Dubbey. Fisch [1999] est l'un des seuls historiens à avoir, en écho à Dubbey, relevé l'importance historique considérable de ce manuscrit, du troisième essai tout particulièrement, dont il relève lui aussi la parenté avec le *Treatise on Algebra* de Peacock. Le fait que Peacock ait lu en 1822 déjà les essais de Babbage, l'incite à modifier sa propre interprétation de l'œuvre de Peacock: le *Treatise* est, propose-t-il, l'oeuvre d'un homme qui tente « avec angoisse » de concilier deux voies opposées: la voie conservatrice de Frend et celle par trop novatrice de Babbage.
Pour ma part, je m'intéresse aux aspects philosophiques de la réflexion de Babbage et à leur origine. Ce fut donc un plaisir que de découvrir que Babbage, dans l'introduction des *Essays*, indique sans ambiguïté la source de ses idées:

> "Indeed so strongly have I always been impressed with the utility of such enquiries to the progress of mathematical science that the labor research has constantly been so laced by additional satisfaction which [*illisible*] from considering that their successful termination would display in a strong light the advantages which result from a proper application of the philosophy of mind to other sciences; advantages which has not been sufficiently appreciated; rather from the want of examples in the application than from any defect in the powers of the instruments." Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 6.

Ainsi, les réflexions de Babbage s'appuient directement sur les écrits du philosophe Dugald Stewart, plus précisément du second volume de *Elements of the Philosophy of the Human Mind* (1814)[342]. Cette déclaration vient confirmer l'hypothèse générale qui dirige ce travail, à savoir que l'abstraction de second niveau qui émerge dans les écrits des algébristes anglais vers la fin du 19ème siècle trouve son impulsion dans la réflexion épistémologique des philosophes écossais. Je discute ci-après le contenu de ces essais, à la lumière des écrits de Stewart. Je cite de longs extraits, dans l'Annexe 4, que j'ai numérotés afin de pouvoir renvoyer le cas échéant au texte original. J'indique le numéro entre crochet.
L'objectif du manuscrit est décrit dans la page introductive [1]. Babbage cherche à expliciter la manière dont l'esprit « connecte l'inconnu au connu », ou, autrement dit, comment une chose inconnue devient connue. Babbage exprime cette préoccupation à de nombreuses reprises. Les derniers mots de sa biographie l'affirment encore:

> "I believe my early perception of the immense power of signs in aiding the reasoning faculty contributed much to whatever success I may have had. Probably a still more

---

340 Particulièrement intéressants sont les commentaires de Dubbey concernant l'un des essais de Babbage consacré à l'analyse de problèmes de stratégie dans des jeux de chance (pp. 126-130). Il montre que les techniques développées par Babbage pour résoudre ces questions présentent des ressemblances avec les techniques de modélisation de processus stochastiques.
341 Babbage, Add. MSS 37182, f. 41, lettre de Peacock à Babbage du 7 mai 1822. Peacock dit à Babbage son désarroi admiratif devant une pensée qu'il ne saisit pas mais dont il pressent l'ampleur et l'importance.
342 Je discute sous 13.5 des extraits de sa correspondance et de sa biographie qui attestent de l'importance de la filiation des idées entre les deux hommes.

> important element was the intimate conviction I possessed that the highest object a reasonable being could pursue was to endeavour to discover those laws of mind by which man's intellect passes from the known to the discovery of the unknown. This feeling was ever present to my own mind, and I endeavoured to trace its principle in the minds of all around me, as well as in the works of my predecessors." Babbage [1989 (1864)], p. 486.

Babbage a commencé ces essais en arrivant à Londres en 1815. Ils contiennent ses réflexions philosophiques les plus profondes, sur un sujet qu'il dit être « le grand objet de sa vie », à savoir le fonctionnement de l'esprit humain. L'une des facultés de l'esprit les plus remarquables, c'est la faculté d'*invention*, selon ses termes, ou encore la faculté de « connecter l'inconnu au connu ». C'est donc tout naturellement que ces essais, dévolus à la méthode de l'invention, portent le nom de *Philosophy of Analysis*.
Il est un élément de l'activité intellectuelle que Babbage considère comme primordial, c'est la faculté d'user de *signes*. Les signes sont nécessaires à la raison. Ils sont un instrument de la faculté d'invention. Ainsi, la philosophie de l'invention est-elle indissociable d'une philosophie des signes [2].
Les trois premiers essais constituent une introduction, annonce Babbage. Ils traitent des signes, des notations et du langage. Le thème de l'invention est traité dans les trois essais suivants. Je rends compte ci-dessous du contenu des six premiers essais[343].

On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning

Le manuscrit, conservé à la British Library, ne contient pas le texte du premier essai, « On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning ». Cet essai fut lu en 1821 devant la *Cambridge Philosophical Society*, et parut dans le second volume des *Transactions* de cette Société, en 1827. Une lettre de Babbage indique qu'il a envoyé ce texte à Pierre Prevost[344].

> "I send you the first of a series of essays on the Philosophy of Analysis and I shall be most happy to profit by any remarks you may honor me by making upon it." Lettre de Babbage à Prevost du 8 nov. 1826, MS suppl 1048, f. 45.

La réponse de Prevost montre qu'il a lu l'essai avec intérêt[345]. Il commente presque chaque paragraphe, exprimant son approbation et mentionnant les pages de ses propres écrits qui attestent de son accord avec les idées de Babbage.
Je présente une analyse détaillée du contenu de cet article. Il est en effet d'un intérêt majeur, car il met en exergue une différence entre deux modes de généralisation, que l'on pourrait qualifier de *généralisation analytique* pour celle qui procède par *indétermination* des concepts, et de *généralisation synthétique* ou ordinaire, pour celle qui procède par *extension* des concepts. Les entités mathématiques de la « modernité récente » s'obtiennent par une *généralisation analytique* – une thématisation.
L'article débute par une remarque qui fait écho à la conclusion de la « Préface » des *Memoirs* : les techniques d'analyse se sont étendues sans réflexion quant aux principes, tant la « puissance de l'instrument découvert », c'est-à-dire l'*analyse*, était prodigieuse [3]. Un travail de fondement et de synthèse est nécessaire, afin d'établir l'*analyse* sur des bases solides. Ce travail doit débuter par une interrogation: « quelles sont les causes de la certitude des conclusions de l'analyse?» et « quelle est la nature de cette assistance que les signes

---

343 Pour une présentation des autres essais, qui sortent du cadre de ce travail, je renvoie à Dubbey [1978].
344 Pierre Prevost est un savant genevois, traducteur et ami de Dugald Stewart, membre de la *Royal Society of Edinburgh*. Il est l'auteur d'un essai au titre similaire: Prevost [1800], *De l'influence des signes sur la formation des idées*. Voir aussi la première partie.
345 Prevost, MS suppl 1057, ff. 281- 282.

prêtent à notre faculté de raisonner?»[346]. C'est à répondre à ces deux questions qu'est consacré cet article.

Quelles sont les causes de la certitude des conclusions de l'analyse?

La géométrie est une science fondée sur des définitions, affirme Babbage. Il présente cette assertion comme une vérité admise et acceptée par tous. C'est à Dugald Stewart qu'il attribue l'origine de cette nouvelle métaphysique de l'objet géométrique, annonciatrice de la « modernité récente ».

> "In geometry it has been well remarked that its foundations rest on definition, and if this do not altogether hold in algebraical enquiries, at least the meaning of the symbols employed must be regulated by definition […]. In geometry, definition is the beginning of an enquiry; in metaphysical science, it is frequently the result of one: thus that a triangle is a figure formed by three sides, is a convention on which many of Euclid's propositions rest, and from this, as a point of departure, numerous deductions are made: on the other hand, our idea, and consequently our definition of beauty, is only the result of considerable thought and enquiry." Babbage [1827 (1821)], pp. 326-327.

Il convient ici de s'interroger sur la raison d'être de la distinction que Babbage introduit entre *géométrie* et *questions algébriques*. Que signifie le qualificatif *algébrique* utilisé dans la deuxième partie de la première phrase du texte cité ci-dessus? Cette question, Prevost l'a soulevée et je m'appuie sur son commentaire:

> « Ici pour me trouver d'accord avec vous (ce que j'ai fort à cœur) il faut que j'étende le sens des mots *alg[ebraical] enquir[ies]* aux applications; car s'il s'agit d'algèbre pure, je ne saurais voir comment il y aurait d'autres principes que les définitions. » Prevost, MS suppl 1057, f. 281.

Prevost propose de comprendre le terme *algebraical enquiries* dans un sens large qui englobe à la fois les applications de l'algèbre et l'algèbre pure. Les symboles utilisés en algèbre pure sont, comme les figures géométriques, des entités créées par leur définition. Les signes qui apparaissent dans les textes d'algèbre appliquée représentent eux, des quantités réelles. Ainsi, à l'instar de Stewart et en référence à lui, Babbage affirme que la certitude des mathématiques provient de la nature de ses objets. Ce sont des objets que le mathématicien crée par des définitions, des « êtres de sa propre création »[347]. Une définition mathématique consiste en l'énoncé d'une liste de propriétés. Selon Stewart, l'esprit a la faculté de créer un objet de pensée qui, au terme d'une procédure ressemblant à un quotient par une relation d'équivalence, n'est que la liste des propriétés énoncées dans la définition. On reconnaît ici ce que Gardies nomme une *thématisation*, et qu'il décèle dans le raisonnement *analytique* des Anciens Géomètres Grecs. Babbage illustre ce procédé par un exemple. En introduisant la notation $\mathrm{y}\,(\overline{x}, \overline{\tfrac{1}{x}})$ pour désigner toute fonction symétrique d'une quantité et de son inverse,[348] il désigne par un même signe les fonctions $\frac{x^2+1}{x}$ ou $\frac{x}{x^2+1}$, aussi bien que « des milliers » d'autres fonctions, sans en évoquer aucune en particulier. Le signe $\mathrm{y}\,(\overline{x}, \overline{\tfrac{1}{x}})$ désigne un objet de pensée, un objet de mathématique pure, défini par la propriété d'être une fonction symétrique en x et $\frac{1}{x}$ et ne désigne que cela.

[346] Babbage [1827 (1821)], p. 326.
[347] "[…] which are in a manner beings of its own creation". Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 51.
[348] Cette notation a été introduite par Babbage. Elle est utilisée par Herschel, et quelques-uns des amis de Babbage.

> "In the use of algebraic signs […] we can always so arrange them, that that quality on which the whole force of our reasoning turns shall be visible to the eye, whilst the numerous others which contribute to form the expression we are considering, although thrown into the background, are still by no means excluded. This species of insulation of the property whose consequences we wish to trace, enables the mind to apply that attention, which must otherwise be exerted in keeping it in view, to the more immediate purpose of tracing its connection with other properties that are the objects of our research." Babbage [1827 (1821)], p. 328.

Babbage a ainsi reconnu le caractère propre de l'analyse, qui est de considérer des propriétés pour elles-mêmes, d'« isoler une propriété » pour en « tracer » les conséquences. Les *signes algébriques* représentent des entités dans divers degrés d'indétermination[349], c'est-à-dire une liste de propriétés plus ou moins grande.
Babbage fait ainsi une première constatation, à savoir que les signes libèrent l'esprit de tout ce qui ne contribue pas directement au raisonnement: seule l'idée de la propriété dont on cherche à découvrir les conséquences est associée au signe. Alors que les mots du langage ordinaire sont entourés d'une multitude de détails en provenance de quelques objets particuliers qu'ils évoquent, distrayant l'esprit des éléments spécifiques à l'objet de la recherche, les signes mathématiques ne véhiculent que l'idée de la *propriété* que l'on étudie, et ne présentent à l'esprit que les éléments nécessaires au raisonnement. Ce qui peut être déduit de la propriété est donc vrai nécessairement de l'entité définie comme étant la propriété.

Quelle est la nature de cette assistance que les signes prêtent à notre faculté de raisonner?

Babbage examine les avantages du langage algébrique:

- La symbolisation des opérations permet de réduire la place nécessaire pour transcrire un raisonnement. Un raisonnement transcrit dans le langage algébrique prend si peu de place que l'esprit le saisit tout entier d'un seul regard. Le langage de l'algèbre est incomparablement plus compact que celui de la géométrie, où les quantités sont représentées par des lignes et des figures, et le raisonnement transcrit par un discours en langue ordinaire [4].
- La parcimonie de la notation algébrique a pour conséquence que la mémoire est moins sollicitée, et l'esprit se concentre sur les seuls éléments nécessaires au raisonnement. L'usage d'un tel système de signes a pour effet que l'esprit fonctionne avec plus de précision et d'efficacité [5].
- La possibilité d'opérer sur des objets indéterminés que donne l'écriture algébrique est l'un des grands avantages du langage algébrique. Le langage algébrique offre la possibilité de former des expressions dont la signification est plus générale que celle d'une expression arithmétique [6].
- Les signes de l'algèbre sont aussi plus généraux que ceux de la géométrie. En effet, les signes de la géométrie (lignes ou figures) sont tels qu'il est impossible de représenter deux lignes sans fixer leur grandeur relative. Les signes de l'algèbre ne présentent pas cet inconvénient [7].
- La généralité de l'écriture permet d'économiser du temps et du travail. En effet, en donnant la solution sous une forme générale *d'opérations à exécuter*, plutôt que *d'opérations exécutées*, on donne non seulement toutes les solutions particulières, mais

[349] Babbage [1827 (1821)], p. 343, cite un passage de Carnot, tiré des *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal* sur lequel il s'appuie pour étayer et illustrer ses affirmations.

aussi le procédé de la résolution, c'est-à-dire le moyen de résoudre des variantes du problème sans effort supplémentaire [8].

- Représenter une fonction par une lettre est une généralisation de l'écriture dont l'avantage est exemplaire, puisqu'il soulage l'esprit d'informations non pertinentes lorsqu'il s'agit d'opérer sur les fonctions elles-mêmes [9].

En résumé, l'utilité du *langage des signes* découle de sa *généralité,* et par ce terme il faut entendre la possible indétermination à des degrés divers des entités symbolisées. Babbage affirme qu'un tel langage ne doit pas être réservé à l'univers des « nombres ». Il est un outil apte à soutenir tout raisonnement de type analytique. Cette extension suppose toutefois que les entités (par exemple les opérations) soient elles aussi définies analytiquement par quelques propriétés, indépendamment de la signification des symboles sur lesquels elles opèrent[350].
Cet article s'achève par la question de la relation entre les mathématiques ainsi conçues et les sciences. Babbage décrit trois étapes distinctes dans la résolution d'une question scientifique. La première étape consiste à traduire la question dans le langage de l'analyse, c'est-à-dire à écrire une équation. La deuxième met en œuvre les opérations nécessaires pour résoudre l'équation; la solution ne demande que des connaissances d'analyse pure, et ces problèmes sont traités pour eux-mêmes dans des ouvrages spécifiques consacrés à *l'analyse pure*. La troisième étape consiste à retraduire la solution en termes de réalité. Les questions de mathématiques sont ainsi séparées des questions de physique. Les mathématiques apparaissent, dans cette description, comme une science formelle. Elles fournissent la syntaxe du langage de la science, mais elles ne disent rien du monde. La physique et toutes les sciences d'expériences ont un contenu sémantique. La jonction entre sciences et mathématiques se fait par interprétation des symboles. On reconnaît, dans cette présentation du rôle des mathématiques relativement aux sciences, une position proche de celle exprimée par Stewart[351].

On Notation

Le deuxième des essais annoncés porte le titre *On Notation*. Cet essai n'est pas non plus inclus dans le manuscrit de la British Library. Pourtant les questions de notation ont une importance considérable dans l'œuvre de Babbage. Il me semble donc vraisemblable que cet essai, comme le précédent, ait été publié. En faveur de cette hypothèse, la lettre que Babbage écrit à Prevost en 1826, lorsqu'il lui envoie son premier essai:

> "The second memoir on Mathematical Notation is shortly going to the press. When you have looked over the other two memoirs on Mechanical Notation and on Electric and Magnetic Notation I shall be obliged if you will present them in may name to the Philosophical Society of Geneva […]". Lettre de Babbage à Prevost, 8 nov. 1826, MS 1048, f. 45.

Pourtant, malgré les recherches que j'ai faites, je ne suis pas parvenue à déterminer lequel des écrits publiés par Babbage sur ce sujet appartenait aux *Essays*: s'agit-il de « Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions » (Babbage [1822]), du manuscrit *On a Method of Explaining by Signs the Action of Machinery* (Babbage [1826]), ou de l'article « On Notation » (Babbage [1830]), publié dans l'*Edinburgh Encyclopaedia* ?
Je n'ai trouvé trace du mémoire sur les notations mathématiques dont Babbage mentionne pourtant la mise sous presse imminente en 1826 ni dans ses œuvres complètes ni dans les catalogues de la British Library. En 1826 paraît le mémoire intitulé *On a Method of*

[350] Babbage développera la question de la généralité du langage algébrique dans le troisième essai (*General Notions of Analysis*). Voir ci-dessous.
[351] Partie 1, chap. 5.

Explaining by Signs the Action of Machinery, dont on trouve copie dans les papiers de Prevost[352]. Ce mémoire ne traite cependant pas de « notation mathématique ». Le seul texte publié par Babbage sur les notations mathématiques est l'article de 1822, « Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions ». C'est de cet article que je discute ci-après.
L'effet qu'eut « l'heureuse idée de définir le résultat de toute opération par le terme général de *fonction*, et d'exprimer cette idée générale par une lettre caractéristique»[353] illustre de manière exemplaire, souligne Babbage, l'importance de la notation. C'est pourquoi il a développé pour le calcul des fonctions des notations qu'il juge à la fois simples et performantes.
Cet article est relativement technique. Il traite dans une première partie de l'extension de la définition de f^n pour $n <= 0$, à partir de la propriété $f^{n+m} = f^n f^m$. Il fait remarquer que f^{-1} n'est pas bien défini si f n'est pas bijective (j'utilise ici un terme actuel, dont Babbage ne disposait pas bien entendu). Il prend comme exemple la fonction $f(x) = x^n$ et considère les racines de l'unité, qu'il note: $r_1,...,r_n$. Dans ce cas $f^{-1}f(x) = r_i x, i = 1,...,n$, alors que $f(f^{-1}(x)) = x$, fait-il remarquer.
Dans la deuxième partie, il montre l'efficacité du système de notation qu'il a introduit pour le calcul des fonctions, en comparant le nombre de lignes nécessaires pour une équation dans le système de notation habituel, et la longueur de la même équation dans son système de notation.
Babbage envisage le fonctionnement de l'esprit humain comme celui d'une machine, et l'intérêt qu'il porte aux notations est celui d'un industriel. Un système de signes tel que celui de l'algèbre constitue un outil qui augmente la puissance de l'esprit en rendant son fonctionnement plus efficace[354].
Le système de notation qu'il inventa pour transcrire le fonctionnement de ses machines, son engagement dans la fondation de la *Royal Statistical Society*, son invention d'un système de signalisation pour les phares témoignent de l'intérêt constant qu'il eut pour les systèmes de notation, en tant qu'instrument de transmission d'information. Son expertise dans le domaine fut reconnue, puisque c'est à lui que David Brewster s'adresse pour l'article « Notation » de l'*Edinburgh Encyclopaedia*. Ainsi, Babbage mérite plus que le titre de « pionneer of computer »[355] dont il fut crédité pour avoir conçu une calculatrice mécanique, programmable, à laquelle il donna le nom de A*nalytical Engine.* Il fait figure de pionnier d'une science nouvelle, la sémiologie, dans le sens élargi que ce terme possède actuellement.

General Notions Respecting Analysis

Le troisième essai est celui qui présente les idées les plus avancées. Babbage a en vue de fonder une *science de l'analyse pure*. Il y parvient en séparant le *langage des signes* qu'on utilise en analyse et en algèbre de ses applications à la géométrie et à l'arithmétique. Il obtient un système opératoire dans lequel les entités (objets et opérations) sont dépouillées de toute propriété. Les lois de combinaison des signes sont définies par leurs propriétés, librement choisies par le mathématicien.

---

[352] Ce texte est commenté par Prevost sur la même feuille que le précédent. Il s'agit d'un système ingénieux pour indiquer le déroulement (dans le temps) des mouvements des différentes parties d'une machine. Babbage a formé le mécanicien qui collaborait à la construction de ses machines à la lecture de ce système. Il a aussi enseigné ce système à ses fils.
[353] Babbage [1989 (1813)], p. xvi.
[354] Ashworth [1996], p. 639.
[355] Hyman [1982].

Babbage soutient que la *langue des signes* est une méthode de raisonnement très générale. Sa première application connue fut son application aux « nombres », selon lui. Ainsi les lettres de l'algèbre désignent, à l'origine, des *nombres*. Or, les applications de cette méthode ont été « tacitement élargies ». Les signes de l'algèbre ont été utilisés pour désigner des grandeurs continues, puis des grandeurs indéterminées [10].
Babbage considère que la *langue des signes* dans sa forme générale séparée de ses applications, est un système de symboles purs, des entités sans aucune propriété, des entités indéterminées. Dans un tel système, dit-il, l'identité de deux expressions symboliques n'a pas d'autre signification que d'indiquer qu'une fois développées selon les règles définies pour les opérations, les deux expressions seront formellement équivalentes [11]. Une telle position ne se retrouvera pas avant plusieurs décennies.
La position de Babbage concernant la question de l'infini, si problématique pour le calcul différentiel, est d'une clairvoyance exceptionnelle. En effet, il relève que cette question appartient à la nature des choses dont traite le calcul différentiel (espace et temps). Quelle que soit la manière dont on fonde le calcul différentiel, il faut expliquer le passage du fini à l'infini, dit-il, et ce passage est difficile pour des raisons propres à l'esprit humain [12]. Cependant, ce passage, nécessaire pour appliquer le calcul différentiel à des questions de physique, n'appartient pas aux principes de l'*analyse* en tant que science du raisonnement pur. Ainsi, selon lui, l'analyse est engluée dans des difficultés qui lui sont étrangères et qui l'empêchent de se développer dans toute sa puissance. C'est pourquoi il cherche à établir les principes sur lesquels repose le raisonnement analytique, sans s'occuper des difficultés liées aux applications[356]. Il définit la différentiation comme une opération pourvue des deux propriétés suivantes [13]:

$$d(xy) = xdy + ydx \text{ et } d(x+y) = dx + dy\,.$$

La forme générale de la différentielle d'une fonction:

$$d(x^a) = ax^{a-1}dx \text{ , où } a \text{ est rationnel, positif ou négatif.}$$

se déduit de ces deux propriétés.
L'essai s'arrête là, de manière abrupte.
Définir l'opération de différentiation par ses propriétés est une suggestion sans autre précédent, fait remarquer Fisch [1999][357]. Elle évite toutes les difficultés des solutions proposées jusque-là (la limite, les infinitésimaux, ou l'exhaustion) [14]. Cette présentation du calcul différentiel ne sera retrouvera que quelque vingt-cinq ans dans les travaux de ses successeurs, conclut Fisch [1999], faisant allusion aux travaux de Gregory, de De Morgan et de Boole, dans le domaine du calcul des opérations. Relevons toutefois que Greatheed [?-?][358], puis Philip Kelland [1808-1879][359] présentent le calcul différentiel généralisé selon la voie ouverte par Babbage. Ces premiers articles marquent, en Grande-Bretagne, le début d'une activité intense dans le domaine du calcul des opérations; je reviendrai sur ces articles au chapitre quinze.
Je retiens de cet essai que Babbage a présenté le calcul différentiel sous la forme d'un calcul abstrait. Les objets du calcul n'ont pas *a priori* de signification. Seule la *structure* du système est déterminée. L'analyse pure, libérée de toute application, apparaît ainsi comme un langage formel, à la croisée de deux chemins: celui de l'*algèbre* et celui de la *logique*.

---

[356] Babbage relève que Lagrange a retardé l'introduction de l'infini le plus possible, et c'est ce qui, à son avis, fait la valeur de sa démarche. Que les fondements de Lagrange soient contestables est secondaire, dit-il.
[357] Remarquons que Leibniz avait adopté une approche similaire. Elle fut oubliée par ses successeurs.
[358] Greatheed [1837], « On general Differentiation ».
[359] Kelland [1840], « On General Differentiation ». Kelland étudie au Queen's College de Cambridge. Il obtient la chaire de mathématiques à l'Université d'Edinburgh en 1838. Il remplace William Wallace. Il est ainsi préféré à Gregory, qui pourtant s'était porté candidat et avait le soutien d'un grand nombre de personnalités écossaises et de Cambridge.

Of Induction, of Generalisation, of Analogy

Babbage a annoncé dans la préface que les trois essais concernant l'induction, la généralisation et l'analogie, que je présente ci-dessous, sont dévolus à la question première qui dirige ces essais, à savoir au fonctionnement de l'esprit dans le processus de l'invention. Il présente différents exemples de problèmes pour lesquels il a eu recours ou à l'induction, ou à la généralisation, ou à l'analogie.

Ces trois essais, qui abordent le thème le plus cher à Babbage, sont dans un état très inachevé, autant du point de vue de la forme que du point de vue de la maturation des idées. Je présente ces trois essais, à la suite l'un de l'autre, sans établir de distinction nette entre eux, en suivant l'ordre que Babbage a choisi.

En premier lieu, il aborde le thème de l'induction. Il donne une démonstration par récurrence du théorème du binôme pour *n* entier, décrivant distinctement les deux étapes de la démonstration. Il affirme qu'il s'agit d'un raisonnement qui change radicalement la nature de la preuve apportée: de « hautement probable », la conclusion devient « nécessaire »[360].

Selon Cajori [1985 (1893)], De Morgan fut le premier à utiliser le terme *induction mathématique* pour distinguer la nature des deux modes d'induction. Si Babbage ne désigne pas ce mode de faire d'un nom spécifique, il en reconnaît la nature fondamentalement différente, à savoir que l'induction mathématique est une forme de démonstration, qui apporte une vérité nécessaire, l'induction incomplète ne donnant qu'une vérité probable.

Babbage cherche ensuite à distinguer *généralisation* et *induction.* Il déclare que la généralisation et l'abstraction sont des termes désignant deux étapes d'un même processus. La première étape (abstraction) consiste à identifier dans un objet une qualité, la deuxième, (généralisation) consiste à subsumer sous un même concept les différents *objets* possédant la qualité en question. Le processus d'*induction empirique* est aussi composé de deux étapes: partant de la comparaison de quelques exemples, on formule une loi générale, puis on vérifie sur de nouveaux exemples que la loi est valide généralement. Ainsi, ni la généralisation (ordinaire) ni l'induction (empirique) ne relèvent du raisonnement pur, et tous deux aboutissent à des énoncés dont la vérité n'est que probable.

Alors que dans ses essais précédents apparaît une distinction entre deux formes de généralisation, l'une que j'ai qualifiée d'« analytique » et l'autre de « synthétique », on ne trouve pas ici une discussion qui distinguerait généralisation mathématique et généralisation ordinaire, induction mathématique et induction ordinaire.

Babbage cherche ensuite à établir une distinction entre *généralisation* et *analogie*. Il signale une différence importante: la *généralisation* (ordinaire) aboutit à une extension d'un concept, le moins général étant inclus dans le plus général, alors que l'*analogie* est une relation entre des systèmes séparés, dont on reconnaît une ressemblance de structure.

> "The line which separates a process of generalization from one of analogy is rather more clearly marked than that which distinguishes it from induction; analogy transfers principles and modes of operation to different classes whilst generalization embraces in its grasp all those species which are comprised in some one class[.] neither of them afford proof of the truth of the conclusions to which they lead but when these have been demonstrated by other means it will be found that those which have been derived from a principle of generalization always contain in them the theorems from which they derived their origin; whilst those who have been suggested to us by analogy do not always include but only resemble their prototypes." Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 74.

[360] Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 56. Habituellement, rappelle-t-il, on appelle démonstration par induction, une démonstration qui consiste à vérifier une formule sur un petit nombre de cas, puis de conclure à sa généralité.

Cette remarque n'est en aucune manière triviale. La plupart des algébristes avant Babbage n'ont pas su faire cette distinction. Ils ont considéré que les nouveaux objets qu'ils avaient créés venaient grossir la collection de quantités déjà connues. La *fonction* était ainsi une *quantité*, au même titre que la *quantité imaginaire* ou la *quantité négative*. Ce que Babbage introduit, c'est, en termes actuels, l'idée de créer non pas une algèbre élargie, mais des algèbres. Ainsi, les *fonctions* sont les objets d'une nouvelle algèbre, alors que les *nombres complexes* sont de nouveaux objets de l'*algèbre ordinaire* (c'est-à-dire l'algèbre des nombres). L'algèbre devient ainsi plurielle. La notion de *structure algébrique* émergera dès lors qu'on procédera à la classification des nouveaux systèmes opératoires découverts (ou construits). La relation d'*analogie* sera cruciale, puisque c'est à elle qu'on va recourir pour définir une relation d'équivalence sur les systèmes opératoires.
Babbage, pour terminer, donne des exemples d'une stratégie qu'il a appliquée avec succès pour découvrir de nouveaux résultats. En recherchant activement des *analogies* entre le calcul des fonctions, le calcul différentiel et le calcul des différences finies, il a aperçu une similarité de relations entre ces trois domaines, qui lui a permis de transposer des artifices de résolution d'un domaine à l'autre.
En 1817 déjà, Babbage a donné une illustration de cette stratégie qui permet d'obtenir de nouveaux résultats[361]. Dans cet article – où il affirme déjà son intérêt pour le fonctionnement de l'esprit en cours de découverte [15] et l'importance majeure de cette connaissance pour le développement des mathématiques elles-mêmes [16] –, il montre des analogies entre des équations algébriques et des équations fonctionnelles, entre les racines de l'unité et les racines de la fonction *identité*. Il met aussi en lumière l'existence d'une limite déterminée dans le cas où une fraction, qu'elle soit de nombre ou de fonction, est indéterminée (0/0).

$$r^n = 1,\ \mathrm{y}^n x = x,\ \lim_{\mathrm{y}\to 0}\frac{\mathrm{y}\,x - \mathrm{y}\,\frac{1}{x}}{\mathrm{y}\,x},\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}.$$

L'analogie, précise-t-il, n'est pas une méthode de démonstration, mais sert de guide pour découvrir [17]. Elle offre la possibilité de transférer non seulement des résultats d'un système à un autre, mais aussi le moyen de les démontrer.

> "In the preceding pages I have endeavoured to point out some of the more prominent points in which the calculus of functions resembles common algebra or the integral calculus: it ought however to be observed, that several of the methods which I have applied to the solution of functional equations, directly resulted from pursuing this analogy: for when I had ascertained the remarkable similitude which exists between the method of functions and the integral calculus, I referred to a treatise on that subject with the express purpose of endeavouring to transfer the methods and artifices employed in the latter calculus, to the cultivation and improvement of the former."
> Babbage [1817], pp. 215-216.

Babbage a fait voir que le système des équations de nombres, le système des équations de fonctions et le système des équations différentielles présentent des similarités. La similarité ne concerne cependant pas les objets eux-mêmes, mais les relations entre les objets. Ces trois systèmes sont dans une relation d'analogie. Bien qu'ils traitent d'objets différents, ils présentent une similarité quant aux relations qu'entretiennent leurs objets. On pense évidemment à la notion de morphisme.
La *ressemblance* est une relation qui sous-tend la classification des *objets*. Elle est à l'origine de la généralisation ordinaire, qui procède à l'assemblage des objets qui possèdent un *attribut* commun. L'*analogie* est une relation qui sous-tend la classification des *relations.* En

[361] Babbage [1817], « Observations on the Analogy which Subsists between the Calculus of Functions and other Branches of Analysis ».

reconnaissant la possibilité de *généraliser* des *relations*, de les organiser en classes, Babbage ouvre la voie au concept de *structure*.

> "The researches of all the geometers of antiquity and of the greater number amongst the moderns have been exclusively confined to the consideration of quantity: this was the parent of their science and a species of filial attachment by almost inseparably connecting them has encumbered or prevented the flight of the offspring by the weight of the parent. In more recent times a partial separation has taken place and operations have in some instances been disjoined from quantity to become the subject on which others of their kind may operate. A further step is yet wanting: it is no longer quantity nor any of the operations to which it is subject which must form the basis on which to work, but something totally distinct from the one and equally abstract as the other. Situation or positions yet such as is not measured by distance (which is in almost all these cases immaterial) is the great object to be fixed in algebraic language and any concise method of embodying this attribute [and] its various modifications into that language will probably form the prelude to discoveries of a nature and an extent which few have yet contemplated." Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, ff. 129-130.

En lisant ce commentaire, le lecteur actuel songe à l'approche matricielle que les géomètres vont développer dès le milieu du 19ème siècle.

13.2.3 Originalité de l'œuvre mathématique

Le calcul des fonctions de Babbage manque de rigueur, certes, du point de vue de l'analyste actuel. Mais il ne s'agit ni d'une théorie des fonctions analytiques ni d'un calcul différentiel généralisé, ni même d'une ébauche d'une théorie des opérateurs linéaires. L'*analyse pure* de Babbage appartient au champ de l'algèbre au sens que la « modernité récente » a donné à ce terme. Son importance est plus métamathématique que mathématique, Fisch l'a souligné:

> "Pure analysis à la Babbage constitutes an autonomous realm of mathematical activity knowingly 'dissevered', as he put it, from all manner of application. It is, in a sense, a metamathematical system, logically prior to, and hence wholly independent of actual and potential subject-matter." Fisch [1999], pp. 154-155.

L'originalité de Babbage réside dans la nature même des questions qu'il pose: nature des entités mathématiques, rôle des signes, rôle de l'analogie, nature de la généralisation mathématique, nature de l'induction mathématique. Sur tous ces points, Babbage a adopté une position épistémologique qui fait de lui l'une des premières figures de la « modernité récente ».

Si l'on retient les deux points caractéristiques du nouveau paradigme présentés par Vuillemin, à savoir l'acceptation de la thématisation comme moyen de production de connaissance et l'abstraction de second niveau, il est légitime de considérer Babbage comme un homme non pas au bénéfice du nouveau paradigme, mais à la conquête du nouveau paradigme. Il a en effet cherché à accéder à ces deux procédés, sans y parvenir tout à fait.

Thématisation, une méthode d'invention mathématique

Les mathématiques de la « modernité récente » sont caractérisées par la croyance que les entités mathématiques sont créées par un acte de l'esprit. La *thématisation* est un procédé génétique, au sens de Vuillemin. Elle procède d'un mode de raisonnement de type inverse qui pose l'objet comme la propriété. Dans ce paradigme, la distinction entre *objet*, *propriété* et *relation* n'a plus lieu d'être. Le rôle des signes devient primordial, qui permettent de désigner une propriété en terme d'objet:

> « A l'autonomie fondamentale physique s'est substituée l'autonomie opératoire d'un autre objet, dont il n'est certes pas impossible de dire qu'il est *construit*, si l'on veut souligner que son existence se situe à un tout autre niveau que celle du précédent,

> même si les propriétés qui font son objectivité offrent une complétude et une résistance à l'arbitraire dont on ne trouverait pas l'équivalent dans les objectivités de niveau inférieur, à partir desquelles nous disons pourtant qu'il a été *construit.* » Gardies [2001], pp. 166-167.

La *thématisation* est une méthode de production de connaissance ou méthode d'*invention*. Cette méthode est acceptée dans l'épistémologie de la « modernité récente », mais elle ne l'était pas dans l'épistémologie réaliste traditionnelle, où tout concept est défini par une proposition du type « être un objet», et qualifié par une proposition du type « avoir une certaine propriété ». Dans cet ancien paradigme, l'essence précède la connaissance. Babbage, dans ses recherches sur le fonctionnement de l'esprit, dans ses réflexions sur la généralisation, l'analogie et l'induction comme méthodes d'invention, et sur l'influence des signes, touche aux points essentiels de la théorie de la connaissance autour desquels se situe la rupture. Il n'est pas loin de reconnaître le procédé de thématisation comme fondement des entités mathématiques.

Abstraction de second niveau

Les *fonctions* du calcul de Babbage sont des opérations traitées comme des objets. Elles sont séparées de leur résultat et distinctes de leur objet. Elles sont des entités autonomes, qui se combinent entre elles, sans qu'il soit nécessaire de descendre d'un niveau dans la généralité. Babbage a ainsi procédé à une abstraction de second niveau, d'un même genre que celle que Vuillemin reconnaît chez Galois[362]. Il n'est cependant pas parvenu à dégager la notion de *structure*, même si ses réflexions sur l'analogie la font apparaître assez nettement. Il faudra attendre vingt-cinq ans pour que cette notion émerge dans les travaux de ses successeurs.

13.2.4 Influence de Dugald Stewart [1753-1828]

Une parenté de pensée entre Babbage et Stewart paraît claire. Dans ses *Essays on the Philosophy of Analysis*, Babbage tente de constituer une *logique des mathématiques.* Or Stewart a appelé à de nombreuses reprises à la constitution d'une logique rationnelle. Il a expressément souligné que les mathématiques elles-mêmes manquent d'une logique:

> "The more varied, abstruse, and general investigations of the moderns, stand in need, in a much greater degree, of the guidance of philosophical principles; not only for enabling us to conduct, with skill, our particular researches, but for directing us to the different methods of reasoning, to which we ought to have recourse on different occasions. A collection of such rules would form what might be called with propriety, the logic of mathematics; and would probably contribute greatly to the advancement of all those branches of knowledge to which mathematical learning is subservient." Stewart [1994 (1792)], pp. 85-86.

Babbage a reconnu à plusieurs reprises l'importance qu'eurent pour lui les écrits de Stewart. Dans sa biographie, on lit:

> "The second volume of his *Philosophy of the Human Mind* had fortunately fallen into my hands at an early period during my residence at Cambridge, and I had derived much instruction from that valuable work." Babbage [1989 (1864)], p. 474.

[362] Voir introduction de cette partie.

Babbage a fait la connaissance de Stewart à l'occasion d'un voyage à Edimbourg[363]. Une lettre datant de août 1819 laisse entendre qu'il se considère comme un fils spirituel de Stewart[364]:

> "Dear Sir,
>
> Could I have anticipated some few years since the honour of a personal acquaintance with the author of the *Elements of the Philosophy of Human Mind* it would have acted as a powerful stimulus to me to render myself more worthy of it. Amongst the many gratifying circumstances that have attended my visit to this capital, one of the most pleasing is the opportunity it has afforded me of thanking in person a gentleman from whose writings I have derived so much instruction; and if I have any regrets it is only that an earlier acquaintance had not enabled me to sollicit a recommendation from a name so deservedly respected by every friend to the advancement of the sciences as that of Mr Dugald Stewart. Possibly some future opportunity may occur when similar reasons shall not intervene and I may yet hope to be honored by the support of a name which would shed a lustre even over ill success." Lettre de Babbage à D. Stewart, Add. MSS 37182, août 1819, f. 164.

Le fils qui naîtra quelques mois plus tard sera baptisé Edward Stewart. Une lettre de Mme Stewart nous apprend que son mari et elle-même sont très touchés de l'honneur qui leur est fait et se réjouissent de voir leur « filleul »[365].
En avril 1821, Babbage écrit à Helen d'Arcy:

> "The series of Essays which I once mentioned to him [Dugald] are now considerably advanced and will probably in another twelvemonth draw near their conclusion. I venture to hope that he will not read without interest those views which the influence of his writings induced me to take of the science to which I was attached and although in a work so very dissimilar to all others on philosophical subjects I cannot expect to have escaped hazarding many [*illisible*] which further discussion may induce me to alter or reject. Still I shall hope that his friendly criticism will have as much influence in improving my later writing as his works on the Philosophy of Mind have had in directing the course of my earliest.
>
> "The subject I have chosen is I am confident capable of furnishing (when skilfully treated) the strongest practical illustration of the advantages which result from the application of that science to all others and even with the moderate qualifications I possess for the undertaking I hope to make it sufficiently apparent to induce others to pursue a path which in my opinion promises so much." Lettre de Babbage à Helen d'Arcy, Add. MSS 37182, avril 1821, f. 327.

Ces essais auxquels Babbage travaille en 1821 et qui se veulent une « illustration pratique des avantages qui résultent de l'application de cette science à toutes les autres » sont évidemment les *Essays on the Philosophy of Analysis*. Pour affirmer ceci, je m'appuie sur les deux indications suivantes : d'une part le fait que cette même phrase se trouve dans la « Préface » des *Essays*[366], et que d'autre part les dernières lignes de la préface dédient d'une certaine manière ces *Essays* à « quelqu'un » pour qui Babbage a une grande reconnaissance:

> "In recommending an [*illisible*] attention to this subject I shall avail myself of the language of one to whose writings I am under the greatest obligation." Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 6.

[363] Babbage s'est rendu à Edimbourg en 1819 afin de se présenter à la chaire de Mathématiques de l'Université d'Edimbourg, dans le cadre de la succession de Leslie.
[364] Babbage, Add. MSS 37182, f. 164, août 1819.
[365] Babbage, Add. MSS 37182, f. 197, 6 janvier 1820.
[366] Voir citation plus haut.

Stewart semble n'avoir pas répondu aux attentes de Babbage. Aucune lettre ne laisse supposer que D. Stewart ait lu ces textes. De fait, Stewart va mal à cette époque. Le 2 mai 1821, Helen d'Arcy écrit à Babbage que Stewart a eu à nouveau une attaque qui l'a laissé en partie paralysé[367].

13.3 Conclusion

Babbage a cherché à illustrer les avantages qu'on retire de la philosophie de l'esprit. A l'instar de Leibniz et de Boole, il est en quête d'un langage qui permette de transcrire le fonctionnement de la pensée, voire de le reproduire. Tout au long de son œuvre, ses recherches se développent autour de trois thèmes principaux:

- Le fonctionnement de l'esprit dans le processus qui connecte ce qui est inconnu à ce qui est connu, c'est-à-dire dans le raisonnement de type analytique et ses procédés: la généralisation et l'induction.
- Les questions de notation et de langage.
- La relation d'*analogie*, relation de similitude de fonctionnement, qui découle des propriétés des opérations, comme relation d'équivalence à la base d'un nouveau type de généralisation.

Babbage se situe déjà hors de l'épistémologie traditionnelle lorsqu'il cherche à décrire le procédé qu'utilise l'esprit pour *inventer* ou pour connecter l'inconnu au connu. Lorsqu'il propose d'isoler les propriétés dont on souhaite étudier les conséquences, en les représentant par un signe, il procède à une sorte de *thématisation;* lorsqu'il met en exergue le rôle de l'analogie et de la généralisation pour *inventer*, il semble bien proche de la notion de *structure*. Il souligne que l'induction mathématique est un raisonnement rigoureux qui apporte des connaissances. Il montre le rôle primordial du signe dans le raisonnement mathématique et propose de développer l'analyse comme un langage. Les mathématiciens de la « modernité récente » tiendront à la fin du 19ème siècle des propos semblables.

La conclusion de ce chapitre est que Babbage d'une part a contribué de manière importante à l'avènement d'un nouveau paradigme en mathématiques et que d'autre part ses recherches en mathématiques se sont accompagnées d'une réflexion épistémologique, ainsi qu'en témoignent les *Essays on the Philosophy of Analysis*. Or ces essais ont été inspirés directement par les *Elements of Philosophy of the Human Mind* de Stewart. L'hypothèse générale de ce travail d'une relation directe entre les philosophes participant à l'avènement des nouvelles théories de la connaissance et les mathématiciens participant à l'avènement de nouvelles théories mathématiques trouve ici une belle confirmation.

La suite de mon travail vise à montrer que les idées présentées par Babbage, bien que non publiées, ont été diffusées à Cambridge, et de montrer leur rôle dans l'avènement de la définition d'un *groupe abstrait*.

[367] Babbage, Add. MSS 37182, f. 342, Lettre de Helen d'Arcy du 2 mai 1821.

Chapitre 14. Trois essais pour fonder les nombres complexes

L'émergence de la notion de *fonction*, entité conceptuelle d'une nature nouvelle, ni *quantité particulière*, ni *quantité universelle*, mais *opération*, bouleverse les idées que l'on se fait de la nature de la *quantité* et du *nombre*, et, en conséquence, des mathématiques. En effet, appliquées sans précaution à tout le champ numérique, certaines fonctions voient leur image sortir du domaine des *nombres* au sens traditionnel. On prit l'habitude de nommer le résultat d'une opération *impossible* à effectuer par le terme de « quantité impossible ». Ou bien *quantités négatives*, ou bien *quantités imaginaires*, ces *quantités impossibles* sont considérées par certains comme des nouvelles *quantités*[368].
Ainsi, l'introduction de ces nouvelles entités au sein de l'algèbre a « tacitement et imperceptiblement » élargi l'idée qu'on se faisait de la notion de *quantité* et de *nombre* sans qu'on le reconnaisse distinctement, ainsi que l'a souligné Babbage[369]. L'algèbre s'est alors trouvée aux prises avec des difficultés inextricables. Woodhouse, Playfair, Buée avaient chacun proposé une explication pour élucider les « mystères » et « paradoxes » qui encombraient l'algèbre. Cependant, durant la période 1814-1834 qui m'occupe ici, la doctrine des *quantités impossibles* divise toujours les mathématiciens. Ainsi, en 1817, Benjamin Gompertz [1779-1865], pressé par une amie d'écrire un livre sur cette question, introduit avec précaution son essai. Il rappelle que sitôt inventée la méthode pour découvrir les racines d'une équation du second degré, des expressions algébriques bien « embarrassantes », qui « semblaient » requérir qu'on extraie la racine d'une quantité négative, sont apparues. Des années d'étude, dit-il, ont finalement montré que:

> "Those very expressions termed impossible or imaginary quantities, which were terrific, sterile, and unproductive of utility, in appearance, were the most powerful instruments he could possess. But, notwithstanding the acquirement of the practice of these instruments of analysis, the method of their operation is far from being universally known; and the truths of their result are by no means generally acknowledged to be legitimately obtained, and would, by many, be wholly rejected in the absence of other demonstrations." Gompertz [1817], p. v.

Et plus loin:

> "But before I proceed, I think it necessary to inform the Reader that there are many persons of respectable mathematical acquirements and of sound judgement in various branches of human research, who consider the operations of these quantities absurd." Gompertz [1817], p. vi.

---

368 Hutton [2000 (1796)] donne la définition suivante du terme *quantity*: « any thing capable of estimation or mensuration or which being compared with another thing of the same kind, may be said to be either greater or less, equal or unequal to it ». Pour le terme *Number*, il rapporte les définitions données par différents auteurs: « a collection or assemblage of several units or several things of the same kind » (Euclide) ou « that by which the quantity of any thing is expressed » (Stevinus), « abstract ratio of a quantity of any kind to another quantity of the same kind which is accounted as unity » (Newton). J'utilise le terme *quantité* comme traduction du terme *quantity*.

369 Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 42.

Helena Pycior [1976] relève qu'entre 1800 et 1830 la plupart des manuels destinés aux étudiants reconnaissent le manque de fondement des quantités négatives[370]. La nécessité d'éclaircir le « mystère » de la *doctrine des quantités impossibles* est à l'origine de trois nouveaux essais entre 1828 et 1835. Ces essais explorent chacun l'une des trois voies décrites par W. R. Hamilton [1837 (1835)]: Warren propose une solution technique, recourant à la représentation géométrique, Peacock fait de l'algèbre une langue symbolique, W. R. Hamilton en fait une science. Je présente ces trois essais.

14.1 John Warren [?- ?]: la représentation géométrique

Warren[371] propose une interprétation géométrique des quantités imaginaires, similaire à celle d'Argand [1971 (1806)] et de Buée [1806]. Bien que cette approche ne soit pas nouvelle, son traité est néanmoins reçu avec scepticisme. L'année suivante, il répond aux objections qu'on lui fait[372]. Je résume l'idée directrice de son interprétation géométrique et j'examine les « objections » et réponses de l'article de 1829.

14.1.1 Résumé du *Treatise* de 1828

Le *Treatise* ne contient ni préface ni introduction. Il commence par la définition du mot *quantité:*

> "All straight lines drawn in a given plane, from a given point are represented in *length* and *direction* by Algebraic quantities; and in the following treatise whenever the word *quantity* is used, it is to be understood as signifying a line." Warren [1828], p. 1

Puis Warren énonce les principes suivants:

1. Toutes les lignes d'un plan peuvent être représentées algébriquement en grandeur et en direction.
2. L'addition de deux lignes doit se faire de la même manière que l'addition des mouvements en dynamique. La soustraction est l'inverse de l'addition.
3. Les *quantités algébriques* de signes opposés sont représentées par des lignes tracées dans des directions opposées. La direction *positive* est arbitraire, de même que la grandeur unité.
4. La *multiplication* de deux lignes doit être représentée par une ligne dont la longueur s'obtient en multipliant les longueurs des deux lignes à multiplier, et la direction en additionnant les angles.
5. Quatre lignes sont dites dans un même « rapport » (*ratio*) si la longueur de la première relativement à la seconde est comme la troisième relativement à la quatrième et si l'angle entre la quatrième et la troisième est le même que l'angle entre la deuxième et la première.

En s'appuyant sur ces principes, il interprète les signes « + », « $-$ » et « $\sqrt{-1}$ » comme des indications de direction.

---

[370] Pycior [1976], p. 66.
[371] Warren [1828], *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities.*
[372] Warren [1829], « Consideration of the Objections Raised against the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities ».

14.1.2 Résumé de l'article de 1829

Warren [1829] aborde des questions d'ordre métamathématique. Il explique les raisons qui l'amenèrent à cette représentation géométrique des nombres complexes et justifie son approche. En résumé, il lui apparut « manifeste » que « les opérations de l'algèbre » étaient « plus générales que les définitions et les principes fondamentaux » traditionnellement admis, qu'elles s'appliquaient à des « quantités pour lesquelles les définitions habituelles ne s'appliquaient pas » [373]. Il en conclut qu'il était « probable » que les définitions et principes connus de l'algèbre étaient « déficients ». Pour remédier à cette situation, il est, dit-il, nécessaire de découvrir de nouveaux principes et définitions. En considérant les *quantités* comme des lignes dans un plan, il pense avoir résolu le problème.
Après cette introduction, il répond à trois objections adressées à son approche géométrique:

1. Les racines complexes indiquent que le problème n'a pas de solution. Il est absurde de considérer l'absence de solution comme une solution.
2. Il est « impropre » d'introduire des considérations géométriques dans des questions purement algébriques, car il n'y a pas de connexion *nécessaire* entre l'algèbre et la géométrie. Les relations entre géométrie et algèbre ne sont pas *vraies* mais au mieux *analogiques*.
3. Même si la démarche consistant à recourir à des considérations géométriques était correcte, la représentation géométrique d'une racine impossible ne serait qu'une curiosité sans utilité.

A cette dernière objection, il répond que la preuve de l'utilité des nombres complexes est déjà faite.
Il considère avec plus de sérieux les deux premiers points. Il répond à la première objection, en distinguant l'utilité mathématique et l'utilité pratique. Dans certains problèmes, admet-il, une solution complexe n'a pas d'interprétation en termes de réalité. Il ajoute aussitôt:

> "Though they are so in some questions they are not necessarily so in all." Warren [1829], p. 244.

Les nombres rationnels sont sujets à la même objection, poursuit-il. La solution fractionnaire n'a pas, dans certaines circonstances, d'interprétation réelle et les fractions n'ont pas été exclues des mathématiques pour autant.
Pour répondre au deuxième point, il démontre algébriquement la relation suivante:

$$1^x = 1 + cx\sqrt{-1} - \frac{c^2x^2}{1\cdot 2} - \frac{c^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\sqrt{-1} + \dots,$$

où x est un nombre quelconque et c est la circonférence d'un cercle de rayon unité (c'est-à-dire 2π). En s'appuyant sur la propriété de la loi exponentielle ($1^x \cdot 1^y = 1^{x+y}$) et le développement de Taylor autour de 0 de la fonction puissance de 1:

$$1^x = 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{2} + \frac{B^3x^3}{2\cdot 3} + \dots$$

il obtient une équation de degré infini, en B. Pour déterminer la valeur de B il manipule, sans grande précaution, des séries infinies, faisant intervenir les formules d'inversion des séries de Taylor, une série qui converge vers 2π et une racine imaginaire de l'équation $y^6 - 1 = 0$. Au terme de cet exercice hasardeux, il est parvenu à exprimer le coefficient B sous la forme $B = 2\pi i$.

---

[373] Warren [1829], p. 241.

Le fait que la grandeur de la circonférence d'un cercle entre dans une équation contenant la racine d'un nombre négatif démontre, à son avis, une « connexion entre géométrie et algèbre ». Il ajoute que seule la géométrie est à même de fonder une « vraie » théorie des racines des quantités négatives[374]. Il indique par là que la géométrie n'est pas une représentation ou un modèle pour les nombres complexes, mais bien un fondement.
Pour répondre à l'objection que les relations entre algèbre et géométrie ne sont que des *analogies*, et qu'elles ne sont donc pas de *vraies* relations, Warren s'interroge sur le type de démarches aptes à montrer que la représentation géométrique des nombres complexes leur donne un fondement. Il affirme que la seule démarche de pensée possible consiste à poser certaines affirmations comme des hypothèses, puis à démontrer les conséquences. Il prend comme exemple la démarche employée pour fonder « l'existence réelle » des nombres négatifs. Les algébristes ont posé des hypothèses, dit-il, qui définissent le nombre négatif comme une ligne tirée dans une direction opposée, et la soustraction comme une opération d'addition effectuée sur des quantités de signe inversé.

> "And having made these hypotheses, they proved, by examining into the nature of algebraic operations, that the results arrived at by means of these hypotheses must be correct; therefore they concluded that these were true hypotheses; and their truth being established, they were admitted as fundamental principles of algebra." Warren [1829], p. 249.

Il ajoute que:

> "I call these algebraic principles hypotheses; for though most algebraists have considered them as propositions, and have endeavoured to establish their truth by direct demonstration, yet their reasoning is unsatisfactory, for they always treat of negative quantities as quantities to be subtracted, therefore their proofs are only applicable to the difference of two positive quantities, and not to negative quantities abstractedly considered. These fundamental principles must therefore be looked upon as hypotheses introduced into algebra in order to give to negative quantities a representation and a real existence." Warren [1829], pp. 249-250.

Soulignons la dernière phrase citée ci-dessus : on a posé des *hypothèses* pour *donner* aux quantités négatives une *représentation* et une *existence réelle*. Plus loin, lorsqu'il réfléchit sur les moyens dont il dispose pour justifier sa démarche, il n'utilise plus le terme *vrai*, mais le terme *correct*.

> "In fact, if there be a question, whether negative quantities can or cannot be represented geometrically; the only way in which such a question can be solved, is by making certain hypotheses with respect to their geometric representation, and then showing that the results arrived at from these hypotheses must be correct […]. In this point of view, the definitions and fundamental principles which I have laid down in my treatise must be considered as mere hypotheses; and mathematicians will be satisfied of their correctness when they see that the results agree in every respect with the results obtained by other independent processes." Warren [1829], p. 250.

Warren semble dans une situation inconfortable, car il est pris entre deux positions. D'une part il s'exprime comme un adepte d'une science mathématique de type hypothétique lorsqu'il dit que les principes sont de *simples hypothèses* qui fournissent des *représentations*, ou lorsqu'il dit ne demander que leur *accord* avec d'autres résultats; mais d'autre part, il dit que ces hypothèses assurent une existence réelle aux nombres négatifs. Son appartenance à une pensée prise entre deux paradigmes se manifeste encore dans la qualification du terme hypothèse: parfois il qualifie les hypothèses de *vraies*, parfois il les qualifie simplement de *correctes*. Entre ces deux manières de qualifier une hypothèse mathématique, il y a un abîme

[374] Warren [1829], p. 248.

épistémologique. Warren, même s'il semble chercher à s'en défaire, reste partiellement prisonnier du réalisme ambiant. Finalement, les fondements géométriques qu'il a proposés pour les nombres complexes ne convainquent pas ses contemporains. Peacock et W. R. Hamilton chercheront une autre manière de légitimer ces entités *inventées*.

14.2 George Peacock [1791-1858]: l'Algèbre Symbolique

George Peacock est l'auteur du *Treatise on Algebra* (1830) (une deuxième édition passablement modifiée paraît en deux volumes en 1842/1845) ainsi que du *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis* publié en 1834, lu en 1833 au congrès de la *British Association for the Advancement of Science* (BAAS)[375]. Ces deux textes ont fait l'objet de nombreuses analyses, car ils sont d'un intérêt majeur sur le plan de l'histoire des idées. Durand(-Richard) [1985] en souligne le caractère problématique: « Pourquoi G. Peacock, au moment même où il se fait novateur en Algèbre, adopte-t-il, face à certains problèmes de son époque, un point de vue spécifique, et qui semble le porter à contre-courant de ce que l'histoire des mathématiques semble faire apparaître comme la cohérence interne de leur développement? »[376]

Si Peacock semble par certaines de ses déclarations être un visionnaire isolé, par d'autres, il donne l'image d'un homme imprégné des idées de son temps, prisonnier d'une épistémologie réaliste. Néanmoins, Durand(-Richard) [1985] le situe dans la « modernité », affirmant qu'avec un siècle d'avance sur l'axiomatisation des mathématiques, Peacock libère les objets mathématiques de toute référent matériel: « que ce soit dans les principes ou dans les conclusions, il n'a besoin d'aucun recours, ni à l'intuition, ni à la visualisation, pour ce qui est de leur légitimation »[377]. Quelques années plus tard, elle réaffirme la « modernité » de Peacock. Elle ajoute aussitôt qu'un lecteur du 20ème siècle « ne saurait manquer de relever certains aspects du Rapport de G. Peacock, à l'évidence en contradiction avec la modernité dont il viendrait de lui faire crédit »[378]. Il est un homme de conciliation, dira Marie-José Durand-Richard. Il reste un homme entouré d'un mystère, qu'on n'a, selon Fisch [1994], pas fini de comprendre.

Le problème est donc posé: l'*Algèbre Symbolique* peut paraître, aux yeux d'un lecteur actuel, comme une première tentative d'axiomatisation des mathématiques. Lu dans cette perspective, le *Treatise* apparaît comme une œuvre isolée, avec des contradictions manifestes. Or, des études plus récentes permettent de contester l'isolement et d'expliquer les contradictions relevées. En effet, d'une part Dubbey [1978] montre que les idées développées dans Peacock [1830], et qui font dire de lui qu'il est un novateur, sont proches de celles exposées dans Babbage [1821]. Il établit de plus que Peacock a eu entre ses mains les *Essays* de Babbage. La correspondance entre Peacock et Babbage ne laisse aucun doute sur ce point. D'autre part Marie-José Durand-Richard montre que les contradictions relevées sont inhérentes aux positions épistémologiques de l'époque, inconciliables avec la pratique mathématique que Peacock tente d'exposer et de justifier[379]. La position de Marie-José Durand-Richard s'accorde avec l'hypothèse qui conduit ce travail, à savoir que l'émergence dans le champ des mathématiques de la notion de structure abstraite exige une adaptation préalable des structures épistémiques : est en jeu la recherche d'un consensus sur ce qu'il convient de dire « vrai », de dire « exister » et de dire « savoir ».

---

[375] Voir au point 13.1 pour l'origine de cette société.
[376] Durand(-Richard) [1985], p. 4.
[377] Durand(-Richard) [1985], p. 351.
[378] Durand-Richard [1990], pp. 132-133.
[379] Durand-Richard [1999], p. 21; voir aussi Durand-Richard [2000].

Considérant que l'*Algèbre Symbolique* est destinée « à faire sauter les verrous d'ordre conceptuels qui limitaient les possibilités de l'algèbre arithmétique »[380], Durand-Richard [1990] s'interroge sur les sources philosophiques de Peacock. Elle conclut à une influence de Locke. Si je suis d'accord avec elle que l'œuvre de Peacock est à interpréter à la lumière d'une réflexion épistémologique environnante, il me paraît néanmoins difficile de comprendre pourquoi l'influence de Locke se fait sentir à ce moment. En présentant le contenu du *Treatise* et du *Report*, je mets en évidence les liens entre cette œuvre et les *Essays on the Philosophy of Analysis* ainsi que la parenté des thèses de Peacock avec celles de Stewart. Je propose une interprétation de l'*Algèbre Symbolique* qui diffère quelque peu de celle de Marie-José Durand-Richard. Je conclus pourtant comme elle que l'*Algèbre Symbolique* n'est ni un plagiat, ni une irruption éphémère de modernité, mais qu'elle est une réponse à une réflexion collective née d'une conscience de l'inadéquation du discours sur les mathématiques avec la pratique des mathématiques de son temps.

14.2.1 Résumé du *Treatise on Algebra* (1830)

A lire la préface de cet ouvrage, on se sent incontestablement devant une œuvre ambitieuse.

> "The work which I have now the honour presenting to the public, was written with a view of conferring upon Algebra the character of demonstrative science, by making its first principles co-extensive with the conclusions which were founded upon them." Peacock [1830], p. v.

Peacock annonce une œuvre non seulement d'une grande importance et d'une grande difficulté, mais aussi novatrice:

> "I am very sensible of the great responsibility which I incur by an attempt of this nature, accompanied as it is by the proposal of so many innovations." Peacock [1830], p. v.

Il commence par une interrogation: quelle est la nécessité du lien qui unit habituellement l'algèbre et l'arithmétique? Sa réponse est qu'il n'y a pas de nécessité. La signification des symboles n'est pas limitée aux nombres. Son but est donc de libérer l'algèbre de toute attache, de donner des définitions de ses opérations qui soient indépendantes des quantités auxquelles elles s'appliquent et d'établir la vérité de ses propositions par des démonstrations :

> "To consider symbols not merely as the general representatives of numbers, but of every species of quantity, and likewise to give a form to the definitions of the operations of Algebra which must render them independent of any subordinate science." Peacock [1830], p. ix.

Woodhouse affirmait l'indépendance de l'algèbre et de la géométrie. Peacock, lui, vise à séparer l'algèbre de l'arithmétique. L'algèbre a toujours été considérée comme une « modification de l'arithmétique », dit-il. Cette modification ne consistait que dans l'utilisation d'un « langage symbolique » pour représenter les objets de l'arithmétique. Les « opérations de l'arithmétique » ont donc simplement été « transférées » dans le nouveau système de signes, sans qu'on reconnaisse que la signification des opérations et leur champ d'application s'étaient étendus[381]. L'objectif de Peacock, annoncé dans la préface, est de revoir les principes sur lesquels l'algèbre est fondée, et de lui donner le « caractère d'une science démonstrative » autonome[382].

---

[380] Durand-Richard [1990], p. 145.
[381] Peacock [1830], p. vi.
[382] Peacock [1830], p. v.

Le premier chapitre, consacré à l'exposé des principes généraux de l'algèbre, débute par une définition:

> "Algebra may be defined to be the science of general reasoning by symbolical language." Peacock [1830], p. 1.

Peacock, de la même manière que Babbage, présente l'*algèbre* comme un système de *symboles* assujettis à des *opérations générales* données *a priori* par une *définition* :

> "The symbols of Algebra may be made the representatives of every species of quantity, whether abstract or concrete: the operations to which they are subject are perfectly general, and are in no respect affected by the nature of the quantities which the symbols denote, being determined solely by the definitions and assumptions which constitute the first principles of the science." Peacock [1830], p. 1.

Ce qu'il entend par *opération générale* est difficile à cerner. Pour un mathématicien actuel, il y a au moins trois manières de généraliser une opération:

1. en étendant le champ opératoire (pour obtenir la clôture algébrique),
2. en spécifiant moins de propriétés pour les lois de combinaison,
3. en considérant un domaine d'application plus général (indéterminé), sans modifier les propriétés des lois de combinaison.

Ces différentes manières de généraliser ne sont pas distinguées chez Peacock.
Dans le premier chapitre, il a recours à l'expression « incorporer », qui suggère l'idée d'une loi de combinaison non spécifiée. Les symboles, dit-il, peuvent être « incorporés » pour former une « nouvelle quantité »[383]. Il précise aussi que le signe « = » est le seul symbole qui reçoive une signification. Il donne à ce signe trois significations différentes:

> "The sign =, placed between two quantities or expressions, indicates that they are equal or equivalent to each other: it may indicate the identity or absolute equality of the quantities between which it is placed; or it may shew that one quantity is equivalent to the other, that is, if they are both of them employed in the same algebraic operation, they will produce the same result; or it may simply mean, as is not uncommonly the case, that one quantity is the result of an operation, which in the other is indicated and not performed." Peacock [1830], p. 8.

Ayant ainsi fixé ce cadre très *général*, Peacock s'interroge sur le sens et la place d'une *arithmétique universelle*. Il affirme que l'appellation *arithmétique universelle* généralement utilisée pour désigner l'*algèbre* est « impropre », car l'arithmétique universelle n'est qu'une des applications de l'algèbre[384]. C'est dire que *algèbre* et *arithmétique universelle* ne sont pas de même niveau de généralité, ou, en utilisant la terminologie de Babbage, elles ne sont pas au même degré d'indétermination.
Le deuxième chapitre discute des méthodes de « combinaison » et « d'incorporation » des « quantités algébriques » au moyen des lois d'addition, soustraction, multiplication et division. Peacock est redescendu d'un niveau de généralité : les lois d'« incorporation » des symboles sont celles de l'arithmétique. Le domaine d'application est spécifié : l'algèbre s'étend à des « quantités de toutes sortes ». Par cette expression, Peacock entend aussi bien les nombres que les grandeurs de force, les quantités négatives et peut-être même les fonctions.
Dans le troisième chapitre, intitulé *Observation upon the First Principles and Fundamental Operations of Algebra*, Peacock, un peu à la manière de Buée, présente deux sortes d'algèbre.

---

[383] Peacock [1830], p. 3.
[384] Peacock [1830], p. 1.

L'une est l'*algèbre arithmétique*, dont les objets sont les *nombres*, éventuellement représentés sous une forme indéterminée par des lettres, et les opérations celles de l'arithmétique, avec leurs limitations naturelles; l'autre est ce qu'il appelle l'*Algèbre Symbolique*, un système de symboles qui peuvent représenter toutes sortes de quantités et qui peuvent être « incorporés » par des opérations spécifiques (ce sont celles de l'arithmétique), mais qui s'appliquent sans limitation à tous les symboles. Une différence importante entre ces deux algèbres : les symboles de l'algèbre arithmétique sont *définis* par un référent extérieur, alors que ceux de l'*Algèbre Symbolique* sont *interprétés*[385]. En conséquence, dans l'algèbre arithmétique, la règle des signes et la commutativité des opérations sont *prouvées* (dans le monde réel), alors que dans l'*Algèbre Symbolique*, elles sont des *hypothèses* qui n'ont pas à être prouvées. Dans l'algèbre arithmétique, les opérations sont limitées par les possibilités réelles des opérations, dans l'*Algèbre Symbolique*, les opérations ne sont soumises à aucune restriction en provenance de la réalité. Relevons toutefois que les relations entre l'*algèbre arithmétique,* l'*Algèbre Symbolique* et l'*algèbre* définie à la première page du *Treatise* sont difficiles à saisir pour un lecteur actuel. Ces trois entités ne correspondent pas à des structures algébriques bien précises.
Peacock, dans le *Treatise*, indique que les opérations de l'arithmétique sont *généralisées*. Il entend par là que le champ des opérations est étendu :

> "If, however, we *generalise* the operation denoted by `−´, so that it may admit of application in all cases, we shall then find the independent existence of this sign will follow as a necessary consequence and we shall thus introduce a class of quantities, whose existence was never contemplated in Arithmetic or Arithmetical Algebra, and to which, in those sciences, no proper interpretation could be given […]. This *generalisation* of the operation denoted by `−´ is in reality an *assumption*, inasmuch as it is not a consequence deducible from the operation of subtraction as defined and used in Arithmetic and Arithmetical Algebra." Peacock [1830], pp. 70-71.

Le problème est de justifier une telle extension. Des *quantités nouvelles* définies (au sens actuel) comme le résultat d'une opération sont des symboles vides de sens. Or ces symboles sont pris comme objet des opérations. L'extension du champ des opérations repose sur une sorte de démarche inductive imparfaite : ce qui est vrai des quantités réelles doit aussi être vrai des purs symboles. Mais ce raisonnement est insatisfaisant du point de vue mathématique. Dans le *Report*, Peacock modifie sa position. Le passage de *a-b* à *b-a* n'est pas un processus de *généralisation*[386], mais une extension fondée sur l'hypothèse que l'addition et la soustraction sont des opérations inverses l'une de l'autre.
L'extension du champ opératoire ne peut être légitimé par une simple *généralisation*. C'est par déduction qu'il faut procéder. Peacock énonce alors deux principes premiers à partir desquels il va pouvoir exposer l'algèbre déductivement.
Le premier principe dit que les symboles sont supposés sans limitation quant à leur valeur et les opérations s'appliquent dans tous les cas. Ce principe légitime l'existence des nouvelles quantités. Peacock déduit de ce principe « l'hypothèse » (*assumption*) qu'il existe des quantités telles que $-c$ et $+c$. Ces symboles désignent les résultats d'une opération.
L'attribution de l'existence à des entités résultant d'une opération impossible indique déjà un renversement dans l'ordre d'existence des opérations et des objets des opérations. Le premier principe présuppose en effet que les opérations précèdent leurs objets dans l'existence.

---

[385] Le terme *défini* ici signifie que les symboles reçoivent leur détermination d'un référent réel. La plupart des mathématiciens actuels considèrent que *donner une définition* aux symboles est un acte libre de toute contrainte extérieure. Peacock utilise le terme *interprété* pour désigner le passage d'une symbolisation sans référence à une désignation réelle. L'Algèbre Symbolique est un système de symboles non interprétés. Remarquons que Peacock n'a pas de terme positif pour caractériser le type de définition mathématique au sens actuel.
[386] Peacock [1834 (1833)], p. 194.

Le second, le *principe de permanence des formes équivalentes*, légitime l'extension du champ opératoire à ces symboles. Ce principe comprend deux propositions, l'une *directe*:

> "Whatever form is algebraically equivalent to another, when expressed in general symbols, must be true, whatever those symbols denote." Peacock [1830], p. 104.

et l'autre *inverse*:

> "Conversely, if we discover an equivalent form in Arithmetical Algebra or any other subordinate science, when the symbols are general in form though specific in their nature, the same must be an equivalent form, when the symbols are general in their nature as well as in their form." Peacock [1830], p. 104.

Le principe direct affirme que l'équivalence de deux expressions symboliques ne s'obtient pas par le constat de l'égalité pour toutes les valeurs particulières des symboles, mais qu'elle se déduit des propriétés des opérations combinées dans l'expression symbolique. L'équivalence des formes symboliques est inhérente aux propriétés des lois de combinaison des opérations et non aux propriétés des objets combinés, et l'égalité des valeurs particulières se déduit de l'équivalence des expressions formelles générales. L'expression symbolique n'est pas un concept général obtenu comme une collection de cas particuliers. C'est l'inverse qui se produit : l'expression générale est première, et d'elle se déduit le particulier.
Le double principe de *permanence* est la clé de la connexion entre arithmétique, *Algèbre Symbolique* et algèbre. Il permet de construire l'Algèbre Symbolique par un processus de déduction à partir d'une structure générale hypothétique (*assumed*) en spécifiant les opérations sans limiter leur champ d'application. L'arithmétique est considérée comme *science de suggestion* pour l'Algèbre Symbolique, ce qui signifie que les opérations ont les mêmes propriétés que celles de l'arithmétique. Leur champ opératoire est illimité grâce au premier principe. Le double principe prend alors toute sa puissance : les formes équivalentes découvertes en arithmétique sont vraies, généralement, dans l'Algèbre Symbolique, par l'énoncé inverse et les formes équivalentes algébriques sont, en particulier, vraies en arithmétique, par l'énoncé direct. Peacock donne un exemple:

> "Thus we may assume the existence of an equivalent form for $(1+x)^n$, when n is a general symbol, and we may discover it when n is a whole number: or we may commence by the discovery of the equivalent form $(1+x)^n$, when n is a whole number, and subsequently assume the existence of it, when n is a general symbol." Peacock [1830], p. 105.

Le système de symboles généraux évoqué à la première page du *Treatise* semble ainsi n'avoir servi que de matrice pour engendrer par déduction l'*Algèbre Symbolique*.
Pourquoi Peacock restreint-il les possibilités pour les opérations de l'*Algèbre Symbolique* ? Il s'en explique aussi bien dans le *Report* que dans le *Treatise* : les opérations de l'Algèbre Symbolique sont celles de l'arithmétique, non par nécessité logique ou fondamentale, mais par choix, un choix motivé par des considérations pratiques :

> "Algebra may be considered, in its most general form, as *the science which treats of the combinations of arbitrary signs and symbols by means of defined though arbitrary laws*: for we may *assume* any laws for the combination and incorporation of such symbols, so long as our assumptions are independent, and therefore not inconsistent with each other: in order, however, that such a science may be one of useless and barren speculations, we choose some subordinate science as the guide merely, and not as the foundation of our assumptions, and frame them in such manner that Algebra may become the most general form of that science, when the symbols denote the same quantities which are the objects of its operations: and as Arithmetic is the science of Calculation, to the dominion of which all other sciences, in their application at least, are in greater or less degree subject, it is the one which is usually, because most usefully, selected for this purpose." Peacock [1830], pp. 71-72.

Les lois de combinaison de l'Algèbre Symbolique nous sont suggérées par l'arithmétique, dit-il, pour que cette algèbre puisse être utile aux sciences. Peacock répète dans le *Report* que cette exigence n'est pas inhérente à l'algèbre en tant que science des symboles généraux et de leurs lois de combinaison, mais qu'elle est motivée par les besoins des sciences expérimentales.

> "But though the science of arithmetic, or of arithmetical algebra, does not furnish an adequate foundation for the science of symbolical algebra, it necessarily *suggests* its principles, or rather its laws of combination; for in as much as symbolical algebra, though arbitrary in the authority of its principles, is not arbitrary in their application, being required to include arithmetical algebra as well as other sciences, it is evident that their rules must be identical with each other, as far as those sciences proceed together in common: the real distinction between them will arise from the *supposition or assumption that the symbols in symbolical algebra are perfectly general and unlimited both in value and representation, and that the operations to which they are subject are equally general likewise.* " Peacock [1834 (1833)], p. 195.

En résumé, Peacock a présenté dans les premiers chapitres de son traité, une définition très générale de l'algèbre comme science du raisonnement au moyen d'un langage symbolique. Sitôt posé ce cadre, il restreint la généralité des opérations. L'*Algèbre Symbolique* ressemble à une arithmétique généralisée (dans un sens vague). La valeur des symboles et le champ des opérations sont sans restriction, mais les opérations sont déterminées. L'*Algèbre Symbolique* que Peacock présente sur un mode *déductif* à partir de principes premiers n'est pas cette structure algébrique générale présentée sur un mode axiomatique, que l'on avait pu croire. Elle doit coïncider en partie avec l'arithmétique. Cette restriction, Peacock la présente non comme une nécessité logique, mais pour des raisons pratiques. Son intention est de légitimer l'usage des nombres négatifs et des nombres complexes. La science du raisonnement général au moyen d'un langage symbolique - l'algèbre esquissée par Babbage est une ébauche de structure générale dont Peacock se sert pour déduire l'*Algèbre Symbolique*, arithmétique généralisée que l'on utilise déjà. Tel est, je crois, le niveau auquel situer l'*Algèbre Symbolique*.

Remarquons que les *fonctions* ne sont pas traitées séparément des quantités. Elles semblent être des éléments de l'*Algèbre Symbolique*, au même titre que les nombres négatifs. Bien que Peacock traite de séries infinies, la problématique des nombres réels n'est pas évoquée.

14.2.2 Commentaires sur le *Report* (1833)

Le *Report* est un compte rendu des progrès récents des « sciences analytiques »[387]. Ce texte expose les principes suivants:

1. En mathématique les définitions sont les points de départ et les recherches partent de là. Les conclusions qu'on tire sont relatives aux hypothèses et définitions initiales. Elles sont vraies à la seule condition que leur connexion logique avec les hypothèses initiales soit établie. Les mathématiques sont fondées sur des principes hypothétiques explicités dans des définitions, posées comme limite de nos investigations.

2. Dans les sciences physiques il n'y a pas de faits ultimes qui puissent être considérés comme les limites de nos investigations, et c'est là une différence fondamentale avec les mathématiques.

3. En appliquant l'algèbre ou la géométrie aux sciences de la nature, on ne peut être certain que des conclusions mathématiques déduites des hypothèses et principes initiaux. Mais

[387] Par *sciences analytiques*, Peacock désigne l'algèbre, l'algèbre appliquée à la géométrie, le calcul différentiel et intégral, la théorie des séries, entre autres. Peacock présente surtout les progrès réalisés en algèbre.

l'interprétation en termes de réalité physique des conclusions mathématiques reste empreinte d'incertitude.

Peacock a développé en moins d'une page une position épistémologique dont Pont a relevé l'« esprit voisin de nos conceptions actuelles»[388], et le caractère surprenant, tant elle « ne se raccroche à rien, paraît complètement isolée du courant mathématique dominant »[389]. Or, cette page, en même temps qu'elle semble être un condensé des idées de Babbage, résume simplement les idées de Stewart[390].
Peacock discute de la difficulté qu'il y a à exposer les principes de l'algèbre :

> "There are great difficulties in the elementary exposition of the principles of algebra. As long as we confine our attention to the principles of arithmetical algebra, we have to deal with a science all whose objects are distinctly defined and clearly understood, and all whose processes may be justified by demonstrative evidence. If we pass, however, beyond the limits which the principles of arithmetical algebra impose, both upon the representation of the symbols, and upon the extent of the operations to which they are subject, we are obliged to abandon the aid which is afforded by an immediate reference to the sensible objects of our reasoning." Peacock [1834 (1833)], p. 283.

Le dilemme est on ne peut plus clairement énoncé: ou bien les mathématiques traitent de quantités réelles, qui ont un référent extérieur, et dans ce cas les quantités négatives doivent être rejetées; ou les mathématiques sont aptes à traiter des quantités négatives, mais dans ce cas, elles doivent renoncer à prétendre traiter de quantités réelles.
Pour répondre à ce dilemme, Peacock a proposé une cascade de constructions, chaque nouvelle construction étant moins déterminée que la précédente:

- L'*arithmétique* traite de nombres abstraits déterminés. Les opérations de l'arithmétique ont une interprétation (Peacock utilise le mot *définition*) réelle qui limite leurs possibilités d'application.
- L'*algèbre arithmétique* traite de nombres abstraits exprimés dans une forme indéterminée. Les opérations de l'algèbre arithmétique sont celles de l'arithmétique, et elles sont soumises aux mêmes limitations.
- L'*Algèbre Symbolique* est une extension de l'algèbre arithmétique, dans la mesure où les lois de combinaison de ses symboles sont fixées, par convention, comme ayant les mêmes propriétés que les lois de combinaison des nombres. Les symboles opératoires de ce système représentent les opérations arithmétiques, et les symboles élémentaires représentent les nombres et les résultats des opérations.
- Un système de symboles généraux qui se composent selon des lois définies par une liste de propriétés. Dans un système de symboles généraux, les propriétés des lois n'ont pas à être prouvées, elles sont supposées (*assumed*).

L'algèbre est la science du raisonnement général au moyen d'un langage symbolique. Cette science donne le cadre général d'où se déduit un système particulier, l'Algèbre Symbolique, qui, dès lors, n'est plus une extension de l'arithmétique mais un cas particulier d'un langage symbolique général.

[388] Pont [2001], p. 112.
[389] Pont [2001], p. 117.
[390] Voir en particulier les chapitres 4 et 5 de la première partie.

14.2.3 Sources et sens de l'Algèbre Symbolique.

Dubbey [1978] a établi que le *Treatise* de Peacock présente une ressemblance frappante avec le manuscrit de Babbage [1821]. Becher [1980a] évoque une source commune: Woodhouse. Le *Treatise* n'est ainsi pas tant une irruption soudaine et sans lendemain de modernité, mais bien l'expression d'une pensée collective, celle de l'« École Algébrique Anglaise ».
Fisch [1999], ayant pris connaissance du manuscrit de Babbage, donne une nouvelle lecture du *Treatise* qui tend à faire de ce texte la réponse d'un homme « angoissé », écartelé entre deux positions extrêmes: d'une part celle de Frend qui rejette les quantités négatives, et d'autre part celle de Babbage qui propose de développer un système de signes détachés de toute signification. Il considère, et je suis d'accord avec lui, que les œuvres de Babbage et de Peacock se situent à des niveaux différents. Babbage dit ce que devrait être l'algèbre alors que Peacock dit ce qu'est l'algèbre. Pourtant Fisch relève que leurs visions de l'algèbre sont fort différentes. Les *Essays of the Philosophy of Analysis* ne laissent pas de place pour la *théorie des nombres* que Peacock considère comme une composante essentielle de l'algèbre. Il voit dans l'essai de Babbage une œuvre « de mathématique » et dans le traité de Peacock un « commentaire sur les mathématiques ». Contrairement à lui, je propose de lire l'œuvre de Babbage comme une œuvre de philosophie des mathématiques, illustrée d'exemples, et celle de Peacock comme une œuvre de mathématique (le *Treatise*), suivie d'un commentaire (le *Report*)[391].
Marie-José Durand-Richard relève le rôle central qu'occupe le *principe de permanence* dans l'œuvre de Peacock. Il reflète, selon elle, l'ambiguïté épistémologique de ce dernier qui d'une part cherche à légitimer les nouveaux concepts mathématiques issus d'un renversement de point de vue (les opérations occupent la première place dans l'algèbre et elles ont des propriétés opératoires qui leur permettent d'engendrer de nouveaux éléments) et qui d'autre part demande une garantie existentielle aux objets mathématiques. Ce double principe est là pour garantir la préexistence de lois de combinaison universelles. Il présuppose la naturalité de lois opératoires universelles. L'énoncé direct suppose la préexistence d'une Algèbre Symbolique et l'énoncé inverse permettrait de la découvrir[392]. Les lois sont découvertes par l'expérience dans un domaine restreint, celui de l'arithmétique, et transférées par le principe de permanence à un domaine général, l'Algèbre Symbolique. Ce principe révèle la position finaliste de Peacock qui croit que le monde est une création achevée. Que les lois de combinaison des opérations préexistent sert de légitimation implicite aux nouvelles quantités. Cela évite à Peacock la « rupture épistémologique qui lui permettrait d'assumer la liberté du mathématicien comme créateur potentiel d'un langage formel »[393].
Pourtant, même si l'on admet que Peacock défend une position réaliste et des visions finalistes du monde, il faut relever que toute connaissance repose sur la reconnaissance d'une permanence ou d'une invariance si l'on préfère. On généralise une chose en subsumant sous un seul concept les choses qui possèdent les *mêmes* qualités. On généralise une opération en subsumant sous le même concept les opérations qui ont les *mêmes* propriétés. Le principe de permanence des formes équivalentes est aussi l'expression du principe à la base du processus de généralisation à mettre en œuvre si l'on veut l'appliquer non à une chose, mais à une opération prise indépendamment des objets auxquels elle s'applique.
Il reste une question importante à examiner: pourquoi, alors que Babbage intitule son texte *Philosophy of Analysis*, Peacock écrit-il un *Traité d'Algèbre*? Quelle signification donner à cette nuance? Bien que les termes *analyse* et *algèbre* soient, au début du 19ème siècle, souvent

---

391 Fisch [1999], pp. 154-155, et p. 159. Leur différence de point de vue remonte à l'époque de l'*Analytical Society*.
392 Durand-Richard [2001], p. 466 et suivantes.
393 Durand-Richard [1999], p. 23.

employés l'un pour l'autre, je pense qu'il n'est pas indifférent que l'un parle d'*analyse* et l'autre d'*algèbre*.
Par *analyse*, Babbage entend une *méthode de raisonnement*, celle qui permet de raisonner « en remontant » de la propriété à l'objet. Il vise à étendre cette méthode de raisonnement, utilisée habituellement sur des nombres, à d'autres domaines des mathématiques. Cette méthode nécessite un langage symbolique *analogue* à celui de l'algèbre. Peacock cherche à fonder logiquement les *nouvelles quantités* de l'algèbre. L'*Algèbre Symbolique* est ainsi une algèbre particulière dans laquelle les opérations sont déterminées de telle sorte que ce système contienne l'arithmétique. Le *Treatise* n'est pas une œuvre qui apporte des résultats nouveaux en mathématique. Il s'agit d'une œuvre de synthèse, algébrique ainsi que l'indique Durand(-Richard) [1985], qui vise à présenter les éléments d'algèbre sous une forme logiquement cohérente, fondée sur des principes premiers et susceptible de légitimer les nombres négatifs et les nombres complexes en les déduisant d'un système de symboles et d'opérations symboliques.
En conclusion, les œuvres de Babbage et de Peacock ne se situent pas, selon moi, sur le même niveau, et ne traitent pas du même sujet. Elles ne sont pas en compétition l'une avec l'autre, bien au contraire. Peacock se sert de la philosophie de l'analyse exposée par Babbage pour donner un fondement aux nombres complexes et aux nombres négatifs. Il obtient un système opératoire particulier dans lequel il serait tentant de reconnaître la clôture algébrique des nombres. Il reconnaît la possibilité théorique de construire d'autres systèmes opératoires, mais il ne leur connaît pas d'interprétation naturelle.

14.3 W. R. Hamilton [1805-1865]: la Science du Temps Pur

W. R. Hamilton est un mathématicien dont l'œuvre est d'une grande importance. Sa *découverte* des quaternions en 1843, la première algèbre dont les objets ne sont pas des *nombres*, survient dans le cadre d'une recherche qui vise à donner un sens aux nombres complexes. La *création*[394] du système des quaternions marque une étape dans l'histoire des mathématiques. Cette « invention » fait dire à Helena Pycior en conclusion d'une thèse consacrée à ce mathématicien, que W. R. Hamilton, en ajoutant la « dimension imaginative et créative »[395] à l'approche symbolique de Peacock, a modifié la nature de l'algèbre. Pour Whittaker [1943], elle constitue le « moment suprême de l'histoire du symbolisme mathématique »[396], qui marque le début du « processus créatif » à l'origine des développements de l'algèbre linéaire (Benjamin Peirce [1809-1880]), des matrices (Cayley et James Joseph Sylvester [1814-1897]) et de la théorie des espaces vectoriels (Josiah Willard Gibbs [1839-1903] et Oliver Heaviside [1850-1925])[397].
La création des quaternions est ainsi reconnue comme l'une des premières manifestations de la *liberté* du mathématicien, concept central dans l'épistémologie « moderne récente ». Il est cependant étrange que W. R. Hamilton lui-même se fasse le défenseur d'une épistémologie des mathématiques traditionnellement réaliste, affirmant son « insatisfaction » devant des symboles dépourvus d'interprétation:

> "Since you like Peacock, seem to consider Algebra as a 'System of Signs' and of their combinations, somewhat analogous to syllogisms expressed in letters; while I am never satisfied unless I think that I can look beyond or through the signs to the things

---

394 J'utilise à dessein les deux termes de *découverte* et de *création* pour indiquer l'état de basculement devant lequel se trouvent W. R. Hamilton et ses contemporains. W. R. Hamilton a le sentiment d'une découverte. Pycior [1976], comme la plupart des mathématiciens du 20ème siècle, parle de *création*.
395 Pycior [1976], p. 201.
396 Whittaker [1943], p. 96.
397 Voir aussi Crowe [1994], (chap. 6), qui présente Gibbs et Heaviside comme des continuateurs de W. R. Hamilton, bien qu'ils se soient eux-mêmes présentés comme des dissidents du groupe des quaternionistes.

> signified. I habitually desire to find or make in Algebra a system of demonstrations resting at last on intuitions, analogous in some way or other to Geometry as presented by Euclid – for I own that Geometry itself might be presented in a merely logical or symbolical form, though I for one would not thank him who should so present it." Lettre de W. R. Hamilton à John Graves du 11 juillet 1835, in Graves [1975 (1882-1889], vol. 2, p. 143.

W. R. Hamilton se heurte très tôt au problème des *quantités impossibles*. En 1828, il est d'avis que « toute la logique de l'analyse algébrique doit être révisée »[398]. Il importe, dit-il, qu'on explique au moyen de « définitions strictes » le « vrai sens et esprit des raisonnements […] dans lesquels les quantités impossibles sont utilisées ». C'est ce à quoi il travaille dès les années 1830[399].
W. R. Hamilton se définit lui-même comme un mathématicien « théorique », qui ne se satisfait pas d'expressions « logiquement » correctes ou « grammaticalement » bien formées[400]. Il confie à son ami De Vere son désaccord profond avec ses contemporains:

> "I differ from my great contemporaries[401], my brother-bands not in transient or accidental, but in essential and permanent things: in the whole spirit and view with which I study Science." Lettre de W. R. Hamilton à De Vere, 1831, in Graves [1975 (1882-1889)], vol. 1, p. 519.

Le statut obscur des nombres complexes ne le satisfait pas. Mais les principes de l'algèbre tels que formulés par Peacock, qui fournissent « un système d'expressions », non « un système de *vérités* », ne le satisfont pas davantage. Les résultats d'une telle algèbre n'ont pas d'autre « validité » qu'une « cohérence logique ». Dans ces conditions, l'algèbre peut être considérée comme un langage ou un art, dit-il, non comme une science[402].
W. R. Hamilton se propose de fonder l'algèbre comme science, c'est-à-dire qu'il entend donner une interprétation aux expressions algébriques et ainsi transformer le système d'expressions symboliques en un système de *vérités* qui concernent des existences réelles. Il présente le résultat de sa tentative dans deux articles. Dans le premier, « Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples », qu'il lit en 1833 devant la *Royal Irish Academy*, il présente les nombres complexes comme des couples de nombres. Il définit les opérations d'addition et de multiplication des couples, et démontre l'existence de la racine carrée du couple (-1,0). En 1835, ayant approfondi ses réflexions, il soumet son deuxième texte à la *Royal Irish Academy,* « Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time ». En 1837, les deux articles sont publiés dans les *Transactions* de la *Royal Irish Academy,* augmentés d'une introduction (« General Introductory Remark »).
La théorie des fonctions conjuguées a été largement remaniée depuis sa lecture en 1833[403]. Je présente ci-après un résumé de l'article de 1837, dans un langage actualisé. Je le présente en Annexe 2 de manière plus détaillée et dans les notations de W. R. Hamilton. Je termine en discutant des positions philosophiques de W. R. Hamilton au sujet de la science, et de ses liens avec les algébristes de Cambridge.

---

398 Lettre de W. R. Hamilton à John Graves, 1828, in Graves [1975 (1882-1889)], vol. 1, pp. 303-304.
399 W. R. Hamilton [1837 (1835)] mentionne que son idée de « couples » a pour origine les « résultats symboliques » que Graves [1829] obtient sur les logarithmes des nombres imaginaires. La lecture du traité de Warren [1828] le met probablement sur la voie de l'intuition du temps, comme substitut à l'intuition de l'espace.
400 Voir introduction Partie 3, note 15.
401 Il vise ici tout particulièrement Peacock et Graves.
402 W. R. Hamilton [1837 (1835)], pp. 293-297.
403 Pycior [1976].

14.3.1 Remarques générales sur le texte

Les deux textes qui constituent l'article de 1837 sont le résultat d'une tentative de développer les idées qui nous viennent de l'intuition du *temps* (à savoir nos *idées* d'ordre et de progression continue, d'où dérivent nos conceptions de *nombre*), en une « science pure et indépendante ». W. R. Hamilton y explique sa conviction que l'algèbre, en tant que science, doit être la *science du Temps Pur*.
La lecture de la *Critique de la Raison Pure*, dans laquelle Kant suggère l'existence d'une *science du Temps Pur*, se dressant à côté de la géométrie, *science de l'Espace Pur*, le confirme dans sa conviction que la *science du Temps Pur* existe et que cette science ne peut être que l'algèbre. Précisons toutefois que l'idée de fonder l'algèbre sur l'intuition du temps ne lui est pas venue à la lecture de Kant, qu'il n'a découvert qu'en 1834. Mais il a trouvé un encouragement à publier son essai en découvrant que ses idées coïncidaient avec celles du philosophe de Königsberg[404].
Dans les « General Introductory Remarks », W. R. Hamilton rappelle que les grandes découvertes en algèbre sont connectées à l'idée du temps:

> "The History of Algebraic Science shows that the most remarkable discoveries in it have been made, either expressly through the medium of that notion of *Time*, or through the closely connected (and in some sort coincident) notion of *Continuous Progression*: It is the genius of algebra to consider what it reasons on as *flowing*, as it is the genius of Geometry to consider what it reasoned on as *fixed*." W. R. Hamilton [1837 (1835)], p.295.

Euclide et Apollonius tenaient les figures géométriques pour des objets existant depuis toujours et pour toujours, formés et fixés, immobiles et immuables, affirme-t-il. Ils en étudiaient les propriétés, qu'ils considéraient comme leurs caractéristiques intrinsèques. Newton a apporté une révolution en Algèbre en fondant la notion de fluxion sur l'intuition du temps[405].

> "It [the Method of Tangents] regards the curve and line not as *already* formed and fixed, but rather as *nascent*, or in process of generation: and employs, as its primary conception, the thought of a *flowing point*. And, generally, the revolution which NEWTON made in the higher parts of both pure and applied Algebra, was founded mainly on the notion of *fluxion*, which involves the notion of *Time*." W. R. Hamilton [1837 (1835)], pp. 295-296.

La position de Lagrange qui, jugeant la notion de *temps* étrangère aux mathématiques, réduisait la théorie des fluxions à « un système d'opérations sur des symboles », ne convainc pas W. R. Hamilton. Lagrange, relève-t-il, en définissant l'algèbre comme la science des fonctions, introduit sans s'en apercevoir l'idée de *temps*. En effet, la notion de *fonction* est essentiellement une notion de « loi connectant un changement avec un changement »[406], et l'idée de *variation* d'une quantité, centrale dans la théorie des fonctions de Lagrange, repose sur la conception de *progression continue*. W. R. Hamilton remarque que là où il y a changement ou progression, l'idée du temps est contenue.
W. R. Hamilton insiste sur le fait que la notion de temps s'est souvent introduite dans les travaux des algébristes:

> "Among professed Algebraists, few have failed, indeed, to introduce some passing illustrations from the thought of Time; and Newton's theory of Fluxions was mainly founded on that thought: but for want of perceiving what I believe to be true respecting the nature of Algebra itself, the fashion has been to blame that theory of

[404] Crowe[1994], pp. 24-26.
[405] W. R. Hamilton signale que Newton eut un précurseur: Napier, l'inventeur des logarithmes.
[406] W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 296.

> Fluxions as bringing in a foreign element; and among those who reason at all upon the subject, opinions seem to be of late converging to this point, that Algebra is merely a Language, and not in any proper sense a counterpart of Geometry; though, out of courtesy, they call it still a Science." Lettre de W. R. Hamilton à Edgeworth du 2 juin 1835, in Graves [1975 (1882-1889)], vol. 2, pp. 146-147.

J'ai déjà évoqué dans la deuxième partie de ce travail les difficultés posées aux mathématiciens par la notion de temps. La position de W. R. Hamilton qui place le temps au cœur des mathématiques alimente la réflexion sur cette question. Je reviendrai sur ce point dans la conclusion.

14.3.2 Résumé de l'article de 1837

Le « Preliminary Essay » comprend une centaine de pages. Il est divisé en trente-six sections. Bien qu'écrit après la « Theory of Conjugate Functions », il en constitue manifestement l'introduction. L'essai comprend deux parties: dans la première, W. R. Hamilton donne la liste des concepts qui proviennent de l'intuition du temps; dans la seconde, il construit un système de signes dans lequel on reconnaît l'ensemble des nombres réels.
L'article peut se résumer ainsi (je donne une présentation plus détaillée dans l'Annexe 2):

- W. R. Hamilton se donne *a priori* un ensemble d'éléments (M), qui représentent l'intuition que nous avons des *moments*. Il définit l'ensemble des couples d'éléments de M, ($\Sigma = \mathrm{M} \times \mathrm{M}$). Ces deux ensembles sont supposés munis d'un ordre total et strict; M est supposé ouvert et partout dense. Ces exigences traduiraient les intuitions qui nous viendraient du temps. Il définit sur Σ une relation d'équivalence entre les couples de moments (~), et il considère l'ensemble quotient ($\widetilde{\Sigma}$). Les éléments de cet ensemble s'interprètent comme des *durées* (pp. 299-308).
- Il associe à tout élément de $\widetilde{\Sigma}$ une *translation* (*act of transition*) dans l'espace des moments. Il interprète ces opérations de translation en termes d'*actes de pensée*. Je note Θ l'ensemble des *translations* (pp. 308-313).
- Il définit une loi d'addition sur Θ et il démontre que Θ satisfait aux axiomes d'un groupe additif (loi de combinaison interne, associativité, existence d'un élément neutre, existence d'une opération inverse, commutativité). Il relève que l'addition des durées a les mêmes propriétés que l'addition des translations**.** En termes actuels, on dirait que Θ est *isomorphe* à $\widetilde{\Sigma}$ (pp. 314-320).
- En itérant une translation *a*, on génère une suite de translations, qu'on note: -a, 0a, 1a, 2a, etc... Chacun de ces signes (par exemple « 2a ») désigne une translation. Ces signes sont des signes d'ordinaux, ils désignent la première translation de la suite, la deuxième, etc… (*zero-multiple of the base a, first multiple*, etc…). Or, on peut aussi les concevoir comme des signes composés d'un multiplicateur et d'une translation unité (*as formed from the base a, by multiplying that base by the several whole (cardinal) numbers*). Les signes -1, 0, 1, 2, etc… sont alors des signes cardinaux (*positive cardinals, contra-positive cardinals, null cardinal* (p. 324)). De cette transition conceptuelle entre les signes ordinaux et les signes cardinaux, résulte la construction d'un ensemble de *nombres entiers (integer number)*. Il définit sur cet ensemble une addition et une multiplication, à partir de l'addition des translations (pp. 321-333).
- Il définit l'opération de division (inverse de la multiplication) dans Θ. Le rapport de deux transitions est défini comme un *scalaire (ratio)*. Je note *K* l'ensemble des ratios *rationnel*s et *irrationnels* générés par la répétition de la multiplication et de la division. L'addition et

la multiplication définies sur les *entiers* se transporte naturellement à *K*. *K* est un corps de *scalaires* isomorphe aux réels, et Θ a la structure d'un *K-espace vectoriel* (de dimension 1). Il montre que les axiomes d'espace vectoriels sont satisfaits (pp. 333-348)[407].

- W. R. Hamilton termine en montrant qu'il n'y pas dans *K* de racine pour les *ratios* négatifs.

Le deuxième article, « Theory of Conjugate Functions », est plus court, puisqu'il ne compte qu'une trentaine de pages. Il y présente les nombres complexes comme des couples de durées. Il définit pour les couples de durées une addition et une multiplication, une multiplication extérieure du corps *K* sur $\tilde{\Sigma}\times\tilde{\Sigma}$. Il obtient ainsi le corps des complexes comme *K*- espace vectoriel de dimension 2, où *K* est le corps des réels.
La création du système des quaternions, en 1843, se situe dans la continuation de cette approche.
Finalement, la démarche de W. R. Hamilton s'apparente à une construction logique des nombres. Cette construction manque de rigueur, certes, elle contient même des erreurs. W. R. Hamilton était toutefois étonnamment près de définir une structure d'algèbre[408].

14.3.3. Sources et sens de la science du temps pur

Je ne discute pas ici de la rigueur de la construction de W. R. Hamilton, ni des analyses et commentaires que ce texte a suscités, qui tous reconnaissent que cette construction n'est pas satisfaisante[409]. L'importance de ces deux textes vient de ce qu'ils participent d'une réflexion philosophique sur les concepts de nombre et d'opération et sur la nature de la science. Je discute ci-dessous des implications épistémologiques de la construction présentée par W. R. Hamilton ainsi que de ses positions philosophiques au sujet de la science.

Implications épistémologiques

W. R. Hamilton a cherché à *construire* les nombres réels et les nombres complexes, en se fondant sur une intuition fondamentale, l'idée d'*ordre*, dérivée de l'intuition du temps. L'intuition justifie les principes premiers. Il procède ensuite selon une démarche purement logique.
Des propriétés des relations entre deux moments, il déduit un système d'opérations (*actes de transition*) qui possède une structure de groupe. Par une abstraction de second niveau – il sépare l'acte de transition de l'objet de la transition (les moments) –, suivie d'une réduction en classes d'éléments équivalents, il obtient un système qui a la structure de l'algèbre des nombres réels.
W. R. Hamilton a ainsi séparé la translation (*act of transition*) de l'objet de la translation *(moment)*. Sa démarche est similaire à celle de Galois qui sépare les permutations de l'ordre initial pour définir une substitution. On reconnaît dans sa construction la notion de *vecteur*.
Traditionnellement, la relation $a+b=c$ est considérée comme une expression de nature prédicative. La relation de l'égalité symbolise la copule *être*, $a + b$ et c jouent le rôle

---

407 Les expressions *scalaire* et *vecteur* seront introduites par W. R. Hamilton dans sa théorie des quaternions. Dans l'article de 1837, il utilise le terme de *ratio* et *step* ou *actes de transition*. J'utilise néanmoins les expressions *corps de scalaire* et *espace vectoriel*, en anticipant sur les développement ultérieurs.
408 Mathews [1978] a considéré cette démarche comme une tentative « d'arithmétisation de l'analyse ». Il conclut que W. R. Hamilton a échoué dans son projet de construction logique des nombres réels. Il a en effet manqué la notion de coupure, introduite par Dedekind, qui assure un ordre sur les réels, et n'a pas introduit d'axiome d'induction complète. Voir aussi Hankins [1980], p. 266.
409 Je renvoie à Mathews [1978] qui fait une revue des articles commentant cette construction, et à Hankins [1980], chapitre 17 à 19.

respectivement du *sujet* et du *prédicat*. W. R. Hamilton en définissant la relation $A+b=C$ donne des rôles différents aux entités de la relation. Il distingue l'*objet* de la pensée (le *moment A*), l'*acte* de la pensée (l'*acte de transition +b*) et le *résultat* de l'acte (le *moment C*). Il parvient à donner à l'expression $A+b=C$ une signification dynamique: A et C sont des objets de même nature (des *moments*), $+b$ est le signe d'un *acte mental (mental act)*. L'interprétation du signe de l'égalité en est affectée. Ce signe *attribue* un référent (conceptuel) au symbole C mis pour désigner le résultat de l'acte de la pensée[410].
L'écriture fonctionnelle explicite le rôle différent que jouent les entités symbolisées dans cette formule. En effet, dans une expression telle que: $T_b(x) = x + b$, les rôles d'objet, de résultat et d'opération sont explicitement indiqués. L'*opération* acquiert ainsi une identité et une autonomie que l'écriture traditionnelle ne peut lui reconnaître.
W. R. Hamilton reconnaît à l'*opération* mathématique un statut d'existence comme entité distincte et de l'objet initial et du résultat. Il lui fait correspondre l'opération de l'esprit qui fait passer la pensée d'un moment à un autre moment.

La philosophie des sciences de W. R. Hamilton

La philosophie des sciences de W. R. Hamilton est un réalisme direct et critique, caractérisé par les points suivants:

- La science est une construction de l'esprit. Nous avons connaissance du monde extérieur par l'intermédiaire des sens et de notre esprit qui classe et organise nos sensations.
- Les sciences mathématiques sont des sciences de raison pure. Elles traduisent un accord de la pensée avec elle-même. Les mathématiques appliquées traduisent un accord entre nos pensées et les phénomènes[411].
- Les lois de la nature sont l'expression des régularités que notre esprit perçoit lors de nos expériences sensorielles. Elles disent quelque chose de la nature, grâce à une harmonie d'origine divine[412].

W. R. Hamilton décèle, dans la dynamique, deux sciences « mystérieusement et merveilleusement connectées en conséquence de l'union ultime du subjectif et de l'objectif en Dieu »[413]: la première science est objective, on la découvre par l'observation et la généralisation des faits; la deuxième est subjective et métaphysique, déductible par la méditation à partir de nos idées *a priori* de Temps, d'Espace et de Force.
La philosophie de W. R. Hamilton coïncide avec celle de Whewell sur la question de la construction de la science. Tous deux sont d'accord sur les deux composantes objective et subjective, à une nuance près que souligne Hankins: Whewell, en introduisant la notion de *colligation* des faits, définit non pas deux sciences, mais une science avec deux sources. Selon Fisch [1991], W. R. Hamilton est l'un des premiers à parler explicitement de deux sciences. Il ajoute que cette notion, centrale dans la philosophie de la nature de Kant, est «dans l'air», bien que Kant ne soit pas encore très connu en Grande-Bretagne[414]. Or, l'idée des deux sciences est explicitement présente dans les écrits de Stewart[415]. Soulignons que

---

[410] Voir Partie I, chapitre 7.4.
[411] Il est amusant de retrouver sous la plume de W. R. Hamilton des expressions employées par son homonyme écossais, Sir William Hamilton. Voir Partie I, chapitre 4.3
[412] Hankins [1980], chapitre 7.
[413] Lettre de W. R. Hamilton à Whewell du 25 mai 1833, in Graves [1975 (1882-1889)], vol. 2, pp. 48-49.
W. R. Hamilton fait la connaissance de Whewell en 1832. Ils se découvrent une profonde parenté de pensée. Ils resteront en contact étroit durant quelques années. Cf. Fisch [1991], pp. 63-67.
[414] Fisch [1991], p. 66.
[415] Voir partie 1, chapitres 4 et 5.

W. R. Hamilton a lu les *Philosophical Essays* de Stewart durant l'année 1826[416]. Il dit en avoir retiré grand profit[417].

14.4 Conclusion

Les trois essais présentés dans ce chapitre visaient à donner un fondement aux nombres complexes. Leurs auteurs ont adopté des approches philosophiques différentes.
Warren a choisi l'approche *technique*. Il donne des règles pour opérer avec les nombres complexes. Il justifie ces règles en s'appuyant sur une représentation géométrique. Il juge le modèle géométrique adéquat pour justifier les opérations de l'algèbre. Les réactions sont négatives. Il n'a pas convaincu.
Peacock a choisi l'approche *philologique*. Influencé par la vision de Babbage, il applique au domaine du nombre le mode de raisonnement *analytique* auquel les Anciens ont eu recours pour l'étude des propriétés des courbes. Il *invente* une *Algèbre Symbolique*, prônant, semble-t-il, une liberté théorique dont il ne fait pas usage en pratique. Les réactions sont peu nombreuses et plutôt négatives. De Morgan, l'un des premiers à applaudir cette exposition des principes de l'algèbre, changera d'avis quelques années plus tard. Whewell, fervent analyste dans les années 20, se fait quelques années plus tard le défenseur d'une position traditionnelle[418].
Parmi les critiques formulées à l'encontre de l'algèbre de Peacock, je retiens celle de Osborne Reynolds [?-?][419], car elle explicite la difficulté épistémologique que soulève ce problème. Pour Reynolds, on ne peut pas opérer *en général.* Il n'y a rien de commun dans les opérations qui puisse se généraliser. L'opération en elle-même ne peut être que particulière, elle n'existe pas sans un objet déterminé sur lequel opérer, et un sujet qui opère, sans un lieu et un moment pour l'opération. Cette position rappelle celle de Berkeley, pour qui l'idée de mouvement ne peut être séparée de l'idée d'un corps, d'un temps et d'un lieu[420].
A l'opposé de Reynolds, Davies Gilbert [?-?] propose « quelques observations sur la nature de ce qu'on a appelé les quantités Négatives et Imaginaires » qui devraient lever certaines « obscurités » entourant ces *quantités*[421]. Pour lui, les *quantités imaginaires* sont des créations, fruits de « définitions arbitraires »[422]. Les propriétés de ces objets ne leur sont pas inhérentes, mais données par définition, « au plaisir » de celui qui les définit. Gilbert [1831] compare le débat sur les nombres complexes aux disputes entre les réalistes et les nominalistes. Si l'on croit, dit-il, que les conceptions de l'esprit (abstractions, généralisations) sont des « formes substantielles », « possédant une existence indépendante de l'intelligence qui les contemple », il est absurde de croire à l'existence des *quantités imaginaires*. Mais si l'on admet que les « classifications, les abstractions, les généralisations » sont de « simples créatures de la faculté de raisonner, n'existant nulle part hors de l'esprit », alors on accepte l'existence d'entités sans substance. Cette position nominaliste, est, selon Gilbert, devenue commune parmi ceux qui étudient les « facultés de l'esprit humain ». Ce témoignage confirme

---

[416] Les *Philosophical Essays,* publiés en 1810, contiennent un résumé des idées exposées dans les deux premiers volumes des *Elements*.
[417] Graves [1975 (1882-1889)], vol. 1, pp. 208-209.
[418] Pycior [1982] présente quelques-unes des réactions négatives qu'elle a découvertes dans des documents non publiés. Pycior [1983] discute du changement de position de De Morgan.
[419] Anonymous [1837], [Osborne Reynolds]*, Strictures on Certain Parts of `Peacock's Algebra'*. Ce document est présenté et discuté dans Pycior [1982], pp. 402-407.
[420] Voir préambule.
[421] Gilbert [1831], « On the Nature of Negative and Imaginary Quantities », est lu le 18 novembre 1830, six mois après la parution du *Treatise* de Peacock. Il ne fait pourtant aucune allusion à l'Algèbre Symbolique. Il est difficile de croire que Gilbert, alors président de la *Royal Society*, en ait ignoré la parution.
[422] Gilbert [1831], p. 93.

que la position nominaliste dont Stewart s'est fait le défenseur est partagée par les hommes de Cambridge. Il continue en expliquant que le résultat d'une opération impossible à réaliser est une *quantité en puissance* qui existe à l'état « d'énergie », prête à revenir à l'état de *quantité réelle* si l'opération inverse lui est appliquée. L'opération est ainsi passée au premier plan.
W. R. Hamilton a adopté l'approche *scientifique*. Opposé à l'idée *d'une science de symboles vides de sens*, il demande que l'algèbre produise des connaissances concernant des éléments de la réalité. Le *Preliminary Essay* ne sera pas mieux reçu que le *Treatise* de Peacock. Dans une lettre à De Morgan, W. R. Hamilton explique la réaction négative à l'égard de son essai en disant que le «jealousy-exciting name of Time »[423] n'est pas acceptable pour fonder une théorie mathématique. Veut-il dire par là que la mathématisation de la notion de temps pose des difficultés profondes?

[423] Lettre de W. R. Hamilton à De Morgan, 1841, in Graves [1975 (1882-1889)], vol. 3, p. 247.

Chaptire 15. Calcul des opérations et algèbre

A partir de 1835, se développe autour de la *méthode de séparation des symboles* une série de travaux qui tendent à généraliser l'algèbre des nombres, le calcul différentiel et le calcul des différences finies. Ce nouveau domaine a pour nom le *calcul des opérations*[424].
Murphy, Gregory, De Morgan, Boole et Cayley, appartiennent à l'« École Algébrique Anglaise ». Ils ont contribué de manière importante au développement de ce domaine. J'ai choisi de présenter un article de chacun d'eux. Chacun de ces articles marque une étape dans le processus d'abstraction de la notion d'*opération* et de *loi de combinaison* et participe de la recherche de cette abstraction de second niveau dont Vuillemin fait le caractère propre du nouveau paradigme.
Je présente pour chacun des articles un résumé, l'exposé succint des points essentiels à mon propos et un commentaire. La présentation est rapide et ne vise pas à donner une vision complète des travaux mathématiques de cette période, ni du contexte dans lequel ils se développent[425]. Je débute par l'exposé de l'article de Murphy [1837] (« First Memoir on the Theory of Analytical Operations »). Je présente ensuite les réflexions de Gregory [1840 (1838)] (« On the Real Nature of Symbolical Algebra ») sur l'Algèbre Symbolique et le calcul des opérations. Gregory définit le concept de *classes d'opérations*, notion proche de l'idée de *structure*. De Morgan [1841-1847] (« On the Foundation of Symbolical Algebra I - IV ») à l'instar de Gregory, définit l'algèbre comme la *science des opérations*. Boole [1844] (« On a General Method in Analysis ») présente le calcul des opérations sous une forme générale. Il établit un lien avec le *calcul des fonctions* de Babbage. Je discute pour terminer de l'article de Cayley [1854] (« On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation $J^n = 1$ ») dans lequel se trouve la définition d'un *groupe algébrique abstrait*. Pour terminer, je discute de la plausibilité de l'influence du philosophe Dugald Stewart sur ces *algébristes*.

15.1 Robert Murphy [1806-1843]: les operations analytiques

L'article intitulé « First Memoir on the Theory of Analytical Operations » paraît dans les *Philosophical Transactions* en 1837. Il s'agit d'un long mémoire dans lequel Murphy présente le *calcul des opérations* comme un système de symboles abstraits qui se combinent selon des lois définies par leurs propriétés. Malgré son titre qui suggère qu'il s'agit d'un traité d'*analyse*, ce mémoire appartient au domaine de l'*algèbre*. De ce point de vue, il est remarquable. J'en donne ci-dessous un résumé. Une présentation détaillée se trouve en Annexe 3.

[424] Voir introduction partie 3. Koppelman [1971] a attiré l'attention sur l'importance des recherches dans ce domaine en Grande-Bretagne et sur leur relation avec l'émergence du concept d'*algèbre abstraite*. Elle donne une bonne revue des travaux dans ce domaine.
[425] Relevons que De Morgan et Gregory étudièrent avec Peacock et que De Morgan enseigna à Lady Lovelace, amie et assistante de Babbage. Pour une analyse contextuelle de ces travaux, je renvoie en particulier à Durand-Richard [1999] et [2000]. Voir aussi Koppelman [1971], Panteki [1992], [2000] pour une présentation technique des travaux de ces mathématiciens.

15.1.1 Résumé de l'article de 1837

Le vocabulaire employé par Murphy nécessite tout d'abord d'être expliqué. Il utilise le mot *opération* (*operation*) pour désigner ou un opérateur, ou une fonction, ou l'addition ou la multiplication sur les nombres. Lorsque j'utilise le terme *opération*, c'est dans le sens vague que Murphy donne à ce terme. Dans l'Annexe 3, j'utilise un vocabulaire actuel.
L'article est composé de deux parties. Dans la première partie, Murphy étudie un système formé de quatre *opérateurs* de base définis pour des fonctions numériques (il utilise le terme *operation*) et de deux lois de combinaison: l'addition et la composition. Ces deux lois font l'objet d'une définition. L'addition de deux opérateurs est définie à partir de l'addition des fonctions. La composition est la simple application successive des *opérateurs*. Les nouveaux *opérateurs* générés sont inclus dans le *calcul.* Il définit les propriétés de *distributivité* et de *linéarité*, puis un *produit extérieur* (c'est-à-dire multiplication par un scalaire) sur l'ensemble des *opérateurs*.
Dans la deuxième partie de l'article, il se place dans un contexte général où les symboles utilisés représentent des *opérateurs linéaires* indéterminés. Il démontre que la composition, l'addition et la multiplication par un scalaire d'*opérateurs linéaires* sont des *opérateurs linéaires*. Il affirme qu'une série infinie d'*opérateurs linéaires* est linéaire. Il définit la commutativité et donne des exemples d'*opérateurs* non commutatifs. Une sorte de propriété d'associativité est mentionnée (sans être nommée). Il définit l'*opérateur* inverse pour la loi de composition. La question de l'existence d'un *opérateur* inverse n'est pas abordée. L'unicité de l'*opérateur* inverse est associée à la cardinalité du noyau de l'*opérateur* direct.

L'opération: un processus analytique

L'article débute par des définitions et des explications des notions introduites. L'*opération* est définie comme un *processus analytique*, dans lequel Murphy reconnaît trois éléments: le *sujet* de l'opération, *l'opération* et le *résultat* de l'opération. Les mots utilisés par Murphy rappellent ceux qu'avait choisis Reid pour décrire le processus de la pensée. Ce dernier reconnaissait de même trois éléments: le *sujet*, l'*opération* et *l'objet* de l'opération. Pourtant, si tous deux ont dénombré trois éléments dans le processus qu'ils étudient, les trois éléments de Reid ne correspondent pas à ceux de Murphy. Le *sujet* chez Reid est le principe actif, le sujet au sens grammatical, ce qui commande l'action, c'est-à-dire l'esprit. Chez Murphy, le *sujet* est ce qui est assujetti à l'action, c'est-à-dire ce sur quoi porte l'action. Ce que Murphy appelle *sujet*, Reid l'appelait l'*objet* de l'opération. Quant au *résultat de l'opération*, c'est ce que Reid se refuse à nommer afin d'éviter le problème du réalisme indirect. L'élément central du processus, l'*opération*, est ce dont tous deux ont noté l'existence. Le résultat d'une *opération* est dit « connecté à l'opération et à son sujet » par le signe de l'égalité. Murphy adopte dès lors une notation originale. Il indique le sujet en premier, puis l'opération, symbolisée par un caractère littéral (de l'alphabet courant ou de l'alphabet grec):
$[x^n]\mathrm{y} = (x+h)^n$. Il respecte ainsi l'ordre syntaxique courant (sujet-verbe-prédicat).
L'asymétrie de la relation fonctionnelle entre l'opérateur et son argument est indiquée par la présence des crochets.

15.1.2 Commentaire

Murphy a procédé à une généralisation du calcul des différences, du calcul différentiel et de l'algèbre ordinaire (des nombres). Tout opérateur linéaire s'écrit comme une série infinie des puissances des opérateurs de la différentielle. La théorie des opérations analytiques apparaît comme une réplique de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, à un niveau de

généralité supérieur: aux fonctions définies par une série de fonctions dérivées, il substitue *des opérateurs linéaires*, définis par une série d'opérateurs *dérivés.*
Cet article est décevant si on le considère sur le plan de l'analyse. En effet, Murphy ne se préoccupe pas de la convergence des séries infinies qu'il manipule. Il est par contre remarquablement intéressant pour son degré de généralité algébrique. La théorie des opérations analytiques est une construction qui peut être qualifiée d'*algèbre abstraite*. Le calcul des opérations y apparaît comme une ébauche de ce qu'on a l'habitude de nommer l'*algèbre linéaire*[426].
La présentation de Murphy est exemplaire dans la mesure où elle montre la profondeur de la difficulté de l'entreprise des *algébristes*. La difficulté que le lecteur du début du 21ème siècle rencontre à lire les textes de cette époque provient de ce que rien ne l'aide à distinguer les niveaux de généralité auxquels se situent les symboles: arguments, fonctions et opérateurs sont désignés du même nom de *opération*. L'application d'une fonction à un argument ou d'un opérateur à une fonction est considérée sur un même plan que la composition de deux opérateurs ou de deux fonctions. Murphy, bien qu'il s'efforce de préciser les termes et les notations qu'il emploie, ne parvient pas à distinguer ces concepts.

15.2 Duncan Gregory [1813-1844] : nature de l'Algèbre Symbolique

Sous le titre « On the Real Nature of Symbolical Algebra », Gregory propose une réflexion métamathématique. Cet article est lu en 1838 devant la *Royal Society of Edinburgh* et paraît en 1840 dans les *Transactions*. Il s'interroge sur la nature de *l'Algèbre Symbolique*, un sujet encore entaché d'« obscurités »[427]. Il ne prétend pas apporter une contribution nouvelle, mais un éclairage nouveau et plus général. Il se situe dans la continuité de Peacock, se proposant d'améliorer la présentation des principes fondamentaux de l'*Algèbre Symbolique*. Il regrette que le travail de Peacock ait si peu retenu l'attention.

15.2 1 Résumé de l'article de 1838

L'Algèbre Symbolique est présentée comme un système de symboles qui se combinent selon une loi déterminée par certaines propriétés posées *a priori*. Elle découle de la *méthode de séparation des symboles d'opération des symboles de quantité*. L'arithmétique et la géométrie sont des exemples d'algèbre dont les symboles ont été « interprétés ».
Gregory formule le principe fondamental sur lequel l'Algèbre Symbolique repose: les *identités symboliques* qui se déduisent des seules propriétés des lois de combinaison des symboles sont des identités (ou équivalences) formelles universelles, c'est-à-dire qu'elles se retrouvent dans tout système opératoire qui possède les mêmes lois de combinaison. Il s'agit d'une autre formulation d'un principe de *permanence des formes équivalentes*. Gregory précise encore que la recherche des théorèmes énonçant des relations que l'on peut établir à partir des propriétés des lois de combinaison des symboles constitue une branche des mathématiques: l'*Algèbre Symbolique*.
L'un des éléments importants de la réflexion de Gregory est, me semble-t-il, la notion de *classes d'opérations:* un système de symboles (désignant des opérations) qui se combinent selon une loi déterminée par ses seules propriétés. Les théorèmes démontrés pour une *classe d'opérations* se transposent sans démonstration supplémentaire à tout système de symboles qui se combinent selon les mêmes lois.

---

[426] Koppelman [1971], p. 196.
[427] Gregory [1838], p. 208.

15.2.2 Exposé de l'article

Comme chez Murphy, le terme *opération* est utilisé d'une manière vague. Gregory dit avoir choisi ce terme plutôt que le terme de *quantité* pour rendre son propos plus général, le terme *quantité* étant trop lié à l'idée de *nombre*[428]. Il prend pour exemple d'*opérations* soit des fonctions numériques, soit des transformations géométriques.
Gregory définit l'*Algèbre Symbolique* comme la « science qui traite des lois de combinaison des symboles », et il ajoute que cette science est issue de la *méthode de séparation des symboles d'opération et de quantité*. Il introduit le concept de « classe d'opérations », terme qui désigne un système formé d'un *ensemble* (*family*, p. 209) de symboles et d'une ou plusieurs lois de combinaison des symboles. Les propriétés des lois de combinaison suffisent à caractériser la classe.
Alors que pour Peacock la relation entre arithmétique et Algèbre Symbolique est une relation d'inclusion (l'arithmétique est contenue dans l'Algèbre Symbolique), pour Gregory, il s'agit d'une relation de particulier à général. On passe de l'arithmétique à l'Algèbre Symbolique non par extension de l'ensemble des nombres, mais par un processus de « généralisation par indétermination ». L'Algèbre Symbolique est un système opératoire dans lequel les symboles qui se combinent selon les mêmes lois que les nombres. Pour Gregory, l'interprétation des symboles est sans importance dans le cadre de l'Algèbre Symbolique. L'arithmétique est une Algèbre Symbolique interprétée, c'est-à-dire que les symboles ont une signification [18]. Plusieurs interprétations peuvent être données d'une même « classe » de symboles.
L'expression « une même loi de combinaison » que Gregory utilise, quand bien même il s'agit de combiner des symboles de nature *différente*, pose un problème qui n'est pas sans parenté avec le problème déjà rencontré pour l'expression un *même acte*, un *même mouvement* ou une *même expérience*. La loi, le mouvement, l'acte ou l'expérience sont dits les *mêmes* parce qu'ils ont les *mêmes propriétés*. La *loi* est érigée en objet de pensée autonome sur la base de ses propriétés et acquiert ainsi un statut d'entité *générale abstraite*. On reconnaît là le processus de *thématisation*.
Gregory donne une liste de propriétés qui caractérisent la manière dont deux symboles d'opérations f et F se combinent:

1. Les opérations *périodiques* (*circulating*) et *conjuguées* (*reproductive*)[429]:

   $FF(a) = F(a)$, $Ff(a) = f(a)$, $ff(a) = F(a)$, $fF(a) = f(a)$.

   Deux exemples sont donnés, l'un l'arithmétique, et l'autre géométrique:
   - la multiplication par -1 et la multiplication par $+1$,
   - les rotations de 360° et de 180°.
2. Les opérations *distributives* et *commutatives:*

   $f(a) + f(b) = f(a+b)$ et $ff'(a) = f'f(a)$.
3. Les opérations *index* (par exemple les fonctions puissance):

   $f_m(a) f_n(a) = f_{m+n}(a)$ et $f_m f_n(a) = f_{mn}(a)$.
4. Les opérations « logarithmiques »:

   $f(x) + f(y) = f(xy)$.
5. Les opérations « trigonométriques »:

[428] Gregory [1839], p. 1. Il est usuel en Grande-Bretagne de désigner sous le nom *opération* aussi bien les nombres considérés comme des multiplicateurs potentiels, ou toute fonction numérique, ou les opérateurs de différence finie ou même la différentielle.
[429] Ce terme a été introduit par Herschel [1818].

$$aF(x+y)=F(x)f(y)+f(x)F(y) \text{ et } af(x+y)=f(x)f(y)-cF(x)F(y).$$

Gregory définit une *classe d'opérations* comme un système de symboles purs avec des lois de combinaison dont les propriétés sont fixées. Dès lors, tout ce qui peut être démontré en ne recourant qu'aux propriétés des lois de combinaison des symboles est vrai de tous les systèmes de symboles qui se combinent selon les mêmes lois. C'est le principe fondamental de l'algèbre. Gregory prend le même exemple que Murphy: le théorème du binôme se démontre en ne recourant qu'aux propriétés des opérations de l'arithmétique (l'addition, la multiplication, la puissance). Ce théorème est donc vrai pour tout système opératoire possédant des lois de combinaison définies par les mêmes propriétés:

> "The binomial theorem, the most important in symbolical algebra, is a theorem expressing a relation between distributive and commutative operations, index operations, and circulating operations. It takes cognizance of nothing in these operations except the six laws of combination we have laid down, and, as we shall presently shew, it holds only of functions subject to these laws. It is consequently true of all operations which can be shewn to be commutative and distributive, though apparently, from its proof, only true of the operations of number." Gregory [1840(1838)], p. 213.

La généralisation du théorème du binôme à des systèmes de symboles qui ne s'interprètent pas comme des nombres découle du principe fondamental de l'algèbre énoncé ci-dessus.
Une deuxième généralisation du théorème consiste à étendre la définition de l'opération « élever à la puissance » à des exposants fractionnaires, puis négatifs, puis à d'autres symboles. Cette extension est résolue de la même manière que chez Murphy.
Gregory pose des limites à l'utilisation de formules symboliques: il faut que les variables et les exposants soient des fonctions distributives et commutatives. Cette limitation fait qu'il est impossible de donner un sens à l'expression $(1+x)^{\log}$. Quant à l'expression $e^{h\frac{d}{dx}}f(x)=f(x+h)$, Gregory souligne qu'il s'agit d'une abréviation. Elle n'a de sens que si l'exponentielle est développée en série.
Dans un deuxième article[430], il donne la géométrie comme exemple d'interprétation de l'Algèbre Symbolique. Les opérations sont celles de *transfert dans une direction* et de *rotation*. Son but est de montrer que l'opération de translation est soumise aux mêmes lois de combinaison que les opérations sur les nombres: commutativité et distributivité. Ainsi, conclut-il, tout ce qui peut être prouvé des nombres en ne recourant qu'aux propriétés des lois de combinaison des opérations arithmétiques est vrai en géométrie, pourvu qu'on puisse interpréter le résultat. Quoique sa démonstration soit sommaire et maladroite, son intention de montrer ce qui est commun à l'algèbre et à la géométrie, et sur quoi repose l'interprétation géométrique des nombres complexes, est intéressante.

15.2.3 Commentaire

Gregory a énoncé le principe fondamental de l'Algèbre Symbolique: les théorèmes qui s'établissent en ne recourant qu'aux propriétés des lois de combinaison des symboles peuvent se généraliser à tout système d'entités se combinant de la même manière. Il n'est certes pas le premier à énoncer ce principe et il le reconnaît. Babbage et Peacock l'avaient reconnu avant lui. Gregory le formule cependant un peu plus clairement que ses prédécesseurs au moyen du concept de *classe d'opérations*. On lit en effet dans ce concept l'ébauche d'une *structure algébrique*.

---

[430] Gregory [1839], « On the Elementary Principles of Application of Algebraical Symbols to Geometry ».

15.3 Augustus De Morgan [1806-1871] : les fondements de l'algèbre

De Morgan est présenté par les historiens sous des jours contradictoires. Pour certains, il est le créateur de l'Algèbre Symbolique, pour d'autres, il est dans le camp des opposants[431]. Pycior [1983], relevant ces divergences, montre que l'image floue qu'offre De Morgan provient de son évolution. Dans sa jeunesse[432], il est un traditionaliste: les nombres et les figures sont des notions distinctes et claires quoique sans prototype réel. Autour de 1835, il adhère sans restriction à l'approche symbolique. Se voulant même plus libre de ses choix que Peacock, il propose de renoncer au principe de permanence des équivalences. A partir de 1840, il adopte une attitude ambivalente. Pycior [1983] explique ce dernier revirement par l'influence de Whewell et W. R. Hamilton, qui tous deux appartiennent, a-t-on coutume de dire, au « camp des opposants » à l'Algèbre Symbolique[433].
Je m'intéresse au De Morgan de la troisième période. Ses contributions au calcul des opérations, à l'algèbre et à la logique, ainsi que son intérêt pour l'histoire et la philosophie des sciences en font pour cette période un témoin d'importance majeure.

15.3.1 Les Articles de la *Penny Cyclopaedia*

Entre 1835 et 1840, De Morgan rédige de nombreux articles pour la *Penny Cyclopaedia*. Ces articles sont de petits traités sur des thèmes tels que les nombres négatifs et les nombres complexes, le calcul des opérations, le calcul des fonctions ou les mathématiques. Ces traités s'adressent à un public de non-mathématiciens. De Morgan y discute de la nature des mathématiques et plus particulièrement des nouveaux domaines que sont le calcul des opérations et l'Algèbre Symbolique:

> "As it is, the present article and that on OPERATION will embrace the consideration of those peculiar abstractions the attainment of which distinguishes the science of algebra from the art which was cultivated by the Italians of the 16th century."
> De Morgan [1840a], vol. 16, p. 130.

De Morgan présente les mathématiques comme une science de certitude[434]. La vérité mathématique est nécessaire, ce qui se reconnaît au fait que sa négation ne peut pas être pensée. Toutefois, il ne se prononce pas sur la « métaphysique » qui sous-tend cette certitude, c'est-à-dire sur la question de savoir si la certitude des mathématiques provient de la constitution de l'esprit humain ou de l'expérience.
De Morgan distingue trois branches principales dans le domaine des mathématiques: l'arithmétique, fondée sur l'idée de nombre, la géométrie fondée sur l'idée de figure et d'espace, et l'algèbre fondée sur l'idée d'*opération* ou de *processus* (*process*). L'*algèbre* est une « méthode pour déduire à partir de symboles qui impliquent des opérations sur des grandeurs, opérations qui doivent être utilisées selon des règles données, les conséquences des définitions fondamentales »[435]. Elle est la plus « abstraite » des branches des mathématiques,

---

[431] Pycior [1983], p. 211.
[432] Pycior [1983] se réfère aux textes qu'il écrit entre 1828 et 1832. Il est à cette époque très proche de Frend, dont il épouse la fille.
[433] Il va sans dire que la catégorisation en deux « camps opposés » tient de la caricature. Les positions de Whewell comme de W. R. Hamilton sont infiniment plus nuancées. Je renvoie à Pycior [1976] et Pycior [1982] pour une discussion des positions de W. R. Hamilton et à Fisch [1991] pour ce qui concerne Whewell. Richards [1987] examine la position historico-progressiste qu'ils partagent en philosophie des sciences.
[434] De Morgan [1839], vol. 15, p. 12.
[435] De Morgan [1839], vol. 15, p. 12.

car « elle est fondée sur des notions qui n'appartiennent pas à la vie de tous les jours », et elle est « la plus exacte des sciences exactes », car la plus proche d'une science « basée sur des définitions »[436]. De Morgan s'étonne que la *science des opérations* se soit développée exclusivement en relation avec l'idée de *nombre*. Une science des opérations basée sur des définitions générales doit pouvoir s'appliquer aussi bien à la géométrie qu'à l'arithmétique. L'algèbre est ainsi présentée comme un cadre conceptuel unificateur, qui généralise aussi bien l'arithmétique que la géométrie. L'algèbre n'a pas atteint son plein développement.
De Morgan le constate lorsqu'il fait remarquer qu'elle a été étendue en compréhension (elle contient plus d'objets que l'arithmétique), mais que jamais encore elle n'a reçu d'interprétation nouvelle.

> "It is remarkable that all the additions which have been made to the interpretations of algebra by modern writers have been pure extensions; that is to say, in no one instance has a new interpretation been given to a symbol of which the preceding ones were not particular cases. It yet remains to see whether a real alteration of interpretations is possible." De Morgan [1840b], vol. 16, p. 443.

Tout comme Murphy et Gregory, il reconnaît que la validité des théorèmes de l'algèbre ne repose que sur les propriétés des lois de combinaison des symboles:

> "These laws of operation being granted, no matter what the nature of the interpretation under which it is found possible to grant them, all that is necessary to the mechanism of algebra will be found to have been granted." De Morgan [1840b], vol. 16, p. 444.

Comme chez Murphy et Gregory, le terme *opération* est un concept vague qui désigne aussi bien les éléments du système (*meaningless symbols*) que la *combinaison* de ces éléments. Cette confusion peut s'expliquer si l'on considère que le calcul des opérations (les éléments du système opératoire sont des opérations qui se combinent par simple composition) est la première structure algébrique dont les éléments ne sont pas des nombres. Toutefois, De Morgan semble avoir distingué ce double sens du terme *opération*. Il indique à plusieurs reprises une correspondance entre les éléments d'un ensemble et un *sous-ensemble des opérations* sur ces éléments: tout élément *a* d'un ensemble définit une *opération* ($f(x) = x + a$). Notons que cette remarque se trouve aussi chez Gregory.
De Morgan puise dans l'étude de l'histoire des mathématiques des indices pour comprendre la nature de l'activité mathématique. Il nous éclaire par ricochet, en apportant un témoignage précieux, lorsqu'il souligne que la science des *opérations* est passée inaperçue jusqu'au début du 19ème, au point de n'avoir pas même de nom, tant le concept d'*opération* est toujours resté dans l'ombre des nombres:

> "We have already suggested that the science of operation must be a constituent part of mathematics; but it has always been so mixed up with the sciences bearing names derived from number and measure, that until lately it has had neither separate name nor existence: and even now, what has been done in it is only the mere beginning of a system." De Morgan [1840b], vol. 16, p. 442.

Cette remarque est d'une importance majeure. Que le terme *operation* n'ait pas d'entrée dans *Mathematical and Philosophical Dictionary* de Hutton en 1795 vient confirmer cette constatation. Ni dans l'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert, ni dans *Cyclopaedia* de Chambers, 6ème édition, parue en 1750, ni dans la 5ème édition de l'*Encyclopaedia Britannnica*, parue en 1817, il n'est question d'opération mathématique à l'article « opération » (sont mentionnées : l'opération du Saint Esprit, les opérations en logique, en médicine ou en chimie). J'ai trouvé l'expression *opération arithmétique* sous l'entrée « opération » pour la première fois dans Gattel [1813].

---

[436] De Morgan [1839], vol. 15, p. 12.

Les anciens algébristes avaient conscience de la puissance de l'algèbre, mais n'en comprenaient pas les fondements, souligne encore De Morgan. Ils acceptaient cette technique parce que, d'expérience, ses résultats n'étaient jamais faux:

> "Surely it will be said that algebra began in a strange confusion of ideas; but yet the fault is rather in expression than in conception. An art was in existence presenting undoubted means of discovering truth, commencing with a generalization of which the use was obvious, but not the meaning". De Morgan [1840a], vol. 16, p. 130.

Ainsi, on observe chez De Morgan, comme on avait observé chez Playfair ou Babbage[437], que l'algèbre ouvre des horizons de pensée inconnus des Anciens. La nouveauté vient du procédé de généralisation. Alors que le processus de généralisation habituel procède par extension du concept à de nouveaux objets possédant une propriété commune, l'*algébriste symbolique*, dit De Morgan, ne garde en tête que les symboles, et il étudie les « conséquences logiques » des règles qui régissent la combinaison des symboles, « oubliant » le sens des symboles:

> "The conclusions of algebra may be made logical consequences of a few simple relations, without reference to the meaning of the symbols used: all algebra is true when these relations are true, so that all algebra is true under any meaning of the symbols which will allow of the truth of these relations." De Morgan [1840a], vol. 16, p. 132.

De Morgan distingue d'une certaine manière ce qui est *logical consequence* et ce qui est *meaning of the symbols*. Dans les années qui suivent, De Morgan publie une série d'articles visant à clarifier les fondements de l'algèbre ainsi que les fondements de la logique. Dans l'un et l'autre champ, il tente de séparer ces deux axes de la pensée. Dans les articles présentant des fondements pour l'algèbre, dont je discute ci-dessous, il tend à séparer l'étude de la structure d'une algèbre et l'interprétation d'un système algébrique.

15.3.2 Les deux articles « On the Foundation of Algebra I-II»

Entre 1839 et 1842, De Morgan lit devant la *Philosophical Society of Cambridge*, quatre articles dans lesquels il propose des fondements pour l'algèbre. Ces articles se situent dans la continuité des travaux de Peacock et de Gregory. Toutefois, alors que Gregory est resté programmatique, De Morgan établit une liste de « maximes » censées définir *une algèbre*. Les questions de fond sont surtout discutées dans les deux premiers articles. Le troisième article est très court et ne constitue qu'un commentaire, le dernier propose une algèbre triple et sort du cadre de mon travail[438]. Je ne commente que les deux premiers articles. J'utilise un vocabulaire actuel et si nécessaire indique entre parenthèses le mot anglais que De Morgan emploie.

Le premier article est lu en 1839 et paraît en 1841, dans les *Transactions of the Philosophical Society of Cambridge*. Dans le premier paragraphe, De Morgan donne un état général de cette science. Comme Gregory, il considère que l'Algèbre Symbolique a pour origine la *méthode de séparation des symboles d'opération de ceux de quantité*. Cette méthode conduit à la construction d'un ensemble dont les éléments (*symbols*) n'ont pas de signification (*meaningless*), mais dont les règles de combinaison des symboles sont identiques aux règles de combinaison des nombres. Il en résulte que certaines identités symboliques sont formellement identiques à des identités algébriques, quoique les symboles ne s'interprètent

---

[437] Playfair [1778] disait que l'algèbre utilisait dans ses débuts un « langage trop vaste pour elle ». Voir chapitre 11.3. Babbage [1821], lui, disait avoir décelé que les définitions s'étaient « imperceptiblement et tacitement élargies ». Voir chapitre 13.3.

[438] Il tente de développer une algèbre triple. Il reconnaît que la découverte des quaternions par W.R. Hamilton rend inutile ses propres recherches dans ce domaine.

pas comme des nombres. L'explication de ce fait se trouve dans l'étude de la *logique de l'algèbre* [19].
De Morgan nous apprend que la découverte de ces analogies dans différents domaines a excité la curiosité des mathématiciens. Ces analogies ont été considérées comme mystérieuses, car la raison n'en était pas connue. En s'interrogeant sur la raison d'être des analogies formelles observées entre des objets de nature différente, on découvre que certaines relations découlent non de la nature des choses, mais des règles qui président à leur combinaison. Ainsi certaines expressions ont une ressemblance formelle, quoique les *objets* représentés par les symboles diffèrent par leur nature [20].
Les principes sur lesquels repose l'algèbre sont désormais clairs pour De Morgan qui les explicite dans la suite. L'algèbre se compose de deux parties[439]:

- *une algèbre technique*[440]: l'art d'user des symboles selon certaines règles, règles données comme des définitions. Il donne l'Algèbre Symbolique, telle que présentée dans Peacock [1834 (1833)] comme exemple d'*algèbre technique.*
- une *algèbre logique*: science qui étudie la « méthode de donner une signification aux symboles premiers et une interprétation aux résultats symboliques » obtenus comme conséquence des définitions.

De Morgan donne une signification particulière aux termes *définir*, *expliquer* et *interpréter*. Un symbole est *défini* lorsqu'on a donné les règles de transformation des formules. Un symbole (*simple symbol*) est *expliqué* lorsqu'on lui a donné une signification (*meaning*) compatible avec sa *définition*. Une expression (*compound symbol*) est *interprétée* si d'une part elle découle des règles données par définition et si d'autre part sa signification résulte des explications données aux symboles qui la composent [21]. Il précise ce qu'il entend par *symbole (symbol)* : ce n'est pas la « représentation d'un objet externe », dit-il, mais de l'« état d'un esprit qui contemple un objet », c'est-à-dire d'une « conception ». Cet état mental (ou conception), est la signification (*meaning*) du signe *(symbole)*. Ainsi, la signification n'est ni « réelle, ni vraie, ni naturelle, ni nécessaire ». L'esprit a conscience que ses états (ou conceptions) sont modifiés par la présence d'un objet matériel ou idéel, qui est simplement la cause de ses conceptions. Mais la formation des conceptions est d'ordre privé, elle est un acte individuel [22]. Par exemple, explique De Morgan, il y a différentes manières de concevoir une *grandeur*. On la conçoit soit comme déjà formée, soit comme un point qui se déplace le long d'une ligne, partant d'une extrémité et s'arrêtant à l'autre extrémité, soit comme le mouvement à effectuer pour passer d'une extrémité d'une ligne à l'autre. Ces trois modes aboutissent à différentes conceptions de la *grandeur*. Dans le premier cas, la *grandeur* signifie une longueur, dans le deuxième, un point mobile, et dans le troisième, un principe d'action. Ainsi les *conceptions* associées à un même référent sont internes, subjectives, et diverses. Elles ne peuvent être ni « vraies, ni nécessaires » [23].
Une telle position épistémologique a des conséquences cruciales, car dire que les conceptions sont des créations individuelles autorise à croire à une évolution de la pensée. Cette implication n'échappe pas à De Morgan. Il a en effet observé un changement quant à la manière de concevoir les grandeurs. Les « anciens algébristes », dit-il, ignoraient le caractère opératoire de l'addition. L'expression « a+b » représentait, pour eux, une grandeur déjà formée, déconnectée du processus mis en œuvre pour obtenir ce résultat. La conception des « Modernes », poursuit-il, est autre; ils distinguent, dans une expression algébrique, les

[439] Il signale que Peacock est le premier à avoir mis en évidence distinctement ces deux composantes; De Morgan [1841 (1839)], note p. 177.
[440] Si De Morgan n'utilise pas le terme *symbolique*, c'est que la notion de symbole appartient aux deux algèbres. Il emploie le mot *technique* à défaut d'une meilleure solution; De Morgan [1841 (1839)], note p. 177.

symboles de quantité et les symboles d'opération, et ils attachent une plus grande importance aux symboles d'opérations.
Ce changement des croyances concernant le mode de formation des entités mathématiques entraîne une modification quant à l'idée que l'on se fait de la nature des mathématiques: traditionnellement, les mathématiques consistaient à contempler des nombres et des figures, objets idéaux, incréés, éternels, immuables. On en étudiait les propriétés, considérées comme essentielles. Les mathématiciens de la « modernité récente » étudient les *opérations*; ils cherchent à découvrir ce qui découle de telle ou telle propriété.

Principes d'une algèbre technique

De Morgan se situe parmi les mathématiciens « modernes » qui conçoivent une grandeur comme donnée par un mouvement, par le *processus (process)* requis pour passer de la grandeur 0 à la grandeur en question.
Il donne une liste de « maximes » également applicables à l'Algèbre Symbolique déjà connue, précise-t-il, à toute algèbre « que l'on pourrait avoir »:

1. Un symbole représente un *processus*.
2. La composition de deux *processus* peut être considérée comme un unique processus, et peut donc être représentée par un symbole simple.
3. Tout *processus* qui fait passer d'un objet de contemplation à un autre, implique un processus inverse, qui permet de réinstaller l'objet de la première contemplation.

Partant de ces principes, il procède à la construction d'un système de symboles représentant des grandeurs.

1. Il se donne en premier lieu deux symboles. Le symbole « 0 » représente « l'état de l'esprit avant qu'il ne conçoive la moindre grandeur », et le symbole « 1 » représente « la première grandeur que l'esprit conçoive ». Il considère l'opération (*the operation of transition*) qui fait passer de 0 à 1. Il note cette opération « +1 ». L'opération appliquée à « 0 » est notée « 0+1 », et le résultat est représenté par le symbole « 1 ».
2. En appliquant cette même opération « +1 », au symbole « 1 », pris comme nouveau « 0 », on obtient une expression (« 1+1 »), dont on désigne le résultat par le symbole « 2 ». Ce nouveau résultat peut être considéré comme obtenu par une seule opération (en combinant « +1 » avec « +1 »), symbolisée par « +2 ».
3. L'opération inverse, notée par « - » est l'opération qui permet de revenir sur ses pas.

De Morgan a construit un ensemble dénombrable de *symboles*. L'*algèbre technique* ainsi construite n'est autre qu'un ensemble isomorphe à l'ensemble des nombres naturels. Le moteur de la construction est l'opération de succession. Cette construction s'apparente à la construction présentée par W. R. Hamilton. De Morgan critique cependant ce dernier pour avoir fondé cette construction sur l'intuition du temps. La construction repose sur l'idée de succession. L'idée de temps constitue une explication du système. L'algèbre des nombres n'est pas la science du temps, mais peut être *interprétée* comme la science du temps.

Algèbre logique et semi-logique

Dans le deuxième article, De Morgan [1842 (1841)] explique le passage d'une algèbre technique à une algèbre logique en termes d'*interprétation*, suivant en cela Peacock et Gregory. De Morgan apporte une précision supplémentaire: il suffit de donner une interprétation aux éléments premiers. Le « 0 » et le « 1 » de l'algèbre technique décrite auparavant peuvent s'interpréter comme les nombres 0 et 1, ou comme un point de l'espace et

une ligne. Une *algèbre technique* peut avoir plusieurs interprétations. L'arithmétique ordinaire et la géométrie sont des explications différentes d'une même algèbre technique.
Il introduit un système intermédiaire entre algèbre logique et algèbre technique: l'*algèbre semi-logique*. Il entend par là une algèbre pour laquelle une partie seulement des symboles reçoit une interprétation. L'arithmétique étendue aux nombres complexes est une algèbre semi-logique, alors que le plan complexe est une algèbre logique.
De Morgan souligne, à l'instar de Peacock, que le signe de l'égalité est un signe de nature différente des autres symboles. Il s'agit du seul signe qui ait une interprétation déterminée, commune à toutes les algèbres.

> "The sign = is the only one of which the explanation is requisite in the art of operation: it signifies an assertion of identity of operative effect, and gives the right to substitute one side for the other, when desired. Its use implies a postulate, the only one demanded: that a=b gives A=B whenever A is derived from a by the same operations in the same order, which produce B from b." De Morgan [1842 (1841)], p. 288.

Le signe de l'*égalité* donne les règles de substitution. Il a une signification attributive, c'est-à-dire qu'il donne une signification à de nouveaux symboles, définis comme résultat d'une opération en suivant le principe de permanence des formes équivalentes. On a considéré ce fait comme « mystérieux », dit De Morgan. Il découle cependant de la logique du système. Les règles de combinaison et de substitution sont toujours les mêmes, quels que soient les symboles.
L'algèbre technique, dont les symboles sont dépouillés de tout sens, apparaît ainsi comme un système de syntaxe pure. Elle est la « grammaire d'une centaine d'algèbres signifiantes»[441].

15.3.3 Commentaire

L'*algèbre technique* que De Morgan a décrite est une science formelle. Les propositions de cette algèbre énoncent les conséquences logiques d'hypothèses posées a *priori*. Elle a les caractéristiques d'une science mathématique au sens de Stewart. De Morgan le fait remarquer:

> "And it is worth stopping to note that the art of operation, previously to the explanation of its symbols, is precisely what Dugald Stewart imagined every mathematical science to be, namely, a pure consequence of definitions, which upon other definitions might have been another thing." De Morgan [1842 (1841)], p. 289.

L'algèbre technique est une science de la pensée pure. Elle n'apprend rien des choses du monde extérieur tant qu'elle n'est pas interprétée. Elle traite de la forme séparée de la matière:

> "Perhaps a dissected map or picture would be a still better illustration: a person who puts one of these together by the backs of the pieces, and therefore is guided only by their forms, and not by their meanings, may be compared to one who makes transformations of algebra by the defined laws of operation only: while one who looks at the fronts, and converts his general knowledge of the countries painted on them into one of a more particular kind by help of the forms of the pieces, more resembles the investigator and the mathematician." De Morgan [1842 (1841)], p. 289-290.

Elle a « de profondes connexions avec la logique, la philosophie du langage et de l'esprit »[442]. Il n'est donc pas surprenant de voir De Morgan publier en 1847 un livre intitulé *Formal Logic or Calculus of Inference*, et, à partir de 1850, une série d'articles traitant du syllogisme (parus dans les *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*). Sa contribution à la renaissance de la logique est d'ailleurs bien connue. Il développe un formalisme pour la syllogistique, calqué sur l'algèbre technique, dans lequel il admet la quantification du

---

441 De Morgan [1849], *Trigonometry and Double Algebra*, cité in Ewald [1999], vol. 1, p. 357.
442 Ewald [1999], vol. 1, p. 333.

prédicat. Hasard amusant, c'est cette fois l'autre Hamilton, Sir William Hamilton, qui revendique la priorité de cette découverte. De Morgan se défend. Une dispute s'ensuit. Boole reconnaît que cette dispute fut à l'origine de ses travaux sur la logique mathématique. Laita [1979] montre que l'influence de cette dispute sur les travaux de Boole ne fut que faible. Elle fut surtout l'occasion de publier des idées déjà formées.
Le calcul des opérations repose sur le « principe de séparation des symboles d'opération et d'objet ». La place considérable qu'occupe ce principe dans les textes de Murphy, Gregory, ou De Morgan rappelle l'insistance avec laquelle Reid a œuvré pour séparer le concept d'opération de l'esprit de celui d'objet. Ce principe mérite qu'on s'y arrête, car c'est lui qui conduit à une connaissance d'un type nouveau : considérer les opérations comme des *objets* définis par une liste de propriétés, des objets pouvant être comparés, classés, généralisés, c'est ouvrir le champ de la connaissance à un niveau d'abstraction nouveau. La connaissance est moins fondée sur des perceptions sensorielles, elle est en partie désubstantialisée.

15.4 George Boole [1815-1864] : méthode générale en analyse

Les premières contributions de Boole sont liées au calcul des opérations. Les opérations envisagées jusqu'alors sont des opérations linéaires. L'objectif de l'article « On a General Method in Analysis » qui paraît dans les *Philosophical Transactions* en 1844 est de généraliser la *méthode du calcul des opérations* ou *méthode de séparation des symboles*. Il présente une méthode pour résoudre des équations fonctionnelles à coefficients non constants[443].

> "The object of this paper is to develop a method in analysis, which, while it operates with symbols apart from their subjects, and may thus be considered as a branch of the calculus of operations, is nevertheless free from the restrictions to which we have alluded." Boole [1844], p. 226.

Après un rapide historique du développement du calcul des opérations (les principaux contributeurs sont, selon lui, Gregory, Servois, Murphy et De Morgan), il en rappelle le principe fondamental: les théorèmes d'algèbre qui ne dépendent que des lois de combinaison des symboles se transfèrent à tout système de symboles qui se combinent selon les mêmes lois, quelle que soit la nature des choses représentées par les symboles. Ce principe a été énoncé, dit-il, par Gregory.
Trois ans après cette présentation générale du calcul des opérations paraît le livre qui « marque l'acte de naissance de la logique algébrique »[444]. Avec *Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning* (1847), Boole se propose de constituer « une véritable science des opérations de l'entendement, d'exposer les procédures du raisonnement humain sous la forme d'un calcul algébrique »[445].
Le titre de l'article de 1844, « On a General Method in Analysis », rappelle le titre de l'essai de Babbage « On General Notions in Analysis ». Le parallélisme entre les deux hommes ne s'arrête pas là : Boole a laissé de nombreux manuscrits qui devaient servir à la rédaction d'un livre, *The Philosophy of Logic*, qui n'a jamais paru[446]. Il est à relever que, dans sa biographie, Babbage mentionne l'article de Boole [1844], regrettant de n'avoir pas le temps de l'étudier:

---

[443] On trouve dans Panteki [2000] une présentation approfondie du contenu de Boole [1844], et de son lien avec les travaux de Gregory et de De Morgan.
[444] Diagne [1992], p. 9.
[445] Diagne [1992], p. 9.
[446] Ces manuscrits ont été édités récemment par Grattan-Guinness et Bornet [1997]. Le cadre de ma recherche ne me permet pas d'analyser ces textes que j'ai découverts alors que ce travail touchait presque à son terme. Bien que Boole ne cite pas le nom de Stewart, ses écrits philosophiques présentent une frappante parenté de langage avec les écrits de ce dernier. Une lecture comparée des textes de Boole et de Stewart serait d'un grand intérêt.

> "It related to the separation of symbols of operation from those of quantity, a question peculiarly interesting to me, since the Analytical Engine contains the embodiment of that method." Babbage [1989 (1864)], pp. 140-141.

L'importance de la contribution de Boole au développement de la logique mathématique et de l'algèbre abstraite est bien connue. Le contexte dans lequel cette œuvre émerge l'est peut-être moins. La continuité que tant Babbage que Boole reconnaissent entre le calcul des fonctions et le calcul des opérations, et la parenté de langage et de notation évidente entre l'article de 1844 et *Mathematical Analysis of Logic* de 1847 consolident l'hypothèse d'une connexion entre le développement du calcul des opérations d'une part, et le développement de la logique et de l'algèbre abstraite d'autre part[447].

15.5 Arthur Cayley [1821-1895] : définition d'un groupe

L'article de 1854 dans lequel Cayley donne une définition d'un groupe abstrait appartient au domaine du calcul des opérations. Dans un premier temps, il définit un groupe d'opérations. Il suppose donnés des symboles d'opérations (θ, φ, …) et les symboles « 0 », « 1 » et « + », auxquels il ne donne aucune signification. Le symbole « 1 » désigne naturellement une opération qui laisse son objet inaltéré. Le signe « = » indique que les expressions reliées sont *équivalentes*, c'est-à-dire interchangeables. Il suppose une loi de combinaison des symboles qui n'est autre que la loi de composition qui consiste à appliquer la première opération puis la deuxième opération. Cette loi n'est pas commutative en général, mais il suppose qu'elle est *associative*. Il suppose que les symboles se composent selon la loi des indices pour des valeurs entières, positives, négatives ou nulles.
Il procède ensuite à une généralisation complète. Un *groupe* est un ensemble de symboles (dont l'un est noté 1) pour lesquels une loi de combinaison est donnée par une table de multiplication. La loi de combinaison est interne: la combinaison de deux symboles du groupe est un symbole du groupe. Suit un premier théorème: un groupe de n éléments, n premier, est un groupe cyclique. Il énonce aussi le théorème suivant: il n'y a que deux tables de multiplications possibles pour un groupe de quatre éléments.
Cette définition est considérée comme la première définition de *groupe abstrait*. Elle est plus générale que la notion de *groupe* de permutations introduite par Galois.

15.6 Conclusion

En conclusion de ce chapitre, je reprends un à un les travaux présentés qui tous marquent une étape dans le processus qui mène à la reconnaissance par les mathématiciens d'un nouvel objet d'étude: celui des systèmes de signes dépourvus de sens que l'on combine selon des règles posées *a priori*. La première version d'un tel système est celle de Peacock. Sa présentation, on l'a vu, était empreinte de contradictions: l'expression *Algèbre Symbolique* désignait, de fait, un *système algébrique* particulier. Les différentes algèbres (au sens actuel du terme) n'étaient pas différenciées. L'*algèbre*, un nom sans pluriel, désignait une science, celle du raisonnement au moyen d'un langage symbolique.
Murphy procède à une généralisation du calcul différentiel. Il présente le calcul des opérations comme un système d'opérateurs linéaires, dont le calcul différentiel et le calcul des différences finies sont des cas particuliers. La loi de combinaison des opérateurs est une loi de composition (deux opérateurs se combinent par application successive à leur objet). Il donne

[447] Panteki [1992], [2000] et Laita [2000] examinent ces relations. Grattan-Guinness [1994, vol.1, p. 560] relève de même une similarité entre la revue systématique que fit De Morgan [1836] des travaux de Babbage et Herschel sur le calcul des fonctions et ses textes sur la logique des relations.

des exemples d'opérations dont la composition n'est pas commutative, franchissant un pas important dans la généralisation des lois de combinaison. Toutefois les opérateurs linéaires qu'il étudie opèrent sur des fonctions numériques. De ce fait, son calcul des opérations reste lié à l'arithmétique.

Gregory procède à une *généralisation de deuxième ordre* de l'algèbre des nombres. L'*Algèbre Symbolique* au sens de Gregory n'est plus, comme c'était le cas avec Peacock, une extension de l'arithmétique; l'arithmétique est une algèbre particulière, ou, selon les termes de Gregory, l'algèbre (des nombres) et la géométrie sont des *interprétations* d'une même *Algèbre Symbolique*. Derrière l'idée de *classes d'opérations*, au pluriel, on peut reconnaître l'idée de structure algébrique. Comme Murphy, Gregory reste cependant attaché aux opérations de l'arithmétique et à la composition des opérations, dans la mesure où il ne présente pas d'exemples de structure algébrique nouvelle.

De Morgan généralise l'approche de Gregory. Il distingue lui aussi une structure algébrique (*technical algebra*) et une algèbre particulière (*logical algebra*). Il propose des fondements pour l'*algèbre technique* et décrit le mode de transition (par interprétation) entre *algèbre technique* et *algèbre logique*. Cette distinction renvoie aux deux axes de la pensée: l'axe syntaxique (traite de la combinaison des signes) et l'axe sémantique (traite de la correspondance entre référent et signe). L'algèbre technique ne traite que des conséquences qui découlent des propriétés des lois de combinaison des signes, elle est libérée de tout fondement de nature référentielle. Elle ne relève que de la *logique pure*.

Boole procède à une généralisation du calcul des opérations, la généralisation porte sur les opérateurs qui jusque là sont des opérateurs linéaires. Il relève que le calcul des opérations qu'il propose est moins général que le calcul des fonctions de Babbage. Après avoir présenté cette généralisation du calcul des opérations, Boole présente un nouveau calcul dont la structure n'est pas celle de l'algèbre des nombres: dans l'algèbre de Boole, les lois de combinaison sont idempotentes. Son *algèbre* est un modèle pour la logique: les lois de combinaison des opérations de l'esprit (réunion et sélection) qui président à la constitution des concepts et à leur classement sont, de fait, idempotentes (la classe des « 'animaux à écailles' qui ont des écailles » est identique à la classe des 'animaux à écailles'). Boole présente une algèbre dont la structure est nouvelle.

Le dernier pas est franchi par Cayley. Il définit le concept de *groupe* comme un ensemble de symboles que l'on combine selon des règles données *a priori* par une table. Les symboles ne suggèrent ni l'idée de nombre, ni l'idée de point, les règles de combinaison des symboles ne sont ni celles de l'addition ni celles de la multiplication ni même celles d'une composition d'applications. Cayley définit comme une entité (qu'il nomme le *groupe*) la *structure* qu'il a reconnue sous différents « vêtements ». Le *groupe* n'est que l'ensemble des propriétés communes aux différents groupes particuliers dont ses prédécesseurs ont exhibé les propriétés. Dans la définition de Cayley, le *groupe* apparaît comme la *thématisation* de propriétés communes à différents systèmes opératoires.

Ainsi, près de vingt-cinq ans se sont écoulés entre la parution du *Treatise on Algebra* et la première définition d'un *groupe*. Pourquoi l'élaboration d'une structure abstraite n'a-t-elle pas suivi plus rapidement la publication de l'œuvre de Peacock? Joan L. Richards [1980] affirme que la notion de vérité mathématique telle qu'elle était comprise par Peacock, De Morgan, Whewell ou Herschel appartient à l'épistémologie réaliste. Marie-José Durand-Richard relève que grâce aux travaux des algébristes anglais les caractéristiques des méthodes opératoires ont été peu à peu explicitées, et qu'elles se sont ensuite imposées comme essentielles à l'algèbre[448]. Elle souligne pourtant que la rupture n'est pas radicale. Elle montre que les

448 Durand-Richard [1992], p. 5.

contradictions que l'on pourrait relever dans l'œuvre de Peacock proviennent de ce qu'il tente de concilier une conception finaliste avec une conception génétique de la connaissance[449]. J'ai montré pour ma part qu'on trouve dans le discours des philosophes écossais une épistémologie générale en rupture avec les systèmes réalistes ou idéalistes qui s'opposaient traditionnellement jusqu'au milieu du 18ème siècle. Cette nouvelle épistémologie apporte une réponse aux difficultés que Berkeley et Simson ont relevées. Les répercussions de cette rupture épistémologique sur les mathématiciens de l'« École Algébrique Anglaise » sont manifestes. La transition est cependant lente. Elle s'étend sur plusieurs générations d'hommes qui, individuellement, vivent une période de transition entre deux formes de pensée. Les contradictions observées dans tel ou tel texte s'expliquent dès lors par l'appartenance de ces hommes à des paradigmes épistémologiques inconciliables.

[449] Durand-Richard [1996], p. 467.

Conclusion

Au cours de la première moitié du $19^{ème}$ siècle, le style des mathématiques pratiquées en Grande-Bretagne a radicalement changé. Ce changement, dont on a souvent indiqué l'aspect scriptural – le 'dot' de l'écriture newtonienne est remplacé par le 'dx' de l'écriture leibnizienne –, est habituellement expliqué par l'« introduction de l'analyse » et attribué aux membres de la *Société Analytique*. Quelques années après l'introduction du formalisme symbolique propre à l'analyse dans sa version continentale, un nouveau domaine se développe en Grande-Bretagne: le calcul des opérations. Ce calcul apparaît comme une généralisation du calcul différentiel et de l'algèbre. De cette généralisation émerge le concept de *groupe*.

L'hypothèse de ce travail est que cette transformation rapide observée au sein des mathématiques en Grande-Bretagne prend appui sur une théorie de la connaissance qui rompt avec l'épistémologie réaliste naïve traditionnelle des mathématiques. Pour examiner cette question, j'ai présenté successivement les éléments de théorie de la connaissance de trois des philosophes de l'« École Ecossaise du Sens Commun » et un certain nombre de publications de mathématiciens appartenant à l'« École Algébrique Anglaise ». Un détour par l'*Analyse Géométrique des Anciens* rétablie par Simson et M. Stewart s'est révélé nécessaire pour comprendre la nature de la géométrie pratiquée par les Britanniques. Ce détour m'a amené à suivre séparément les deux procédés analytiques qui se superposent dans l'*analyse* à partir de Descartes: l'un qui décompose le tout en ses parties et l'autre qui pose la propriété pour l'objet. Cette deuxième forme est la « méthode de l'invention »; elle servait à l'étude des propriétés des courbes, et c'est à elle que les Anciens avaient recours dans leur *Analyse Géométrique*. Cette deuxième forme d'analyse s'apparente au procédé de *thématisation* auquel on a recours dans la « modernité récente ».

La *philosophie de l'esprit*, chez les philosophes écossais, repose sur la croyance que les propriétés des opérations de l'esprit sont universelles, et que cela assure que la connaissance, produit de l'esprit d'un sujet pensant, est universelle; le *calcul des opérations*, chez les algébristes anglais, se développe sur l'idée que certaines identités algébriques ne dépendent que des propriétés des opérations, et que cela assure une « permanence des formes équivalentes », par quoi il faut comprendre que les mêmes identités se retrouvent dans tout système régi par les mêmes opérations. Que la notion d'opération, détachée de son objet, soit centrale chez les uns et les autres pourrait n'être qu'une coïncidence sans grande signification. Or, il m'est apparu au contraire que cette notion joue un rôle fondamental dans les changements observés au cours de la première moitié du $19^{ème}$ siècle. Une « opération détachée de son objet » n'appartient pas à l'ontologie de la logique traditionnelle. En considérant les propriétés d'une *opération*, les philosophes du « Sens Commun » et les « algébristes anglais » ont conscience de s'aventurer hors de l'ancien cadre de la *logique*. Jugeant insuffisante la logique d'Aristote, à la suite de Bacon, Stewart lance de nombreux appels à une rénovation de la logique. Il demande la constitution d'une logique rationnelle – une méthode pour conduire l'activité de la raison et pour organiser le produit de cette activité –, dont il attend qu'elle procure non seulement des règles pour l'organisation des connaissances, mais aussi une méthode de recherche, une formalisation des procédés qui mènent la raison à une *invention*.

La logique est indissociable d'un langage. Ainsi, selon Stewart, c'est d'un langage que les hommes de science ont besoin, c'est-à-dire d'un système de signes et d'un système de règles

pour combiner ces signes. A l'instar de Leibniz, il propose de prendre exemple sur le langage de l'algèbre, car la puissance de ce langage a fait ses preuves, et de s'appuyer sur la connaissance que l'on a du fonctionnement de l'esprit, c'est-à-dire sur la philosophie de l'esprit. Stewart regrette de ne pouvoir développer lui-même cette nouvelle logique qu'il appelle de ses voeux[450]. Néanmoins, ses réflexions sur la nature du langage, le rôle des signes et la nature du raisonnement, ainsi que ses deux théories de la vérité (l'une, pour les sciences du réel, s'apparente à une théorie de la correspondance et l'autre, pour les sciences formelles, à une théorie de la consistance) annoncent la « modernité récente ».
La philosophie de Stewart a eu une influence certaine sur Babbage, l'un des membres les plus actifs de la *Société Analytique*. Dans ses *Essays on the Philosophy of Analysis*, inspirés par les écrits de Stewart, il tente de constituer une *logique mathématique*. Babbage attribue la puissance de l'algèbre à son langage qui possède deux types de signes: les signes d'objet et les signes d'opération. Ce langage donne la possibilité d'énoncer des assertions générales au sujet des opérations, à savoir des identités fonctionnelles. Le point important que relève Babbage est le suivant : le langage algébrique, avec ses deux types de signes, a une portée beaucoup plus générale que ce qu'on en connaît par son application aux nombres. La logique qui sous-tend le calcul des fonctions offre en effet la possibilité d'un discours formel dont le champ est infiniment plus vaste que celui de la logique des prédicats du premier ordre.
Bien que les essais de Babbage n'aient pas été publiés, leur influence, tout au moins indirecte, est manifeste. Il est certain, en effet, que Peacock a lu le manuscrit de Babbage et qu'il en a été fortement impressionné. Le *Treatise on Algebra* s'appuie directement sur ce texte. L'influence de Peacock sur les mathématiciens de la jeune génération est explicitée par Durand-Richard [1999]. Or, c'est à cette nouvelle génération de mathématiciens, les algébristes de l'« École Anglaise » (Murphy, Gregory, De Morgan, Boole et Cayley) qu'il revient, entre 1830 et 1854, de généraliser l'arithmétique universelle, étape par étape. La définition d'une première *structure algébrique* apparaît dans un article traitant du calcul des opérations. Ainsi, la *méthode de séparation des symboles d'opération et des symboles de quantité* et le *principe de permanence des formes équivalentes* ont été les deux pierres angulaires de la transformation de *l'algèbre* (méthode) en *une algèbre*, puis *des algèbres* (objets mathématiques).
La place considérable qu'occupe la notion d'« opération détachée de son objet » dans les textes des algébristes rappelle l'insistance avec laquelle Reid avait séparé le concept d'opération de l'esprit de celui d'objet et suggère que l'élaboration du concept d'*opération* en entité autonome fut un travail difficile et de longue durée. Que le concept d'*opération* soit nouveau pour les mathématiciens du milieu du 19ème siècle s'est trouvé confirmé en particulier par De Morgan. L'introduction de cette entité dans l'ontologie des mathématiques induit des modifications majeures dans la logique. Aussi, n'est-il pas surprenant que quelques années après ses recherches sur les fondements de l'algèbre, De Morgan se tourne vers l'étude des fondements de la logique. Il examine la nature du syllogisme et s'interroge sur la logique des relations. Il propose, indépendamment de Sir William Hamilton, une langue symbolique pour la logique. Tous deux se trouvent en conflit de priorité. L'important ici est de constater que l'« École Algébrique Anglaise » et l'« École Ecossaise du Sens Commun » se sont rejointes sur le terrain de la logique.
Finalement, c'est à Boole qu'il a appartenu d'établir un calcul symbolique du raisonnement dans un formalisme algébrique que l'on considère souvent comme une réalisation du rêve leibnizien[451]. Or, il apparaît que l'idée d'une langue formelle d'inspiration algébrique est présente chez Stewart, qu'elle a été développée par Babbage et Peacock, puis durant trois décennies par les membres de l'« École Algébrique Anglaise », et que l'algèbre

---

[450] Stewart [1994 (1814)], p. 6.
[451] Diagne [1992], p. 12.

de la logique répond aux tentatives de rénovation de la logique entreprises par De Morgan et Sir William Hamilton. L'algèbre de Boole est une application de la théorie des opérations analytiques aux opérations de l'esprit.
Ainsi, au sein de l' « École Algébrique Anglaise » et de l' « École Ecossaise du Sens Commun » se dessine un changement. La pensée apparaît comme une création continue. Les objets mathématiques sont obtenus non par abstraction d'une propriété à partir d'une chose réelle perceptible par les sens, mais ils sont définis comme étant une propriété. Ils peuvent dès lors tout aussi bien être la propriété d'un objet que la propriété d'une propriété ou d'une relation, c'est-à-dire des abstractions de second niveau. Le concept de *collection de symboles dépourvus de signification que l'on combine suivant des lois définies par leurs propriétés* devient primordial. Dans ce nouveau paradigme, les symboles sur lesquels portent les opérations n'ont pas d'intérêt, puisqu'on n'étudie que les conséquences des propriétés des lois de combinaison des symboles. De cette *désubstantialisation* des mathématiques émerge la notion de *structure*.

<>

Dans sa théorie générale des révolutions du savoir Robert présente un modèle de transformation de la connaissance par cycles, où chaque cycle est composé de plusieurs révolutions qui touchent successivement aux différents niveaux du discours. A chaque cycle, le savoir devient plus abstrait. Le mouvement de désubstantialisation est ainsi présenté comme une évolution naturelle[452].
Si les transformations épistémiques et les adaptations qui s'ensuivirent dans les métathéories des mathématiques et de la logique présentées dans ce travail illustrent en partie le modèle théorique de Robert, il reste une question à résoudre, que je n'ai pas encore abordée ici. Robert suppose que le processus de transformation débute par une modification technologique. Quelles sont les inventions techniques susceptibles d'être à l'origine du cycle auquel appartiennent les transformations décrites ici?
La réponse à cette question ne peut être formulée au terme de ce travail que comme une question. L'intrusion constante du temps dans cette histoire m'incite à m'interroger sur les relations entre les améliorations des techniques de mesure du temps et les transformations épistémologiques présentées dans ce travail. Les progrès techniques qui aboutissent, au 18ème siècle, à la construction de chronomètres – des gardiens du temps – précis et transportables, n'ont-ils pas contribué à modifier profondément l'idée que l'homme se fait de la nature du temps, à métamorphoser une idée métaphysique en un paramètre physique, révolutionnant ainsi le rapport de l'homme à son environnement et le sens de son *savoir* ?
La logique d'Aristote, la géométrie d'Euclide et la physique de Newton constituent un « bloc épistémologique », selon Da Costa [1997], qui précise que « toute modification, dialectisation de l'une d'entre elles, entraîne automatiquement des modifications dans les deux autres »[453]. Or, alors que la géométrie d'Euclide et la logique d'Aristote servent à discourir sur l'*essence* des choses, il s'avère qu'à partir de Galilée et de Francis Bacon, l'homme a l'intention d'accéder non plus à la Connaissance de l'*Être*, mais à la connaissance des *changements* et des *transformations* du monde. Le temps devient celui du progrès, un temps qui multiplie, diversifie, complexifie. Les questions ne concernent plus tant l'être que le devenir et on demande à connaître les effets autant que les causes. Le regard du scientifique s'est tourné vers un futur jamais encore advenu. Il scrute le mouvement, le changement, les transformations. Il cherche à prévoir l'évolution des choses, des hommes, des sociétés. Le temps est devenu une mesure fondamentale irréductible de la physique contemporaine, au même titre que l'espace et la matière.

---

[452] Robert [1978], p. 256; chap. 10. 3.
[453] Da Costa [1997], p. 129.

Ainsi, Newton, comme Galilée et Bacon, cherche à connaître le *hic et nunc* du monde réel, les relations de la matière avec le temps et l'espace. Le calcul des fluxions sur lequel Newton élève sa physique est un outil pour conceptualiser le mouvement et en parler. Pourtant le calcul infinitésimal (qu'il s'agisse du calcul des fluxions de Newton ou du calcul différentiel de Leibniz) ne peut être contenu dans le cadre restreint de la logique aristotélicienne – à laquelle on a recours traditionnellement pour structurer le discours philosophique – ni dans celui de la géométrie élémentaire d'Euclide – à laquelle on demande, à l'époque de Newton, de servir de langage formel pour la science. Ainsi, la physique newtonienne elle-même met en péril l'épistémologie sur laquelle elle prétend pourtant se fonder. Les structures de pensée mises en place pour soutenir le discours métaphysique, dont Euclide et Aristote ont formalisé le langage, se révèlent inadéquates pour organiser et formaliser l'exposé des relations entre des événements.

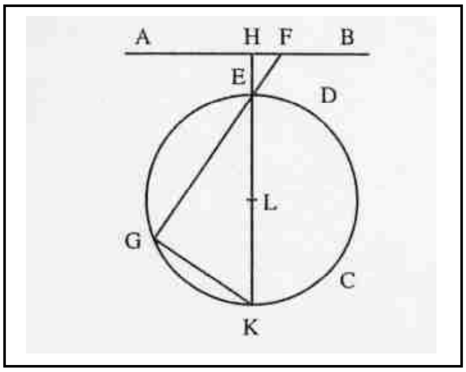
La logique traditionnelle ne permet pas de constituer une science de la matière actuelle, qui décrive et prédise son mouvement et ses transformations[454]. On s'est alors tourné vers les mathématiques. Or les mathématiques traditionnelles n'étaient pas à même non plus de décrire formellement le mouvement. Le mouvement, essentiellement une relation, est *thématisé*, donnant naissance à une nouvelle entité mathématique: la *fonction*. Les premiers algébristes fondent cet objet sur l'intuition d'une courbe géométrique, tout en recourant au symbolisme algébrique. Cette technique « amphibie » a facilité le travail des physiciens. Mais son caractère révolutionnaire exige que l'on adapte les structures épistémiques (les théories concernant le rapport entre réalité et concepts), puis les structures d'organisation (les mathématiques et la logique), puis les métathéories sur les mathématiques et la logique. Finalement, on assiste à un bouleversement épistémologique profond: la *Connaissance*, une somme de Vérités éternelles, cède la place à des *connaissances* toujours *nouvelles*, qui se succèdent à un rythme parfois effrayant.

[454] Robert [1979], pp. 26-27.

Annexe 1 : Quelques exemples de Porismes et théorèmes généraux

Exemple 1 : un porisme extrait de « Tractatus de porismatibus »*, in Opera Quaedam Reliqua*, Simson [1776], traduction en anglais in Tweddle [2000], p. 18

> Proposition 1
>
> "If the straight line AB is given in position, and the circle CD is given in position and magnitude, then the point with the following property will be given: if any straight line is drawn through it to meet the straight line AB and the circle, then the rectangle contained by the segments of that straight line between the point to be found and the points of intersection will be given."



A partir du centre L du cercle, on construit la perpendiculaire au segment AB. Soient E et K les deux points d'intersection avec le cercle. Ces deux points possèdent la propriété demandée. Prenons par exemple E. Soit FEG une droite passant par E. Les triangles EGK et EHF sont semblables. Il s'ensuit que EG/EK=EH/EF et donc que le rectangle de côté EG, EF est égal au rectangle de côté EK, EH. Tweddle donne l'explication suivante:

> "In this porism it has to be shown that the point E is given, and the innumerable things which have the same relation to the point E, and the given straight line AB, and the given circle CD, are the segments of the straight lines between the point E and the straight line AB, and the circle CD. Now the common property which it is proposed to show satisfied by the same segments is that the rectangle contained by them is given; this rectangle also has to be found." Tweddle [2000], p. 19

En notation algébrique : si $y_E(G) = EG$, $x_E(F) = EF$, $a = EH$ et $b = EK$, les grandeurs a et b sont des grandeurs paramétriques données. Le point E, défini par le fait qu'il a une certaine propriété, est à trouver. Les points F et G ne sont pas « donnés » par l'énoncé et une infinité de points peuvent être considérés. Mais si l'on fixe F, alors G est fixé aussi. Les grandeurs *x* et

y dépendent de F, et elles sont liées par une relation: $x_E(F)\,y_E(G(F)) = ab$. Si l'on fait varier le point E, alors la relation entre x et y n'a plus la même forme. Le problème est de trouver un point E tel que la forme de la relation entre x et y soit l'hyperbole donnée.

Exemple 2 : un porisme énoncé par Chasles dans un langage « moderne » :

> « Si l'on déforme un triangle en faisant tourner ses trois côtés autour de trois points fixes pris en ligne droite, et en faisant glisser deux de ses sommets sur deux droites fixes, prises arbitrairement, le troisième sommet décrit une troisième droite. » Chasles [1860], p. 23.

Dans sa forme générale, cet énoncé devient:

> « Si l'on a un polygone d'un nombre quelconque de côtés, et qu'on le déforme en faisant tourner tous ses côtés autour d'autant de points fixes pris arbitrairement en ligne droite, et en faisant glisser tous ses sommets moins un sur autant de droites données de position, le dernier sommet décrit lui-même une droite déterminée de position; et en outre, le point d'intersection de deux côtés quelconques du polygone décrit aussi une ligne droite. » Chasles [1860], p. 24.

Exemple 3: Un théorème général de M. Stewart

> Theorem 39
>
> "Let there be any regular figure inscribed in a circle and let m be the number of the sides of the figure, and n any number less than m; and from all the angles of the figure and the centre of the circle let there be drawn right lines to any point; and let r be the semi-diameter of the circle and v the line drawn to the centre; let a be the coefficient of the second term of the binomial raised to the n power, b the coefficient of the third term c, the coefficient of the fourth term and so on: the sum of the $2n$ powers of the lines drawn from the angles to the figure will be equal to $mr^{2n} + ma^2v^2r^{2n-2} + mb^2v^4r^{2n-4} + mc^2v^6r^{2n-6} + \ldots$" M. Stewart [1746], p. 111

Annexe 2: W. R. Hamilton [1837]

« Preliminary Essay »

Je présente ci-dessous la construction des nombres fondée sur l'intuition du temps, donnée par W.R. Hamilton dans le « Preliminary Essay ».

Notions premières fondées sur l'intuition du temps

Les moments et leurs relations

La première notion que l'intuition du temps nous donne est celle de *moment*. Nous avons la certitude qu'il existe des moments différents et des moments coïncidents. Deux moments non coïncidents sont dans une relation soit d'antécédent soit de conséquent. Toute paire de moments est donc dans la relation de coïncidence, d'antécédence ou de conséquence. En langage actuel, on dit que l'ensemble des moments (M) possède un *ordre total.*
W. R. Hamilton énonce un premier axiome :
Axiome 1 : $\forall A, B \in \mathrm{M}$, l'une exactement des trois expressions suivantes est vraie : $A = B$, $A < B$, $A > B$
Il emploie les mêmes signes que dans l'arithmétique, leur attribuant toutefois une signification différente. Le signe « = » se voit attribuer la signification de *coïncident* ou *simultané* au lieu de *égal,* le signe « < » signifie *précède* au lieu de *plus petit* ou *inférieur* et le signe « > » signifie *succède* au lieu de *plus grand* ou *supérieur* [Eq. 1-8].

Les durées et leurs relations

La deuxième intuition qui nous vient du temps est celle de *durée*, c'est-à-dire de temps écoulé entre deux moments. La durée est déterminée par un couple de moments. Ayant introduit la notation $a = (B, A) = B - A$, Hamilton constate que l'ensemble des couples $\Sigma = \mathrm{M} \times \mathrm{M}$ est muni d'une relation d'ordre, fondée sur l'intuition que deux durées sont dans une relation de plus grand ou plus petit. En effet, étant donné deux paires de moment, $(A, B) = a$ et $(C, D) = c$, leur coïncidence, précédence ou conséquence peut être *analogue* ($a = c$) ou non, et si non, leur relation est de type « plus tôt » ($a < c$) ou « plus tard » ($a > c$).
La relation d'analogie entre durées est ainsi indiquée par le signe « = ». La relation d'analogie n'est pas une relation d'identité sur l'ensemble des *moments*, souligne Hamilton, car elle relie manifestement des couples de moments différents. $B - A = D - C$ n'implique pas $B = D, B = A$. Cette relation entre les couples de moments est une relation d'équivalence. Hamilton en souligne la transitivité (Eq. 25) et la symétrie (Eq. 10). Il ne se préoccupe cependant pas de réflexivité, ni de la stabilité de la structure d'ordre pour la relation d'équivalence ($a < b,\ a' = a,\ b' = b \Rightarrow a' < b'$). Il énonce un deuxième axiome qui concerne l'ensemble des couples de moments quotienté par la relation d'équivalence $\widetilde{\Sigma} = \mathrm{M} \times \mathrm{M} / \sim$:
Axiome 2 : $\forall a, b \in \widetilde{\Sigma}$, l'une exactement des trois expressions suivantes est vraie: $a = b$, $a < b$, $a > b$.
Il ajoute un axiome d'existence et d'unicité (p. 301), qui s'exprime ainsi :
Axiome 3 : $\forall A, B, C \in \mathrm{M}, \exists! D \in \mathrm{M} \mid (A, B) = (C, D)$

Tout couple de moments est représentable de manière canonique par $(A,B)=(B-A,O)$, où O représente un moment quelconque servant d'origine.

Addition des durées

De l'intuition du temps découle l'idée que les durées s'additionnent (p. 301).
Axiome 4 : $\forall a,b,c \in \widetilde{\Sigma},\ a+b=c \Leftrightarrow \forall A, \exists! B,C \mid a=B-A,\ b=C-B,\ c=C-A$.
L'addition ainsi définie est une loi de composition interne sur l'ensemble quotient (Eq 20-24).
Elle possède la propriété suivante, que Hamilton énonce comme un axiome :
Axiome 5 : $\forall a,b,c,d \in \Sigma', a=b, c=d \Rightarrow a+c=b+d$
De l'intuition du temps découle l'idée que les couples de moments sont orientés : la durée de *A* à *B* n'est pas égale à la durée de *B* à *A*. Ces deux durées existent et elles ne sont pas *analogues*, mais *inverses*. L'axiome 6 ci-dessous constitue l'essentiel de la différence entre la construction des nombres sur l'idée de temps et sur celle de distance spatiale.
Axiome 6 : $\forall A,B \in \mathrm{M},\ A \neq B \Leftrightarrow (A,B) \neq (B,A)$

L'intuition d'un temps infini et continu

Hamilton vise ici à traduire en un langage mathématique l'intuition que le temps est infini et continu. Cette section débute dans un langage empreint d'épistémologie réaliste traditionnelle : ce que Hamilton affirme est « manifestement évident », et les objets dont il parle « existent ». Elle se termine dans un style relevant d'une épistémologie rationaliste, où les objets « peuvent être conçus » ou « imaginés », en suivant des procédés de construction indiqués explicitement.
En premier lieu, il pose une définition : trois moments A, B, B' sont dits composer une *analogie continuée* si $B' - B = B - A$

> "In such an analogy, it is manifest that the three moments A B B' compose also an *equidistant series* […]. The moment B is evidently, in this case, exactly intermediate between the two other moments […]. It is clear that whatever two distinct moments A and B' may be, there is always one and only one such bisector moment B […]. And is it still more evident […], that it is always possible to complete the analogy in one but only one way, when an extreme and the middle are given." W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 305.

Une fois la définition posée, le style change. Les moments et les durées « peuvent être imaginés », il est « possible de les concevoir », on les aperçoit au terme d'un processus de construction. Il faut *concevoir* qu'il est toujours possible de « déterminer (en pensée) » un moment *C* tel que l'intervalle de *A* à *C* soit analogue à l'intervalle de *C* à *B*. Et plus généralement, toute durée « peut être imaginée comme partagée » en n'importe quel nombre d'intervalles de même grandeur (p. 306).
Aucun moment ne peut être si distant (dans le futur ou dans le passé) d'un moment donné qu'on ne puisse « trouver », en continuant une série équidistante, d'autres moments plus éloignés (dans le futur ou dans le passé). De manière analogue, entre deux moments A et B non coïncidents, si proches soient-ils, on peut toujours trouver une série de moments équidistants (un « rythme »), qui comprend A et B. Sitôt que nous pensons à deux moments non simultanés, nous avons la possibilité de penser à un moment intermédiaire (p. 307).

> "By thus constructing and continuing an equidistant series, of which any two moments are given, we can arrive at other moments, as far from those two, and as near to each other, as we desire." W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 307.

Deux moments sont dits *identiques* si on ne peut trouver aucun moment intermédiaire entre eux (p. 308).
Les affirmations d'existence soutenues par des appels à l'évidence ont cédé la place à des affirmations qui concernent nos possibilités de pensée. Dans ces conditions, les objets *résultent* d'un acte de pensée. Leur existence repose sur un procédé de construction par la pensée.
W. R. Hamilton a adopté dans la première partie de son essai une position réaliste descriptive. Il a affirmé l'existence de moments et de durées. Il s'est donné des principes premiers, choisis pour décrire formellement les idées qui nous viennent de l'intuition que nous avons du temps. A partir de ce point, le texte se développe comme une construction logique et déductive. Toute assertion est démontrée.

Construction d'un groupe additif de transitions

Les actes de transition et la génération de moments

Etant donné un moment *A* et une durée *a*, l'esprit a la faculté de créer par la pensée un nouvel objet de pensée, le moment *B* auquel on arrive par un *acte de transition* de durée *a* à partir de l'instant *A*. Cette opération est représentée par l'expression: $A + a = B$. En notations actuelles, il s'agit d'une translation $T_a : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, définie par l'expression : $T_a(A) = B$.

> "This notation a+A or (B-A)+A, corresponding to the above mentioned conception of a *certain mental step* or *act of transition,* which is determined in direction and degree by the ordinal relation a or B-A, and may, therefore, be called the step a, […], and which is such that by making this mental step, or performing this act of transition, we pass, in thought, from the moment A to the moment B, and thus suggest or generate (in thought) the latter from the former, as a mental product or *result* B of the *act* a and of the *object* A." W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 312.

W. R. Hamilton conçoit le symbole *a* comme désignant un *acte de pensée*, et le symbole *A* comme un *objet de pensée*. Partant du moment *A*, l'acte de transition *a* amène la pensée en un nouveau moment *B*, moment qui n'a pas à exister avant l'acte de transition. *B* est défini par l'acte de transition. *B* existe et est unique, par l'axiome 3.
A toute durée correspond un acte de transition, et à l'ensemble des actes de transition correspond l'ensemble des applications définies par :

$$\begin{aligned} T_a : M &\to M \\ A &\mapsto A + a = B \end{aligned}$$, où le moment B est défini par la relation : $B - A \sim a$.

Le signe « + » est la marque de l'action des transitions sur l'ensemble des moments. Hamilton l'exprime ainsi:

> "The mark +, in this sort of notation, is interposed, as a *mark of combination*, between the signs of the *act* and the *object*, so as to form a complex sign of the *result*." W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 313.

Ayant défini *a* comme une opération, Hamilton définit l'acte *inverse* associé à *a,* comme l'acte qui annule le premier acte. Il est noté q*a*. Il a pour effet de ramener la pensée à son point de départ:

$$a = B - A \Leftrightarrow \mathrm{q}a = A - B \text{ (Eq. 46).}$$

Il est évident, souligne Hamilton, que si q*a*=*a'* alors q*a'*=*a* et donc qq*a*=*a* (Eq. 57). L'égalité est entre les actes. Le symbole 0 désigne l'acte qui n'a pas d'effet:

$$A - A = 0\text{, ou } A + 0 = A \text{ (Eq. 31).}$$

Structure de groupe additif

L'acte de transition *a* fait passer d'un moment *A* à un moment *B*. Un deuxième acte de transition *b* fait passer de *B* à un nouveau moment *C*. La succession de ces deux transitions constitue un nouvel acte *c* qui fait passer de *A* à *C*. Hamilton définit l'addition de deux actes comme leur effet composé. Si $B - A = a$ et $C - B = b$ sont deux actes de transition, alors leur addition est définie par:

$$C = b + (a + A) = c + A, \text{ et } c = a + b \text{ (Eq. 62-63).}$$

Hamilton démontre que:

1. La loi de composition est interne, cela découle de l'axiome 3 et de la définition de l'addition.
2. L'associativité[455] de cette loi de composition découle immédiatement de sa définition (Eq. 69*)*.
3. L'opération inverse est définie pour toute application : $\text{q}\, a + a = 0, \forall a \in \Theta$ (Eq. 64*)*.
4. L'addition est commutative (Eq. 75-84).

L'ensemble des translations Θ est ainsi est une groupe additif commutatif. L'acte de transition de durée 0 est l'élément neutre. Hamilton le nomme *identité*. Il ne vérifie pas que $a + 0 = a, \forall a \in \Theta$.

Construction d'un corps de scalaires K

Multiples des actes de transition

En se donnant un moment origine, noté O, et un acte de transition *a*, et en répétant l'opération de transition *a*, on génère simultanément

1. une suite de moments ordonnés et équidistants: B', B, O, A, A', etc…

et

2. un système d'actes de transition, *a, a*+*a, a*+*a*+*a*, …

W. R. Hamilton appelle le système des actes de transition les *multiples* de *a*, et il les note :

…,3q*a, 2*q*a, 1*q*a, 0, a, 1a, 2a, 3a,…*

Les signes : *0, 1, 2, 3,etc…*et *1*q, *2*q, *3*q,... désignent des ordinaux. Ils se lisent : « the first positive, the second positive, …the first contrapositive, etc… ». Ces signes peuvent aussi être considérés comme des signes de cardinaux. Ils constituent une collection de *scalaires* ou *entiers algébriques*, ils indiquent les rapports (*rationes*) entre des actes de transition. Je désigne par le symbole *K* l'ensemble de ces signes, que je nomme des scalaires.

> "We may also conceive this last series of signs as equivalent […] to cardinal names […] *positive cardinals*, *contra-positive cardinals*, and the *null cardinal* (or number *none*); namely, the system of all possible answers to the following complex questions : « *Have any* effective steps (equivalent or opposite to the given base *a*) been made (from the standard moment *A*), and if any, then *How many*, and *In which direction* ? » In this view, *3*q is a written sign of the *cardinal* name or number *contra-positive three*, as a possible answer to the foregoing general question." W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 324.

Les multiples de l'acte de transition *a* sont formés en multipliant l'acte *a* par un scalaire de *K*, soit *positif* soit *contra-positif*. Hamilton introduit le signe × pour indiquer qu'il y a un acte

[455] Selon Hankins [1980], W. R. Hamilton est le premier à considérer la propriété d'associativité. Il introduira ce terme en 1843.

mental entre le signe désignant le multiple et le signe désignant la base. Cette opération est une action de K surΘ . Il démontre un certain nombre de propriétés relatives à cette multiplication et relative aux scalaires eux-mêmes:

$$n\theta \times a = n \times \theta a = \theta(n \times a) = \theta(n\theta \times \theta a) \text{ (Eq. 105).}$$

$$\theta n = n\theta \text{ , } \theta(n\theta) = n \text{ , } \theta 0 = 0 \text{, (Eq. 106).}$$

Il définit ensuite une addition sur K:

Définition : si $\omega \times a = (\nu \times a) + (\mu \times a)$, on convient de noter $\omega = \nu + \mu$ (Eq. 107).

Il précise que l'équation ci-dessus doit être traitée sur K comme une définition (p. 327). Il ajoute que cette même équation sur l'ensemble des nombres entiers est considérée comme un axiome et non comme une définition (p. 327). Il précise encore que cette addition est distincte de l'addition arithmétique. Il n'est pas toujours vrai que $\nu \leq \nu + \mu$. Il démontre que l'addition sur K est commutative (Eq. 110) et associative, qu'il existe un élément neutre et un inverse pour tout élément de K (p. 329). La définition d'une multiplication dans K suit naturellement :

Définition : si $\omega \times a = \nu \times (\mu \times a)$, on convient de noter $\omega = \nu \times \mu$.

Cette multiplication algébrique est commutative, associative, distributive relativement à l'addition. De ces propriétés découle que $\nu \times 0 = 0$.

Génération des nombres fractionnaires

L'acte de multiplication étant défini dans K, il s'agit de définir l'acte inverse, l'acte capable de défaire ce que fait la multiplication. Le déroulement de cette construction est possible par le fait que Hamilton définit l'*objet*, l'*acte* et le *résultat de l'acte*. Il s'intéresse à la relation entre l'objet (avant l'acte) et le résultat (objet après l'acte).

> "The *object* on which any such *act* operates being called the *multiplicand*, and the *result* being called the *product*; while the *distinctive thought or sign* of such an act is called the *algebraic multiplier* or *multiplying number* […]. The relation of an algebraic product to its algebraic multiplicand may be called, in general*, ratio, or algebraic ratio*; but the particular ratio of any one particular product to its own multiplicand, depends of the particular act of multiplication by which the one may be generated from the other: the *number* which specifies the *act* of multiplication, serves therefore also to specify the resulting *ratio*, and every number may be viewed either as the *mark of a ratio*, or as the *mark of a multiplication*, according as we conceive ourselves to be *analytically examining* a product already formed, or *synthetically generating* that product. " W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 335

L'acte qui défait une multiplication se nomme « act of fractioning ». Cet acte produit une nouvelle classe d'éléments de *K,* des *scalaires fractionnaires* :

> "The inverse or reciprocal acts of *sub-multiplying*, which we must now consider, and which we have agreed to regard as comprehended under the more general head of *multiplication*, conduct to a new class of multiplying numbers, which we may call *reciprocals of whole numbers,* or, more concisely, *reciprocal numbers*; and to a corresponding class of ratios, which we may call *reciprocals of integer ratios*. And the more comprehensive conception of the act of passing from one to another of any two commensurable steps, conducts to a correspondingly extensive class of multiplying acts, and therefore also of multiplying numbers, and of ratios, which we may call *acts of fractioning*, and *fractional numbers*, or *fractional ratios*; while the *product* of any such act of fractioning or of multiplying by any such fractional number, that is the *generated step* which is any multiple of any submultiple of any proposed step or *multiplicand*, may be called a *fraction* of that step or multiplicand."
> W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 335.

A toute opération de multiplication correspond une opération inverse, notée du signe « R » inversé (j'utilise un exposant négatif). Ainsi par définition :

$$\forall \mu, \mu', \mu' = \mu^{-1} \Leftrightarrow \mu' \times (\mu a) = a \text{ (Eq. 124).}$$

Les lois d'addition et de multiplication sont étendues à ces nouveaux nombres. Hamilton fait remarquer que :

1. L'ensemble des nombres fractionnaires est muni d'une relation d'ordre total (p. 340).
2. Inverser l'acte 0 est impossible. Le résultat est un acte indéterminé (pp 346-347).

Rapport de deux actes de transition

Une nouvelle fois, Hamilton inverse le processus de pensée. Il a défini les multiples et sous-multiples, qui sont des scalaires, qui interviennent en agissant multiplicativement sur le groupe Θ des transitions. Il pose maintenant le problème inverse, qui consiste à définir un élément de *K* comme le rapport de deux transitions. Par définition, le rapport de deux transitions *a* et *b*, est l'élément de *K,* noté ρ*,* tel que :

$$\frac{a}{b} = \rho \Leftrightarrow b = \rho \times a .$$

Hamilton définit ensuite une relation d'équivalence sur *K* :

$$\frac{a}{b} = \frac{\rho a}{\rho b}, \forall \rho \in K .$$

Deux cas de figures se présentent : ou bien *a* et *b* possèdent une commune mesure et tous deux peuvent s'écrire comme multiple d'un même acte *c* :

$$a = \nu c, b = \mu c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\nu \times c}{\mu \times c} = \frac{\nu}{\mu} = \rho .$$

Dans ce cas ρ est un *ratio entier. K* est étendu pour inclure ces nouveaux éléments. L'addition et la multiplication de *K* sont prolongées naturellement. S'il n'existe pas de commune mesure, le raport peut être approché aussi près que l'on désire par une suite des ratios entiers (p. 359). Les rapports irréductibles à des fractions entières sont pris dans une progression continue de rapports entiers. Le ratio irrationnel est alors défini comme la limite de la suite des ratios entiers. Les règles d'addition et de multiplication sont applicables à ces nouveaux éléments limites (p. 351).

Hamilton propose une démonstration de l'existence des incommensurables plus « formelle »:

> "The existence of these incommensurables, (or the necessity of conceiving them to exist), is so curious and remarkable a result, that it may be usefully confirmed by an additional proof of the general existence of square roots of positive ratios, which will also offer an opportunity of considering some other important principles."
> W. R. Hamilton [1837 (1835)], p. 361.

Pour ce faire, il construit deux suites de rationnels qui tendent vers la valeur irrationnelle à définir, l'une par valeur plus petite et l'autre par valeur plus grande. Il définit le point de rencontre de ces deux limites, comme la valeur limite de ce point cherché. Cette démonstration n'est guère plus satisfaisante que la précédente.

Propriétés de la multiplication de K sur Θ

Hamilton a achevé la première étape de la construction des scalaires. Il montre que l'action de *K* sur Θ satisfait aux conditions de structure d'un espace vectoriel :

1. $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$ (Eq. 149).
2. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a$ (Eq. 152).
3. $\alpha(a + b) = \alpha a + \beta a$ (Eq. 191).

Il établit encore que K a la structure d'un corps commutatif. La structure de groupe additif est déjà établie, de même que la structure de groupe multiplicatif. Hamilton établit encore la distributivité de la multiplication relativement à l'addition (Eq. 194), la commutativité de l'addition (Eq. 195) et de la multiplication (Eq. 196). Il établit encore deux propriétés qui découlent de la structure de groupe: l'opposé d'une somme est la somme des opposés (Eq. 197) et l'inverse du produit est le produit des inverses (Eq. 198).

Moyenne proportionnelle de deux actes de transition

L'article se termine par la considération que le corps K n'est pas complet. L'équation $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ n'a pas toujours une solution (p. 355).
En construisant une analogie continuée pour la multiplication : $a, \mathsf{a}a, \mathsf{a}^2a, \mathsf{a}^3a, \ldots$, c'est-à-dire une suite dont tous les éléments sont dans un même rapport : $\frac{\mathsf{a}^{k+1}}{\mathsf{a}^k}=\frac{\mathsf{a}^k}{\mathsf{a}^{k-1}}$, Hamilton parvient à démontrer que étant donné deux éléments (a,b) de Θ, il existe au plus un élément c tel que le triple (a,b,c) forme une analogie continuée, et c existe si et seulement si a et b sont de même direction.

W. R. Hamilton [1837 (1833)], « Theory of Conjugate Functions »

Dans la deuxième partie, Hamilton obtient les nombres complexes comme couples de nombres réels. Il définit la multiplication de deux couples de nombres réels, en invoquant des raisons relevant de la commodité plus que de la vérité, en même temps qu'il affirme la nécessité d'un tel choix. Les nombres complexes forment une K-algèbre de dimension 2 (vecteurs de base : (1,0) (0,1)), où K est un corps isomorphe au corps des réels. La construction ici est similaire à celle présentée de nos jours[456].
Le traité s'achève par ces mots :

> "But because Mr. Graves employed, in his reasoning, the usual principles respecting Imaginary Quantities, and was content to prove the symbolical necessity without showing the interpretation, or inner meaning, of his formulae, the present Theory of Couples is published to make manifest that hidden meaning : and to show, by this remarkable instance, that expressions which seem according to common views to be merely symbolical, and quite incapable of being interpreted, may pass into the world of thoughts, and acquire reality and significance, if Algebra be viewed as not a mere Art or Language, but as the Science of Pure Time. The author hopes to publish hereafter many other applications of this view; especially to Equations and Integrals, and to a Theory of Triplets and Sets of Moments, Steps, and Numbers, which includes this Theory of Couples." W. R. Hamilton [1837 (1833)], « Theory of Conjugate Functions », pp. 421-422.

Hamilton conclut qu'il a donné une signification aux nombres complexes. De fait, il a construit logiquement les nombres complexes à partir de l'ensemble des réels.

[456] Crowe [1994], p. 25.

Annexe 3 : Murphy [1837]

Je donne une présentation détaillée de l'article de Murphy sur la théorie des *opérations analytiques*. A part dans les citations, j'utilise un vocabulaire et une écriture actuels, en particulier je traduis le terme *opération* par l'un ou l'autre des termes: opérateur, fonction et nombre, suivant le contexte.
La première partie de l'article traite des quatre *opérateurs* suivants: Δ (différence finie), Ψ (succession), d_x (différentiation), et d'un opérateur *multiplication*.
Les quatre opérateurs sont définis ainsi :

- $b[a]=c$, où *a,* et *c* sont des *fonctions*[457], et *b* désigne l'opérateur de multiplication par le nombre *b; c* est la fonction obtenue en multipliant *a(x)* par *b*: $b[a](x)=ba(x)$
- $\Psi[x^n]=(x+h)^n$, où h est une constante fixée. Dans cet exemple, l'opérateur de succession ψ s'applique à la fonction $f(x)=x^n$. Habituellement, pour plus de clarté, l'incrément est indiqué en indice: Ψ_h.
- $\Delta[a^x]=a^{x+h}-a^h$, où h est une constante fixée. L'opérateur de différence finie est ici appliqué à la fonction $f(x)=a^x$.
- $d_x[u]=\dfrac{du}{dx}$, où *u* est une fonction quelconque, est l'opération différentielle habituelle.

Remarquons que la dernière définition est générale, alors que curieusement les autres opérateurs sont simplement exemplifiés. Cette anhomogénéité dans la présentation s'explique par la nouveauté des entités conceptuelles que Murphy manipule.

Opération identité pour la multiplication

<u>Définition 1</u> : l'opérateur représenté par le symbole « 1 » a pour effet de multiplier une fonction par le nombre « 1 », c'est-à-dire que cet opérateur appliqué à une fonction quelle qu'elle soit a pour résultat la fonction elle-même.
$(\Delta+1)[u]=\Psi[u]$

> "Thus, if 1 as an operation be understood as the multiplying of the subject by unity, which leaves it unaltered, and the symbols Ψ, Δ have the same signification as in art. 1 [la définition des opérateurs, paragraphe précédent], then $(\Psi-1)[u]=\Delta[u]$, and $(\Delta+1)[u]=\Psi[u]$, where *u* is any quantity whatever." Murphy [1837], p. 180.

La « multiplication par 1 » est, selon cette définition, un opérateur.

Somme de deux opérateurs

<u>Définition 2</u> : La *somme* de deux opérateurs est un opérateur « dont le résultat est la somme des résultats des opérations » : $(F+G)[u]=F[u]+G[u]$

Egalité entre opérateurs

[457] Murphy utilise ici le terme *quantité* pour *fonction*, comme souvent dans les textes de cette époque.

Définition 3 : Deux opérateurs sont *égaux* s'ils produisent le même résultat, indépendamment de l'objet auquel ils sont appliqués : $F = G \Leftrightarrow F[u] = G[u], \forall u$

Cette définition est utilisée pour démontrer une première relation fonctionnelle.

Théorème : $1+\Delta = \Psi$

Démonstration:

$$(1+\Delta)[u](x) = (1[u]+\Delta[u])(x) = u(x)+u(x+1)-u(x) = u(x+1) = \Psi[u](x) ,$$

Composition des opérateurs

Définition 4 : Une *opération composée* consiste en une série d'opérations simples. Le *sujet* de chacune des opérations de la série est le résultat de toutes les opérations précédentes. La composition est notée par simple juxtaposition des symboles :

$$G \circ F[u] = G[F[u]]$$

Exemple : $d_x \Delta \Psi a[x^2] = 2a$

Démonstration :

$$d_x \Delta \Psi a[x^2] = d_x \Delta \Psi[ax^2] = d_x \Delta[a(x+1)^2] = d_x[a(x+2)^2 - a(x+1)^2] = 2a(x+2) - 2a(x+1) = 2a$$

La composition d'un opérateur avec lui-même est indiquée par un exposant.

Exemple : $\Psi\Psi\Psi[x^2] = \Psi^3[x^2]$

Commutativité

Murphy s'étend quelque peu sur la commutativité. Il fait remarquer que le résultat de la composition des opérateurs dépend la plupart du temps de l'ordre dans lequel les opérateurs se succèdent. Il introduit le terme *relatively fixed*, pour désigner deux opérateurs dont le résultat de la composition « dépend de l'ordre ». Il désigne par *relatively free* des opérateurs commutatifs.

Exemple:

$x[\Psi[x^n]] = x[(x+1)^n] = x(x+1)^n$ et $\Psi[x[x^n]] = \Psi[x^{n+1}] = (x+1)^{n+1}$

Linéarité

Définition 5 : un *opérateur linéaire* est un opérateur dont « l'action » sur un sujet « est faite des actions sur les parties du sujet, connectées par le signe + » : $F[u+v] = F[u] + F[v]$.

Murphy vérifie que la multiplication par une quantité a cette propriété, de même que la différence finie et l'opérateur de succession. Il démontre ensuite que la somme et la composition de deux opérateurs linéaires est linéaire. Il déduit de ces deux théorème les points suivants:

- La combinaison linéaire d'opérateurs linéaires est linéaire.
- L'opérateur $\dfrac{\Delta}{h}$ est linéaire puisqu'il est la composition de la différence finie Δ avec la multiplication par l'inverse de *h*.
- La différentielle d_x étant la limite d'opérateurs linéaires doit être elle aussi linéaire, affirme-t-il sans autre explication. Il lui semble évident que le passage à la limite ne peut pas détruire la propriété de linéarité.

Murphy se restreint dans la suite de son article à des opérateurs linéaires.

Distributivité

La composition de deux sommes d'*opérateurs linéaires* s'effectue « de la même manière que la multiplication » : $(F+G)\circ(F'+G')=F\circ F'+G\circ G'+F\circ G'+G\circ G'$
Le terme *distributivité* a été introduit par Servois pour désigner les fonctions qui « sont telles que la fonction de la somme algébrique d'un nombre quelconque de quantités est égale à la somme des fonctions pareilles de chacune de ces quantités »[458], à savoir la propriété:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\,.$$

Il donne comme exemple d'une fonction distributive la multiplication par un facteur, et comme exemple d'une fonction non distributive, le sinus ou cosinus ou logarithme. La distributivité telle que Servois la définit n'est pas analogue à la distributivité de la multiplication relativement à l'addition sur les nombres, et ne permet pas de montrer le théorème du binôme pour des opérateurs. En effet, de l'expression :

$$(f+g)(x+y)=f(x)+g(x)+f(y)+g(y)\,,$$

on ne peut pas déduire le développement de $(f+g)^2$. La *distributivité* au sens de Servois, correspond à la notion de *linéarité*, introduite par Murphy.
Murphy est l'un des premiers à distinguer les notions de *linéarité* et de *distributivité*. Il appelle *linéarité* la propriété :

$$F[u+v]=F[u]+F[v]\,,$$

et il pose:

$$(F+G)[u]=F[u]+G[u]$$

comme une définition de la somme de deux opérateurs. Il déduit de ces deux identités une propriété de la loi de combinaison de la composition et de l'addition :

$$F\circ(G+G')=F\circ G+F\circ G'\,.$$

Théorème du binôme généralisé

Si deux opérateurs sont linéaires et leur composition commutative, alors l'expression du binôme est valide. Pour n=2, on a:

$$(F+G)\circ(F+G)=F\circ F+F\circ G+G\circ F+G\circ G=F^2+2F\circ G+G^2\,.$$

Et plus généralement pour n entier :

$$(F+G)^n=F^n+nF^{n-1}\circ G+\ldots+nF\circ G^{n-1}+G^n$$

Ce théorème se démontre en faisant appel à la définition d'une somme de deux opérateurs et à la propriété de linéarité. De ces deux propriétés découle que la loi de composition est distributive (au sens actuel) à droite et à gauche. De cette distributivité et de la commutativité de la composition des opérations découle le théorème du binôme, que les symboles représentent des nombres, des opérateurs ou toute autre entité qui se compose selon les mêmes lois.
Murphy s'engage ensuite dans une deuxième généralisation, qui porte sur le domaine de définition de l'exposant. Pour ce faire il procède en deux étapes. La première étape consiste à étendre la validité du théorème du binôme à un exposant *n* infini. Ce faisant, il obtient le théorème de Taylor, en procédant à un double passage à la limite, de façon quelque peu abrupte.
Partant de l'identité $\Psi=\Delta+1$, il élève les deux membres de l'équation à la puissance *n,* où *n* est fini, et il applique à une fonction quelconque f :

$$\Psi^n[f](x)=f(x+nh)$$

$$(1+\Delta)^n[f](x)=f(x)+n\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(x)+\ldots+\Delta^n f(x)$$

[458] Servois [1814], *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel. Réflexions*, p. 8.

En posant $n = \frac{k}{h}$, il vient :

$$f(x+k) = f(x) + \frac{k}{h}\Delta f(x) + \frac{k(k-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 f(x) + ... + \frac{1}{h^n}\Delta^n f(x)$$

Murphy écrit la limite de cette expression quand h tend vers 0 (k est fixe):

$$\Psi_k[f](x) = f(x+k) = f(x) + kd_x f(x) + \frac{k(k)}{1.2} d_x{}^2 f(x) + ...$$

Puisque cette identité ne repose pas sur les particularités de la fonction, mais découle des propriétés des lois de composition des opérateurs, son omission est légitime. Murphy a pris soin, on s'en souvient, de définir que deux *opérations* sont égales si, appliquées à n'importe quel *sujet*, les résultats sont égaux.

$$\Psi_k = 1 + kd_x + \frac{k^2}{1.2} d_x{}^2 + \frac{k^3}{1.2.3} d_x^3 + ...$$

Murphy a obtenu le développement en série de l'opérateur Ψ_k. L'expression est analogue au développement de Taylor d'une fonction numérique.
A partir de là, l'essai de Murphy devient purement abstrait. Je note désormais la composition comme un produit, laissant ainsi apparaître l'analogie avec le calcul matriciel, et j'utilise le terme d'*opération* au lieu d'opérateur, car la théorie prend l'allure d'une algèbre d'opérations linéaires.
Murphy se restreint à la famille des opérations de succession y_h. Il montre la relation:

$$\mathrm{y}_{h_1}\mathrm{y}_{h_2} = \mathrm{y}_{h_1+h_2}$$

en passant par les expansions définies ci-dessus. La composition des expansions est égale à l'expansion de la somme, car les opérations $h_1 d_x$ et $h_2 d_x$ sont commutatives, linéaires et distributives.
Il se donne ensuite J et j deux opérations linéaires quelconques. Sans autre précaution il suppose l'existence des opérations Θ et Φ définies par les relations :

$$\Theta = \sum_i \frac{\mathrm{J}^i}{i!} \text{ et } \Phi = \sum_i \frac{\mathrm{j}^i}{i!}.$$

Il affirme que ces opérations sont linéaires et vérifient les relations :

$$\Theta\Phi = \sum \frac{(\mathrm{J}+\mathrm{j})^i}{i!} \text{ et } \Theta^n = \sum_i \frac{(n\mathrm{J})^i}{i!}.$$

Il procède à l'extension de la définition de l'exposant à des nombres fractionnaires, négatifs, puis symboliques.

Existence et unicité de l'opération inverse

L'opération inverse de q est notée q^{-1}. Elle est définie par :

$$y = \mathrm{q}[u] \Rightarrow \mathrm{q}^{-1}[y] = u, \forall u.$$

Murphy démontre que l'inverse d'une application composée est la composée des inverses dans l'ordre inverse:

$$(\mathrm{j}\,\mathrm{J})^{-1} = \mathrm{J}^{-1}\mathrm{j}^{-1},$$

et que l'inverse d'une opération linéaire est linéaire.
Il se préoccupe de la non-unicité du résultat de l'opération inverse :

$$\text{Si } \mathrm{q}[p] = 0, \text{ alors } \mathrm{q}[x] = y \Rightarrow \mathrm{q}[x+p] = y \Rightarrow \mathrm{q}^{-1}[y] = x+p.$$

Il définit l'*appendage* d'une opération linéaire comme « le résultat de son action sur 0 ».

Idée d'associativité

Le dernier point à signaler dans cet article est l'émergence d'une idée d'associativité. Murphy remarque que les opérations ψ et Δ, l'opérateur de différence finie, de même que la différentielle, ne se combinent pas de manière associative :

$$\frac{d}{dx}(g \circ f) \neq (\frac{d}{dx}g) \circ f$$

La propriété que Murphy cherche à formuler ici n'est pas à proprement parler la propriété d'associativité telle qu'on la connaît de nos jours, car les trois éléments impliqués n'appartiennent pas à une même algèbre. Il y a deux lois de composition différentes dans l'expression ci-dessus.

Annexe 4 : Citations en rapport avec la partie III

[1] Babbage [1821], *Philosophy of Analysis, f.* 5.
"It is my intention in the following essays to attempt an examination of some of those modes by which mathematical discoveries have been made to point out some of those evanescent links which but rarely appear in the writings of the discoverer but which passing perhaps imperceptibly in his mind have acted as his unerring although his unknown guides. I would however to avoid misconception state at the outset that I have not attempted to explain the nature of the inventive faculty nor am I of the opinion that its absence could be supplied by rules however successfully contrived [.] all that I have proposed is by an attentive examination of the writing of those who have contributed most to the advancement of mathematical science and by continued attention to the operations of my own mind to state in words some of those principles which appear to me to exercise a very material influence in directing the intellect in its transition from the known to the unknown."

[2] Babbage [1989 (1864)], *Passages from the Life of a Philosopher*, p. 429.
"It appeared to me that the highest exercise of human faculties consisted in the endeavour to discover those laws of thought by which man passes from the known to that which was unknown. It might with property be called the philosophy of invention. During the early part of my residence in London, I commenced several essays on induction, generalization, analogy, with various illustrations from different sources. The philosophy of signs always occupied may attention, and to whatever subject I applied myself I was ever on the watch to perceive and record the links by which the new was connected with the known.
Most of the early essays I refer to were not sufficiently matured for publication, and several have appeared without any direct reference to the great object of my life. I may, however, point out one of my earlier papers in the *Philosophical Transactions* for 1817, which, whilst it made considerable addition to a new branch of science, is itself a very striking instance of the use of analogy for the purpose of invention."

[3] Babbage [1827 (1821)], « On the Influence of Signs», pp. 325-326.
"It can scarcely excite our surprise that the earlier geometers, engaged in successfully employing the most powerful instrument of discovery which human thought has yet contrived, and seduced by the splendour of the view their science had opened to them, should press with earnestness to enlarge its boundaries by new applications, rather than exert their genius in explaining the causes which have combined to advance it to such unrivalled eminence. On the discovery of those branches which have so completely altered the face of the science, the use of the new acquisitions was too inviting to allow time for any very scrupulous enquiry into the principles on which they were founded: satisfied with the accuracy of the results at which they arrived, the desire of multiplying them naturally prevented any return on their steps for the purpose of applying themselves to the less promising task of establishing on secure foundations, principles of whose truth they felt confident.
These efforts to extend the reach rather than fix the basis of the new calculus, were undoubtedly to be admired at the period to which we refer: an acquaintance with its extensive bearings ought justly to have no inconsiderable influence on the form in which its elements should be delivered; hence the lapse of nearly a century has been required to fix permanently the foundations on which the calculus of Newton and of Leibnitz shall rest. Time which has at length developed the various bearings of the differential calculus, has also accumulated a mass of materials of a very heterogeneous nature, comprehending fragments of unfinished theories, contrivances adapted to peculiar purposes, views perhaps sufficiently general, enveloped in notation sufficiently obscure, a multitude of methods leading to one result, and bounded by the same difficulties, and what is worse than all, a profusion of notations (when we regard the whole science) which threaten, if not duly corrected, to multiply our difficulties instead of promoting our progress. "

[4] Babbage [1827 (1821)], « On the Influence of Signs», pp. 330-331.
"The assumption of lines and figures to represent quantity and magnitude, was the method employed by the ancient geometers to present to the eye some picture by which the course of their reasonings might be traced: it was however necessary to fill up this outline by a tedious description, which in some instances even of no peculiar difficulty became nearly unintelligible, simply from its extreme length: the invention of algebra almost entirely removed this inconvenience, and presented to the eye a picture perfect in all parts, disclosing at a glance, not merely the conclusion in which it terminated, but every stage of its progress."

[5] Babbage [1827 (1821)], « On the Influence of Signs», p. 332.
"The power which we possess by the aid of symbols of compressing into small compass the several steps of a chain of reasoning, whilst it contributes greatly to abridge the time which our enquiries would otherwise occupy, in difficult cases influences the accuracy of our conclusions."

[6] Babbage [1827 (1821)], « On the Influence of Signs», p. 336.

"The utility of the unknown quantities in algebra, arises from their capability of being operated on without reference to the determined values for which they are placed, the advantage of employing letters for the known quantities, consists in their similarity to general terms in language, and the consequent extension of the reasoning from an individual case to a numerous species. The light in which this question has been regarded, is purely arithmetical, it may however be placed in another point of view, in which without any change in the quantities concerned, it is still more general in its nature; instead of restricting the equation $x^2 - bx = -a$ to number, it may be considered as indicating that x is composed of a and b in such a manner, that when its value is substituted in that equation, all the terms shall mutually destroy each other. This signification, it is true, is not contained in the original question, but arises form the equation into which it is translated: the language of signs is far more general than that of arithmetic, a circumstance which is not perhaps sufficiently attended to in the application of it to questions of pure number."

[7] Babbage [1827 (1821)], « On the Influence of Signs», p. 337.

"If a line is made use of to represent number, since some other line is the standard unit, it is impossible by such means to represent number in the abstract, but if number is denoted by a letter, there is nothing in the sign which at all indicates the magnitude of that which it represents."

[8] Babbage [1827 (1821)], « On the Influence of Signs», p. 338.

"The indication of the extraction of roots by means of an appropriate sign, instead of actually performing the operation, is one of the circumstances which Add.generality to the conclusions of algebra, and the same principle of indicating operations, instead of executing them, when employed with judgement, contributes frequently in no small degree to the perspicuity of the result, and sometimes enables us to read in the conclusion every stage which has been passed through in the progress towards it."

[9] Babbage [1827 (1821)], « On the Influence of Signs», p. 343.

"This influence is more remarkable in investigations, where characteristics of operation occur, and when letters are used to the exclusion of number, the relations are not merely more apparent, but the results although attained with difficulty, are more worthy of confidence: the reason of which, is to be found in this circumstance, that when letters only are employed, the functional characteristics convey no meaning except that on which the force of the reasoning depends; but if numbers are used, they convey, besides this signification, a multitude of others, which distract the attention, although they are quite insignificant in producing the result."

[10] Babbage [1821], *Philosophy of Analysis,* ff 41-42.

"Algebra appears at its first invention to have consisted in little more than the employment of a letter to represent a number to be determined by the conditions of the problem: some few simple abbreviations aided the enquiry but the whole object consisted in the discovery of number and its use was therefore restricted to arithmetical enquiries.

The substitution of letters to represent known numbers was the next great step; although its influence was apparent at the time[,] it had extended to a late period and form an essential part of the foundation of that theory of analysis which I propose to develop in the present essay.

To the dominion of number which algebra […] possessed [,] Descartes added that over space [.] and large as was this addition to its empire [,] it was perhaps scarcely less valuable as pointing out the road to other acquisitions than from the importance of the questions over which it gave command. The representation of time and force by means of letters and the applications of algebra to mechanics of ties and other parts of natural philosophy followed with little effort when the road was once opened.

Thus did letters whose signification was at first restricted to pure number gradually acquire other secondary meanings and in various situations they denoted time [,] space [,] direction and a variety of other circumstances: at the same time the definitions which had been formed for symbols [,] when intended to refer solely to number [,] introduced difficulties which had not been anticipated when it was necessary to interpret them under very different circumstances.

This soon rendered apparent the necessity of enlarging the original definitions and in many instances this was tacitly and imperceptibly done without any distinct acknowledgement of the fact.

Such a course was not calculated to remove the objections which had arisen [,] and although it has in some instances been more distinctly admitted [,] yet a full and explicit statement of the principles on which the science of analysis reposes remains yet an object much to be desired.

Several parts have at different times attracted the attention of some of its most skilful cultivators [,] particularly the explanation of the differential calculus as given by its inventors was clogged with illustrations so foreign to the real principles of the science [,] that the attempt to place it on a better foundation have been numerous: the masterly view of the subject which was taken by Lagrange whilst it rested the calculus on a foundation not to be contested has at the same time furnished an example which will have no inconsiderable weight in guiding other reforms. Of the merits of this explanation, I shall have occasions to speak more particularly in another part of this essay.

The cause which has mainly contributed to fetter the language of signs may be found in this circumstance that being in itself a method of reasoning of extreme generality it was discovered through the medium of one of its particular applications, that of numbers; now although number itself is an abstraction and in a certain measure affects almost all the applications of analysis it is still of far less general nature and in several instances has limited the signification of symbols by a reference to its peculiar nature."

[11] Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 44

"The object which I propose to attempt is to separate entirely analysis or the language of signs from all its various applications rejecting from it not merely geometrical considerations but even those of number and to show that when viewed in this light it ultimately resolves itself into propositions which are purely identical or at least that the signification of every equation amounts to nothing more than that when all the operations which are indicated on each side are actually executed every letter which occurs on the one side will be found occurring under precisely similar circumstances on the other and in case any letters stand as representatives of others these latter must be substituted for them before the identity becomes apparent."

[12] Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 51

"Explain this passage as we will it cannot be rendered insensible and although it must be conceded that the grounds on which it rests are perfectly conclusive still it will be allowed that the mind experiences a reluctance and an hesitation on exchanging the quantities with which its senses are familiar for those which are in a manner the beings of its own creation."

[13] Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 54

"These reasons induced me to look amongst the properties of differentials for some one from which the others might be deduced and which should be free from the objections that have been stated. The simplest ought of course to be selected if any such could be found suitable to the purpose. That which I have made choice of is $d(xy) = xdy + ydx$ which combine with $d(x + y) = dx + dy$ will produce all others."

[14] Babbage [1821], *Philosophy of Analysis*, f. 53

"Consistently with the theory of analytical reasoning which I have endeavoured to explain and with the analogy of its most elementary principles it appears to me highly desirable that the perfect identity of all its expressions should not be obscured or infringed by a connection with any of its applications whose evidence is of lower or even of a different nature; and consequently that the transition to which we have referred should be removed as far as possible and that whatever difficulties accompany it should not be attributed to the language of analysis to which they are altogether foreign but be assigned to their real cause the nature of the subject on which that species of reasoning is employed. Such appears to have been the view of Lagrange in his Calculus of Functions and I have always esteemed the merit of that admirable work to repose on this circumstance that by defining the differential or fluxion of any function of x to be the coefficient of the second term of its development when *x* becomes increased by any increment he postponed to the latest possible period a step which is needless as far as regard pure analysis but which at some stage or other is absolutely necessary for many of its applications. Whether that light in which he placed the new calculus is the best of which it admit is comparatively of little importance [.] the great step consisted in entirely dissevering it from infinitesimals [.] when once the mind has been convinced of the utility of such a separation [,] it is not difficult to suggest various definitions by which it may be accomplished. That which I shall now offer was unknown to me when I began this essay and arose entirely from pursuing the reasoning which I have explained when examining the meaning of exponents both of quantities and of functions as indicated by the two equations: $x^{a+b} = x^a x^b$ and $f^{n+m}(x) = f^n f^m(x)$."

[15] Babbage [1817], "Observations on the Analogy", pp. 197- 198.

"The traces of those ideas which, in the mind of the discoverer of any new truth, connect the unknown with the known, are so faint, and his attention is so much more intensely directed to the object, than to the means by which he attains it, that it not unfrequently happens, that while we admire the happiness of a discovery, we are totally at a loss to conceive the steps by which its author ascended to it."

[16] Babbage [1817], "Observations on the Analogy", p. 198.

"Any successful attempt to embody into language those fleeting laws by which the genius of the inventor is insensibly guided in the exercise of the most splendid privilege of intellect, would contribute more to the future progress of mathematical science than any thing which has hitherto been accomplished."

[17] Babbage [1817], "Observations on the Analogy", p. 197.

"It is, however, only as a guide to point out the road to discovery, that analogy should be used, and for this purpose it is admirably adapted."

[18] Gregory [1840 (1838)], "On the nature of symbolical Algebra", p. 208.

"The light, then, in which I would consider symbolical algebra, is, that it is the science which treats of the combination of operations defined not by their nature, that is, by what they are or what they do, but by the laws of combination to which they are subject. And as many different kinds of operations may be included in a class defined in the manner I have mentioned, whatever can be proved of the class generally, is necessarily true of all the operations included under it. This, it may be remarked, does not arise from any analogy existing in the nature of the operations, which may be totally dissimilar, but merely from the fact that they are all subject to the same laws of combination. It is true that these laws have been in many cases suggested (as Mr Peacock has aptly termed it) by the laws of the known operations of number; but the step which is taken from arithmetical to symbolical algebra is, that, leaving out of view the nature of the operations which the symbols we use represent, we suppose the existence of classes of unknown operations subject to the same laws. We are thus able to prove certain relations between the different classes of operations, which, when expressed between the symbols, are called algebraical theorems. And if we can show that any operations in any science are subject to the same laws of combination as these classes, the theorems are true of these as included in the general case."

[19] De Morgan [1841 (1839)], "On the Foundation I", p. 173.

"The extent to which explanation of the meaning of the symbolical results of Algebra has been carried within the last half century; and the complete interpretation of all which formerly appeared incongruous; the separation, as it was called, of the symbols of operation and quantity, which amounts to the use of an algebra in which the symbols represent something more than simple magnitude; —will for some time to come suggest inquiry into the *logic* of this many-handled instrument of reasoning, which seems to be capable of presenting, under fixed laws of operation, all the results which arise from very distinct primary conceptions as to the things operated upon."

[20] De Morgan [1841 (1839)], "On the Foundation I", p. 173.

"When several different hypotheses lead to results which admit of a common mode of expression, we are naturally led to look for something which the hypotheses have in common, and upon which the sameness of the method of expression depends. A comparison of the properties of the ellipse and hyperbola would bewilder the imagination, under any of the distinct definitions which might be given of the two curves; nor would the mind rest satisfied until it had discovered the reason of the similarity which exists between these properties."

[21] De Morgan [1841 (1839)], "On the Foundation I", p. 174.

"Thus a symbol is defined when such rules are laid down for its use as will enable us to accept or reject any proposed transformation of it, or by means of it. A simple symbol is explained when such a meaning is given to it as will enable us to accept or reject the application of its definition, as a consequence of that meaning: and a compound symbol is interpreted, when, having occurred as a result of explained elements, used under prescribed definitions, a necessary meaning can be given to it; the necessity arising from the tacit supposition that the compound symbol, considered as a new simple one, must still be subject to the prescribed definitions, when it subsequently comes in contact with other symbols."

[22] De Morgan [1841 (1839)], "On the Foundation I", p. 174.

"A symbol is not the representation of an external object absolutely, but of a state of the mind in regard to that object; of a conception formed, for the formation of which the mind knows that it is or was indebted to the presence, bodily or ideal, of the object. Those who do not remember this, the real use of a symbol, are apt to dogmatize, declaring one or another explanation of a symbol, that is, the signification by it of one or another impression produced on their own minds, to be real, true, natural or necessary: it being neither one nor the other, except with reference to the particular mind in question."

[23] De Morgan [1841 (1839)], "On the Foundation I", p. 175.

"A symbol may thus denote either magnitude, operation, by which magnitude is attained, or the conception of one extreme arrived at, the other having been the previous object of contemplation. The earlier algebraists most certainly dwelt on the first notion; $a+b$ is with them the result of an operation, in which the method of obtaining it is so completely forgotten, that the *result* $a+b$ is actually obtained by a distinct operation."

[24] De Morgan [1841 (1839)], "On the Foundation I", p. 176.

"The modern algebraists usually dwell on the second notion, namely that of operation; and this I shall adopt in the present paper, not only as the most common mode of conception, but also as being equally capable of connexion with either of the other two."

[25] De Morgan [1841 (1839)], "On the Foundation I", p. 176.

"I separate the following maxims from the rest as being equally applicable to the symbolical algebra which we have, and to any other which we might have. For it must never be forgotten that, though our present inquiry includes only the possible explanations of one given technical algebra, the subject may and probably must end in the investigation of others, or at least in the extension of the present one.

1. A simple symbol is the representative of one process, and of one only.
2. All processes, how many soever, may be looked at in their united effect as one process, and may be represented by one symbol.
3. Every process by which we can pass from one object of contemplation to another, involves a second by which we can reinstate the first object in its position: or every direct process has another which is its inverse."

Index des noms propres

Bibliographie

Sources mansucrites

Babbage Charles, *Essays on the Philosophy of Analysis* (1821) in miscellaneous papers 1789-1890, Add.37202, British Library.

Babbage Charles, correspondence 1806-1899, Add.37182, British Library.

Prevost Pierre, correspondance adressée à Pierre Prevost, MS1048, Bibliothèque Publique et Universeitaire de Genève.

Prevost Pierre, documents scientifiques, MS1057 et 1058, Bibliothèque Publique et Universitaire de Genève.

Sources primaires

Alembert Jean le Rond d', *Discours Préliminaire de l'Encyclopédie*, Paris: Denoël, 1984, [1ère éd. 1751]

-------, « Géométrie », in *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Stuttgart-Bad Cannstatt : F. Frommann, 1966

Anonymous [Brougham], « Review of 'On the Necessary Truth of Certain Conclusions Obtained by Means of Imaginary Expressions', by Robert Woodhouse », *Edinburgh Review* 1 (1803): 407-412.

Anonymous [Reynolds], *Strictures on Certain Parts of 'Peacock's algebra' by a Graduate.* Cambridge: [s.n.], 1837.

Arbogast Louis François Antoine, *Du calcul des dérivations*, Strasbourg: [s.n.], 1800.

Argand Jean Robert, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, préface de J. Hoüel, introduction de Jean Itard et suivie d'un appendice contenant des extraits des Annales de Gergonne, relatifs à la question des imaginaires, Paris: Blanchard 1971 [reprint de la 2ème éd. 1874], [1ère éd. 1806].

Babbage Charles, Herschel John, « Preface » in Charles Babbage, *Memoirs of the Analytical Society*, in *The Works of Charles Babbage* vol. 1, Martin Campbell-Kelly (éd), London: W. Pickering, 1989, [1ère éd. 1813].

Babbage Charles, « An Essay towards the Calculus of Functions », *Philosophical Transaction of the Royal Society* 105 (1815): 389-423; 106 (1816): 179-256.

--------, « Demonstrations of Some of Dr Matthew Stewart's General Theorems », *Journal of Science and Arts* (1816): 6-24.

-------, « Observations on the Analogy which subsists between the Calculus of Functions and other Branches of Analysis », *Philosophical Transaction of the Royal Society* 107 (1817): 197-216.

-------, « Solutions of Some Problems by Means of the Calculus of Functions », *Journal of Science and the Arts* 2 (1817): 371-379.

-------, « An Examination of Some Questions connected with Games of Chance », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 9 (1821): 153-177 [read 1820].

-------, « Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 1 (1822): 63-76 [read 1820].

-------, « On the Application of Analysis to the Discovery of Local Theorems and Porisms», *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 9 (1823): 337-352 [read 1820].

-------, « On a Method of Expressing by Signs the Action of Machinery», *Philosophical Transactions of the Royal Society* 116 (1826):250-265.

-------, « On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 2 (1827): 325-377, [read in 1821].

-------, « Notation », in *Edinburgh Encyclopaedia* vol.15 (1830): 394-399.

-------, « Porisms », in *Edinburgh Encyclopaedia* vol. 17 (1830): 106-114.

-------, *Reflections on the Decline of Science in England and on Some of its Causes*, London: B. Felloes, 1830.

-------, *Passages from the Life of a Philosopher*, in *The Works of Charles Babbage*, vol. 11, Martin Campbell-Kelly (éd), London: W. Pickering, 1989, [1ère éd. 1864].

Berkeley George, *Nouvelle Théorie de la Vision*, in *Œuvres de George Berkeley*, vol. 1, traduit de l'anglais par Sandra Bernas, Geneviève Brykman (éd.), Paris: Presses Universitaires de France, 1985 [1ère éd. 1709].

-------, *Principes de la Connaissance Humaine*, in *Œuvres de George Berkeley*, vol. 1, traduit de l'anglais par Sandra Bernas, Geneviève Brykman (éd.), Paris: Presses Universitaires de France, 1985 [1ère éd. 1710].

-------, *De Motu,* in *Œuvres de George Berkeley*, vol. 2, traduit de l'anglais par Sandra Bernas, Geneviève Brykman (éd.), Paris: Presses Universitaires de France, 1987 [1ère éd. 1721].

-------, *L'Analyste*, in *Œuvres de George Berkeley*, vol. 2, traduit de l'anglais par Sandra Bernas, Geneviève Brykman (éd.), Paris: Presses Universitaires de France, 1987 [1ère éd. 1734].

-------, *Défense de la libre-pensée en mathématiques*, in *Œuvres de George Berkeley*, vol. 2, traduit de l'anglais par Sandra Bernas, Geneviève Brykman (éd.), Paris: Presses Universitaires de France, 1987 [1ère éd. 1735].

Boole George, « On a General Method in Analysis », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 93 (1844): 225-282.

-------, *Mathematical Analysis of Logic*, Oxford: Basil Blackwell, 1951 [reprint Cambridge: 1847], [1ère éd. 1847].

-------, *Les lois de la pensée*, traduit de l'anglais et introduit par Souleymane Bachir Diagne, Michel Blay, Hourya Sinacoeur (éd.), Paris: J. Vrin, 1992 [1ère éd 1854].

-------, *Finite Differences,* J. F. Moulton (éd.), New York: Chelsa Publishing Company 1970 (5ème éd) [1ère éd. 1860].

Brinkley John, « An Investigation of the General Term of an Important Series in the Inverse Method of Finite Differences », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 107 (1807): 114-132.

Brougham Henry, « General Theorems, chiefly Porisms, in the Higher Geometry », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 98 (1798): 378-396.

Buée Adrian Quentin, « Mémoire sur les Quantités imaginaires », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 106 (1806): 23-88 [read in 1805].

Campbell George, *The Philosophy of Rhetoric*, London, [s.n.], 1776.

Carnot Lazare, *Géométrie de position à l'usage de ceux qui se destinent à mesurer les terrains,* B. M. Duprat, 1803.

Carnot Lazare, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, préf. de Marcel Mayot, Paris: A. Blanchard, 1970 [2ème éd. 1797].

-------, *Mémoire sur les relations qui existent entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace,* suivi d'un *Essai sur la théorie des transversales*, Paris: Courcier, 1806.

Cayley Arthur « On the Theory of Groups, as depending on the Symbolic Equation $\mathsf{J}^n = 1$ », *Philosophical Magazine* série 4, vol. 7 (1854): 40-47; 408-409.

-------, « Developments on the Porism of the In-and-circumscribed Polygon », *Philosophical Magazine* série 4, vol. 7 (1854): 339-345.

-------, « On the Porism of the In-and-circumscribed Triangle, and on an Irrational Transformation of two Ternary Quadratic Forms each into itself », *Philosophical Magazine* série 4, vol. 9 (1855):513-517.

Chambers, *Cyclopaedia or, and Universal Dictionary of Arts and Sciences*; (…), (6ème éd.), London, 1750 [1ère éd 1727].

Chasles Michel, *Traité de Géométrie supérieure*, Paris: [s.n.], 1852.

-------, *Les Trois livres de porismes d'Euclide: rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions*, Paris: Mallet-Bachelier, 1860.

-------, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris: [s.n.], 1889 (3ème éd. conforme à la 1ère), [1ère éd. 1875].

Condillac Etienne Bonnot de, *La langue des calculs*, Lille: Presses universitaires de Lille, 1981 [1ère éd. 1798].

Cousin Victor, *Philosophie écossaise*, Paris: Librairie Nouvelle, 1857.

Davies T.S. ("Shadow") « An Analytical Discussion of Dr Matthew Stewart's General Theorems », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 15 (1844): 573-608.

Degerando Joseph Marie, *Des signes et de l'art de penser considérés dans leurs rapports mutuels,* Paris: [s.n.], 1800.

Descartes René, *La Géométrie*, Nantes: AREFPPI, 1984 [1ère éd. 1637].

Diderot Denis, *Lettre sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient,* in André Billy, *Œuvres / Diderot*, introd. de André Billy (coll. La Pléiade), [Paris]: Gallimard, 1951, [1ère éd. 1749].

Frend William, *The Principles of Algebra, London*: [s.n.], 1796.

Gattel Claude Marie, *Dictionnaire universel portatif de la langue française : avec la prononciation figurée*, Paris, 1813.

Gilbert Davies, « On the Nature of Negative and Imaginary Quantities », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 121(1831): 91-97.

Gompertz Benjamin, *The Principles and Application of Imaginary Quantities, Book 1, to which are added, Some Observations on Porisms, being the First of a Series of Original Tracts on Various Parts of the Mathematics*, London: [s.n.], 1817.

Graves Charles, « On the Calculus of Operation », *Philosophical Magazine* 34 (1849): 119-126.

Graves John, « An Attempt to rectify the Inaccuracy of Some Logarithmic Formulae », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 119 (1829): 171-186 [read 1828].

Greatheed S.S., « On General Differentiation », *Cambridge Mathematical Journal* 1 (1839) 1: 12-22; 120-128.

Greenfield William, « On the Use of Negative Quantities in the Solution of Problems by Algebraic Equations », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 1 (1784): 131-145.

Gregory Duncan, « On the Elementary Principles of the Application of Algebraical Symbols to Geometry», *Cambridge Mathematical Journal* 2 (1839)7: 1-9.

-------, « On the Real Nature of Symbolical Algebra », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 14(1840): 208-216 [read 1838].

Hamilton William Rowan, « Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time », *The Transactions of the Royal Irish Academy* 17 (1837): 293-421 [read 1833; 1835].

-------, *Lectures on Quaternions*, Dublin: Hodges&Smith, 1853.

Hamilton William, *Fragments de philosophie écossaise*, traduit par Louis Peisse, préface note et appendice de Louis Peisse, Paris: librairie de Ladrange, 1840.

-------, *Lectures on Metaphysics and Logic* (4 vol.), préface de Friedrich O. Wolf, et préface à la 2ème éd. de Mansel et John Veitch, de Stuttgart-Bad Cannstatt: F. Fromann Verlag, 1970 (fac simile de la 2ème édition, London 1861-1866) [1ère éd. 1859].

Herschel John F. W., « Consideration of Various Points of Analysis », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 104 (1814): 440-468.

-------, « On the Developement of Exponential Functions; together with Several New Theorems Relating to Finite Differences », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 106 (1816): 25-45.

-------, « On Circulating Functions, and on the Investigation of a Class of Equations of Finite Differences into which they enter as Coefficients », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 108 (1818): 144-168.

-------, « Mechanism of the Heavens, by Mrs Somerville », *Quaterly Review* 47 (1832): 537-559.

-------, *Discours sur l'étude de la philosophie naturelle*, Paris: Paulin Editeur, 1834.

Hume David, *A Treatise of Human Nature: being an Attempt to introduce the Experimental Method of Reasoning into Moral Subjects*, London: John Noon, 1739.

-------, *Enquête sur l'entendement humain,* traduit de l'anglais par Didier Deleule (coll. Livre de Poche : Classiques de philosophie), Paris: Librairie Générale de France, 1999 [1ère édition 1748].

Hutton Charles, *A Mathematical and Philosophical Dictionary*; with an introd. by Richard L. Gregory, Bristol: Thoemmes Press, 2000 [1ère éd 1796].

Kelland Philip, « On General Differentiation », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 14 (1840): 567-618 [read 1839].

L'Huillier Simon, *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique, appliquées à la recherche des lieux géométriques*, Genève: [s.n.], 1809.

Lacroix Sylvestre François, *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, Paris: Coursier, 1806 (2ème éd.), [1ère éd. 1802].

Lagrange Joseph Louis, « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à l'intégration et à la différentiation des variables», in *Œuvres de J. L. de Lagrange*, vol. 3, réimpression de l'édition de 1867, Hildesheim: G. Olms, 1973 [1ère éd. 1772].

-------, « Leçons élémentaires sur les mathématiques», in *Œuvres de J. L. de Lagrange*, vol. 7, réimpression de l'édition de 1867, Hildesheim: G. Olms, 1973 [1ère éd. 1795].

-------, « Théorie des fonctions analytiques » in *Œuvres de J. L. de Lagrange*, vol. 9, réimpression de l'édition de 1867, Hildesheim: G. Olms, 1973 [1ère éd. 1797].

-------, « Leçons sur les fonctions », in *Œuvres de J. L. de Lagrange*, vol. 10, réimpression de l'édition de 1867, Hildesheim: G. Olms, 1973 [1ère éd. 1808].

Leibniz Gottfried Wilhelm, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*. Paris: GF Flammarion, 1990 [1ère éd 1765].

Leslie John, « On the Resolution of Indeterminate Problems », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 2 (1788): 193-212.

-------, *Elements of Geometry and Plane Trigonometry*, Edinburgh: [s.n], 1811 (2ème édition) [1ère éd 1809].

-------, *Geometrical Analysis and Geometry of Curves Lines,* Edinburgh: Tait, 1821.

Locke John, *Essai Philosophique concernant l'Entendement Humain*, traduit de l'anglais par Coste, Emilienne Naert (éd.), Paris: Librairie Philosophique, 1998 [1ère éd. 1690].

Maclaurin Colin, *Geometria Organica; sive, descriptio linearum curvarum universalis*, etc., London: [s. n.], 1720.

-------, « A letter from Mr. Collin Mac Laurin, Professor of Mathematicks at Edinburgh, and F.R.S. to Martin Foljes, Esq; V. Pr. R. S. concerning Aequations with Impossible Roots », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 34 (1726-1727): 104-112.

-------, *A Treatise of Fluxions,* Edinburgh: [s.n.], 1742.

-------, *A Treatise of Algebra*, Edinburgh: [s.n.], 1748.

Maseres Francis, *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra,* London: [s.n.], 1758.

McCosh James, *The Scottish Philosophy: Biographical, Expository, Critical, from Hutcheson to Hamilton,* Hildesheim: G. Olms, 1966 [1ère éd. 1875].

Morgan Augustus de, "Calculus of Functions", in *Encyclopaedia Metropolitana*, vol. 2, 305-392, 1836 [date de publication de l'article; le volume est publié en 1845].

-------, « Functions, (calculus of) », in *Penny Cyclopaedia*, vol. 11, 1838.

-------, « Mathematics », in *Penny Cyclopaedia*, vol. 15, 1839.

-------, « Negative and Impossible quantities », in *Penny Cyclopaedia*, vol. 16, 1840a.

-------, « Operation », in *Penny Cyclopaedia*, vol 16, 1840b.

-------, « On the Foundation of Algebra I », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7 (1841): 173-187 [read 1839].

-------, « On the Foundation of Algebra II », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7 (1842): 287-300 [read 1841].

-------, « On the Foundation of Algebra III », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1844): 139-142 [read 1843].

-------, « On the Foundation of Algebra IV », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1847): 241-254 [read 1844].

-------, *Formal Logic or the Calculus of Inference: Necessary and Probable,* [s.l.]: Adament Media Corporation, cop, 2002 [1ère éd. 1847].

-------, « On the Structure of the Syllogism, and on the Application of the Theory of Probabilities to Questions of Argument and Authority », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1849): 379-408 [read 1846].

-------, *Trigonometry and Double Algebra*, Taylor, Walton, & Maberly: London, 1849.

-------, « On the Early History of Infinitesimals in England », *The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine*, Série 4, n°26 (1852): 321-330.

-------, « On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in particular of the Copula, and the Application of the Theory of Probabilities to Some Questions of Evidence », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9 (1856): 79-127 [read 1850].

-------, « On the Syllogism, N° III, and on Logic in General », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 10 (1864): 173-230 [read 1858].

-------, « On the Syllogism N° IV and on the Logic of Relations », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 10 (1864): 331-358 [read 1860].

-------, « On the Syllogism N° V » *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 10 (1864): 428-487 [read 1862].

-------, « On Infinity and on the Sign of Equality », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 11(1866): 145-189 [read 1864].

Murphy Robert, « First Memoir on the Theory of Analytical Operations », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 127 (1837): 179-210.

Peacock George, *Treatise on Algebra*, Cambridge: J. & J. J. Deighton, 1830.

-------, *Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis*, London: R. Taylor, 1834 [read 1833].

Playfair John, « On the Arithmetic of Impossible Quantities *», Philosophical Transactions of the Royal Society* 68 (1778): 318-343.

-------, « Biographical account of Matthew Stewart », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 1 (1784).

-------, « On the Origin and Investigation of Porisms », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 3 (1792): 154-204.

-------, « Review of Laplace's *Mécanique céleste* », *Edinburgh Review* 11 (1808a) 22: 249-284.

-------, « Review of *Mémoire sur les quantités imaginaires*, by A.-Q. Buée», *Edinburgh Review* 12 (1808b) 24: 306-318.

-------, « Review of John Leslie's *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, & Plane Trigonometry,* by Leslie », *Edinburgh Review* 20 (1812) 39: 79-100.

-------, « A general View of the Progress of Mathematical and Physical Science since the Revival of Letters in Europe », in *Encyclopaedia Britannica*, suppl vol. 2 et 4 de la 4ème, 5ème et 6ème éd, 1824.

Poncelet Jean Victor, *Traité des propriétés projectives des figures* (2ème éd.), Paris: Gauthier-Villars, 1865-1866 [1ère éd. 1822].

Prevost Pierre, *De l'Influence des Signes sur la Formation des Idées*. Paris: [s.n.], 1800.

-------, Essais Philosophiques. Paris: [s.n.], 1804.

Reid Thomas, « An Essay on the Quantity », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 45 (1748): 505-51.

-------, *An Inquiry into the Human Mind,* éd. et introd. Timothy Duggan, Chicago: The University of Chicago Press, 1970 [1ère éd. 1764].

-------, *Essays on the Intellectual Powers of Man*, Introd. de Baruch A. Brody. London: The M.I.T Press, 1969 [1ère éd 1785].

Servois François Joseph, *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, suivi de quelques réflexions relatives aux divers points de vue sous lesquels cette branche* *d'analyse a été envisagée jusqu'ici, et, en général, à l'application des systèmes métaphysiques aux sciences exactes*, Nîmes: impr. de P. Blachier-Belle, 1814.

Simson Robert, « Pappi Alexandrini Propositiones duae Generales, Quibus Plura ex Euclidis Porismatis Complexus Est, Restitutae a Viro Doctissimo Rob. Simson, math. Prof. Glasc. Vid. Pappi Praefationem ad Lib. 7 Coll. Math. Apollonii de Sectione Rationis Libris Duobus a Clariss. Hallejo Praemissam Pag. VIII & XXXIV », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 32 (1722-1723): 330-340.

-------, *Apollonii Pergaei Locorum planorum libri II. Restituti a Roberto Simson*, Glasgow: excudebant Rob. et And. Foulis, 1749.

-------, *Opera quædam reliqua, scilicet I. Apollonii Pergæi de sectione determinata libri II. restituti, duobus insuper libris aucti. II. Porismatum liber quo doctrinam hanc veterum geometrarum ab oblivione vindicare, et ad captum hodiernorum adumbrare constitutum est. III. De logarithmis liber. IV. De limitibus quantitatum et rationum, fragmentum. V. Appendix pauca continens problemata ad illustrandam præcipue veterum geometrarum analysin. Nunc primum post auctoris mortem in lucem edita impensis Philippi Comitis Stanhope cura vero Jacobi Clow.* Copious MS. notes [by Professor Eisenman], Glasguæ, 1776.

-------, *The elements of euclid viz the first six books. together with the eleventh and twelfth the errors by which theon or others have long ago vitiated these books are corrected and some of euclid's demonstrations are restored. also the book of euclids data in like manner corrected* (13ème edition), London: [s.n.] 1806 [1ère éd. 1756].

Small Robert, « Demonstrations of Some of Dr Matthew Stewart's General Theorems », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 2 (1788): 112-134 [read 1785].

Somerville Mary, « Preliminary Dissertation », in *Mechanism of the Heavens*, traduction de la *Mécanique céleste* de Laplace, London: Murray, 1831, éd. sur le WEB par Russell McNeil, 2001 (2ème éd.), http: //www.malaspina.com/etext/heavens.htm.

Spence William, *Mathematical Essays with a Brief Memoir of the Author*, éd. J. F. W. Herschel, London, 1820.

Stewart Dugald, *Elements of the Philosophy of the Human Mind*, vol. 1, in *The collected works of Stewart Dugald*, vol. 2, introd. de Haakonssen Knud, Bristol: Thoemmes Press, 1994 [1ère éd. 1792].

-------, *Elements of the Philosophy of the Human Mind*, vol. 2, in *The collected works of Stewart Dugald*, vol. 3, introd. de Haakonssen Knud, Bristol: Thoemmes Press, 1994 [1ère éd. 1814].

-------, *Elements of the Philosophy the Human Mind*, vol. 3, in *The collected works of Stewart Dugald*, vol. 4, introd. de Haakonssen Knud, Bristol: Thoemmes Press, 1994 [1ère éd. 1827].

-------, *Dissertation: Exhibiting the Progress of Metaphysical, Ethical and Political Philosophy since the Revival of Letters in Europe*, in The collected works of Stewart Dugald, vol. 1, introd. de Haakonssen Knud, Bristol: Thoemmes Press, 1994 [1ère éd. 1822].

Stewart Matthew, *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics*, Edinburgh: A. Murray and J. Cochran, 1746.

-------, *Tracts Physical and Mathematical, containing an Explication of several... Points in Physical Astronomy; and a New Method for ascertaining the Sun's Distance from the Earth, by the Theory of Gravity*, Edinburgh: [s.n.], 1761.

-------, *The Distance of the Sun from the Earth determined by the Theory of Gravity... Being a Supplement to Tracts Physical and Mathematical, lately Published by the same Author*, Edinburgh: [s.n.], 1763.

Toplis John, « On the Decline of Mathematical Studies and the Sciences Dependent on them », *Philosophical Magazine* 20 (1805): 25-31.

Wallace William, « Some Geometrical Porisms with Examples of their Application » *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 4 (1798): 107-134.

-------, « Porism », *Encyclopaedia Britannica*, 3ème éd, vol. 15, pp. 394-400, 1801.

-------, « Fluxion », *Encyclopaedia Britannica*, 5ème éd, vol. 8, 1817 (écrit pour la 4ème édition 1810).

-------, « Fluxion », *Edinburgh Encyclopaedia*, vol. 9, 1815.

Warren John, *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*, Cambridge: [s.n.], 1828.

-------, « Consideration of the Objections Raised against the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities, *Philosophical Transactions of the Royal Society* 119 (1829): 241-254.

-------, « On the Geometrical Representation of the Powers of Quantities, Whose Indices Involve the Square Roots of Negative Quantities », *Philosophical Transactions* 119 (1829): 339-359.

Whately Richard, *Elements of Logic,* éd. Paola Dessi, Bologna: CLUEB, 1988 [reprod. de la 1ère éd. 1826].

Woodhouse Robert, « On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by Means of Imaginary Quantities », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 91 (1801): 89-119.

-------, « On the Independence of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation; and on the Advantages to be derived from their Separation », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 92 (1802): 85-125.

-------, *The Principles of Analytical Calculation*, Cambridge: [s.n.], 1803.

-------, « On the Integration of Certain Differential Expressions with which Problems in Physical Astronomy are connected », *Philosophical Transactions of the Royal Society* 94 (1804): 219-278.

-------, *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century*, Bronx: Chelsea Publishing Company, 1964, [1ère éd 1810].

Sources secondaires

Allaire Patricia, *The Development of British Symbolical Algebra as a Response to `the Problem of the Negatives' with an Emphasis on the Contribution of Duncan Farquharson Gregory*, Thèse, Adelphi University, 1997.

Ashworth William J., « Memory, Efficiency, and Symbolic Analysis: Charles Babbage, John Herschel, and the Industrial Mind », *Isis* 87 (1996) 4: 629-653.

Becher Harvey W., « Woodhouse, Babbage, Peacock, and the Modern Algebra », *Historia Mathematica* 7 (1980a): 389-400.

-------, « William Whewell and Cambridge Mathematics », *Historical Studies in the Physical Sciences* 11 (1980b)1: 1-48.

Berlioz Dominique, *Berkeley: un nominalisme réaliste,* Paris: J. Vrin, 2000 (coll. Bibliothèque des philosophies).

Blay Michel, *La naissance de la mécanique analytique: la science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles*, préf. de Jacques Merleau-Ponty, Paris: Presses Universitaires de France, 1992, (coll. Bibliothèque d'histoire des sciences).

Bourbaki N., *Éléments d'histoire des mathématiques*. Livre II, Algébre, Paris : Hermann, 1964.

Boutroux Pierre, *L'idéal scientifique des mathématiciens: dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes*, Paris: F. Alcan, 1920, (coll. Nouvelle collection scientifique).

Bréhier Emile, *Histoire de la philosophie*, Paris: Presses Universitaires de France, 1950.

Brunschvicg Léon, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris: Blanchard, 1993 [1ère éd. 1912].

Brykman Geneviève, « Introduction », in *Œuvres de George Berkeley,* vol. 2, Geneviève Brykman (éd.), Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

Cajori Florian, *History of Mathematics*, New York: Chelsea Publishing Company, 1985 (4ème éd.) [1ère éd. 1893].

Castillo Enrique, Ruiz-Cobo Maria Reyes, *Functional Equations and Modelling in Science and Engineering*, New-York: Dekker, 1992

Cavaillès Jean, *Philosophie mathématique*, préf. de Raymond Aron, introd. de Roger Martin, Paris: Hermann, 1962 (coll. Histoire de la pensée 6).

Couturat Louis, *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits,* Hildesheim: G. Olms, 1961 [1ère éd. 1901].

Craik Alex D. D., « Geometry, Analysis, and the Baptism of Slaves: John West in Scotland and Jamaica », *Historia Mathematica* 25 (1998): 29-74.

-------, « Calculus and Analysis in Early 19th Century Britain: The Work of William Wallace », *Historia Mathematica* 26 (1999): 239-267.

-------, « Geometry versus Analysis in Early 19th Century Scotland: John Leslie, William Wallace, and Thomas Carlyle », *Historia Mathematica* 27 (2000): 133-163.

Crosland Maurice, Smith Crosbie, « The Transmission of Physics from France to Britain: 1800-1840 », *Historical Studies in the Physical Sciences* 9 (1978): 1-62.

Crowe Michael J., *History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of Vectorial System*, New York: Dover Publ., 1994.

-------, *Calendar of the Correspondence of Sir John Herschel,* Michael Crowe, David R. Dyck, James R. Kevin, (éd.), Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

Da Costa Newton C. A, *Logiques classiques et non classiques. Essai sur les fondements de la logique,* traduit du portugais et complété par Jean-Yves Béziau, Paris: Masson, 1997.

Dahan-Dalmedico Amy, Pfeiffer Jeanne, *Une histoire des mathématiques*, préface de Jean-Toussaint Desanti, Paris: Le Seuil, 1986.

Diagne Souleymane Bachir, « Introduction », in Boole George, *Les lois de la pensée*, traduit de l'anglais et introduit par Souleymane Bachir Diagne, Michel Blay et Hourya Sinacoeur (éd.), Paris: J. Vrin, 1992.

Deleule Didier, « Préface », in Hume David, *Enquête sur l'entendement humain* (coll. Livre de Poche : Classiques de la philosophie), Paris: Librairie Générale de France, 1999.

Dubbey J. M., « Babbage, Peacock and Modern Algebra », *Historia Mathematica* 4 (1977): 295-302.

-------, *The Mathematical Work of Charles Babbage*, Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

Durand-Richard M.-J., *George Peacock [1791-1858]: La synthèse algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des réformes (1830)*. Thèse pour le doctorat de l'EHESS, Paris: 1985.

-------, « Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre: une influence possible de Locke ». *Revue d'Histoire des Sciences* 48 (1990): 129-180.

-------, « Charles Babbage (1791-1871) : De l'Ecole algébrique anglaise à la 'machine analytique' », Mathématiques, Informatique et Sciences humaines 118 (1992): 5-31.

-------, « L'impact des travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise dans les journaux scientifiques autour de 1830 », *Rivista di Storia della Scienza* 3 (1995) 2: 119-156.

-------, « L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance, in C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter (éds), *L'Europe mathématique – Mythes, histoires, identités*, Paris : Editions de la Maison des sciences de l'homme, 1996.

-------, « Le réseau des algébristes anglais et la symbolisation de l'opératoire (1812-1854), WEB : http://ufr6.univ-paris8.fr/lit-math/maths/mjdrcv.html

-------, « Logic *versus* Algebra: English debates and Boole's mediation », in *A Boole Anthology*, J. Gasser (éd.), London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

-------, « Révolution industrielle, logique et signification de l'opératoire », Revue de synthèse, 4ème série, 2-4 (2001): 319-346.

Enros Philip C., « The Analytical Society (1812-1813): Precursor of the Renewal of Cambridge Mathematics », *Historia Mathematica* 10 (1983): 24-47.

Ewald William, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1999.

Fisch Menachem, *William Whewell Philosopher of Science*, Oxford: Clarendon Press, 1991.

-------, « 'The Emergency which has arrived': the Problematic History of Nineteenth Century British Algebra – A Programmatic Outline », *British Journal for the History of Science* 27 (1994): 247-76.

-------, « The Making of Peacock's *Treatise on Algebra*: A case of Creative Indecision », *Archive for the History of Exact Sciences*, 54 (1999): 137-179.

Fisette Denis, Poirier Pierre, *Philosophie de l'esprit: état des lieux*, Paris: J. Vrin, 2000.

Gagnon Maurice, Hébert Daniel, *En quête de science: introduction à l'épistémologie,* [Saint Laurent]: Fides, 2000.

Gardies Jean-Louis, *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse? Essai de définition*, Paris: J. Vrin, 2001.

Garland Martha M., *Cambridge before Darwin : the Ideal of a Liberal Education*, 1800-1860, Cambridge: Cambridge University Press, 1980,

Grattan-Guinness Ivor, *The Development of the Foundations of Mathematical analysis from Euler to Rieman*, Cambridge: MIT Press, 1970.

-------, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, 2 vol., éd. Ivor Grattan-Guinness, London: Routledge, 1994, (coll. Routledge reference).

Grattan-Guinness Ivor, Bornet Gérard, *George Boole: Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, éd. Grattan-Guinness Ivor, Bornet Gérard, Basel: Birkhäuser, 1997 (coll. Science Networks, Historical Studies).

Grave Selwyn A., *The Scottish Philosophy of Common Sense,* Westport Connecticut: Greenwood Press, 1977.

Graves, Robert Perceval, *Life of Sir William Rowan Hamilton, including Selections from his Poems, Correspondence, and Miscellaneous Writings*, 3 vols, New York: Arno Press, 1975 [1ère éd. 1882-1889].

Griffin-Collart Evelyne, *La philosophie écossaise du sens commun: Thomas Reid et Dugald Stewart*, Bruxelles: Académie royale de Belgique, 1980.

Grize Jean-Blaise, *Essai sur le rôle du temps en analyse mathématique classique,* Thèse de doctorat à l'Université de Neuchâtel, [S.l.]: [s.n.], Neuchâtel: Impr. nouvelle L.-A. Monnier, 1954.

Guicciardini Niccolo, *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800*, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Haakonssen Knud, « Introduction », in *The Collected Works of Dugald Stewart*, vol. 1, Bristol: Thoemmes Press, 1994.

Hairer E., Wanner G., *Analysis by Its History*, New York: Springer, 1996.

Hankins Thomas L., *Sir William Rowan Hamilton*, London: Johns Hopkins University Press, 1980.

Heath Peter, *On the Syllogism: and other Logical Writings, by Augustus De Morgan*, éd. et introd. par Peter Heath, London: Routlege and Kegan Paul, 1966.

Hyman Anthony, *Charles Babbage: Pioneer of the Computer*, Oxford: Oxford University Press, 1982.

Jacob Pierre, Feyerabend Paul, Goodman Nelson [et al.], *De Vienne à Cambridge: L'héritage du positivisme logique de 1950 à nos jours. Essai de philosophie des sciences,* choisis, traduits et présentés par Pierre Jacob, Paris: Gallimard, 1980.

Koppelman Elaine, « The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra », *Archive for the History of Exact Sciences* 8 (1971): 155-242.

Laita Luis, « Influences on Boole's Logic: The Controversy between William Hamilton and Augustus De Morgan », *Annals of Science* 36 (1979): 45-65.

Liard Louis, *Les Logiciens anglais contemporains,* Paris: F. Alcan, 1890 (3ème éd.) [1ère éd. 1878].

Lusternik L. A., Petrova S. S. « Les premières étapes du calcul symbolique », *Revue d'Histoire des Sciences* 25 (1972)201: 206.

Macintyre Gordon, *Dugald Stewart: The Pride and Ornament of Scotland*, Brighton: Sussex Academic Press, 2003.

Malherbe Jean-François, *Epistémologies anglo-saxonnes*, Namur: Presses Universitaires de Namur, 1981.

Mathews Jerold, « William Rowan Hamilton's Paper of 1837 on the Arithmetization of Analysis », *Archive for the History of Exact Sciences* 9 (1978): 177-200.

Michaud Yves, *Locke*, Paris: Presses Universitaires de France, 1998, (coll. Quadrige 271).

Novy Lubos, « L'École Algébrique Anglaise », Revue de Synthèse, 3ème série, t. LXXXIV, 49-52(1968):211-222.

-------, *Origins of Modern Algebra*, traduit par Jaroslav Tauer, Leyden: Nordhoff, 1973.

Ohrstrom Peter, « W. R. Hamilton's View of Algebra as the Science of Pure Time and His Revision of This View », *Historia Mathematica* 12 (1985): 45-55.

Olson Richard, « The Reception of Boscovich's Ideas in Scotland », *Isis* 60 (1969): 91-103.

-------, « Scottish Philosophy and Mathematics 1750-1830 », *Journal of History of Ideas* 32 (1971): 29-44.

-------, *Scottish Philosophy and British Physics, 1750-1880: a study in the Foundations of Victorian scientific style*, Princeton: Princeton University Press, 1975.

Panteki Maria, « William Wallace and the Introduction of Continental Calculus to Britain: A letter to George Peacock », *Historia Mathematica* 14 (1987): 119-132.

-------, *Relationships between Algebra, Differentials Equations and Logic in England: 1800-1860*, Council for National Academic Awards (London), Doctoral Dissertation, 1992.

-------, « The Mathematical Background of George Boole's *Mathematical Analysis of Logic* (1847) », in *A Boole Anthology: Recent and Classical Studies in the Logic of George Boole*, J. Gasser (éd.), London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

Peckhaus Volker, « 19th Century Logic between Philosophy and Mathematics », in *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1999): 433-450.

Peisse Louis, « Préface », in Sir William Hamilton, *Fragments de philosophie écossaise,* Paris: Ladrange, 1840.

Poincaré Henri, *La Science et l'Hypothèse*, Paris: Flammarion, 1968, [1ère éd. 1902].

-------, *La valeur de la science*, Paris: Flammarion, 1970 [1ère éd 1905].

Pont Jean-Claude, *L'aventure des parallèles. Histoire de la géométrie non euclidienne: précurseurs et attardés.* Berne: Peter Lang, 1986.

-------, « Aux sources du conventionnalisme », in `*Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIXè siècle*', M. Panza et J.-C. Pont (éds), Paris: A. Blanchard, 1995, pp. 109-144.

-------, « Géométrie et Evidence, Histoire de Géométries », textes du Séminaire de l'année 1997, Paris: Fondation Maison des Sciences de l'Homme, 1997: 39-52.

-------, « Révolution conceptuelle en mathématiques au XIXe siècle », *Philosophical Inquiry*, vol. 23 (2001), n° 1-2, p. 105-146.

Prior, A. N., *Formal Logic*, Oxford: Clarendon Press, 1962 (2ème éd.).

Pycior Helena, *The Role of Sir William Rowan Hamilton in the Development of British Modern Algebra*. Cornell: Cornell University, 1976.

-------, « Benjamin Peirce's Linear Associative Algebra », *Isis* 70 (1979)254: 537 – 551.

-------, « George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra », *Historia Mathematica* 8 (1981): 23-45.

-------, « Early Criticism of the Symbolical Approach to Algebra », *Historia Mathematica* 9 (1982): 392-412.

-------, « Augustus De Morgan's Algebraic Work: The Three Stages », *Isis* 74 (1983): 211-276.

-------, « Internalism, Externalism, and Beyond: 19th Century British Algebra », *Historia Mathematica* 11 (1984): 424-441.

Quine Willard van Orman, *La philosophie de la logique,* traduit de l'américain par Jean Largeault, Paris: Aubier, 1975 (coll. Analyse et raisons 21).

-------, *Le mot et la chose,* traduit de l'américain par Joseph Dopp et Paul Gochet, avant-propos de Paul Gochet, Paris: Flammarion, 1977 (coll. Nouvelle bibliothèque scientifique) [1ère éd. 1960].

Richards Joan L., « The Art and the Science of British Algebra: a Study in the Perception of Mathematical Truth », *Historia Mathematica* 7 (1980): 343-365.

-------, « Augustus De Morgan, the History of Mathematics, and the Foundations of Algebra », *Isis* 78 (1987): 7-30.

-------, « Rigor and Clarity: Foundations of Mathematics in France and England, 1800-1840 », *Science in Context* 4 (1991) 2: 297-319.

Richardson C.H, *An Introduction to the Calculus of Finite Differences*. Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1968 [1ère éd. 1954].

Robert Serge, *La logique, son histoire, ses fondements*, Longueil: Le Préambule, 1978 (coll. Science et théorie).

-------, *Les Révolutions du Savoir: Théorie générale des ruptures épistémologiques*, Longueil: Le Préambule, 1979 (coll. Science et théorie).

Schulthess Daniel, *Philosophie et sens commun chez Thomas Reid (1710-1796)*, Berne: P. Lang, 1983.

Sellars Wilfrid, *Empirisme et philosophie de l'esprit,* préface de Richard Rorty, traduit de l'américain par Fabien Cayla, [Paris]: Editions de l'Éclat, 1992 [1ère éd. 1956].

Smith Crosbie, Wise Matthew Norton, *Energy and Empire: a Biographical Study of Lord Kelvin*, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Tannoch-Bland Jennifer, *The Primacy of Moral Philosophy: Dugald Stewart and the Scottish Enlightenment*, Thèse, Griffith University, 2000.

Tweddle Ian, *Simson on Porisms: an Annotated Translation of Robert Simson's Posthumous Treatise on Porisms and other Items on this Subject,* London: Springer, 2000.

Vuillemin Jules, *Philosophie de l'algèbre*, Paris: Presses Universitaires de France, 1962.

Whittaker E. T., « The Sequence of Ideas in the Discovery of Quaternions »*, Proceedings of the Royal Irish Academy* 50 (1943): 93-98.

Windred G., « The History of Mathematical Time », *Isis* 19 (1933): 121-153.

Wolf Friedrich O., « Préface », in William Hamilton, *Lectures on Metaphysics and Logic*, vol. 1, Stuttgart-bad Cannstatt: F. Fromann Verlag, 1970.

Youschkevitch A. P., « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXè siècle, in *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P. n° 41 (1981)7 :67.