



Thèse

2008

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

---

## Calculabilité des pavages

---

Weiss, Michael

### How to cite

WEISS, Michael. Calculabilité des pavages. Doctoral Thesis, 2008. doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:1332

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:1332>

Publication DOI: [10.13097/archive-ouverte/unige:1332](https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:1332)

UNIVERSITÉ DE GENÈVE  
Département d'informatique  
UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
Lab. d'informatique fondamentale de Marseille

FACULTÉ DES SCIENCES  
Prof. José Rolim  
Dr. Grégory Lafitte

---

# Calculabilité des pavages

## THÈSE

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève  
pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences, mention informatique

par

Michaël Weiss

de

Versonnex (France)

Thèse N° 4021

GENÈVE  
Atelier d'impression ReproMail  
2008



La Faculté des sciences, sur le préavis de Messieurs J. ROLIM, professeur ordinaire et directeur de thèse (Département d'informatique), G. Falquet, professeur titulaire (Faculté des sciences économiques et sociales - Département des systèmes d'information), J. Mazoyer, professeur (École Normale Supérieure - Laboratoire de l'informatique et du parallélisme - Lyon, France), G. Lafitte, maître de conférence et co-directeur de thèse (Université de Provence - Laboratoire d'informatique fondamentale de Marseille - Marseille, France), et J. Kari, professeur (Université de Turku - Department of Mathematics - Turku, Finland), autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 19 septembre 2008

**Thèse -4021-**

**Le Doyen,** Jean-Marc TRISCONE



---

## Remerciements

---

Une thèse est l'aboutissement d'un travail personnel de plusieurs années, au cours desquelles des personnes ont collaboré directement ou indirectement à sa réussite. L'intégralité de ce travail n'aurait pas pu être, ou n'aurait été que partiellement, réussie sans l'aide apportée par ce précieux entourage. Aujourd'hui cette thèse me confirme dans ma position de jeune chercheur, et m'ouvre les portes pour continuer dans cette voie, et c'est envers toutes ces personnes que va ma gratitude.

J'aimerais en tout premier remercier mon directeur de thèse, José Rolim, professeur à l'Université de Genève. C'est lui qui m'a fait découvrir les bases de l'informatique théorique et qui m'a donné envie de poursuivre dans cette voie. Je le remercie de m'avoir offert la possibilité de faire une thèse et d'avoir permis que notre relation professeur/assistant soit la meilleure possible tout au long de ces années. Je le remercie aussi de m'avoir laissé libre d'explorer les différentes branches de l'informatique théorique afin de trouver celle qui m'était la plus adaptée. Je remercie mon co-directeur Grégory Lafitte, maître de conférence à l'Université d'Aix-Marseille. Bien qu'il fût un ami de longue date, c'est notre rencontre au sein de l'Université de Genève qui a permis la naissance de notre collaboration scientifique. Je le remercie de m'avoir transmis une partie de ses connaissances et de m'avoir donné sa passion pour la recherche. Je le remercie aussi d'avoir su jouer à merveille son multi-rôle de directeur de thèse, ami, conseiller, compagnon de voyage et d'avoir eu la patience de relire et corriger nos articles durant de longues séances au Starbucks. Je ne doute pas que l'aboutissement de cette thèse marque le début d'une longue, et toujours plus fructueuse, collaboration scientifique.

Je remercie le professeur Jacques Mazoyer de l'école normale supérieure de Lyon d'avoir accepté d'être dans mon jury. Il est le premier à qui j'ai partagé mes idées et ses intuitions dans le domaine ont été une précieuse aide. Je remercie le professeur Jarkko Kari de l'Université de Turku qui est l'un des experts mondiaux des pavages et qui a aussi accepté d'être dans mon jury. Son opinion très positives sur mes recherches et les différentes directions qu'il a proposé ont été un réel encouragement. Je remercie enfin le professeur Gilles Falquet de l'Université de Genève qui, bien que non expert du domaine, a fait une profonde relecture de ma thèse.

J'aimerais remercier les différentes personnes que j'ai rencontrées et avec qui j'ai échangé mes idées au cours de ses années. Je remercie entre autre Enrico Formenti, Guillaume Theyssier, Philippe Moser, Bruno Durand, Nicolas Ollinger,

Alexis Ballier, Gaétan Richard, Alberto Denny et Gianpiero Cattaneo.

Je remercie les collègues de bureau qui ont partagés ma vie professionnelle durant toutes ces années et avec qui je garde d'excellents souvenirs : Olivier, Matthieu, Thibaud, Luminita, Andreï, Jacques, Marios, Damien, Taras, Pierre L., Aubin, Pierre R., Hacob. Je remercie ma famille qui a été un soutien permanent durant toute cette thèse : Papa, Maman, Papy, Nicolas, Véronique, Jérémie, Jonathan, Timothée, Benjamin et la petite dernière, Émilie Rose.

Je remercie enfin tous les amis qui ont été présents durant toutes ces années et qui ont même tenté de temps en temps de comprendre ma recherche : le DS crew, Pierric, Amiral Alain, Binh, Blaise, Alban, Patric, Andréa, Anna, Anja, Jérémy, Pika, Jérôme, Juan, Fredo, Yan, Mathias, Peter, Claudia, Silvia, Maria.

Je remercie le Fond National Suisse qui m'a accordé une bourse pour faire un post-doc d'une année à Milan. Je remercie le professeur Cattaneo qui m'accueille à Milan ainsi que Alberto qui a fait beaucoup pour ma venue, et Enrico qui m'a permis de me mettre en relation avec le groupe de Milan. En vrac, je remercie aussi Starbucks de nous avoir proposé un cadre de travail agréable pour prévoir, planifier, écrire et corriger nos articles avec Greg durant de nombreuses heures.

Enfin, mes derniers remerciements reviennent bien sûr à Lara, à qui je dédie cette thèse, et qui m'a accompagné et encouragé durant toutes ces années. Son implication dans mes recherches et sa confiance en moi ont été une motivation indéniable pour l'achèvement de ce travail.

---

# Table des matières

---

	<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Premiers pas</b>	<b>15</b>
1.1	Notions de base . . . . .	16
1.1.1	Tuiles colorées . . . . .	16
1.1.2	Tuiles fléchées . . . . .	19
1.1.3	Tuiles étiquetées . . . . .	20
1.1.4	Formes géométriques à coordonnées rationnelles . . . . .	21
1.1.5	Pavages par motifs . . . . .	22
1.1.6	Contraintes locales . . . . .	23
1.2	Équivalence des modèles . . . . .	25
1.3	Arbres associés . . . . .	31
1.4	Principe d'extraction diagonale . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Périodicité et régularité</b>	<b>35</b>
2.1	Pavages périodiques . . . . .	36
2.2	Fonction de quasipériodicité . . . . .	40
2.3	Fonction de quasipériodicité d'un pavage périodique . . . . .	43
2.4	Cardinalité de l'ensemble des pavages générés par un jeu de tuiles	45
<b>3</b>	<b>Construction de Robinson</b>	<b>49</b>
3.1	Jeux de tuiles de Robinson . . . . .	50
3.1.1	Construction . . . . .	50
3.1.2	Notations . . . . .	57
3.2	Le problème du domino . . . . .	59
3.2.1	Problème avec origine imposée . . . . .	59
3.2.2	Indécidabilité du problème du domino . . . . .	63
3.3	Indécidabilité du pavage périodique du plan . . . . .	66
3.4	Inséparabilité récursive des jeux de tuiles finis et de ceux périodiques	70
3.5	Fonctions de quasipériodicité atteignables . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Simulation entre pavages</b>	<b>75</b>
4.1	Notions de simulation . . . . .	75
4.2	Définition de l'universalité et de la complétude . . . . .	83
4.3	Complétude . . . . .	84

4.4	Universalités . . . . .	88
4.4.1	Différentes universalités . . . . .	88
4.4.2	Universalité et complétude . . . . .	94
4.5	Calculabilité des réductions . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Calculabilité des pavages</b>	<b>103</b>
5.1	Réductions totale et exacte . . . . .	103
5.2	Simulation totale des périodiques . . . . .	105
5.3	Théorème du point fixe de Kleene . . . . .	110
5.4	Théorème du point fixe de Kleene avec paramètres . . . . .	113
5.5	Réduction de propriétés et théorème <i>à la</i> Rice pour les pavages . . . . .	116
5.6	Autres problèmes indécidables . . . . .	120
5.7	Diagonalisation . . . . .	123
<b>6</b>	<b>Apériodicité</b>	<b>127</b>
6.1	Le jeu apériodique de 13 tuiles de Čulik et Kari . . . . .	128
6.2	Construction de Durand <i>et al.</i> . . . . .	134
6.3	Construction de jeux de tuiles apériodiques . . . . .	136
6.3.1	Simulation exacte via un découpage du plan . . . . .	136
6.3.2	Constructions de jeux de tuiles apériodiques . . . . .	140

---

# Introduction

---

Le mot *pavage*, comme de nombreux termes scientifiques ayant une représentation concrète dans la vie de tous les jours, regroupe un panel de définitions plus ou moins proche de la notion que nous utilisons dans cette thèse. Il va donc de soit qu'il faut, avant tout, définir le modèle abstrait de *pavage* pour pouvoir le dissocier de son référent concret, mais aussi des autres référents abstraits définissant d'autres branches de la recherche.

Si plusieurs définitions peuvent être données au mot *pavage*, toutes s'accordent sur un noyau commun à partir duquel des contraintes supplémentaires peuvent être précisées. Ce noyau peut-être décrit de la manière suivante : un pavage du plan est une partition de ce dernier par un ensemble de tuiles (appelé *jeu de tuiles*), où la tuile est définie comme un compact d'intérieur non-vide. À cela peuvent s'ajouter de nombreuses conditions supplémentaires, notamment, le jeu de tuiles peut être fini, les tuiles peuvent être à coordonnées rationnelles, les tuiles peuvent être tournées. . .

Le pavage, en tant qu'objet concret, est connu depuis de nombreux siècles et utilisé avant tout comme structure décorative. Les nombreux exemples de pavages pouvant être trouvés à l'Alhambra, et datant du *XII<sup>ème</sup>* siècle montrent une première approche de la complexité pouvant être obtenue à partir d'un jeu de tuiles. Ces types de pavages, où les mêmes éléments se retrouvent translatés par un vecteur (nous parlons alors de pavages périodiques), ont depuis plus d'un siècle été caractérisés par le russe Fedorov, qui a montré qu'il existait exactement 17 classes différentes de pavages. Cette classification repose sur l'énumération des groupes distincts d'isométrie du plan et de l'espace. Ainsi, un pavage est classé selon la combinaison des rotations et des symétries qu'il contient.

Par la suite, les premiers pavages aperiodiques, c'est-à-dire des pavages dont les tuiles ne sont pas régulièrement translatées par deux vecteurs indépendants, ont été trouvés. Entre autres, ceux de Penrose [Pen74] ou de Radin [Rad94, Rad99] en sont de très bons exemples. L'étude de ces pavages est d'un intérêt grandissant depuis la découverte de ce même genre de structures dans les quasi-cristaux [Rad95b, Rad96]. Cette recherche est avant tout géométrique, et apporte des solutions pour mieux comprendre les formations quasi-cristallines en physique.

Les pavages sont donc une façon naturelle de représenter des structures auto-assemblantes. Nous pouvons citer aussi le calcul ADN qui s'intéresse à générer un processus calculatoire avec des protéines d'ADN et dont la représentation théorique la plus proche est le pavage.

## Pavages et informatique

La problématique est pour l'instant encore assez éloignée de l'idée d'informatique puisque l'étude des pavages semble se limiter à une branche de la géométrie. Le lien avec l'informatique s'est concrétisé lorsque les pavages ont été utilisés pour résoudre une question de logique mathématique.

En 1928, Hilbert avait posé la question de savoir si les mathématiques étaient décidables. La réponse négative fut démontrée presque simultanément par Church [Chu36b, Chu36a], qui construisit un problème indécidable en  $\lambda$ -calcul, et par Turing [Tur37] qui démontra l'indécidabilité du problème de l'arrêt. Les problèmes de décision furent ensuite affinés en sous-classes, et la question de la décidabilité des formules de ces classes réapparut. Au début des années 60, Wang introduisit un modèle de pavages basé sur des tuiles colorées et montra une réduction permettant de passer d'une formule de la classe de Kahr (une des sous-classes du problème de décision) à un jeu de tuiles colorées de manière à ce que le jeu de tuiles pave le plan si la formule est satisfaisable [Wan61, Wan62, KMW62].

Ce modèle est une forme de pavages assez basique. Les tuiles sont des carrés unitaires orientés dont chacun des quatre côtés est marqué par une couleur. Nous pouvons ainsi associer deux tuiles si elles ont la même couleur sur leur bord commun. La question naturelle est de considérer un jeu de tuiles et de se demander s'il peut paver le plan, c'est-à-dire s'il est possible de répéter les tuiles autant de fois que voulu et les disposer sur le plan de manière à ce que deux tuiles voisines aient la même couleur sur leur bord commun. Nous obtenons ainsi un modèle de pavages beaucoup plus restrictif que les pavages vus plus haut. L'intérêt de ce modèle en informatique s'est développé à partir du moment où Berger, dans la continuité des travaux de Wang, montra à la fin des années 60 que le problème de savoir si un jeu de tuiles pavait le plan était indécidable et qu'en plus, un jeu de tuiles pouvait *simuler* une machine de Turing, dans le sens que pour toute machine de Turing  $M$  et toute entrée  $w$ , il existe un jeu de tuiles  $\tau_{M,w}$  qui pave le plan si, et seulement si,  $M$  ne s'arrête pas sur l'entrée  $w$  [Ber64, Ber66].

En plus d'apporter la première brique à la conclusion définitive du problème de décision (il faudra attendre les travaux de Gurevich et Koriakov pour le clore [GK72]), Berger lia les pavages à la calculabilité en montrant qu'un calcul était effectué dans les pavages à tuiles colorées. Un nouveau point de vue sur le calcul s'ouvrait donc à la recherche.

## Recherche sur les pavages

Différentes approches sont légitimes sur les pavages, et même en ne se restreignant qu'aux pavages de Wang, les possibilités d'études sont nombreuses. C'est le côté naturel de ce modèle qui permet une telle diversité et offre ainsi une variété d'interprétation du calcul. Les études se sont portées sur la recherche de pavages

apériodiques dans le but de mieux comprendre l'apériodicité ou dans le but de prouver à nouveau le problème du domino<sup>1</sup> en simulant une machine de Turing [AD96, CK97, Oll08, Rob71, DRS08]. Un autre grand axe de recherche concerne les aspects structurels des pavages afin d'obtenir une compréhension plus globale de la complexité des pavages générés par un jeu de tuiles. Cette complexité peut être liée à la calculabilité [Han74, Mye74], à la complexité de Kolmogorov [DLS01] ou encore à la quantification de la *régularité* d'un pavage [Dur99]. Une autre approche consiste à obtenir une bonne caractérisation des propriétés indécidables sur les jeux de tuiles. Nous notons dans cette direction l'approche globale de Julien Cervelle [CD04, Cer02] et les études de cas particuliers [KP99, Kar02, Luk07].

## Direction choisie

Dans cette thèse, l'approche est nouvelle et se fait du point de vue de la calculabilité. Bien que l'objet étudié soit avant tout géométrique, le fait que ce modèle puisse simuler les machines de Turing rend légitime une étude globale des pavages par l'étude des calculs qu'il peut générer. La plupart des aspects décrits ci-dessus s'appuient, d'une manière plus ou moins concise, sur un fond de calcul que nous souhaitons mettre plus en valeur ici. Il nous semble essentiel que le calcul ne soit pas une simple implication de la conception structurelle des pavages mais bien l'*outil* sur lequel les différents axes de la recherche doivent se reposer.

Une étude du calcul des pavages ne peut pas s'arrêter à une simple équivalence entre modèle de calcul. Cette équivalence doit au contraire susciter le désir de comprendre comment le calcul est généré dans ce modèle et obtenir ainsi un nouveau point de vue sur le calcul, un point du vue qui sera géométrique. Les pavages proposent une manière de calculer plus étonnante, ne reposant pas sur un procédé mécanique comme c'est le cas pour les machines de Turing. Car si ce dernier modèle présente une façon de calculer très *mécanique*, l'auto-assemblage des tuiles d'un jeu de tuiles afin de générer un pavage du plan en propose une bien plus *naturelle*. Un de nos objectifs est donc de montrer que les atouts principaux des modèles de calculs se trouvent aussi dans les pavages, entre autres la notion d'universalité et les théorèmes du point fixe de Kleene.

Pour comprendre le calcul des pavages, il est important d'introduire des outils sur les pavages qui soient les plus indépendants possibles des deux principaux modèles étudiés en théorie de la calculabilité : les fonctions récursives à la Church-Rosser et les machines de Turing. Cette idée est encore utopique et sa mise en pratique n'est pas totalement avérée. Il est nécessaire de temps en temps de pouvoir s'appuyer sur un jeu de tuiles générant des motifs qui, bien qu'éloignés de diagrammes espace-temps de machines de Turing, n'en constitue pas moins une extension, marqués en filigramme par des transitions de ces dernières. Il est forte-

---

<sup>1</sup>Nom traditionnel donné au problème de savoir si un jeu de tuiles donné pave le plan.

ment probable que de tels calculs puissent être faits complètement indépendamment des machines de Turing, mais cette thèse a pour but d'apporter une première approche sur les résultats pouvant être obtenus et sur la force de leurs applications. Les résultats ainsi obtenus nous permettent de nous détacher petit à petit du niveau unitaire des tuiles pour obtenir des preuves générales qui s'éloignent des traditionnelles preuves par construction.

## Simulation

La première approche consiste à montrer que le modèle de calcul des pavages est un modèle sur lequel une notion d'universalité peut être définie. L'universalité implique en premier lieu d'avoir un principe de simulation entre les jeux de tuiles et les pavages. Il est donc essentiel d'essayer d'obtenir des outils afin de comparer les pavages entre eux, ainsi que les jeux de tuiles. Obtenir de tels outils sur les machines de Turing n'est pas difficile, car il est en effet aisé de comparer des machines de Turing par le biais des fonctions qu'elles calculent. Différentes approches ont déjà permis d'obtenir des pré-ordres sur les pavages générés par un jeu de tuiles (voir par exemple [Dur99, Dur02]), basés sur les motifs composant ces pavages. Mais cette technique ne permet pas de comparer directement des jeux de tuiles. Pour approcher cette question, nous nous tournons donc vers un autre modèle de calcul géométrique : les automates cellulaires.

Les travaux de Nicolas Ollinger [Oll02] et de Guillaume Theyssier [The05a] sur les automates cellulaires et le groupage, ont permis d'obtenir des notions de simulation sur les automates et ainsi d'avoir un pré-ordre sur ce modèle de calcul. La proximité des automates cellulaires et des pavages<sup>2</sup> laisse penser que ces derniers se prêteraient bien au même type de simulation. De là est née une première notion de simulation entre pavages.

Nous attendons d'un pavage  $P$  simulant un pavage  $Q$  qu'il puisse nous permettre de retrouver le pavage  $Q$  à partir de  $P$  d'une manière récursive. Cela revient à dire que l'information de  $Q$  doit être *formulée* ou *codée* dans  $P$ . Pour cette simulation, nous choisissons que ce codage de l'information se fasse *via* des motifs rectangulaires. Il est ainsi possible de découper  $P$  en rectangles réguliers qui peuvent ensuite être associés à des tuiles de  $Q$ , à l'aide d'une fonction de réduction, afin de reconstruire ce dernier. Nous dirons alors que  $P$  simule fortement  $Q$ .

S'il n'est pas possible de simuler de cette manière tous les pavages existant à partir d'un unique pavage, à cause d'un argument de cardinalité, il est par contre possible de construire un pavage qui simule une infinité dénombrable de pavages pour tout jeu de tuiles. C'est là la notion d'universalité la plus forte que nous obtenons à partir de cette simulation.

Il est à noter que cette simulation est assez large et permet essentiellement de

---

<sup>2</sup>Tous les deux sont des modèles géométriques ; l'un est dynamique et l'autre statique.

comparer les pavages entre eux. Si cette simulation se justifie pour une première compréhension de l'universalité, elle est cependant moins adaptée pour l'obtention de résultats de calculabilité sur les pavages, où nous nous attendons plutôt à une simulation permettant de comparer les jeux de tuiles, et non seulement les pavages, et d'une manière suffisamment restrictive afin de prouver des théorèmes plus forts.

## Calculabilité

Dans la continuité des notions de simulation, la simulation exacte permet de comparer les jeux de tuiles. Cette simulation est beaucoup plus restrictive, car elle exige qu'il existe une fonction de réduction telle que tout pavage généré par le jeu de tuiles simulé soit simulé fortement, *via* une fonction de réduction bijective  $R$ , par un pavage du jeu de tuiles simulant, et que tout pavage généré par le jeu de tuiles simulant simule fortement *via*  $R$  un pavage généré par le jeu de tuiles simulé. Si la première condition garantit que tous les pavages générés par le simulé soient simulés, la deuxième, en revanche, garantit que le simulant ne génère pas plus d'information que le simulé. Il existe ainsi un isomorphisme entre les motifs du simulant et les tuiles du simulé.

Cette notion est assez forte et donne naissance à un pré-ordre sur l'ensemble des jeux de tuiles. Cette simulation est prise comme base de la comparaison des jeux de tuiles. Le premier résultat de calculabilité qui est adapté aux jeux de tuiles est le théorème du point fixe de Kleene (voir entre autres [Odi89]) qui est un des résultats fondamentaux de la calculabilité. Ce théorème est un des théorèmes fondamentaux de la théorie de la calculabilité et son adaptation aux pavages nous semble un outil prometteur. Nous remarquons que le théorème du point fixe de Kleene a récemment été utilisé dans un article de Durand *et al.* [DRS08] dans le but de générer de manière élémentaire un jeu de tuiles apériodique. Notre but dans cette thèse est d'obtenir un théorème du point fixe pour les pavages afin de pouvoir l'appliquer directement et nous montrons que cette généralisation nous permet, entre autres, d'établir un cadre de construction de jeux de tuiles apériodiques.

En utilisant la construction de Robinson, et en la modifiant suffisamment, nous montrons que pour toute modification récursive de jeux de tuiles  $M$ , c'est-à-dire un programme qui prend en entrée un jeu de tuiles et qui renvoie en sortie un autre jeu de tuiles, il existe un jeu de tuiles  $\tau$  qui est un point fixe pour cette modification, ce qui signifie que  $\tau$  simule exactement  $M(\tau)$ . De la même manière, il est possible de prouver un théorème du point fixe avec paramètres de Kleene. Ces deux théorèmes sont les points centraux de cette thèse car c'est vers eux que convergent toutes les constructions et notions introduites précédemment et ils sont les noyaux des applications et des techniques de preuves qui suivront.

Une question récurrente sur les pavages est d'essayer d'obtenir une bonne caractérisation des propriétés générant des ensembles non-récursifs d'indices de jeux de tuiles, ou en d'autres termes, d'essayer d'obtenir un théorème à la Rice

pour les pavages. Une approche dans cette direction a été faite par Julien Cervelle [Cer02, CD04], mais pour un modèle sensiblement différent. La simulation exacte permet d'obtenir une autre approche de ce problème sans pour autant donner une réponse définitive. En construisant des jeux de tuiles ayant une certaine propriété si un autre jeu de tuiles a une autre propriété, nous obtenons des réductions de propriétés, qui permettent d'obtenir un résultat *à la Rice* en corollaire. Ce théorème est fortement lié à la réduction exacte et n'est donc pas complet, car certaines propriétés ne satisfont pas ces conditions. Mais l'intérêt de cette construction réside plus dans la notion de réduction de propriétés que dans son corollaire *à la Rice* qui n'est qu'une première tentative de caractérisation des ensembles non-récurrents de jeux de tuiles. Nous montrons par contre que le principe de réduction est assez souple pour pouvoir montrer l'indécidabilité de nombreux problèmes sur les pavages laissant penser qu'un théorème *à la Rice* plus général peut être trouvé dans cette direction.

## Premières applications

Nous avons montré que les pavages sont un modèle de calcul possédant une notion d'universalité et des équivalents aux théorèmes du point fixe de Kleene. À l'aide de ces derniers, il devient très aisé de construire des jeux de tuiles avec des propriétés spécifiques. La première idée est d'utiliser un argument de diagonalisation. Cette technique introduite par Georg Cantor pour montrer que la cardinalité de  $\mathbb{R}$  est strictement supérieure à la cardinalité de  $\mathbb{N}$  a été reprise et modifiée de nombreuses fois pour montrer des résultats d'indécidabilité, le problème de l'arrêt en étant un exemple. Le théorème du point fixe *à la Kleene* permet d'obtenir de tels résultats sur les pavages et de montrer les théorèmes fondamentaux des pavages avec des preuves tout à fait nouvelles. Si la plupart des preuves de l'indécidabilité du problème du domino ou de l'indécidabilité du pavage périodique du plan reprennent le schéma initial de Berger [Ber66] et donc construisent des pavages particuliers où une machine de Turing est simulée, la diagonalisation sur les pavages permet d'obtenir une preuve plus directe par l'absurde et sans construction.

La décidabilité du problème du domino impliquerait ainsi l'existence d'un jeu de tuiles pavant le plan si et seulement s'il ne le pave pas. Ce type de diagonalisation peut ensuite être utilisée de la même manière pour prouver par contradiction deux autres résultats fondamentaux de Gurevich et Koriakov, [GK72] : l'indécidabilité du pavage périodique du plan et la non-séparabilité récursive de l'ensemble des jeux de tuiles périodiques et de l'ensemble des jeux de tuiles finis.

Une autre grande application est la possibilité de construire moult jeux de tuiles strictement apériodiques. Car s'il est facile de construire un jeu de tuiles générant l'apériodicité, il est beaucoup moins évident de prouver qu'il ne peut pas générer la périodicité, et donc, qu'il est strictement apériodique. L'apériodicité est l'essence des pavages, car sans eux, la plupart des questions sur les pavages seraient triviales.

Ceci explique la recherche intense de nouveaux apériodiques et cette thèse va dans cette direction. Avec le théorème du point fixe *à la* Kleene pour les pavages, nous sommes plus à même de pouvoir fournir un cadre de construction permettant de construire des jeux de tuiles apériodiques. Ce moyen de construction est totalement nouveau, et il n'existe pas, à ce jour, d'autres techniques générales, comme celle présentée dans cette thèse, permettant de générer toutes sortes de pavages auto-similaires, c'est-à-dire des pavages qui se simulent eux-mêmes selon une certaine notion de simulation que nous définiront pour ce cas précis. L'apériodicité de ces jeux de tuiles provient justement de leur auto-similarité. Car cette dernière implique qu'un certain motif se retrouve toujours à échelle plus grande et donc, si une période existe, elle doit être infinie. Ainsi, à partir de tout motif  $\mathcal{A}$  qui peut paver le plan et qui peut être obtenu par une transformation du plan qui conserve le voisinage, il est possible de construire un jeu de tuiles qui a une structure auto-similaire qui suit  $\mathcal{A}$ .

## Plan

Dans le chapitre 1, nous rappelons les notions fondamentales des pavages en étudiant les différents modèles équivalents et les outils principaux qui seront utilisés tout au long de la thèse. Le chapitre 2 est une étude des pavages considérés comme les plus simples, à savoir les pavages périodiques. Cette idée intuitive de simplicité sera justifiée par les fonctions de quasipériodicité, outil essentiel à la quantification de la *régularité*, et donc à la *complexité structurelle*, d'un pavage. Le chapitre 3 est une étude poussée du pavage de Robinson et de ses variantes. Les preuves traditionnelles des différents résultats sur les pavages nous permettent de jeter les bases et le formalisme de cette construction qui sera de nombreuses fois utilisée dans les chapitres qui suivront. Le chapitre 4 est consacré à une première approche de la notion de simulation, et de ce fait, à la notion d'universalité. Le chapitre 5, à l'aide d'une notion de simulation plus restrictive, nous permet d'obtenir les premiers résultats de calculabilité sur les jeux de tuiles : théorème du point fixe *à la* Kleene, réduction de propriétés, théorème *à la* Rice... Ces résultats nous permettent d'obtenir des preuves par diagonalisation sur les pavages. Enfin, le dernier chapitre apporte une idée des applications qui peuvent être obtenues grâce aux théorèmes du point fixe *à la* Kleene en proposant une méthode de construction de jeux de tuiles apériodiques.



# Chapitre 1

## Premiers pas

Au début des années 60, H. Wang a introduit un modèle pour paver le plan à base de tuiles carrées de côté unitaire, [Wan61, Wan62]. L'introduction de ce modèle avait pour but la résolution d'un des problèmes d'Hilbert : *das Entscheidungsproblem*. Ce problème traite de la décidabilité de la satisfaisabilité de formules écrites en logique du premier ordre. De manière générale, le problème a été résolu par Church et Turing [Chu36b, Chu36a, Tur37]. Par la suite, le problème a été décomposé en différentes classes sur lesquelles les questions de décidabilité ont de nouveau été posées. Wang construisit une réduction permettant de passer d'un jeu de tuiles à une formule d'une de ces classes, la classe de Kahr  $K = [\forall\exists\forall, (0, \omega)]$ , de manière à ce que cette formule soit satisfaisable si, et seulement si, le jeu de tuiles pave le plan [KMW62]. De plus, cette réduction permet de montrer qu'une formule accepte un modèle fini si, et seulement si, le jeu de tuiles qui lui est associé pave le plan périodiquement. Wang prouva dans un premier temps que toute machine de Turing pouvait être simulée par un jeu de tuiles si une origine est imposée. Il pensait néanmoins que, dans le cas général, si un jeu de tuiles pavait le plan, alors il le pavait périodiquement. Cette conjecture impliquait la décidabilité du problème de savoir si un jeu de tuiles pave le plan ou non. En effet, nous pouvons énumérer les motifs finis générés par un jeu de tuiles. Soit le jeu de tuiles ne pave pas le plan, et alors il existe un carré qui sera trop grand pour être pavé par ce jeu de tuiles, soit le jeu de tuiles pave le plan périodiquement, et alors il existe un motif périodique. Comme nous arrivons forcément à l'un des deux cas, le problème est alors décidable.

Mais quelques années plus tard, Berger, qui était l'étudiant de Wang, montra dans sa thèse que cette conjecture était fautive en construisant un ensemble de tuiles qui ne génère que des pavages apériodiques du plan. Sa construction impliquait plus, puisqu'il construisit un jeu de tuiles qui génère un pavage du plan si, et seulement si, une machine de Turing donnée ne s'arrête pas sur une entrée  $\omega$ . Cette construction montre comment un pavage peut simuler le calcul d'une machine de Turing et laisse entrevoir de nombreuses questions sur le type et la structure des calculs qui peuvent être générés par des jeux de tuiles.

La preuve de Berger [Ber66], puis celles de Koriakov et Gurevich [GK72], sur l'indécidabilité du pavage périodique du plan par un jeu de tuiles et sur la non-

séparabilité des jeux de tuiles ne pavant pas le plan de ceux le pavant uniquement de manière périodique, montrèrent l'indécidabilité de la classe de Kahr. Par réduction depuis cette classe, les huit dernières classes furent résolues, fermant définitivement le problème de Hilbert. Il est intéressant de noter que, jusqu'à aujourd'hui, aucune autre démonstration de l'indécidabilité de la classe de Kahr, n'impliquant pas les pavages, n'existe.

Dans ce chapitre, nous définissons les différents types de pavages du plan qui seront utilisés dans cette thèse et nous montrons qu'ils sont équivalents. Nous introduisons ensuite deux outils de base permettant d'obtenir des premiers résultats sur les pavages.

## 1.1 Notions de base

Il existe différents modèles permettant d'approcher l'idée de pavage du plan. La plupart consistent en des tuiles carrées de côté unitaire sur les bords desquelles différents types de marqueurs sont placés. Deux tuiles s'assemblent si leur côté commun partage le même marqueur. D'autres modèles sont plus abstraits et font appel à un peu plus d'imagination pour y voir encore la notion de pavage du plan. Mais, dans tous les cas, la notion essentielle est celle de *pavabilité du plan* : étant donné un jeu de tuiles est-il possible de générer un pavage du plan ? Cette question, connue comme le *problème du domino*, a été l'une des questions centrales liées aux pavages. Nous savons aujourd'hui que le problème du domino est indécidable pour tous ces modèles et nous montrerons ce résultat par la suite.

Bien que nous aurons tendance à sauter d'un modèle à un autre au fil de cette thèse, nous privilégierons le modèle traditionnel des tuiles colorées pour la plupart des exemples, et le modèle des tuiles fléchées lorsque la structure du pavage devra être mise en avant. Pour être complet avec la littérature actuelle, nous définissons dans les sections suivantes ces différents modèles.

### 1.1.1 Tuiles colorées

Une *tuile de Wang*, ou simplement : une *tuile*, est un carré unitaire orienté aux bords colorés. Elle sera notée par la lettre  $t$  en minuscule. C'est l'élément de base du modèle qui peut être assimilé aux états, alphabets et transitions d'une machine de Turing. Nous la représentons par un carré avec ses diagonales. Les quatre triangles ainsi formés auront la couleur des côtés qu'ils représentent (figure 1.1). Pour une tuile  $t$ , nous introduisons les notations suivantes pour différencier les côtés :

- i)  $s(t)$  correspond à la couleur du côté sud de  $t$ ,
- ii)  $n(t)$  correspond à la couleur du côté nord de  $t$ ,
- iii)  $e(t)$  correspond à la couleur du côté est de  $t$ ,
- iv)  $o(t)$  correspond à la couleur du côté ouest de  $t$ .

Il est possible de décrire ainsi une tuile sous la forme d'un quadruplet :

$$t = \{s(t), o(t), e(t), n(t)\} \in C^4,$$

où  $C$  est un ensemble fini de couleurs.



Fig. 1.1 – Une tuile de Wang

Un *jeu de tuiles de Wang*, ou simplement : *un jeu de tuiles*, est un ensemble fini de tuiles différentes, colorées sur un ensemble fini de couleurs  $C$  (figure 1.2). Il peut être assimilé à un programme de ce modèle et sera noté, la plupart du temps, par une lettre grecque :  $\tau, \rho, \dots$ . Un jeu de tuiles  $\tau$  est représenté par les tuiles le composant :  $\tau = \{t_1 = \{s(t_1), o(t_1), e(t_1), n(t_1)\}, \dots, t_n = \{s(t_n), o(t_n), e(t_n), n(t_n)\}\}$ . Ainsi, il est possible de définir un jeu de tuiles par une suite finie d'entiers. Nous pouvons donc énumérer les jeux de tuiles et, par analogie avec les machines de Turing,  $\tau_i$  indiquera le  $i^{\text{ème}}$  jeu de tuiles, où  $i$  est le code à partir duquel peuvent être retrouvées de manière récursive les tuiles qui composent  $\tau_i$  (ce code pourra par exemple être celui de Gödel).

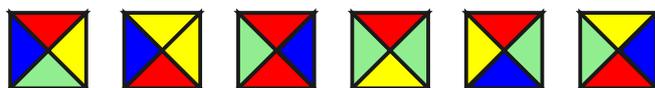


Fig. 1.2 – Un jeu de tuiles de Wang

*Paver* avec un jeu de tuiles consiste à disposer des copies des tuiles d'un jeu  $\tau$  sur la grille  $\mathbb{Z}^2$  de manière à ce que deux tuiles voisines aient la même couleur sur leur côté commun. *Paver* est le procédé de calcul des pavages. Nous appelons *contrainte locale* l'ensemble des contraintes consistant à avoir les mêmes couleurs sur les bords communs des tuiles voisines lors du processus de pavage. La figure 1.3 représente la grille  $\mathbb{Z}^2$  et le processus de pavage à l'aide de tuiles du jeu de tuiles de la figure 1.2 en respectant les contraintes locales.

Puisque les tuiles sont orientées, il n'est pas possible de les tourner. Dans le cas contraire, tout jeu de tuiles composé d'une unique tuile paverait le plan (1.4).

Le résultat final du calcul effectué par un jeu de tuiles  $\tau$  peut donner un pavage du plan  $P$ , qui est défini formellement dans la définition suivante :

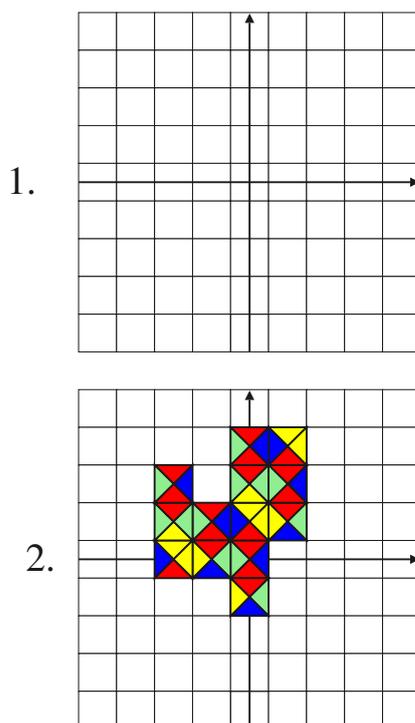


Fig. 1.3 – 1. La grille  $\mathbb{Z}^2$  et 2. un début de pavage de cette grille avec le jeu de tuiles de la figure 1.2

**Définition 1** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. Un pavage du plan  $P$  par  $\tau$  est une application  $f_P$  de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\tau$  donnant la tuile  $f_P(x, y)$  se trouvant à la position  $(x, y)$  dans  $P$  et satisfaisant les contraintes locales, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} n(f_P(x, y)) = s(f_P(x, y + 1)) \\ e(f_P(x, y)) = o(f_P(x + 1, y)) \end{cases}$$

Un pavage du plan  $P$  généré par un jeu de tuiles  $\tau$  est appelé un  $\tau$ -pavage.

Les pavages du plan seront notés la plupart du temps par les lettres suivantes :  $P$  et  $Q$ . Pour un jeu de tuiles  $\tau$ ,  $\mathcal{P}_\tau$  désigne l'ensemble des  $\tau$ -pavages. Puisque certains jeux de tuiles ne pavent pas le plan, il est nécessaire d'introduire la notion de *motif* qui correspond à un pavage partiel du plan :

**Définition 2** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. Un motif  $M$  généré par  $\tau$  est une application  $f_M$  d'un sous-ensemble fini et connexe  $D \subset \mathbb{Z}^2$  dans  $\tau$  donnant la tuile  $f_M(x, y)$  se trouvant à la position  $(x, y)$  dans  $M$  et satisfaisant les contraintes locales.  $D$  est appelé le domaine de  $M$ .

Un motif  $M$  généré par un jeu de tuiles  $\tau$  est appelé un  $\tau$ -motif.

Nous dirons que deux  $\tau$ -motifs  $M$  et  $M'$  sont égaux s'il existe un vecteur  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que le domaine de  $M$  soit égal au domaine de  $M'$  translaté par le vecteur  $(u, v)$  et tel que  $f_M(x, y) = f_{M'}(x + u, y + v)$  pour tout  $(x, y)$  du domaine de  $M$ .

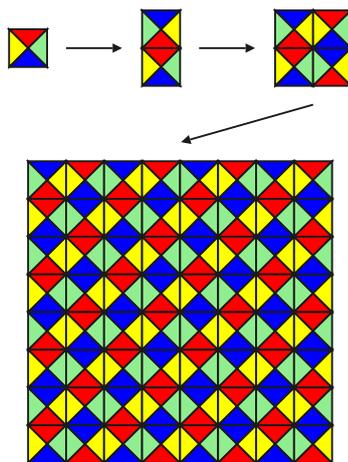


Fig. 1.4 – Paver le plan avec une tuile si les rotations sont autorisées

De manière plus intuitive et géométrique, deux motifs sont égaux si l'un peut être obtenu à partir de l'autre en le translatant. Cette équivalence permet de ne considérer que le motif indépendamment de sa position sur le plan, ou de manière équivalente, de considérer l'ensemble des motifs quotienté par la relation d'égalité définie ci-dessus.

Le dernier outil à introduire sur les tuiles est celui de *superposition*. Nous dirons qu'un jeu de tuiles  $\tau$  se *superpose* à un autre jeu de tuiles  $\tau'$  lorsque nous construisons le jeu de tuiles  $\tau \times \tau' = \{t \times t' \mid t \in \tau, t' \in \tau'\}$ , où  $t \times t'$  est la tuile dont les côtés ont pour couleurs les produits cartésiens des couleurs des côtés de  $t$  et  $t'$ . La superposition nous permettra la plupart du temps de pouvoir ajouter de l'information à un jeu de tuiles en lui superposant un autre calcul.

### 1.1.2 Tuiles fléchées

Nous définissons maintenant un autre modèle où les tuiles n'ont plus les bords colorés mais fléchés. L'avantage principal de ce modèle est de pouvoir mieux représenter la propagation de l'information dans le pavage. Cela nécessite bien évidemment de savoir comment elle se propage dans le pavage avant de flécher les tuiles. Nous verrons que pour certains jeux de tuiles, par exemple celui de Robinson, mettre les bonnes flèches sur les tuiles permet d'obtenir une représentation géométrique naturelle mettant en valeur la structure du pavage et donc l'information qu'il contient.

**Définition 3** Une *tuile fléchée* est un carré de taille unitaire dans lequel des flèches verticales ou horizontales partent du centre du carré vers un de ses bords ou d'un des bords vers son centre (figure 1.5).

Un *jeu de tuiles fléchées* est un ensemble fini de tuiles fléchées.

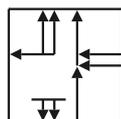


Fig. 1.5 – Une tuile fléchée

Deux tuiles fléchées peuvent être assemblées si, sur leur côté commun, toutes les flèches de l'une sont le prolongement des flèches de l'autre. Le prolongement signifie que les flèches de l'une et de l'autre sont alignées et que les directions des flèches sont conservées. La figure 1.6 représente les cas possibles et ceux qui ne le sont pas.

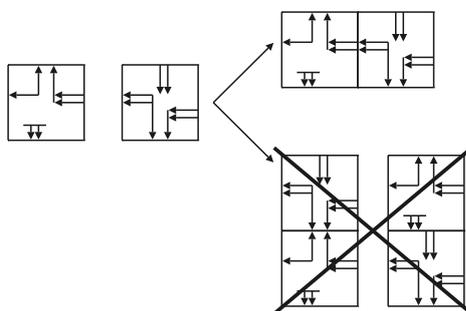


Fig. 1.6 – Contraintes locales des tuiles fléchées

Une bijection, presque une identité en fait, peut être construite entre l'ensemble des jeux de tuiles colorées et l'ensemble des jeux de tuiles fléchées. Les définitions sont ensuite les mêmes que pour les jeux de tuiles colorées : un pavage du plan  $P$  par un jeu de tuiles fléchées  $\tau$  est une application de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\tau$  satisfaisant les contraintes locales données par les flèches et donnant la tuile  $f_P(x, y)$  se trouvant à la position  $(x, y)$  dans  $P$ . Un motif est un pavage partiel défini sur un domaine fini et connexe de  $\mathbb{Z}^2$ .

### 1.1.3 Tuiles étiquetées

Un autre modèle très proche des deux précédents est celui des tuiles étiquetées. Ici, les tuiles ne sont ni colorées, ni fléchées mais étiquetées. Ces étiquettes nous seront surtout utiles pour mettre en valeur les jeux de tuiles simulant des machines de Turing, et ainsi conservé les notions d'états et d'alphabet.

Un ensemble d'étiquettes  $L$  est un ensemble fini de mots sur un alphabet fini  $\Sigma$ . Une tuile étiquetée est un carré de taille unitaire sur les bords duquel sont fixés des mots de  $L$  (figure 1.1.3). Une tuile  $t$  est représentée par un quadruplet  $t = \{m_1, m_2, m_3, m_4\} \in L^4$ .

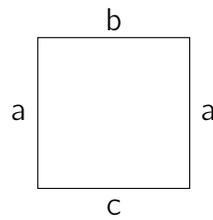


Fig. 1.7 – Une tuile étiquetée

Paver avec des tuiles étiquetées consiste à placer ces tuiles sur la grille  $\mathbb{Z}^2$  de manière à ce que le côté commun à deux tuiles voisines aient la même étiquette. Là aussi, nous remarquons qu'il existe une équivalence directe avec les tuiles colorées.

### 1.1.4 Formes géométriques à coordonnées rationnelles

Nous nous détachons un peu maintenant des tuiles de taille unitaire pour considérer n'importe quelle forme géométrique à coordonnées rationnelles. Nous commençons par définir une forme géométrique à coordonnées rationnelles :

**Définition 4** Une *forme géométrique à coordonnées rationnelles*, ou plus simplement *forme rationnelle*, est un polygone non-croisé de  $\mathbb{R}^2$  dont les sommets sont dans  $\mathbb{Q}^2$ .

Un *jeu de formes rationnelles* est un ensemble fini de formes rationnelles (figure 1.8).

Intuitivement, paver avec un jeu de formes rationnelles consiste à placer des copies non tournées de ces formes sur le plan  $\mathbb{R}^2$  tel que deux formes voisines aient au moins un sommet en commun et qu'aucun trou ne soit laissé et que jamais deux formes ne se recouvrent. Nous décrivons ces conditions topologiquement dans la définition suivante :

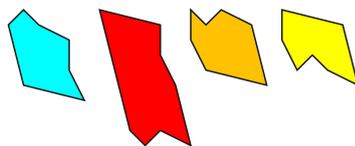


Fig. 1.8 – Un jeu de formes rationnelles

**Définition 5** Soit  $\tau$  un jeu de formes rationnelles. Si  $t$  est une forme de  $\tau$ ,  $\bar{t}$  désigne l'adhérence de  $t$  et  $\overset{\circ}{t}$  l'intérieur de  $t$ . Si  $t$  est une forme rationnelle de  $\tau$  et  $v$  un vecteur de  $\mathbb{Q}^2$ , alors  $t_v$  correspond au translaté de la forme rationnelle  $t$  d'un vecteur  $v$ .

Un pavage du plan  $P$  avec  $\tau$  est un ensemble de translatés de formes rationnelles  $t_v$ , où  $t \in \tau$  et  $v \in \mathbb{Q}^2$  tel que :

- i)  $\overline{\bigcup_{t_v \in P} t_v} = \mathbb{R}^2$ ,
- ii)  $\forall t_v, t'_{v'} \in P, \overset{\circ}{t_v} \cap \overset{\circ}{t'_{v'}} = \emptyset$ .

De plus, si deux formes ont un bord en commun, alors elles ont aussi un sommet en commun.

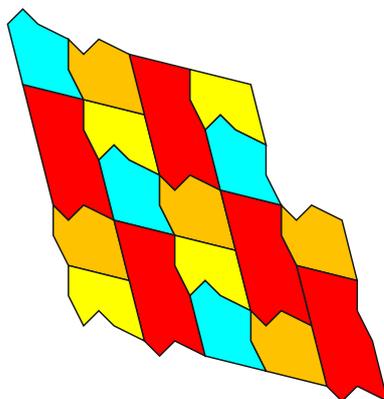


Fig. 1.9 – Un pavage à partir du jeu de formes de la figure 1.8

La première condition vérifie que tout le plan soit bien recouvert avec nos formes, la deuxième vérifie que deux formes ne se recouvrent pas. La dernière condition empêche qu'il soit possible de disposer deux tuiles voisines d'une infinité de façons différentes. La figure 1.9 représente un pavage du plan avec le jeu de formes de la figure 1.8.

### 1.1.5 Pavages par motifs

Une autre manière de représenter les pavages est de considérer les tuiles comme des états et d'explicitier formellement l'ensemble des motifs qui peuvent être utilisés. Nous obtenons la définition suivante :

**Définition 6** Soit  $Q$  un ensemble fini d'états. Un motif  $M$  de  $Q$  est une application  $f_M$  définie d'un sous-ensemble fini et connexe  $D \subset \mathbb{Z}^2$  dans  $Q$ . Un jeu de tuiles  $\tau$  est une paire  $\tau = (Q, P_\tau)$  où  $P_\tau$  est un ensemble fini de motifs de  $Q$  de même domaine  $V$ .

Un pavage généré par  $\tau$  est une configuration  $c \in Q^{\mathbb{Z}^2}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2, c|_{V+x} \in P_\tau.$$

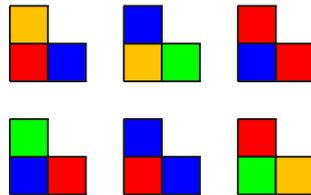


Fig. 1.10 – Les motifs autorisés d'un jeu de tuiles  $\tau$  défini sur quatre états

Ce modèle ne s'éloigne pas de la notion de tuiles. Bien que ce soient des états qui sont assignés aux cases de  $\mathbb{Z}^2$ , le fait d'avoir un ensemble  $P_\tau$  de motifs autorisés rejoint l'idée de contraintes locales des modèles précédents. *Paver* avec un jeu de tuiles  $\tau = (Q, P_\tau)$  va consister à placer les états sur la grille  $\mathbb{Z}^2$  de manière à ce que tout motif de domaine  $V$  apparaissant dans la configuration soit un motif de  $P_\tau$ .

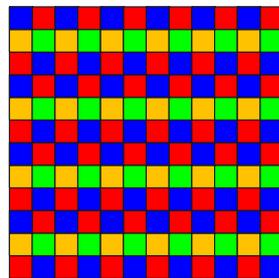


Fig. 1.11 – Un pavage généré par le jeu de tuiles de la figure 1.10

Dans la figure 1.10, nous avons un jeu de tuiles  $\tau$  défini par l'ensemble des motifs autorisés sur un ensemble de quatre états représenté chacun par une couleur. La figure 1.11 représente une configuration générée par  $\tau$ .

### 1.1.6 Contraintes locales

Le dernier modèle que nous considérons est celui des contraintes locales. Bien qu'il ressemble peu à la notion intuitive de pavages géométriques, il peut être

considéré comme une généralisation de ces derniers avec le grand avantage de se démarquer des jeux de tuiles et ainsi, de pouvoir comparer des pavages obtenus par des contraintes locales différentes.

Les pavages à contraintes locales consistent en un remplissage des cases de  $\mathbb{Z}^2$  par des lettres d'un alphabet fini de manière à ce que chacune des cases de  $\mathbb{Z}^2$  satisfasse à une contrainte locale. Il est souvent plus pratique de réduire l'alphabet au cas binaire  $\{0, 1\}$ .

**Définition 7** Un *voisinage*  $V$  est un ensemble fini de vecteurs  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{Z}^2$ . Une *contrainte  $V$ -locale* est une application de  $\{0, 1\}^n$  dans  $\{0, 1\}$ . Une *contrainte locale* est un couple  $(V, f)$  où  $f$  est une contrainte  $V$ -locale. La fonction  $f$  est appelée la *fonction de contrainte* de la contrainte locale.

Nous définissons le terme "paver" pour une contrainte locale :

**Définition 8** Une *configuration binaire* est une fonction de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\{0, 1\}$ . Soit  $(V = \{v_1, \dots, v_n\}, f)$  une contrainte locale. Une configuration binaire  $P$  est générée par  $(V, f)$  si pour tout  $x \in \mathbb{Z}^2$  nous avons :

$$f(P(x + v_1), P(x + v_2), \dots, P(x + v_n)) = 0$$

Comme les contraintes locales génèrent des configurations binaires, il est plus aisé de comparer l'ensemble des pavages générés par chacune des contraintes que de comparer les pavages générés par des jeux de tuiles différents ces derniers ne pouvant être comparés directement. Par la suite, nous introduirons des notions de simulations permettant de comparer des jeux de tuiles.

0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0

Fig. 1.12 – Une configuration binaire générée par une contrainte locale

Dans la figure 1.12, nous montrons une configuration binaire satisfaisant la contrainte locale  $(V = \{(0, 1), (1, -1), (-1, -1)\}, f)$  où  $f$  est la fonction de  $\mathbb{Z}^3$  dans  $\{0, 1\}$  qui renvoie 0 si une, et uniquement une, des entrées est 1.

## 1.2 Équivalence des modèles

Les différents modèles introduits présentent différents points de vue de l'idée de pavage du plan. Il est intéressant de montrer maintenant que tous ces modèles sont équivalents afin de pouvoir obtenir des résultats généraux sur les pavages. Pour cela, nous allons montrer qu'il est possible de passer d'un jeu de tuiles d'un certain modèle à un jeu de tuiles d'un autre modèle en conservant de manière récursive la notion de pavabilité.

**Théorème 1** *Les modèles de la section précédente sont équivalents, c'est-à-dire que pour toute paire ordonnée de modèles de pavage  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$  il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{T}'$  telle que si  $\tau$  est un jeu de tuiles de  $\mathcal{T}$  alors  $f(\tau)$  est un jeu de tuiles de  $\mathcal{T}'$  qui pavera le plan si, et seulement si,  $\tau$  pave le plan aussi.*

◇ *Preuve.*

### i) Tuiles étiquetées vers tuiles colorées et vice versa

Cette réduction est la plus évidente et nécessite peu d'explications. Pour un jeu de tuiles étiquetées  $\tau$ , nous construisons un ensemble de couleurs  $C$  de même cardinalité que l'ensemble des étiquettes  $L$  de  $\tau$  puis nous construisons une bijection  $h$  entre  $L$  et  $C$ . Chaque tuile  $t = \{m_1, m_2, m_3, m_4\} \in L^4$  de  $\tau$  est transformée en une tuile  $t' = \{h(m_1), h(m_2), h(m_3), h(m_4)\} \in C^4$ . Nous remarquons que deux tuiles  $t_1$  et  $t_2$  de  $\tau$  s'unissent sur un côté si, et seulement si, leur correspondante colorée  $t'_1$  et  $t'_2$  s'unissent sur le même côté. Nous obtenons donc un jeu de tuiles colorées  $\tau' = \{t'_1, \dots, t'_n\}$  qui pave le plan si, et seulement si,  $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$  pave le plan. Ce procédé étant réversible, la même argumentation peut être utilisée pour passer d'un jeu de tuiles étiquetées à un jeu de tuiles colorées.

### ii) Tuiles colorées vers tuiles fléchées et vice versa

Dans ce cas-là, nous pouvons voir que la transformation est quasiment directe et presque une identité. Deux tuiles colorées peuvent être associées si elles ont la même couleur sur leur bord commun. Par contre, deux tuiles fléchées peuvent être associées si elles possèdent le même type de flèches sur leur bord commun pointant vers le centre pour une des tuiles, et pointant vers l'extérieur pour l'autre. Si  $\tau$  est un jeu de tuiles colorées, nous construisons une fonction  $h$  qui associe à chaque couleur  $c$  de l'ensemble de couleurs de  $\tau$  un type de flèches  $h(c)$ . Ce type de flèches pourra soit pointer vers le centre, soit pointer vers l'extérieur. Si  $t$  est une tuile de  $\tau$ , nous construisons la tuile  $t'$  qui aura sur ses côtés *sud* et *ouest* les flèches  $h(s(t))$  et  $h(o(t))$  pointant vers l'extérieur, et sur ses côtés *nord* et *est* les flèches  $h(n(t))$  et  $h(e(t))$  pointant vers l'intérieur. En faisant cela pour chaque tuile  $t_i$  de  $\tau$ , nous obtenons un jeu de tuiles fléchées  $\tau' = \{t'_1, \dots, t'_n\}$ . La figure

1.13 montre cette réduction. Ce procédé étant réversible, la même argumentation peut être utilisée pour passer d'un jeu de tuiles fléchées à un jeu de tuiles colorées.

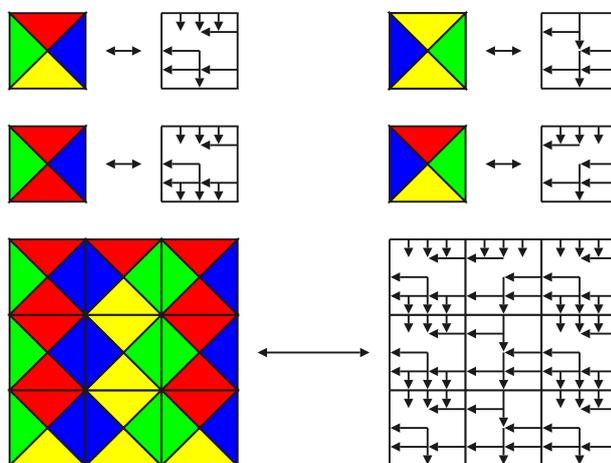


Fig. 1.13 – Transformation d'un jeu de tuiles colorées vers un jeu de tuiles fléchées

iii) *Tuiles fléchées vers formes rationnelles*

Le but de cette transformation est de transformer des tuiles fléchées en formes rationnelles. Ces formes seront des carrés de taille unitaire dont nous allons légèrement modifier les côtés. Soit  $\tau$  un jeu de tuiles fléchées et  $t$  une des tuiles de  $\tau$ . La tuile  $t$  possède différents types de flèches sur ses bords. Pour chaque flèche pointant vers le centre de  $t$ , une petite indentation est rajoutée sur un carré de taille unitaire au niveau de la connexion entre le bord de la tuile  $t$  et cette flèche. Pour chaque flèche pointant vers l'extérieur de  $t$ , nous rajoutons à notre carré un petit ergot au niveau de la connexion entre la pointe de la flèche et le côté de la tuile. Il est possible de s'arranger pour que toutes les indentations et tous les ergots soient de la même taille et ne se recouvrent pas. Nous obtenons ainsi une tuile  $t'$  formée d'indentations et d'ergots sur ses côtés. Nous remarquons que deux tuiles fléchées  $t_1$  et  $t_2$  s'unissent si, et seulement si, leur correspondant en forme géométrique  $t'_1$  et  $t'_2$  s'unissent comme le montre la figure 1.14. Nous obtenons donc un jeu de formes rationnelles  $\tau' = \{t'_1, \dots, t'_n\}$  qui pave le plan si, et seulement si,  $\tau$  pave le plan.

iv) *Formes rationnelles vers tuiles colorées*

La démonstration de cette réduction est un peu plus technique. Soit  $\tau$  un jeu de formes rationnelles. Puisque toutes les coordonnées des formes de  $\tau$  sont des rationnelles, nous pouvons supposer que les formes de  $\tau$  sont à coordonnées entières. En effet, il suffit d'effectuer une homothétie sur ces formes, le rapport correspondant au plus petit multiple commun des

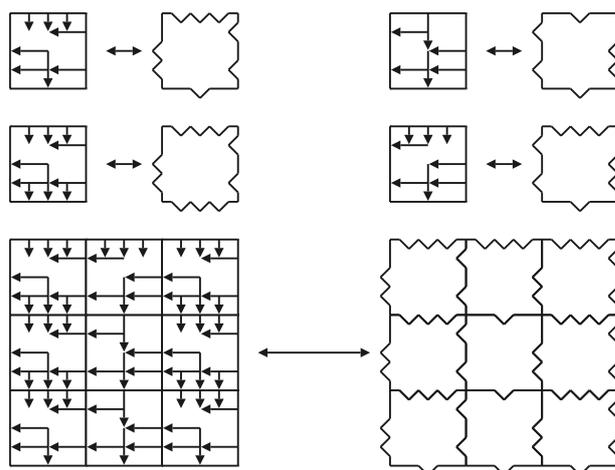


Fig. 1.14 – Transformation d'un jeu de tuiles fléchées vers un jeu de formes rationnelles

dénominateurs des coordonnées des sommets de ces formes. Chaque forme est composée de carrés de taille unitaire et de carrés pouvant être sectionnés par une droite. Soit  $t$  une de ces formes. Les carrés entiers sont transformés en tuiles dont les côtés sont colorés d'une couleur unique qui ne peut être assemblée qu'avec ses quatre voisins directs.

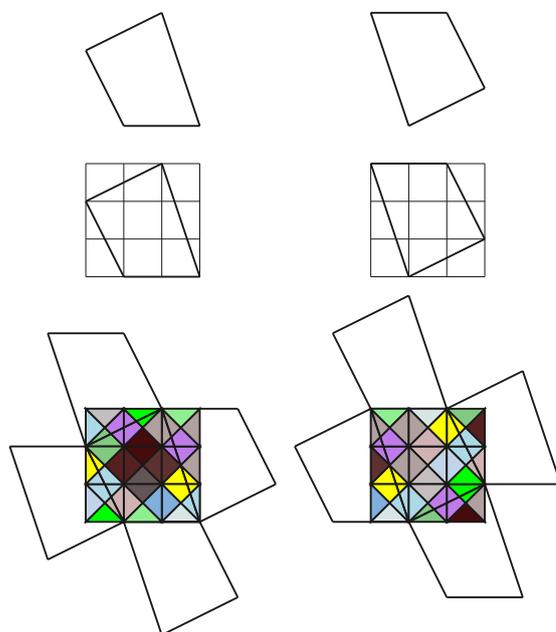


Fig. 1.15 – Nous divisons les formes en carrés et nous assignons les couleurs aux tuiles

Nous considérons maintenant toutes les extensions de  $t$ , c'est-à-dire tous les motifs finis contenant  $t$  en leur milieu. La forme  $t$  peut avoir un nombre fini d'autres formes sur ses côtés car les formes voisines doivent avoir au moins un sommet commun. Il y aura donc autant de motifs représentant  $t$ , qu'il peut y avoir de voisinages de  $t$ . Ce nombre de voisinages est fini, car deux tuiles voisines doivent avoir au moins un sommet en commun. Il suffit de construire des tuiles qui s'assemblent d'une manière unique et qui peuvent représenter chacun des différents cas. Dans la figure 1.15, nous montrons les différentes étapes de la réduction : les formes d'un jeu de formes sont divisées en carrés de taille unitaire, puis les différents voisinages que peut avoir une forme sont énumérés (ici, chaque forme ne peut avoir qu'un seul type de voisinage). A la fin du procédé, nous obtenons des motifs générés par un jeu de tuiles colorées  $\tau'$  représentant chacune des formes de  $\tau$ , et  $\tau$  pave le plan si, et seulement si,  $\tau'$  pave le plan aussi. La figure 1.16 montre comment les tuiles de  $\tau'$  peuvent se superposer aux pavages générés par  $\tau$ .

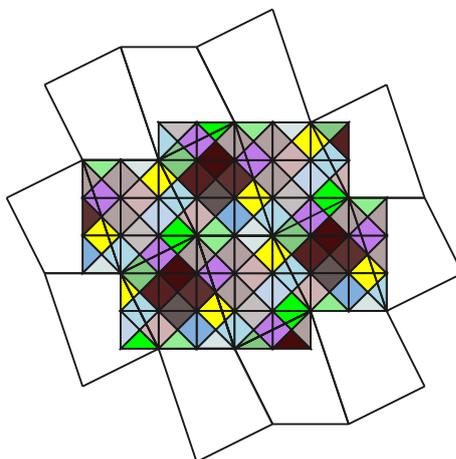


Fig. 1.16 – Les tuiles colorées représentent le pavage avec les formes rationnelles

v) *Tuiles colorées vers pavages par motifs*

Le pavage par motifs nous indique quels sont les motifs pouvant être utilisés tout au long du processus de pavage. La transformation va donc consister à regrouper les tuiles d'un jeu de tuiles colorées en motifs carrés de côté deux représentant toutes les combinaisons possibles.

Soit  $\tau$  un jeu de tuiles colorées et soit  $M$  l'ensemble de tous les motifs carrés de côté deux qui peuvent être générés par  $\tau$ . Nous remarquons que l'ensemble des  $\tau$ -pavages  $P$  tel que tout motif carré de côté deux de  $P$  soit dans  $M$ , est exactement égal à l'ensemble des  $\tau$ -pavages. Donc, le jeu de tuiles  $\tau' = (Q, P_{\tau'})$ , où  $Q = \tau (= \{t_1, \dots, t_n\})$  et  $P_{\tau'} = M$ , génère exactement les mêmes pavages que  $\tau$ . Ainsi,  $\tau$  pave le plan si, et seulement si,  $\tau'$  pave le plan.

vi) Pavages par motifs vers contraintes locales

Pour cette réduction, nous allons considérer que les contraintes locales peuvent être faites sur n'importe quel ensemble fini  $S$  (et pas seulement sur  $\{0, 1\}$  comme défini précédemment). Soit  $\tau = (Q, P_\tau)$  un jeu de tuiles. Il existe un domaine fini  $V \subset \mathbb{Z}^2$  sur lequel sont définis tous les motifs de  $P_\tau$ . Ce domaine peut être défini comme une suite de vecteurs  $\{v_1, \dots, v_n\}$  telle que, si nous considérons le domaine formé de tous les translatsés de l'origine par les vecteurs  $v_i$ , nous obtenons  $V$ .

La contrainte locale est définie sur un ensemble  $S = \{1, \dots, m\}$  où  $m$  est le nombre d'états de  $Q$ . Son voisinage sera l'ensemble de vecteurs  $V' = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Nous remarquons que pour n'importe quelle position  $x \in \mathbb{Z}^2$ ,  $(x + v_1, \dots, x + v_n)$  est un motif défini sur le domaine  $V$  et donc, soit il est autorisé car il est dans  $P_\tau$  soit il est interdit. Nous définissons la fonction  $f$  de la contrainte locale par la fonction qui renvoie 0 si ce motif est dans  $P_\tau$ .

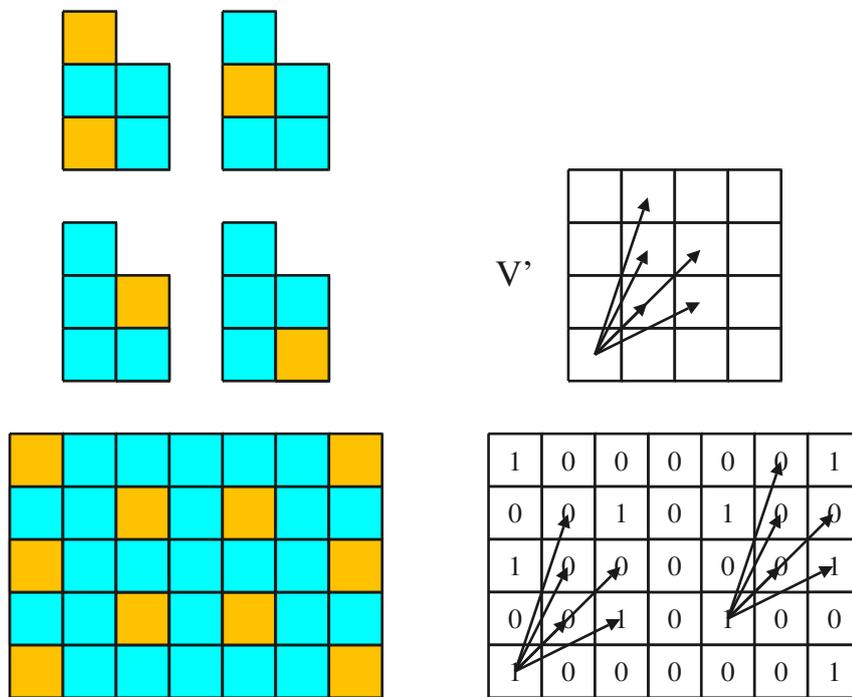


Fig. 1.17 – Passage de l'ensemble des motifs autorisés à une contrainte locale

Nous obtenons une contrainte locale qui génère un pavage  $P \in S^{\mathbb{Z}^2}$  et telle que tout motif de  $P$  de domaine  $V$  est élément de  $P_\tau$ . Donc  $\tau$  pave le plan si, et seulement si,  $(V', f)$  pave le plan. La figure 1.17 montre le passage d'un jeu de tuiles à une contrainte locale. Dans cet exemple, la fonction  $f$  de la contrainte locale est définie de la manière suivante :  $f(1, 0, 0, 0, 1) = f(0, 0, 1, 0, 0) = f(0, 0, 0, 1, 0) = f(0, 1, 0, 0, 0) = 0$  et  $f(x) = 1$  sinon.

vii) *Contraintes locales vers tuiles colorées*

Soit  $\tau = (V, f)$  une contrainte locale. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le voisinage  $V$  forme un carré de côté  $n$  auquel nous rajoutons  $n$  carrés sur chacun des côtés ou, autrement dit, le voisinage forme un carré de côté  $n + 2$  dont les quatre coins sont ôtés. Dans le cas contraire, il suffit d'étendre le voisinage de  $V$  et la fonction  $f$  à ce nouveau voisinage. Nous considérons l'ensemble de motifs  $m_i$  définis sur  $V$  et satisfaisant la contrainte locale donnée par  $f$ . Pour chacun de ces  $m_i$  nous construisons une tuile colorée  $t_i$  qui va le représenter. Il est possible de diviser ces motifs  $m_i$  en quatre rectangles de tailles  $n \times (n + 1)$  et  $(n + 1) \times n$  que nous nommons  $n(m_i)$ ,  $s(m_i)$ ,  $e(m_i)$  et  $o(m_i)$  suivant qu'ils contiennent les  $n$  bits du côté nord, sud, est ou ouest. Chacun de ces sous-motifs va représenter une des couleurs d'un des côtés de notre tuile colorée :  $n(t_i)$ ,  $s(t_i)$ ,  $e(t_i)$  et  $o(t_i)$  représenteront les motifs  $n(m_i)$ ,  $s(m_i)$ ,  $e(m_i)$  et  $o(m_i)$ . La figure 1.18 montre le passage des motifs  $m_i$  vers les tuiles  $t_i$ .

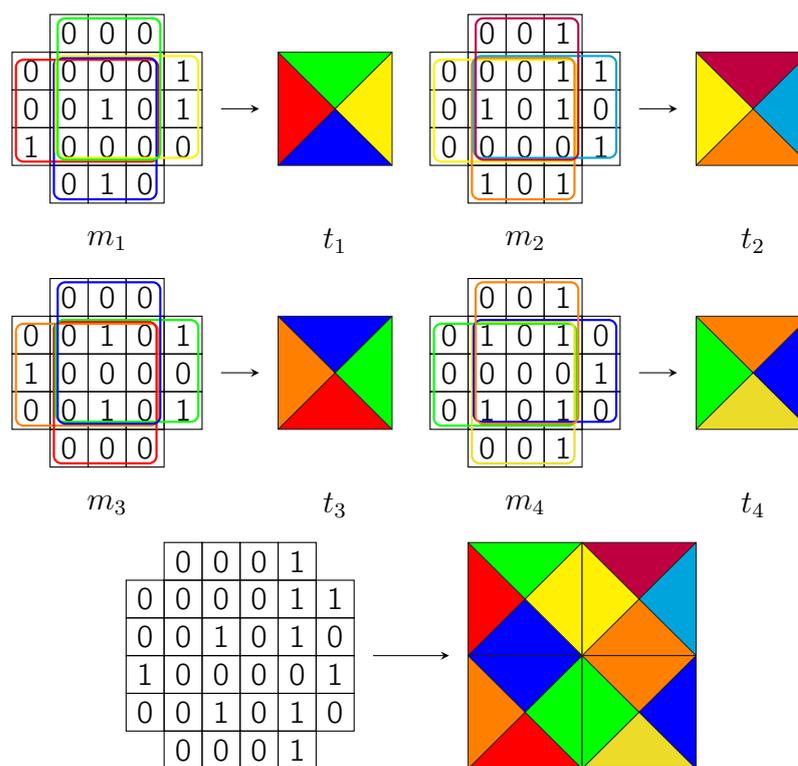


Fig. 1.18 – La transformation des motifs  $m_i$  en tuiles colorées  $t_i$

Un motif rectangulaire de taille  $(n+2) \times (n+3)$  généré par la contrainte locale peut être vu comme l'union de deux motifs  $m_i$  et  $m_j$ . Le sous-motif  $e(m_i)$  est égal au sous-motif  $o(m_j)$  ce qui revient à dire, selon notre transformation, que la couleur du côté est de  $t_i$  est la même que la couleur du côté ouest

de  $t_j$  et que la notion de pavabilité a donc bien été conservée par notre transformation : la contrainte locale  $(V, f)$  génère un pavage du plan si, et seulement si, le jeu de tuiles colorées  $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$  pave le plan.

□

## 1.3 Arbres associés

Les pavages et les jeux de tuiles pouvant être définis par les motifs qu'ils contiennent ou qu'ils génèrent, il est souvent plus pratique de représenter un pavage ou l'ensemble des pavages générés par un ensemble de tuiles à l'aide d'un arbre.

Pour bien définir ces arbres, nous introduisons d'abord une fonction  $s$  qui effectue une spirale sur  $\mathbb{Z}^2$  et les extensions de motifs selon  $s$  :

**Définition 9** La fonction  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^2$  est la fonction qui a pour premières valeurs :  $s(0) = (0, 0)$ ,  $s(1) = (0, 1)$ ,  $s(2) = (1, 1)$ ,  $s(3) = (1, 0) \dots$  et qui décrit ensuite une spirale comme dans la figure 1.19.

Soit  $m$  un motif ayant pour domaine  $\{s(0), s(1), \dots, s(n)\}$ . Un motif  $m'$  de domaine  $\{s(0), s(1), \dots, s(n), s(n+1)\}$  est une *extension de  $m$  selon  $s$*  si la restriction de  $m'$  au domaine  $\{s(0), s(1), \dots, s(n)\}$  est  $m$ .

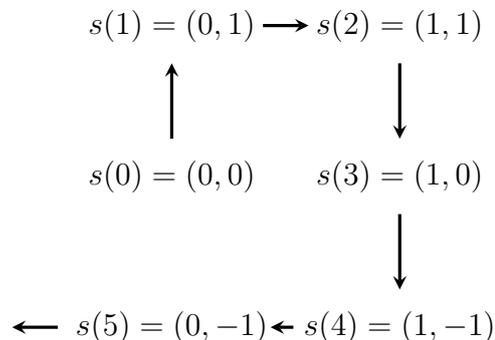


Fig. 1.19 – La fonction  $s$

Nous pouvons maintenant définir l'arbre associé à un pavage :

**Définition 10** Soit  $P$  un pavage du plan. L'arbre  $\mathcal{A}_P$  associé à  $P$  est défini de la manière suivante : la racine correspond aux motifs de taille 0 contenus dans le pavage  $P$ , c'est-à-dire qu'il contient un unique sommet correspondant au motif vide. Le niveau  $i$  est composé de tous les motifs de domaine  $\{s(0), \dots, s(i)\}$  contenu dans  $P$ . Une arête relie un motif  $m$  du niveau  $i$  à un motif  $m'$  du niveau  $i+1$  si  $m'$  est une extension de  $m$  selon  $s$ .

Les sommets l'arbre associé à un pavage  $P$  contient tous les motifs de  $P$ . Les branches infinies de  $\mathcal{A}_P$ , quant à elles, correspondent à tous les pavages qui peuvent être extraits de  $P$  par le principe d'extraction diagonale (voir section suivante). Nous remarquons que deux pavages correspondant à l'extraction faite à partir de deux branches infinies différentes donnent deux pavages différents.

De même, un ensemble de tuiles peut être associé à un arbre :

**Définition 11** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. L'arbre  $\mathcal{A}_\tau$  est défini de la manière suivante : la racine correspond aux motifs de taille 0 c'est-à-dire le motif vide et le niveau 1 contient les différentes tuiles de  $\tau$ . Le niveau  $i$  est composé de tous les motifs de domaine  $\{s(0), \dots, s(i)\}$  pouvant être générés par  $\tau$ . Une arête relie un motif  $m$  du niveau  $i$  à un motif  $m'$  du niveau  $i+1$  si  $m'$  est une extension de  $m$  selon  $s$ .

L'arbre  $\mathcal{A}_\tau$  associé à un jeu de tuiles  $\tau$  a pour sommet tous les motifs générables par  $\tau$ . Une branche infinie correspond à un pavage pouvant être généré par  $\tau$  et l'ensemble des branches infinies correspond à l'ensemble des pavages générés par  $\tau$ . La figure 1.20 représente un jeu de tuiles basique composé de trois tuiles et son arbre associé.

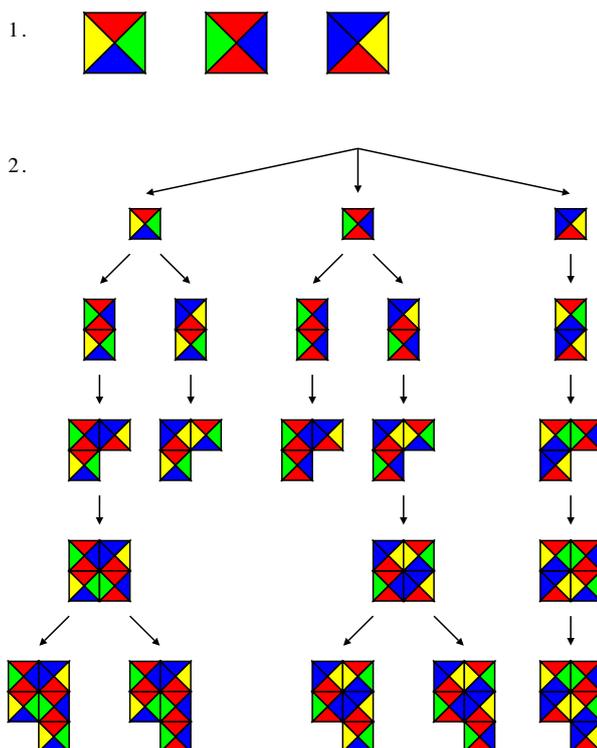


Fig. 1.20 – 1. Un jeu de tuiles  $\tau$  et 2. son arbre  $\mathcal{A}_\tau$

Nous remarquons que si  $\tau$  est un jeu de tuiles et que  $P$  est un  $\tau$ -pavage alors nous avons que  $\mathcal{A}_P \subseteq \mathcal{A}_\tau$ . De plus, si  $Q$  est un  $\tau$ -pavage tel que  $P \prec Q$ , alors  $\mathcal{A}_P \subseteq \mathcal{A}_Q$ .

## 1.4 Principe d'extraction diagonale

Le principe d'extraction diagonale est un des outils les plus forts pour comprendre la structure des pavages générés par un ensemble de tuiles. Ce principe donne une condition minimale pour qu'un jeu de tuiles pave le plan. En effet, il suffit qu'un jeu de tuiles puisse générer des motifs carrés arbitrairement grand pour qu'il puisse paver le plan. D'apparence anodine, ce résultat est à la base de nombreuses preuves sur les structures générées par un jeu de tuiles.

Ce principe est souvent référé en tant que *lemme de König* dans la littérature. En effet, il est une application d'un célèbre résultat de Dénes König sur les graphes qui donna, en 1936, une condition suffisante pour qu'un graphe infini possède un chemin de longueur infinie :

**Lemme 1.1 (Lemme de König)** *Soit  $G$  un graphe connexe avec une infinité de sommets de degré fini, alors chaque sommet de  $G$  fait partie d'un chemin simple de longueur infinie.*

- ◇ *Preuve.* Soit  $v_1$  un sommet de  $G$ . Comme  $G$  est connecté, alors chaque sommet  $v_j$  de  $G$  est relié à  $v_i$  par un chemin simple. Donc une infinité de chemins part de  $v_1$  et chacun de ces chemins passe par un des sommets adjacents à  $v_1$ . Comme ces derniers sont en nombre fini, il en existe au moins un par lequel passe une infinité de chemins. Nous choisissons un de ces sommets et nous l'appellons  $v_2$ . Maintenant, il existe une infinité de chemins simples qui commencent par  $v_1$  puis  $v_2$  et chacun de ces chemins passe par un des sommets voisins de  $v_2$ . Avec le même raisonnement que précédemment, nous choisissons un sommet  $v_3$  par lequel passe une infinité de chemins.

Par induction, il est possible de choisir une suite infinie de sommets qui forment un chemin simple de longueur infinie, ce qui prouve le résultat. □

Nous avons vu que l'ensemble des motifs générés par un jeu de tuiles peut être représenté sous la forme d'un arbre canonique. Cet arbre est forcément de degré fini, car un jeu de tuiles est toujours fini, et il contient une infinité de sommets si, et seulement si, ce jeu de tuiles peut générer une infinité de motifs carrés. Nous en déduisons donc par le lemme de König que cet arbre contient une branche infinie correspondant à un pavage du plan. Plus formellement nous avons :

**Proposition 1.1 (Principe d'extraction diagonale)** *Soit  $\tau$  un jeu de tuiles générant une infinité de motifs carrés, alors  $\tau$  pave le plan.*

- ◇ *Preuve.* Sans perte de généralité, et quitte à enlever une ligne et une colonne au motif carré, nous pouvons supposer que tous ces motifs ont des côtés de longueur impaire. Ces motifs possèdent ainsi une tuile centrale.

La preuve se fait par induction. Nous considérons la tuile que chacun des motifs possède en son centre. Comme il existe une infinité de motifs, mais seulement un

nombre fini de tuiles, il existe donc au moins une tuile  $t$  qui est la tuile centrale d'une infinité de motifs. Nous appelons  $M_1$  l'ensemble des motifs générés par  $\tau$  qui ont comme tuile centrale  $t$ .

A l'étape  $n + 1$ , nous avons un ensemble infini  $M_n$  de motifs qui ont tous en commun un même sous-motif carré  $m_n$  de taille  $2n - 1$  en leur centre. Nous considérons l'ensemble des motifs carrés de taille  $2n + 1$  qui ont comme sous-motif central  $m_n$ . L'ensemble de ces motifs est fini. Comme  $M_n$  est infini, il existe donc un motif  $m_{n+1}$  qui est un sous-motif d'une infinité de motifs de  $M_n$ . Nous appelons  $M_{n+1}$  le sous-ensemble infini de  $M_n$  composé de tous les motifs générés par  $\tau$  qui ont comme sous-motif central  $m_{n+1}$ .

Par induction, nous obtenons une suite infinie de motifs carrés qui converge vers un pavage du plan. Donc  $\tau$  pave le plan.  $\square$

Les motifs pouvant être vus comme les calculs finis générés par un jeu de tuiles, ce principe peut être interprété de la manière suivante : si un jeu de tuiles peut générer des calculs arbitrairement grands, alors il génère un calcul infini. Entre autres, ce principe répond à différentes questions structurelles sur les pavages. En effet, savoir si un jeu de tuiles peut paver un cône, paver le plan moins une zone finie ou encore paver un demi-plan, n'a pas de signification pour les pavages puisque, par le principe d'extraction diagonale, ces différentes questions sont toutes équivalentes à savoir si le jeu de tuiles pave ou non le plan.

Dans le chapitre qui suit, le principe d'extraction diagonale sera l'outil de base pour obtenir une caractérisation des jeux de tuiles pavant le plan.

# Chapitre 2

## Périodicité et régularité

Historiquement, la notion de pavabilité a été la première à être étudiée, au travers du problème du domino et de son indécidabilité ([Ber66]). Cette question était étroitement liée à l'existence de jeux de tuiles apériodiques, c'est-à-dire des jeux de tuiles ne générant aucun motif périodique. En effet, si Wang avait montré l'existence de jeux de tuiles apériodiques en rajoutant la condition qu'une tuile puisse être imposée à l'origine<sup>1</sup>, il avait aussi conjecturé que dans le cas général, tout jeu de tuiles qui pavait le plan pouvait le paver périodiquement.

Les jeux de tuiles périodiques peuvent être considérés comme les jeux de tuiles pavant le plan de la manière la plus simple<sup>2</sup>. Ils sont entre autres définissables par les motifs périodiques qu'ils génèrent et il est donc, comme pour les jeux de tuiles ne pavant pas le plan, récursivement énumérable de savoir si un jeu de tuiles pave le plan périodiquement (ce résultat est dû à Gurevich et Koriakov qui ont montré l'indécidabilité du pavage périodique du plan dans [GK72]).

Si la périodicité est facile à générer, l'apériodicité, quant à elle, est beaucoup plus difficile à contrôler. La construction de jeux de tuiles apériodiques est une tâche souvent ardue, impliquant l'introduction de techniques de construction plus ou moins sophistiquées (voir, par exemple, [Ber66, Rob71, CK97, Oll08]). Dans ce chapitre, nous introduisons les jeux de tuiles périodiques, et nous définissons différentes propriétés liées à ces types de jeux. Dans la continuité, nous apportons une formalisation aux idées de *régularité* ou *complexité* d'un pavage en introduisant la définition de fonction de quasipériodicité ([Dur99]). Cet outil permet de quantifier de manière naturelle la complexité d'un pavage en observant la fréquence d'apparition des motifs qui le compose. Cela mènera naturellement à la notion de pavages apériodiques et de pavages quasipériodiques et à un des résultats fondamentaux : tout jeu de tuiles pavant le plan le pave de manière quasipériodique ([Dur99]).

---

<sup>1</sup>Il a en fait montré que le problème de savoir si un jeu de tuiles pavait le plan avec une tuile imposée à l'origine était indécidable.

<sup>2</sup>Cette notion de simplicité sera justifiée par l'étude des fonctions de quasipériodicité dans la section 2.2.

## 2.1 Pavages périodiques

Un jeu de tuiles est périodique s'il peut générer un motif périodique, c'est-à-dire un motif rectangulaire dont les couleurs du bord nord (*resp.* est) sont les mêmes que celles du bord sud (*resp.* ouest) (figure 2.1). Il est ainsi possible de répéter ce motif autant de fois que voulu pour paver le plan. La périodicité est une propriété assez basse dans la hiérarchie arithmétique puisque nous montrerons qu'elle est  $\Sigma_1$ -complète. En effet, un pavage périodique est défini par le motif périodique le générant. Il suffit d'énumérer les motifs d'un jeu de tuiles pour en trouver un qui est périodique. Plus formellement nous avons :

**Définition 12** Un pavage  $P$  est *périodique* s'il existe deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{Z}^2$  tels que pour toutes positions  $x \in \mathbb{Z}^2$ , les tuiles en positions  $x, x + u$  et  $x + v$  sont les mêmes. Un pavage  $P$  est *apériodique* ou *non-périodique* s'il n'est pas périodique. Par abus de langage, nous dirons qu'un jeu de tuiles  $\tau$  est *périodique* s'il existe un  $\tau$ -pavage périodique, et qu'il est *apériodique* ou *non-périodique* s'il pave le plan mais qu'il n'existe pas de  $\tau$ -pavages périodiques<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Nous dirons aussi qu'un jeu de tuiles est *fini* s'il ne pave pas le plan. Cela ne pourra pas être confondu avec la finitude du nombre de tuiles du jeu puisque cette dernière est toujours vraie par définition.

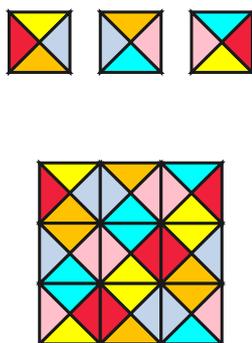


Fig. 2.1 – Un jeu de tuiles périodiques et un motif périodique qu'il génère

Nous introduisons un autre type de structures qui nous servira par la suite : les pavages déterministes. L'intérêt des pavages et de l'étude des structures qu'un jeu de tuiles peut produire vient de la définition même des jeux de tuiles qui en fait un modèle de calcul dont le processus calculatoire se fait de manière non-déterministe. Mais parmi l'ensemble des jeux de tuiles, il en existe des déterministes, qui sont des jeux dont les tuiles ne peuvent être assemblées que d'une manière unique. Ces jeux peuvent générer deux types de structures : soit il ne pave pas le plan, soit il génère un motif périodique contenant une et une seule fois chacune des tuiles du jeu. Du fait des structures engendrées, ces jeux sont très peu étudiés. De plus, il

est décidable de savoir si un jeu de tuiles est déterministe ou non<sup>3</sup>.

Suite à la preuve de l'indécidabilité du problème du domino, les questions de décidabilité se sont tournées vers d'autres classes de jeux de tuiles et, entre autres, la classe des jeux de tuiles périodiques. Gurevich et Koryakov ont montré que le problème de savoir si un jeu de tuiles pavait le plan de manière périodique était indécidable [GK72]. Nous montrerons, par la suite, que ce problème est  $\Sigma_1$ -complet. Leur deuxième résultat, plus général, montrait que l'ensemble des jeux de tuiles périodiques était récursivement inséparable de l'ensemble des jeux de tuiles qui ne pavent pas le plan, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonctions récursives acceptant les jeux de tuiles périodiques, refusant ceux qui ne pavent pas et renvoyant n'importe quelle réponse dans les autres cas.

Dans le résultat qui suit, nous allons voir une condition suffisante pour qu'un jeu de tuiles pave le plan périodiquement :

**Théorème 2** *Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. Si  $\tau$  génère un pavage  $P$  avec un seul vecteur de périodicité, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $u \in \mathbb{Z}^2$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^2$ , les tuiles en positions  $x$  et  $x + u$  dans  $P$  sont les mêmes, alors  $\tau$  pave le plan périodiquement.*

◇ *Preuve.* Soit  $\tau$  un jeu de tuiles qui génère un pavage  $P$  avec un seul vecteur de périodicité  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ . Pour toute position  $(x, y)$ , nous considérons le motif  $m_{(x,y)}$  composé des tuiles de  $P$  qui se trouvent sur le domaine :

$$\{(x, y), (x + 1, y), \dots, (x + u, y), (x + u, y + 1), \dots, (x + u, y + v)\}.$$

Le motif  $m_{(x,y)}$  part donc de la tuile en position  $(x, y)$  et arrive à la tuile en position  $(x + u, y + v)$  en effectuant un chemin en équerre. Nous remarquons que les tuiles aux extrémités du motif  $m_{(x,y)}$  sont les mêmes et que donc les motifs  $m_{(x,y)}$  et  $m_{(x+u,y+v)}$  sont les mêmes, translatés par le vecteur  $(u, v)$ .

Nous regardons maintenant le motif infini  $M$  composé des motifs  $m_{(i,-i)}$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ . Ce motif correspond à l'ensemble des tuiles comprises entre les droites  $d$  de coefficient directeur  $-1$  et passant par l'origine et sa translatée  $d'$  par le vecteur  $(u, v)$ . Les tuiles se trouvant sur ces deux droites sont les mêmes, et il est possible de répéter ce motif infini  $M$  autant de fois que nous voulons afin de paver le plan.

$M$  est composé d'une infinité de motifs finis de même domaine, donc il en existe au moins deux, disons  $m_i$  et  $m_j$ , qui sont égaux. Alors le sous-motif fini de  $M$ , que nous notons  $M'$ , borné par  $m_i$  et  $d$  (les tuiles de  $m_i$  et celles sur  $d$  sont incluses dans  $M'$ ) et strictement borné par  $m_j$  et  $d$  (les tuiles de  $m_j$  et celles sur  $d'$  ne sont pas incluses dans  $M'$ ) est un motif périodique. Il est possible de le répéter autant de fois que voulu afin de paver le plan (figure 2.3). La figure

<sup>3</sup>C'est l'une des rares propriétés déterministes sur les pavages. Cela vient du fait que la propriété peut être vérifiée en étudiant les tuiles uniquement et non les pavages générés.

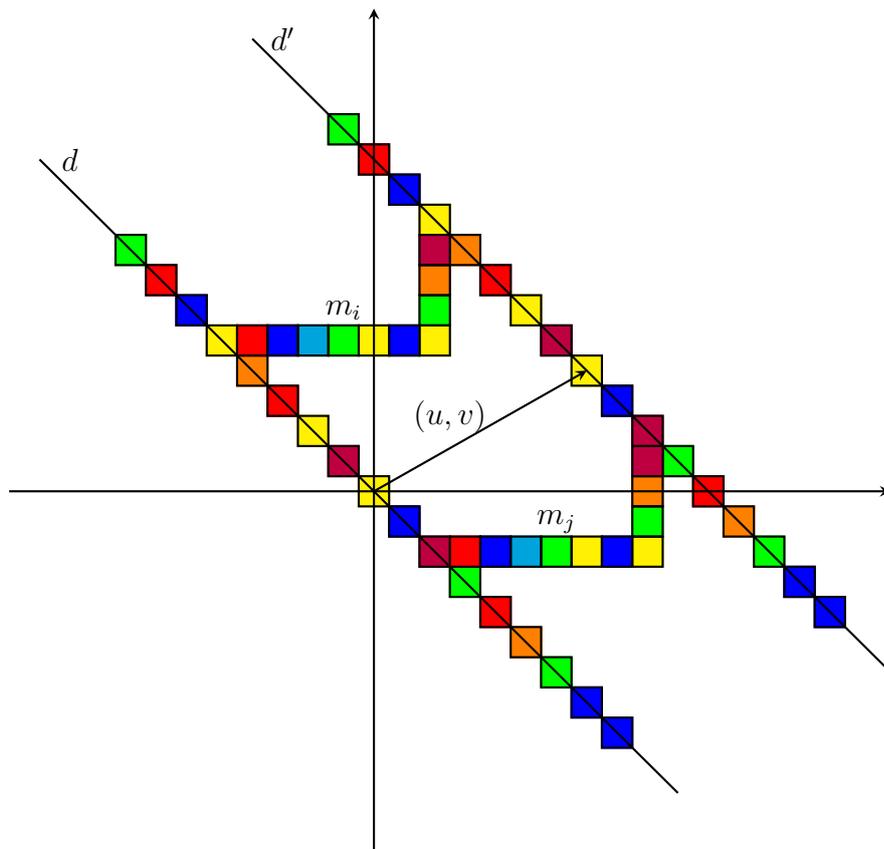


Fig. 2.2 – La chaîne de motif et les deux motifs égaux  $m_i$  et  $m_j$

2.2 montre comment le motif infini  $M$ , dont les bords internes et externes sont composés des mêmes tuiles et dont au moins deux motifs  $m_i$  et  $m_j$  sont similaires, pave le plan.

□

Nous étudions maintenant la grandeur des périodes générées par les jeux de tuiles périodiques. Nous allons voir que les périodes minimales peuvent être très complexes lorsque le nombre de tuiles d'un jeu de tuiles augmente. Pour essayer de quantifier ces périodes, différentes fonctions sont introduites :

**Définition 13** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles périodiques. La *période* de  $\tau$  est le nombre minimum de tuiles composant un  $\tau$ -motif rectangulaire périodique :

$$m(\tau) = \min\{a \times b \mid \text{Il existe un } \tau\text{-motif périodique rectangulaire de taille } a \times b \}.$$

Si  $\tau$  n'est pas périodique, alors  $m(\tau) = 0$ .

La fonction qui suit nous donne, pour un  $n$ , la plus grande période parmi les jeux de tuiles périodiques à  $n$  tuiles :

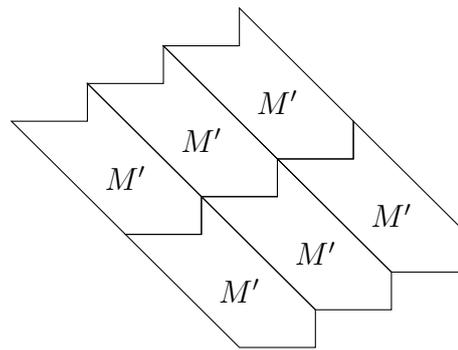


Fig. 2.3 – Nous répétons le motif  $M'$  autant de fois que nous voulons pour paver le plan

**Définition 14** La *fonction des périodes maximales* est la fonction définie de la manière suivante :

$$G(n) = \max\{ m(\tau) \mid \tau \text{ contient } n \text{ tuiles } \}$$

A partir de ces définitions, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 3**  $G$  croît plus vite que n'importe quelle fonction récursive.

- ◇ *Preuve.* Supposons qu'il existe une fonction récursive  $f$  qui borne  $G$ . Alors l'algorithme suivant décide si un jeu de  $n$  tuiles  $\tau$  est périodique ou non :
- i) Enumérer les  $\tau$ -motifs de taille inférieure à  $f(n)$ .
  - ii) Si un motif est périodique  $\tau$  est accepté,
  - iii) sinon nous refusons.

Comme il y a un nombre fini de  $\tau$ -motif de taille inférieure à  $f(n)$ , alors l'algorithme s'arrête toujours.  $\square$

Ce résultat nous montre que les périodes vont pouvoir se complexifier considérablement lorsque le nombre de tuiles est augmenté. Ce résultat était néanmoins prévisible compte tenu de certains problèmes assez similaires concernant les machines de Turing, comme par exemple le problème du *busy beaver* qui se pose la question, entre autres, du maximum de transitions que peut faire une machine de Turing à  $n$  états sur l'entrée vide avant de s'arrêter. Là aussi, les fonctions liant le nombre d'états de la machine au maximum de transitions ou de mémoire nécessaires à une machine de Turing à  $n$  états calculant sur l'entrée vide pour s'arrêter, croissent plus vite que n'importe quelle fonction. Il est par contre assez difficile d'obtenir plus d'information sur la fonction  $G$ . Elle est bien évidemment croissante, mais nous ne savons pas si elle est strictement croissante bien que cela soit fortement supposé.

## 2.2 Fonction de quasipériodicité

La question de l'existence de jeux de tuiles apériodiques s'est très vite posée. Nous verrons par la suite différents jeux de tuiles apériodiques, par exemple, ceux présentant des structures auto-similaires, c'est-à-dire reposant sur une structure se répétant à échelle toujours plus grande. Ces pavages ne peuvent pas être périodiques, puisque sinon, cela impliquerait la fin de l'auto-similarité du pavage<sup>4</sup>. Si aujourd'hui l'apériodicité est mieux comprise, ce n'était pas le cas lors de l'introduction du modèle.

Wang avait conjecturé que si un jeu de tuiles pavait le plan, alors il le pavait de manière périodique. La principale implication aurait été la décidabilité du problème de savoir si un jeu de tuiles pave ou non le plan. Nous savons aujourd'hui que cette conjecture était fautive, et différents jeux de tuiles apériodiques ont été construits, le plus petit étant de 13 tuiles (voir [CK97]). Même si des jeux de tuiles très complexes ont été construits depuis, il apparaît que Wang n'était pas très loin de la réalité. En effet, en introduisant les bons outils sur les pavages, il est possible de montrer que, si un jeu de tuiles pave le plan, alors il peut toujours le paver en respectant une certaine régularité. Le calcul effectué par les jeux de tuiles n'est donc jamais complètement chaotique.

Il est nécessaire d'introduire une notion pouvant quantifier la *régularité* d'un pavage pour arriver à ce résultat. La technique la plus appropriée pour donner une réponse à l'idée intuitive de *régularité d'un pavage* est d'étudier les motifs composant ce pavage et leur fréquence d'apparition sur le plan. Pour cela, nous obtenons la définition suivante :

**Définition 15** Soit  $P$  un pavage du plan. La fonction de quasipériodicité partielle  $Q_P$  de  $P$  associe à chaque entier  $n$ , le plus petit entier  $Q_P(n)$  tel que tout motif carré de  $P$  de côté  $Q_P(n)$  contient tous les motifs carrés de  $P$  de côté  $n$ .

La fonction de quasipériodicité d'un pavage  $P$  associe donc à un entier  $n$  le plus petit entier  $m$  tel que, quel que soit l'endroit où nous regardons sur  $P$  avec une fenêtre carrée de côté  $m$ , il est possible de voir tous les motifs possibles de côté  $n$ . Dans la figure 2.4, nous pouvons voir que n'importe quel carré de côté  $Q_P(2)$  contient les deux motifs carrés possibles de côté deux.

La fonction de quasipériodicité peut être partielle, puisqu'il est aisé de construire un pavage dont certains motifs, de taille  $n$  par exemple, n'apparaissent qu'un nombre fini de fois. La fonction de quasipériodicité n'est alors pas définie pour tout motif de taille plus grande que  $n$ . Les pavages possédant une fonction de quasipériodicité totale sont ceux qui présentent le plus de régularité : tous leurs motifs apparaissent de manière régulière. Nous donnons la définition suivante pour de tels pavages :

<sup>4</sup>En effet, la structure se répétant à échelle toujours plus grande serait limitée par la taille de la période, et il n'y aurait donc plus d'auto-similarité.

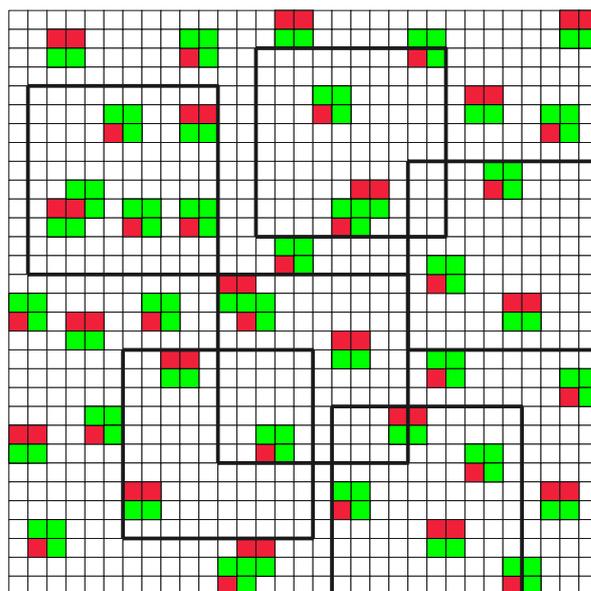


Fig. 2.4 – Dans chaque carré de côté  $Q_P(2)$  apparaît les deux motifs carrés de côté deux

**Définition 16** Un pavage est dit *quasipériodique* si sa fonction de quasipériodicité est totale.

Si un pavage  $P$ , généré par un jeu de tuiles  $\tau$ , n'est pas quasipériodique, cela implique qu'il existe un  $n$  et au moins un motif carré  $m$  de côté  $n$  qui n'apparaît pas régulièrement dans le pavage. Cela implique qu'il existe des zones arbitrairement grandes dans  $P$  qui ne contiennent pas  $m$ . Un tel motif est dit *critique*.

Il est possible d'obtenir maintenant un  $\tau$ -pavage  $Q$  qui ne contient pas  $m$ . En effet, il existe une infinité de motifs carrés de  $P$  de tailles croissantes qui ne contiennent pas  $m$ . Le principe d'extraction diagonale peut s'appliquer pour cette suite de motifs, et nous obtenons donc un pavage  $Q$  qui ne peut en aucun cas contenir le motif  $m$ . De plus, nous remarquons que tous les motifs de  $Q$  sont aussi motifs de  $P$ . Dans un tel cas, nous notons  $Q \prec P$ . La relation  $\prec$  forme un pré-ordre sur l'ensemble des pavages générés par un jeu de tuiles.

En généralisant cette construction, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 4** Si un jeu de tuiles génère un pavage du plan, alors il peut générer un pavage quasipériodique du plan

- ◇ *Preuve.* Soit  $\tau$  un jeu de tuiles qui pave le plan et soit  $P$  un de ces pavages. Nous pouvons supposer que  $P$  n'est pas quasipériodique, et donc il contient des motifs critiques. Ces motifs sont ordonnés d'abord par le nombre de tuiles qu'ils contiennent puis par un ordre quelconque parmi ceux qui ont le même nombre de tuiles. Soit  $m_1$  le plus petit de ces motifs. Comme nous l'avons fait précédemment,

il est possible d'obtenir un  $\tau$ -pavage  $P_1$  qui ne contient pas le motif critique  $m_1$  et tel que  $P_1 \prec P$ . Nous remarquons que tout motif critique de  $P_1$  est aussi motif critique de  $P$ . En effet, si  $m$  est un motif critique de  $P_1$ , alors  $m$  est un motif de  $P$ . De plus, comme  $m$  est critique dans  $P_1$  cela implique qu'il existe une suite infinie de motifs carrés de taille croissante de  $P_1$  qui ne contiennent pas  $m$ . Comme  $P_1 \prec P$  alors cette suite de motifs se retrouve aussi dans  $P$  et donc  $m$  est critique dans  $P$ . Cela signifie aussi que le domaine de la fonction de quasipériodicité de  $P_1$  contient le domaine de la fonction de quasipériodicité de  $P$ .

Si  $P_1$  est quasipériodique, nous nous arrêtons, sinon nous construisons de la même manière un  $\tau$ -pavage  $P_2$  tel que  $P_2 \prec P_1$  et tel que  $P_2$  ne contienne pas le motif  $m_2$  qui est le plus petit motif critique de  $P_1$ . En itérant le procédé, nous obtenons soit un pavage quasipériodique, soit une suite infinie de pavages  $P_1 \succ P_2 \succ \dots$ .

De cette suite infinie, nous construisons la suite infinie de motifs composée du motif carré de côté 1 de  $P_1$  centré sur l'origine et de manière générale du motif carré de taille  $2n + 1$  de  $P_n$  centré sur l'origine. Il est possible d'extraire de cette suite un pavage  $Q$  tel que  $P_1 \succ P_2 \succ \dots \succ Q$ . Si  $Q$  n'est pas quasipériodique, cela implique que  $Q$  contient un motif critique  $m'$ . Comme vu précédemment, ce motif est aussi critique pour tous les autres pavages. Mais comme il n'existe qu'un nombre fini de motifs plus petits que  $m'$  selon l'ordre établi en début de preuve, cela signifie qu'un des motifs critiques  $m_k$  est plus grand que  $m'$ , ce qui est une contradiction. Donc  $Q$  est quasipériodique. □

Wang n'était donc pas très loin de la vérité. Les jeux de tuiles qui pavent le plan ne le pavent pas forcément de manière périodique mais toujours de manière quasipériodique. Les pavages quasipériodiques d'un jeu de tuiles représentent exactement la classe minimale pour le pré-ordre  $\prec$  : si  $P \prec Q$  et  $Q$  est quasipériodique, alors  $Q \prec P$ . Car si  $m$  est un motif de  $Q$ , puisque  $Q$  est quasipériodique, il existe un  $n$  tel que  $m$  apparaît dans chaque carré de côté  $n$ . Si un carré de côté  $n$  de  $P$  ne contient pas  $m$ , comme  $P \prec Q$ , cela impliquerait que  $Q$  contient un carré de côté  $n$  qui ne contient pas  $m$ . C'est une contradiction et donc  $P$  contient  $m$ .

La fonction de quasipériodicité d'un pavage permet de quantifier sa régularité. Si elle croît lentement, cela impliquera que le pavage est très régulier. Par contre, une croissance rapide impliquera que certains des motifs apparaissent de manière irrégulière dans le pavage. Il est donc intéressant de se demander quels types de fonctions peuvent être obtenus par des jeux de tuiles. Bien évidemment, il est possible de construire un jeu de tuiles très simple qui pourra générer des pavages quasipériodiques avec des fonctions aussi complexes que nous voulons. C'est une remarque vraie pour de nombreux problèmes liés aux pavages. Et la réponse est invariablement la même : l'étude se portera sur le pavage le plus simple que peut générer un jeu de tuiles. La fonction de quasipériodicité d'un jeu de tuiles sera donc la plus petite des fonctions de quasipériodicité des pavages qu'il peut générer. Nous

verrons qu'il existe des jeux de tuiles avec des fonctions de quasipériodicité aussi complexes que nous souhaitons.

## 2.3 Fonction de quasipériodicité d'un pavage périodique

Comme première application de la fonction de quasipériodicité, nous montrons qu'un pavage est périodique si, et seulement si, sa fonction de quasipériodicité est bornée par une fonction affine :

**Théorème 5** Soit  $P$  un pavage.  $P$  est périodique si, et seulement si,  $G_P(n) \leq n+c$  pour une certaine constante  $c$ .

◇ *Preuve.*  $[\Rightarrow]$  : Soit  $P$  un pavage périodique de période carrée  $p$ . Soit  $M$  un motif de  $P$  de côté  $n$ . Comme  $P$  est périodique, alors si  $M$  est translaté par un vecteur horizontal ou vertical de longueur  $n$ , nous obtenons de nouveau  $M$ . La fenêtre carrée de côté  $n+p-1$  qui a  $M$  dans son coin en bas à gauche contient aussi une copie de  $M$  moins une ligne dans son coin en haut à droite, une copie de  $M$  moins une colonne dans son coin en bas à droite et une copie de  $M$  moins une ligne et une colonne dans son coin en haut à droite. Donc tout translaté de la fenêtre de taille  $n+p-1$  par un vecteur  $(x, y)$ , où  $0 \leq x, y \leq p$ , contient au moins un motif  $M$ .

De plus, si  $p$  est la période minimale de  $P$  alors  $G_P(n) = n+p-1$  car sinon tout motif de taille  $n$  apparaîtrait au moins deux fois dans chaque fenêtre de côté  $n+p-1$  ce qui impliquerait que la période soit inférieure ou égale à  $p-1$ . Donc  $p$  ne serait plus la période minimale de  $P$ .

$[\Leftarrow]$  : Soit  $P$  un pavage quasipériodique qui admet une fonction de quasipériodicité  $G_P(n) \leq n+c$ . Soit  $M$  un motif carré de  $P$  de côté  $n \gg c$  (pour cette preuve, il suffira que  $n > 3c$ ). Nous prenons la fenêtre de côté  $n+c$  qui contient  $M$  dans son coin en bas à gauche, et nous la translatons d'une case à droite et une case en haut. Cette fenêtre ne contient plus  $M$ . Par contre, comme la fonction de quasipériodicité de  $P$  est bornée par  $n+c$ , alors cette fenêtre contient une copie de  $M$  qui est un translaté de  $M$  et qui recouvre  $M$  sur une partie. Si plusieurs translatsés sont possibles, nous prenons celui dont le vecteur est le plus petit selon la distance euclidienne. Le coin supérieur droit de la copie de  $M$  ne peut pas se trouver sur une des  $n$  premières colonnes ou  $n$  premières lignes de la fenêtre. Il se trouve donc dans le carré formé des  $c$  dernières lignes et colonnes. Les deux motifs sont donc les translatsés l'un de l'autre par un vecteur  $(x, y) \in [0, c] \times [0, c]$ . Entre le coin inférieur gauche de  $M$  et celui de sa copie se trouve un motif rectangulaire  $m$  de côtés  $x$  et  $y$  (le motif rouge dans la figure 2.5). Comme  $M$  et sa copie représentent le même motif, alors nous obtenons une suite finie de copies de  $m$  qui se répète par translation de vecteurs  $(x, y)$ . Nous appelons cette

suite  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  où  $m_1$  est le motif appartenant à  $M$  mais pas à sa copie. Nous notons que chaque copie du motif  $M$  contient  $n - 1$  fois le motif  $m$ .

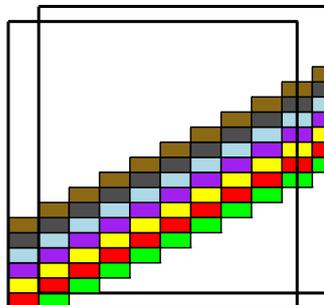


Fig. 2.5 – Le motif  $M$  et son translaté et la suite de motifs  $m_i$

Nous montrons maintenant que les motifs  $m$  se répètent à l'infini avec une translation de vecteurs  $(x, y)$ . Nous considérons la fenêtre de côté  $n + c$  qui contient dans son coin inférieur gauche le motif  $m_{n/2}$ , c'est-à-dire le motif  $m$  qui se trouve au milieu de  $M$ . Ce motif contient encore  $n/2$  autres copies de lui-même translatées par un vecteur  $(x, y)$ . Dans cette fenêtre doit apparaître une copie de  $M$ . Comme  $n \gg c$ , cette copie de  $M$  contient un des motifs de la série  $\{m_{n/2}, m_{n/2} + 1, \dots, m_n\}$  et ce motif se trouve dans le quart inférieur gauche de  $M$ . Nous savons que tout motif de  $M$  se répète avec un vecteur de périodicité  $(x, y)$ . La séquence  $\{m_1, \dots, m_n\}$  se prolonge dans cette copie de  $M$  et nous obtenons une nouvelle séquence  $\{m_1, \dots, m_{n+s}\}$  où  $s \geq n/2$ .

En répétant le même argument mais en changeant la fenêtre de position, nous montrons que la séquence des  $m_i$  se répète aussi avec un vecteur  $(-x, -y)$ . Nous prouvons ainsi que le pavage  $P$  a un vecteur de quasipériodicité. Pour prouver qu'il y a un autre vecteur de périodicité, il suffit de prendre pour tout motif  $M$  de côté  $n \gg c$  la fenêtre de taille  $n + c$  qui contient  $M$  dans son coin inférieur droit et de la translater d'une case à gauche et d'une case en haut. Nous obtenons ainsi un autre vecteur de périodicité linéairement indépendant de  $x, y$  ce qui prouve la périodicité de  $P$ .

□

La fonction de quasipériodicité étant un quantificateur de la régularité d'un pavage, il n'est pas étonnant que celle d'un pavage périodique soit affine car les pavages périodiques sont ceux qui, par définition, ont la structure la plus régulière.

## 2.4 Cardinalité de l'ensemble des pavages générés par un jeu de tuiles

Nous avons vu que deux branches infinies d'un arbre  $\mathcal{A}_P$  associé à un pavage  $P$  correspondent à deux pavages différents pouvant être extraits de  $P$ . Une approche possible pour estimer la cardinalité des pavages pouvant être extraits d'un pavage  $P$  est d'étudier la cardinalité de l'arbre  $\mathcal{A}_P$  associé à  $P$ . Le premier résultat concerne les arbres associés à des pavages périodiques :

**Théorème 6** Soit  $P$  un pavage quasipériodique.  $P$  est périodique si, et seulement si,  $\mathcal{A}_P$  contient au moins une chaîne.

◇ *Preuve.*  $[\Rightarrow]$  : Soit  $P$  un pavage périodique. Si nous considérons un motif  $m$  assez grand pour contenir la période  $p$  de  $P$  alors il n'existe qu'un seul motif  $m'$  pouvant l'étendre. Sinon, deux motifs contenant la période  $p$  auraient des tuiles différentes et donc  $p$  ne serait pas la période de  $P$ .

$[\Leftarrow]$  : Soit  $P$  un pavage quasipériodique et soit  $\mathcal{A}_P$  l'arbre qui lui est associé et qui contient au moins une chaîne. Soit  $m$  un motif de cette chaîne. Nous allons montrer que  $m$  apparaît périodiquement dans  $P$ . Comme  $m$  fait partie d'une chaîne, alors  $m$  ne peut être étendu que d'une manière unique. Nous considérons la première extension générale de  $m$  contenant au moins deux autres fois le motif  $m$  de manière non alignée. Un tel motif existe car  $P$  est quasipériodique. Il existe donc deux vecteurs  $u$  et  $v$  linéairement indépendants tels que les deux nouveaux motifs soient des translatés de  $m$  par  $u$  et  $v$ . Mais comme toutes les extensions de tous les motifs  $m$  sont les mêmes, alors cela implique que tout motif  $m$  est un translaté de vecteur  $u$  ou  $v$  d'un autre motif  $m$  (figure 2.6). Cela implique que  $m$  apparaît périodiquement.

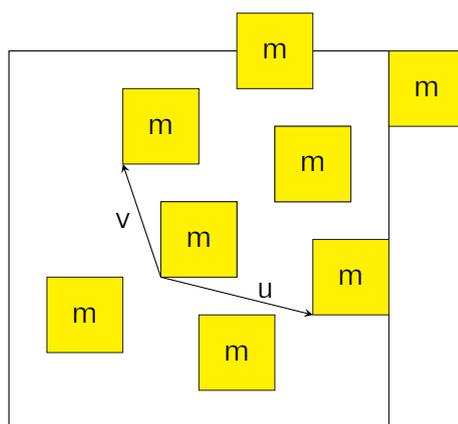


Fig. 2.6 – Si  $m$  fait partie d'une chaîne alors il apparaît de manière périodique

Comme  $m$  apparaît périodiquement, et que toutes les extensions des motifs  $m$  de

$P$  sont les mêmes, alors le plus grand rectangle ne contenant qu'une seule fois le motif  $m$  est une période pour  $P$ .  $\square$

Nous pouvons remarquer que la condition demandant que  $P$  soit quasipériodique est plus forte que nécessaire. En regardant la preuve, nous nous rendons compte qu'il suffit que les motifs de  $P$  apparaissent au moins trois fois chacun et de manière non alignée pour obtenir le même résultat. A partir de ce résultat, il est possible d'obtenir d'autres propriétés structurelles sur les arbres associés à des pavages périodiques :

**Lemme 2.1** *Soit  $P$  un pavage tel que tout motif apparaisse au moins trois fois de manière non alignée dans  $P$ . Si  $\mathcal{A}_P$  contient une chaîne alors il existe un entier  $n$  tel que toutes les branches à partir du niveau  $n$  dans  $\mathcal{A}_P$  soient des chaînes.*

◇ *Preuve.* Comme  $\mathcal{A}_P$  contient une chaîne, par le théorème 6,  $P$  est périodique. Soit  $m$  un motif de  $P$  contenant la période  $p$  de  $P$ . Si  $p$  contient deux extensions différentes, cela implique que deux tuiles sont différentes et que donc  $p$  n'est pas la période de  $P$ .  $\square$

Nous en déduisons que l'ensemble des pavages pouvant être extraits d'un pavage périodique  $P$  est fini et il correspond exactement à l'ensemble de pavages obtenus en translatant  $P$  d'un vecteur dont les coordonnées sont bornées par la période de  $P$ . A partir de là, nous obtenons le résultat principal sur la cardinalité des ensembles générés par un ensemble de tuiles :

||| **Théorème 7** *Si un jeu de tuiles génère un pavage quasipériodique strict, c'est-à-dire quasipériodique mais non-périodique, alors il génère un ensemble non-dénombrable de pavages du plan.*

◇ *Preuve.* Soit  $\tau$  un jeu de tuiles qui génère un pavage quasipériodique strict  $P$ . Comme  $P$  n'est pas périodique, alors  $\mathcal{A}_P$  ne contient pas de chaînes. Donc tout motif  $m$  de  $P$  a deux motifs différents qui l'étendent. Nous avons donc une bijection entre les branches infinies de  $\mathcal{A}_P$  et l'espace de Cantor. Comme chaque branche infinie correspond à un pavage extrait de  $P$ , et donc correspond à un pavage généré par  $\tau$ , alors l'ensemble des pavages générés par  $\tau$  est non-dénombrable.  $\square$

Ce résultat reste valable si nous considérons que les translatés d'un même pavage sont équivalents. En effet, pour un pavage donné le nombre de ses translatés est au pire dénombrable, ce qui n'a donc pas d'influence sur le théorème précédent.

Pour conclure l'étude de la cardinalité de l'ensemble des pavages générés par un jeu de tuiles, nous prouvons le résultat suivant qui a été démontré récemment [BDJ08] :

||| **Théorème 8** *Soit  $\tau$  un jeu de tuiles générant une infinité de pavages périodiques. Alors  $\tau$  génère aussi un pavage non-périodique.*

◇ *Preuve.*

Soit  $\tau$  un jeu de tuiles générant une infinité de pavages périodiques, que nous notons :  $P_1, P_2, \dots$ . Par l'absurde, nous supposons que  $\tau$  ne génère pas de pavages non-périodiques. Soit  $\{Q_1, Q_2, \dots\}$  la suite infinie définie de la manière suivante :  $Q_i$  est le motif carré de  $P_i$  de côté  $2i + 1$  centré sur l'origine. Par le principe d'extraction, nous pouvons extraire de cette suite un  $\tau$ -pavage  $Q$  et par supposition absurde,  $Q$  est périodique (figure 2.7.1). Soit  $M$  la période de  $Q$ .

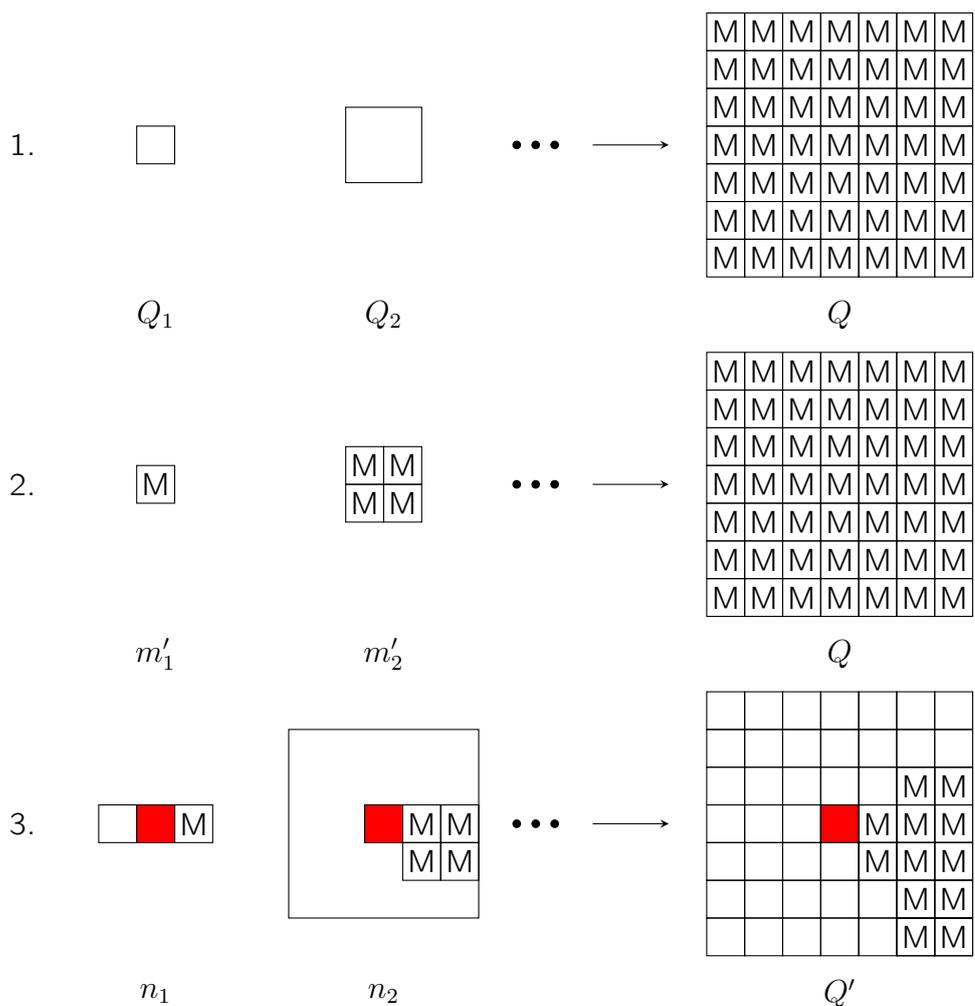


Fig. 2.7 – 1. Nous extrayons un pavage périodique  $Q$  de la suite infinie de pavages périodiques 2. La suite des  $m'_i$  converge vers  $Q$  3. Il est possible d'extraire de la suite des  $n_i$  un pavage qui n'est pas périodique

Pour chaque  $P_i$  nous considérons le plus grand motif  $m_i$  centré sur l'origine que  $P_i$  a en commun avec  $Q$ . Nous pouvons supposer que, dans cette suite,  $Q$  n'apparaît pas, et que donc ce motif est toujours fini. Les motifs  $m_i$  sont donc composés

d'un nombre fini de copies de  $M$ . Comme  $Q$  est obtenu par extraction des  $P_i$ , il est possible de trouver une sous-suite croissante  $\{m'_1, m'_2, \dots\}$  de la suite des  $m_i$  telle que  $m'_{i+1}$  soit une extension de  $m'_i$  (figure 2.7.2).

Nous regardons maintenant  $m'_i$  et le pavage  $P'_i$  duquel il est extrait. Par définition,  $m'_i$  est le plus grand motif commun de  $P'_i$  et  $Q$  centré sur l'origine. Dans  $P'_i$ , sur la frontière de  $m'_i$ , il existe un motif  $M'$  de la taille de  $M$  mais qui n'est pas  $M$  sinon  $m'_i$  ne serait pas le plus grand motif commun entre  $P'_i$  et  $Q$ . Soit  $n_i$  le plus petit motif carré contenant  $M'$  en son centre et contenant  $m_i$ .

Nous obtenons ainsi une suite de motifs de taille croissante  $\{n_1, n_2, \dots\}$ , contenant tous en leur centre un motif de la taille de  $M$  mais n'étant pas  $M$  et sur un de leurs côtés un rectangle contenant un nombre fini de copies de  $M$ . Comme le nombre de ces motifs est fini et comme il n'y a que quatre côtés possibles, alors il existe une infinité de  $n_i$  qui contiennent le même motif en leur centre et qui ont le rectangle contenant un nombre fini de copies de  $M$  sur le même côté. De cette sous-suite, il est possible de générer un pavage  $Q'$  qui possède en son centre un motif qui n'est pas  $M$  et contenant une infinité de copies de  $M$  sur un de ces côtés et donc qui n'est pas périodique (figure 2.7.3).  $\square$

**Chapitre**  
**3**

---

**Construction de Robinson**

---

Depuis l'introduction des pavages par tuiles colorées au début des années 60, la question de la non-périodicité a été récurrente. D'abord conjecturée impossible par Wang, elle a ensuite été le centre de la thèse de Berger, [Ber66], qui montra dans une construction très technique comment il était possible de simuler une machine de Turing dans un jeu de tuiles et, de ce fait, construisit le premier apériodique. Dans la suite de sa thèse, Berger construisit aussi un jeu apériodique de 104 tuiles.

À partir de là, la recherche de jeux de tuiles apériodiques sous toutes ses formes est apparue dans le but de minimiser le nombre de tuiles mais aussi pour obtenir de nouvelles preuves de l'indécidabilité du problème du domino. Robinson en exhiba un à 6 formes rationnelles [Rob71] qui est le centre de ce chapitre et qui sera étudié en profondeur car il permet la simulation d'une machine de Turing de la manière la plus simple possible. Son équivalent en tuiles de Wang est de 56 tuiles (voir [AD96]). D'autres techniques furent introduites pour capturer l'apériodicité : Mozes utilisa des systèmes de substitution [Moz89], repris ensuite par Ollinger, [Oll08], Kari et Čulik, quant à eux, ont introduit des outils techniques pour construire un jeu apériodique de 13 tuiles [CK97]. Récemment, Durand, Romashchenko et Shen montrèrent comment utiliser le théorème du point fixe de Kleene pour obtenir un jeu de tuiles apériodique, [DRS08]. À la fin du chapitre 6, nous utiliserons les différentes techniques introduites pour obtenir nos propres jeux de tuiles apériodiques.

Ce chapitre sera principalement consacré à l'étude du jeu de tuiles de Robinson (principalement sous sa forme simplifiée explicitée dans [AD96]) qui a l'avantage de combiner un petit nombre de tuiles et une structure assez souple pour pouvoir y manipuler des calculs et des machines de Turing. C'est à l'aide de ce pavage auto-similaire que nous démontrerons les théorèmes classiques des pavages. Nous introduirons ensuite les différentes modifications possibles de cette construction afin d'obtenir un panel d'outils dans le but d'obtenir des résultats forts de calculabilité sur les pavages.

## 3.1 Jeux de tuiles de Robinson

### 3.1.1 Construction

En 1971, Robinson a introduit un jeu de formes rationnelles qui ne pave le plan que de manière apériodique. La figure 3.1 montre les six tuiles originelles données par Robinson. Le jeu final est constitué de ces six formes et de toutes les formes pouvant être obtenues par symétrie ou rotation et conservant les coins.

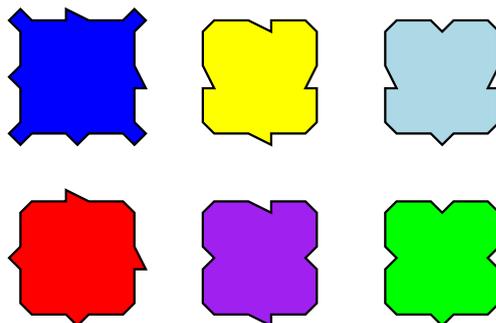


Fig. 3.1 – Les 6 formes de base du jeu de tuiles de Robinson

Nous allons démontrer que ce jeu de formes pave le plan uniquement de manière apériodique. Pour cela, nous remarquons en premier que les formes sont de deux types : soit avec les coins sortants (figure 3.2.1), appelé *croix*, soit avec les coins biaisés (figure 3.2.2), appelé *bras*.

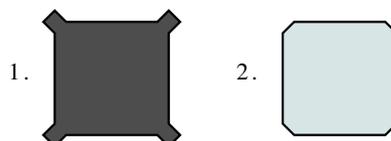


Fig. 3.2 – Les deux types de forme : 1. croix et 2. bras

Deux croix ne peuvent pas être mises côte à côte ou en contact avec un coin. Donc chaque croix est entourée de huit bras. Un bras doit avoir ses quatre coins en contact avec des croix ; cela peut être fait de différentes manières :

- i) avec deux croix si elles sont sur les côtés nord et sud, ou est et ouest du bras,
- ii) avec trois croix si deux croix ont leurs coins fixés sur deux coins consécutifs du bras, et la troisième croix est fixée sur le côté laissé libre du bras,
- iii) avec quatre croix si les quatre croix ont leurs coins fixés sur les quatre coins du bras.

A partir de ces remarques, nous notons qu'un pavage du plan avec les formes croix et bras donne des lignes qui sont composées soit uniquement de bras, soit de l'alternance de bras et de croix. Les deux solutions pour paver sont donc celles montrées dans la figure 3.3.

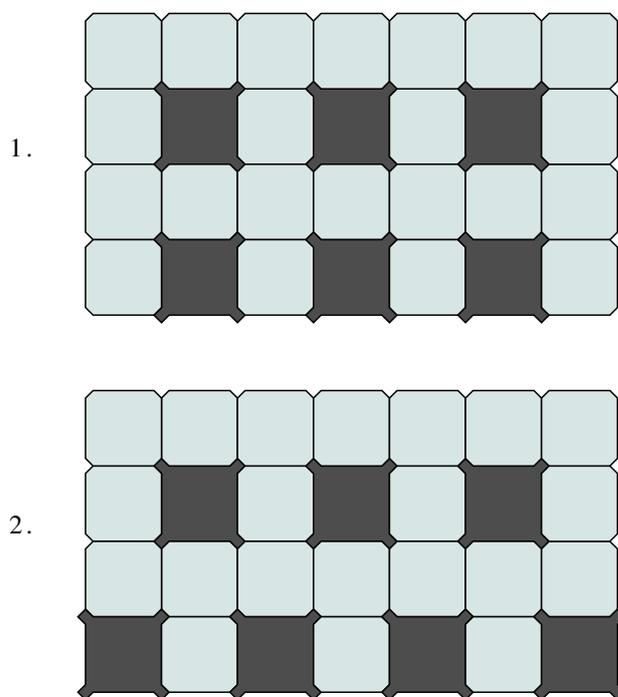


Fig. 3.3 – Les deux possibilités de pavages avec des croix et des bras

Pour montrer l'apériodicité, nous allons nous éloigner un peu de la structure originelle et nous rapprocher des jeux de tuiles de Wang. Nous transformons donc ce jeu de formes en un jeu de tuiles fléchées. Ici, il est préférable d'utiliser les tuiles fléchées car elles donnent une vue plus structurée du pavage final. Nous remplaçons chaque forme par une tuile fléchée où les ergots seront remplacés par les pointes des flèches et les encoches par les débuts des flèches. Comme deux ergots sont possibles, nous remplacerons par une unique flèche centrale les ergots symétriques, et par une flèche centrale ajoutée d'un segment coloré décentré les ergots non symétriques. La figure 3.4 montre le jeu de tuiles fléchées représentant le jeu de Robinson. Le jeu complet se compose de toutes les symétries et rotations de ces tuiles. Nous remarquons que pour les tuiles fléchées, le fait de rajouter les symétriques et les rotations de tuiles n'implique pas le pavage du plan avec une seule tuile. En effet, contrairement aux tuiles colorées, une tuile fléchée et son symétrique ne s'associent pas car leurs flèches se font face. Le jeu de la figure 3.4 comporte une tuile de moins que de formes dans le jeu de Robinson. Cela est dû au fait que nous ne considérons pas les coins des formes lors de notre transformation

et donc que les formes bleue et rouge sont représentées par la même tuile fléchée.

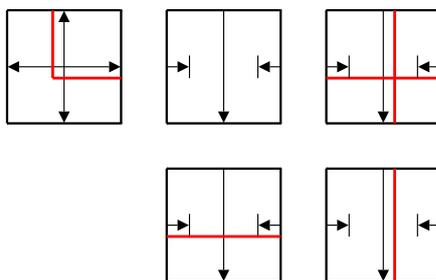


Fig. 3.4 – Les formes de Robinson représentées à l'aide de tuiles fléchées

Nous appelons toujours *croix* la tuile avec quatre flèches pointant vers les quatre bords et *bras* les quatre autres tuiles. Puisque les coins des formes ont perdu leurs ergots, nous obligerons que les tuiles fléchées respectent la disposition des formes du jeu de Robinson, et que les croix apparaissent une tuile sur deux, une ligne sur deux. Nous affinerons à la fin ces tuiles pour garantir qu'elles apparaissent bien comme nous le souhaitons. De plus, nous dirons qu'une croix est *nord-est* si les segments rouges qu'elle contient partent du côté nord pour aller au côté est. Les autres croix possibles seront nommées selon la disposition interne de leurs segments rouges. Les autres tuiles seront indiquées par le point cardinal vers lequel leur unique flèche sortante pointe.

Soit une croix se trouvant sur une ligne. La prochaine croix se trouvant sur sa droite devra être son miroir pour que l'information rouge puisse partir de l'une et arriver à l'autre. Les deux croix seront soit face à face, soit dos à dos. Comme nous avons la restriction que deux croix ne soient séparées que d'une tuile, alors cette tuile sera soit un bras ne pouvant pointer que vers une seule direction si les croix sont face à face, soit un bras pouvant pointer vers le nord ou le sud si les croix sont dos à dos. La figure 3.5 montre les deux possibilités si les croix sont face à face (3.5.1) et les quatre possibilités si les croix sont dos à dos (3.5.2).

Soit un carré de côté 3 dont les coins sont composés de quatre croix se faisant face. Dans ce cas-là, les tuiles que nous rajoutons entre ces tuiles seront des bras pointant vers l'extérieur. La tuile centrale devra donc forcément être une croix. Le sens de cette croix est libre et influence les quatre bras sortants se trouvant entre les croix des coins (figure 3.6).

Nous appelons un tel carré un *3-carré* et, par extension de ce formalisme, la croix est appelée un *1-carré*. Un 3-carré sera identifié par la tuile centrale qu'il contient : nous dirons qu'il est nord-est si sa croix centrale est nord-est. Nous avons généré le 3-carré à partir de quatre 1-carré. L'idée consiste maintenant à répéter le processus en prenant quatre 3-carrés pour construire un carré de taille supérieure. Comme précédemment, si deux 3-carrés se trouvent sur les mêmes lignes et de consécutivement, alors ils se font face ou se font dos. S'ils se font face, la tuile

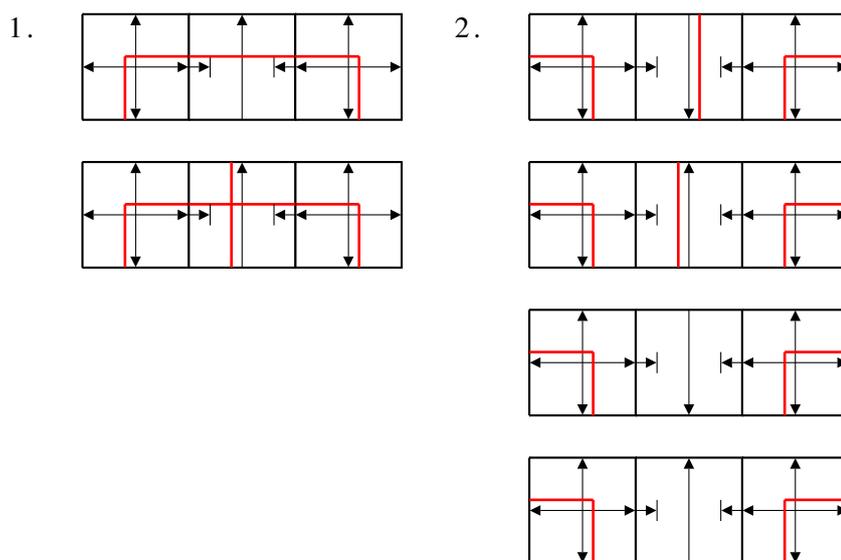


Fig. 3.5 – 1. Possibilités si les croix sont face à face ou 2. dos à dos

qui se trouve à leur jonction ne peut avoir qu'une direction possible. En créant maintenant un grand carré de côté 7 où les coins sont formés de quatre 3-carrés se faisant face, nous obtenons un carré dont les axes centraux sont composés de flèches sortant vers l'extérieur ce qui implique que la tuile centrale est une croix. Nous obtenons ainsi le carré de la figure 3.7 qui est appelé un 7-carré et qui est défini par sa tuile centrale.

En itérant ce procédé, nous arrivons à générer des carrés de taille  $2n-1$  arbitrairement grand, et par le principe d'extraction diagonale, nous pouvons en extraire un pavage du plan. Il faut montrer maintenant que tout pavage généré par le jeu de formes de Robinson est bien apériodique. Nous sommes sûr que le pavage contient des 1-carrés. Ces 1-carrés définissent chacun les 3-carrés, 7-carrés, ... auxquels ils appartiennent. Il existe donc dans le pavage des carrés arbitrairement grands qui ne sont pas des périodes. Le pavage est donc non-périodique et le jeu de formes de Robinson aussi.

Comme notre intérêt est de travailler avec des tuiles colorées (ou fléchées ici), nous affinons le jeu de tuiles fléchées pour obtenir des tuiles qui pavent de la même manière que le jeu de Robinson. Pour cela, il faut imposer que les croix apparaissent une case sur deux, une ligne sur deux, et aussi une colonne sur deux pour avoir le pavage le plus régulier possible. Soit le jeu de tuiles fléchées de la figure 3.8 qui est un jeu de tuiles déterministe pavant le plan de manière unique avec un motif carré périodique de côté 2. Nous allons superposer à notre jeu de tuiles fléchées les tuiles du jeu déterministe de manière à ce que seules les croix soient superposées à la première tuile du jeu périodique, puis que toutes tuiles soient superposées aux trois autres tuiles. Ainsi, nous obtenons un pavage du plan où une croix apparaît

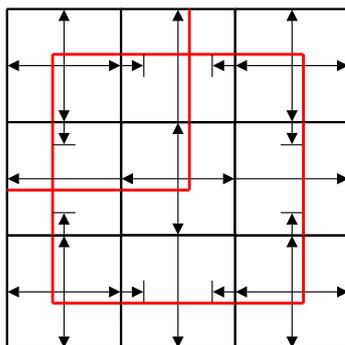


Fig. 3.6 – Un 3-carré

une tuile sur deux, une ligne sur deux et une colonne sur deux et la régularité de ce pavage empêche que la structure de la figure 3.3.2 apparaisse.

Nous finissons la section en dénombrant précisément le nombre de tuiles du jeu de tuiles fléchées de Robinson. Nous nommons les tuiles du jeu déterministe de la figure 3.8 :  $t_1$  est la première tuile en haut à gauche,  $t_2$  la deuxième en haut à droite,  $t_3$  la troisième en bas à gauche et  $t_4$  la dernière en bas à droite. Nous voulons que la croix apparaisse régulièrement sur le pavage. Elle doit donc être superposée à la tuile  $t_1$ . Comme il y a quatre possibilités de croix, 4 tuiles sont possibles (figure 3.9.1). Les tuiles  $t_2$  correspondent aux tuiles qui se situent entre deux croix se trouvant sur la même ligne. Nous avons vu que cette tuile est un bras nord ou sud. Il y a 12 bras nord ou sud que nous superposons à la tuile  $t_2$  (figure 3.9.2). Le même raisonnement s'applique aux tuiles qui sont superposées à la tuile  $t_3$ . Elles correspondent aux bras est et ouest. Il y a 12 bras est et ouest que nous superposons à la tuile  $t_3$  (figure 3.9.3). Finalement, les tuiles  $t_4$  peuvent représenter n'importe laquelle des tuiles, croix ou bras. Il y en a 28 que nous superposons à la tuile  $t_4$  (figure 3.9.4). Le jeu de tuiles finales contient donc 56 tuiles.

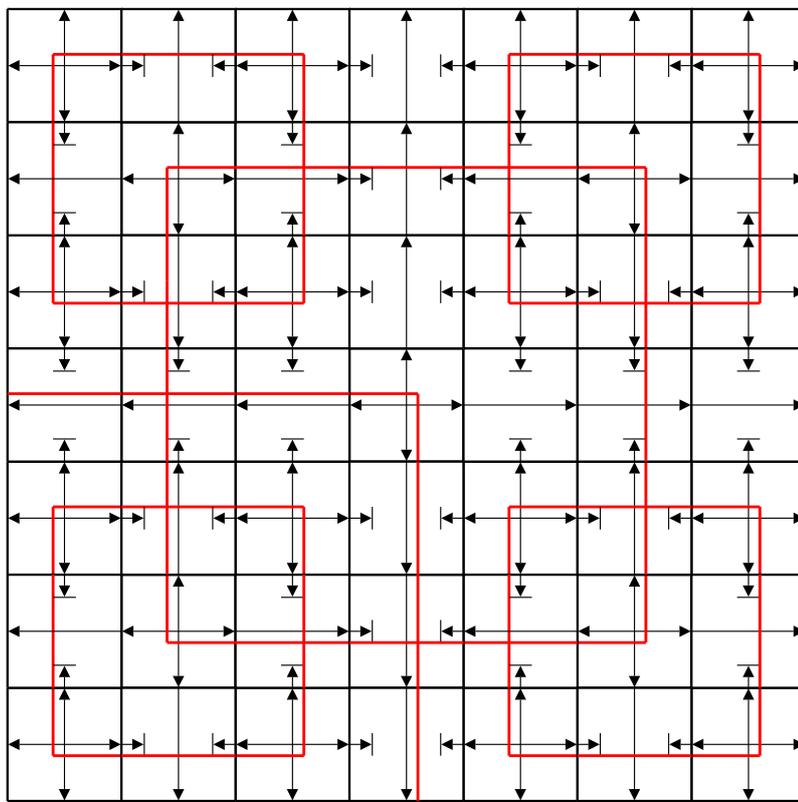


Fig. 3.7 – Un 7-carré

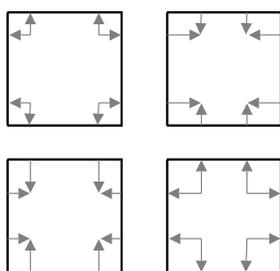


Fig. 3.8 – Un jeu de tuiles déterministe

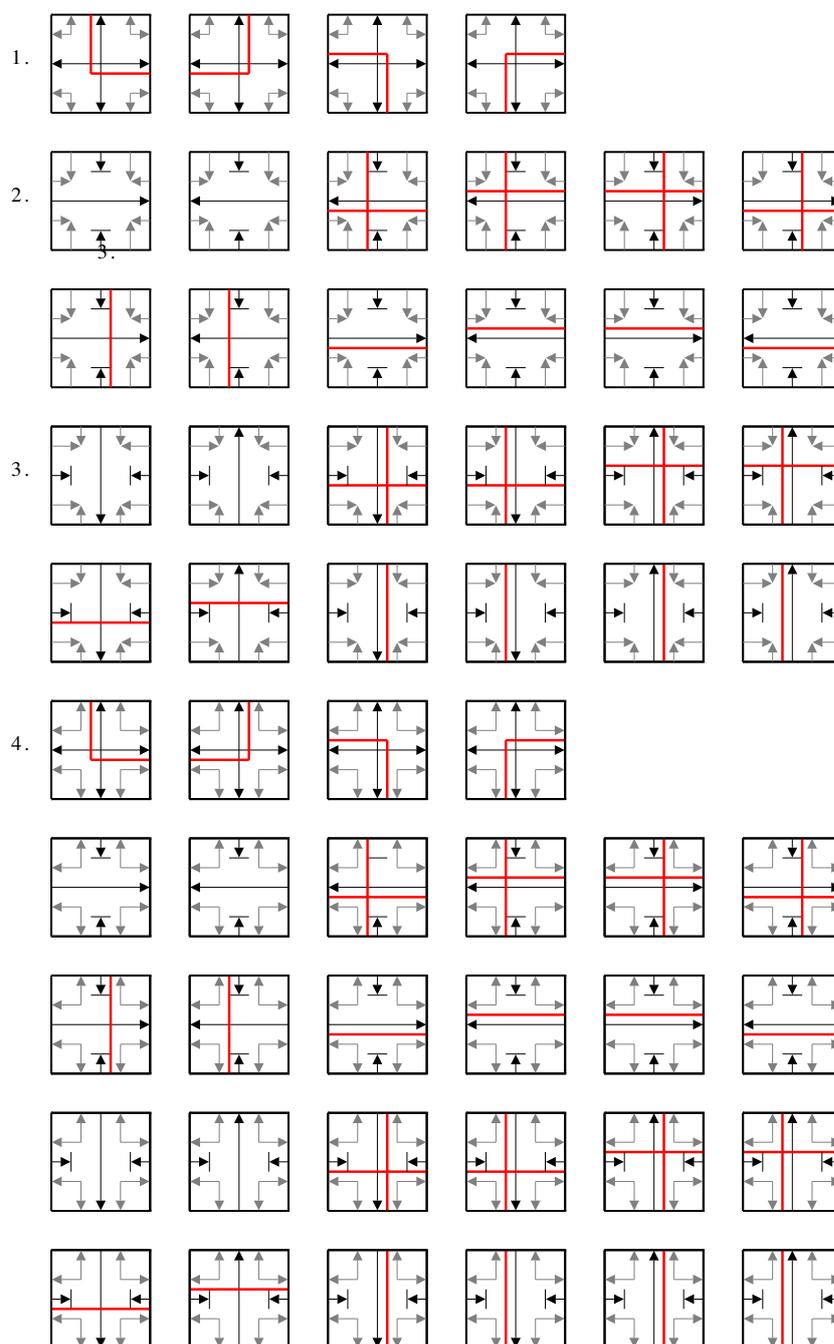


Fig. 3.9 – Les 56 tuiles du jeu de Robinson

### 3.1.2 Notations

Nous introduisons différentes notations pour mieux appréhender et mieux travailler sur la structure des pavages de Robinson. Nous nous intéressons d'abord aux carrés qui apparaissent en rouge dans les pavages de Robinson. Ces carrés, au premier niveau, sont de côté 3, au niveau suivant de côté 5, puis 9 et de manière générale de côté  $2^n + 1$ , au niveau  $n$ . La définition qui suit concerne ces carrés.

**Définition 17** Un carré rouge de taille  $2^n + 1$  apparaissant dans le pavage de Robinson est appelé un  $n^{\text{ième}}$  carré ou un carré de *niveau*  $n$ . Les tuiles de sa bordure forment son *périmètre*.

La figure 3.7 représente un 7-carré dont le carré rouge central est un carré de niveau 2 (car de côté  $2^2 + 1$ ).

Une grille régulière  $G_n$  de taille  $n$  est la grille de  $\mathbb{Z}^2$  formée des lignes et colonnes espacées de  $n$  tuiles. Nous remarquons que l'ensemble des périmètres des carrés de niveau  $n$  d'un pavage de Robinson repose sur une grille  $G_{2^n}$ , que nous appelons la  $n^{\text{ième}}$ -grille ou la grille de *niveau*  $n$ . Les carrés de niveau  $n$  sont répartis régulièrement sur la grille de niveau  $n$ . Exactement  $2n - 1$  tuiles séparent deux coins de deux carrés de niveau  $n$  consécutifs. Ces tuiles ne peuvent pas être marquées de rouge et ne sont composées que de flèches simples partant des deux coins, et se rejoignant au milieu. La grille de niveau  $n$  est *bien pavée* si elle contient tous les carrés de niveaux  $n$  et toutes les flèches reliant ces carrés.

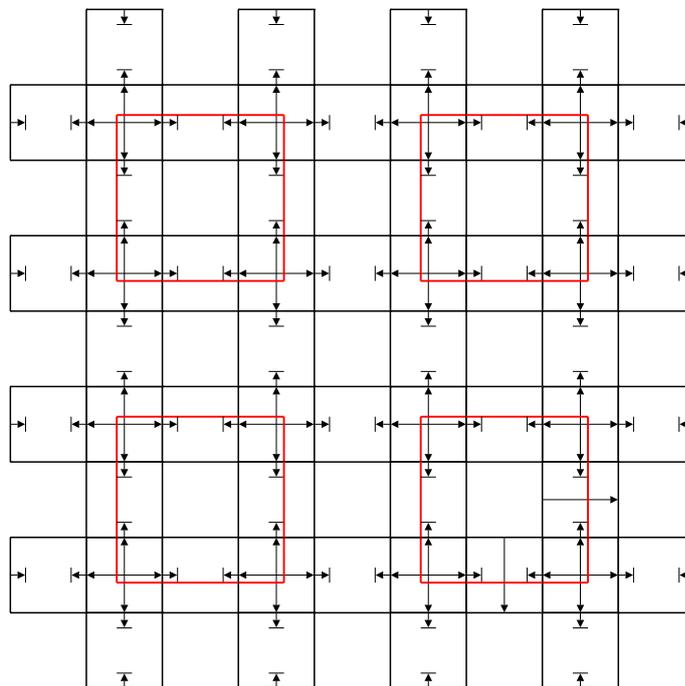


Fig. 3.10 – La grille de niveau 2 bien pavée

La figure 3.10 montre la grille de niveau 2 bien pavée. Les seules tuiles complètes sont celles se trouvant aux intersections des lignes et colonnes de la grille. Les tuiles se trouvant sur une ligne, mais pas sur une colonne de la grille, sont incomplètes car elles ne contiennent pas encore l'information qui les traverse verticalement. De même pour les tuiles se trouvant sur une colonne mais pas sur une ligne car elles n'ont pas encore l'information les traversant horizontalement.

La grille de niveau 2 bien pavée est composée de tous les carrés de niveau 2. Le domaine de cette grille correspond à  $\mathbb{Z}^2$  duquel est enlevé une tuile sur deux, une colonne sur deux et une ligne sur deux. Chacun de ces *trous* est entouré de quatre tuiles de la grille. Nous pouvons lui superposer la grille de niveau 3 de manière à ce que les intersections de la grille 2 coïncident avec un *trou* de la grille de niveau 2. Les flèches de la grille de niveau 3 ne rentrent pas en collision avec les flèches déjà présentes sur la grille 2. Ces flèches ne font que *compléter* les tuiles de la grille de niveau 2 avec lesquelles les tuiles de la grille de niveau 3 s'intersectent.

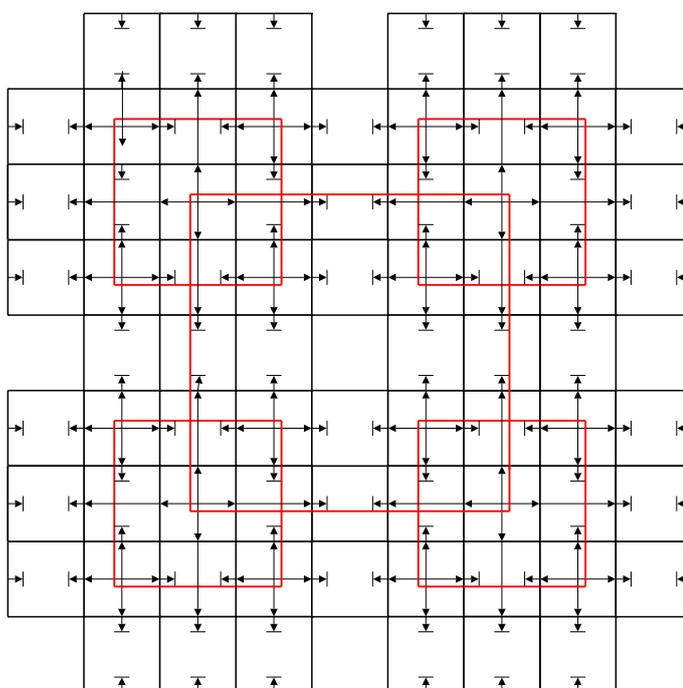


Fig. 3.11 – La grille de niveau 2 sur laquelle nous superposons la grille de niveau 3

Une fois cette étape faite, nous obtenons un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  composé de trous régulièrement disposés : ils apparaissent avec une période verticale et horizontale de valeur 4. Toute tuile se trouvant sur un axe vertical (*resp.* horizontal) compris entre deux trous ne possède pas d'information verticale (*resp.* horizontale). Dans la figure 3.11 nous montrons comment rajouter la grille de niveau 3 sur la grille de niveau 2 en complétant les tuiles communes aux 2 grilles. Des espaces sont encore libres pour les grilles de niveaux supérieurs.

En itérant le procédé et en superposant successivement les grilles de niveaux supérieurs, nous obtenons un pavage limite qui est un pavage de Robinson. Nous savons les jeux de tuiles apériodiques génèrent une quantité non-dénombrable de pavages différents. Le procédé précédemment décrit permet de voir ces différents pavages. En effet, à chaque étape, il existe quatre possibilités différentes pour superposer la grille de niveau suivant. Ces choix ont une influence sur le pavage final. Et il existe autant de pavages finaux qu'il y a de possibilités de disposer les grilles, c'est-à-dire une quantité non-dénombrable.

Avec le pavage de Robinson, il est possible de prouver le problème du domino, d'abord le cas restreint où une origine est imposée puis le cas général.

## 3.2 Le problème du domino

### 3.2.1 Problème avec origine imposée

Pour étudier ce problème, nous le restreignons d'abord au cas où une origine est imposée. Ce problème a été énoncé en premier et démontré par Wang lui-même. Dans cette situation, le problème s'énonce de cette manière :

#### **Problème du domino avec origine imposée**

- Entrée : Un jeu de tuiles  $\tau$  et une tuile  $t$  de  $\tau$ .
- Question : Existe-t-il un  $\tau$ -pavage  $P$  du plan dont la tuile à l'origine est  $t$  ?

Nous allons commencer par montrer comment il est possible de simuler une machine de Turing avec un jeu de tuiles. L'idée est de représenter avec un jeu de tuiles, le diagramme espace×temps du calcul d'une machine de Turing  $M$  sur une entrée  $w$ .

Soit  $M$  une machine de Turing travaillant sur une unique bande semi-infinie et sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ . Soient  $Q$  son ensemble fini d'états dont  $q_0$  est l'état initial et  $\delta$  sa fonction de transition. Une transition de  $M$  est de la forme  $\delta(q_i, a) = (q_j, b, D)$  où  $a, b \in \{0, 1, \square\}$ ,  $\square$  représente le symbole vide, et  $D \in \{D, G\}$  représente le mouvement de la tête de lecture. Notre représentation correspond à un mélange entre tuiles fléchées et tuiles étiquetées afin d'obtenir une meilleure compréhension de la simulation. Les flèches représentent le déplacement de l'information et les étiquettes sont incluses dans l'union d'ensembles  $Q \cup \{0, 1, \square\} \cup \{Q \times \{0, 1\}\}$ . Une tuile aura comme étiquette sud ou nord une lettre de l'alphabet ou une lettre de l'alphabet associée à un état de  $M$  pour signifier que la tête de lecture se trouve sur cette lettre dans un certain état  $Q$ . Les étiquettes des côtés est ou ouest sont : soit le mot vide, soit un état de  $Q$  représentant le déplacement de la tête de lecture. Les flèches vont du sud au nord pour toutes tuiles ne se trouvant pas sur la première ligne du diagramme. Une flèche partant du centre et pointant vers l'est ou l'ouest est rajoutée à une tuile si cette tuile possède l'étiquette d'un état de  $Q$  sur le côté est ou ouest.

Le diagramme espace×temps de  $M$  sur une entrée  $w$  correspond à un rectangle dans lequel une information remonte verticalement et modifie l'entrée  $w$ . D'une transition à l'autre, les seules lettres modifiées sont celles qui ont la tête de lecture avant la transition et celles qui ont la tête de lecture après la transition. Les autres restent intactes. Nous introduisons donc les deux premières tuiles lorsque l'information est inchangée d'une transition à l'autre (figure 3.12). Dans le cas du symbole vide  $\square$ , la tuile la représentant est une tuile sans flèche et sans étiquette.

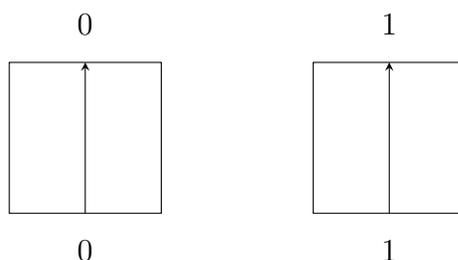


Fig. 3.12 – Les tuiles représentant les bits qui ne changent pas

Le deuxième type de tuiles simule une transition de  $M$ . Le étiquette sud est une étiquette correspondant à la lettre et à l'état actuel. L'étiquette nord correspond à l'action de la transition sur la lettre. L'est ou l'ouest est étiqueté par le nouvel état donné par la transition. La figure 3.13 représente deux tuiles simulant deux transitions de  $M$  :  $\delta(q_i, 0) = (q_k, 1, D)$  et  $\delta(q_j, 1) = (q_l, 1, G)$ . Dans le cas où la transition impliquerait le symbole vide, par exemple  $\delta(q_j, \square) = (q_l, 1, G)$  ou  $\delta(q_j, 1) = (q_k, \square, G)$ , si c'est le côté sud qui représente le symbole  $\square$ , alors il est sans étiquette et la flèche allant de ce côté au centre de la tuile est supprimée. Si c'est le côté nord, la flèche est conservée mais n'est pas étiquetée.

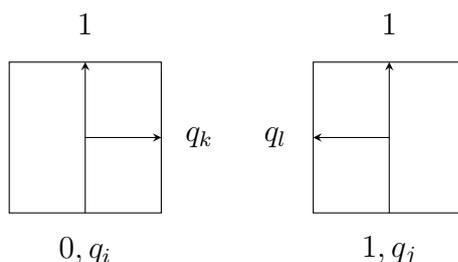


Fig. 3.13 – Deux tuiles représentant des transitions de machine de Turing

Le dernier type de tuiles est composé des tuiles représentant les lettres sur lesquelles la tête de lecture agira lors de la prochaine transition. Un des côtés, est ou ouest, de la tuile est marqué par l'étiquette représentant l'état qui agira sur la lettre. Une flèche partant de ce côté pointe vers le centre de la tuile. Le côté sud

de la tuile est une des lettres composant le mot d'entrée et le côté nord est cette même lettre associée avec l'état qui agira sur elle. Si cette lettre est le symbole vide  $\square$ , alors les côtés nord et sud sont sans étiquette. La figure 3.14 représente une tuile simulant le déplacement de la tête de lecture à droite entrant dans le nouvel état  $q_i$  et une tuile simulant le déplacement de la tête de lecture à gauche entrant dans le nouvel état  $q_i$ .

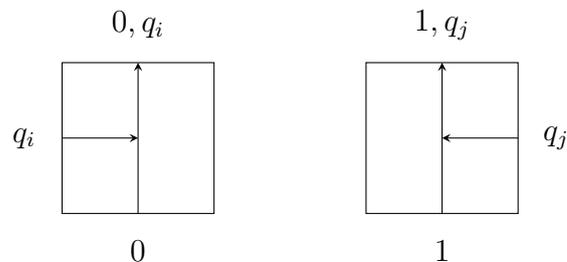


Fig. 3.14 – Deux tuiles représentant les prochaines lettres sur lesquelles la tête de lecture agira

Toutes les tuiles vues jusqu'à présent sont des tuiles utilisées durant la simulation du calcul de  $M$  sur  $w$ . Il nous faut aussi des tuiles spéciales pour coder l'entrée  $w$ . Si l'entrée est de la forme  $w = w_1w_2 \dots w_n$ , nous utilisons exactement  $n$  tuiles s'associant d'une unique manière. Cela peut être fait en ajoutant une étiquette unique sur ces tuiles. De plus, l'étiquette nord de la première tuile est le composé de la lettre  $w_1$  et de l'état initial  $q_0$  permettant ainsi le début du calcul. La figure 3.15 montre les  $n$  tuiles composant l'entrée  $w$ .

Cette construction peut être utilisée pour toute machine de Turing  $M$  et toute entrée  $w$ . Nous obtenons ainsi la définition suivante :

**Définition 18** Pour une machine de Turing  $M$  et une entrée  $w$ ,  $\tau_{M,w}$  désigne le jeu de tuiles qui simule le calcul de  $\tau$  sur  $w$  comme vu ci-dessus.

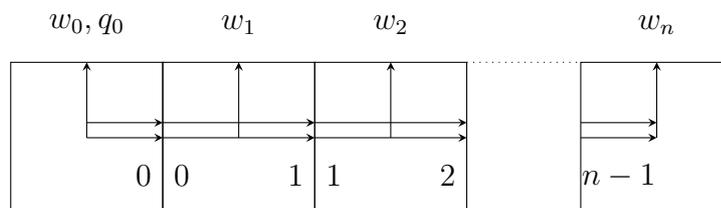


Fig. 3.15 – Les tuiles composant l'entrée  $w$

A l'aide de cette simulation, nous pouvons montrer le résultat suivant :

**Théorème 9** *Le problème du domino avec origine imposée est indécidable.*

- ◇ *Preuve.* Soient  $M$  une machine de Turing et  $w$  une entrée. Nous construisons le jeu de tuiles  $\tau_{M,w}$  qui simule  $M$  sur  $w$ . Nous prenons comme entrée du problème du domino avec origine imposée le jeu de tuiles  $\tau_{M,w}$  et comme origine la tuile de  $\tau_{M,w}$  représentant la première lettre de  $w$  avec l'état  $q_0$ . Comme cette origine est fixée, les tuiles à droite de l'origine s'assemblent de manière unique pour former le code de l'entrée  $w$ . Les tuiles vont ensuite simuler le calcul de  $M$  sur  $w$ . Si un état final est atteint, aucune autre tuile ne peut être ajoutée directement sur les tuiles formant la dernière ligne du diagramme espace×temps et le pavage n'est pas complet. Par contre, si aucun état final n'est atteint, le calcul se poursuit indéfiniment. La tuile vide, celle sans flèche ni étiquette, peut être répétée autant de fois que voulu à gauche, à droite et en dessous du diagramme espace×temps, permettant de compléter le pavage. Le jeu de tuiles  $\tau_{M,w}$  pave donc le plan avec origine imposée si, et seulement si,  $M$  ne s'arrête pas sur  $w$ .

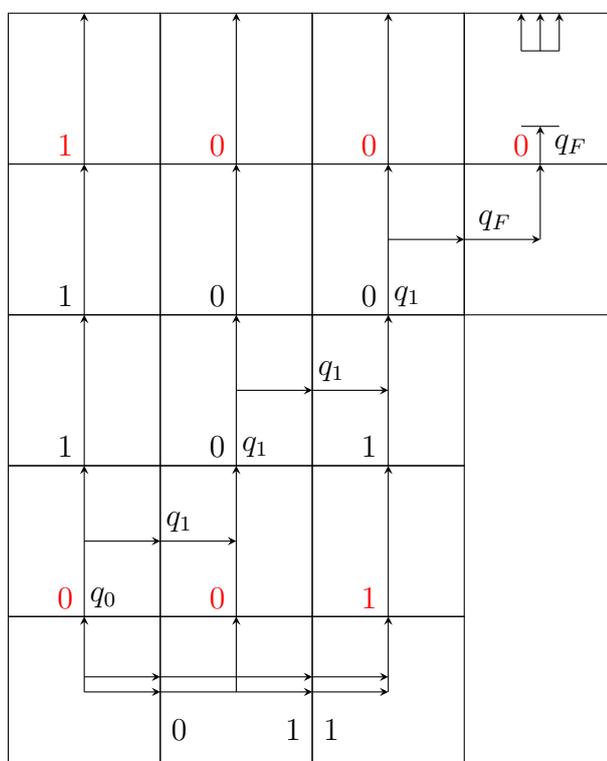


Fig. 3.16 – Simulation d'une machine de Turing avec un jeu de tuiles

Nous avons réduit le problème de l'arrêt à notre problème ce qui montre son indécidabilité.

□

La figure 3.16 montre la simulation par un jeu de tuiles d'une machine de Turing qui a le fonctionnement suivant : elle change le premier 0 en 1 puis le premier 1 en

0 et rajoute un 0 à la fin du mot. Les lettres en rouge sont les mots d'entrée et de sortie. Une fois que l'état final  $q_F$  est atteint, une flèche spéciale est mise sur le côté nord de la tuile indiquant qu'aucune autre tuile ne peut lui être associée sur ce côté.

### 3.2.2 Indécidabilité du problème du domino

Maintenant que nous avons montré le problème du domino avec origine imposée, nous pouvons montrer le cas général. L'origine imposée nous permettait de débiter la simulation du calcul d'une machine de Turing depuis l'origine. Sans origine fixe, il faut arriver à forcer ce calcul à apparaître simultanément partout dans le pavage, sinon, par compacité, nous pourrions obtenir des pavages du plan sans simulation de la machine de Turing.

Nous définissons le problème du domino :

#### Problème du domino

- Entrée : Un jeu de tuiles  $\tau$ .
- Question : Existe-t-il un  $\tau$ -pavage  $P$  du plan ?

Pour montrer l'indécidabilité de ce problème, nous allons utiliser le pavage de Robinson et initier dans chacun de ses carrés le calcul d'une machine de Turing  $M$  sur une entrée  $w$ . Nous notons que, dans un pavage de Robinson, deux carrés peuvent s'intersecter s'ils sont de niveaux consécutifs. Pour ne pas avoir d'interférences dans les simulations, la simulation de la machine de Turing ne sera initiée que dans les carrés de niveaux pairs.

Cela implique une première modification du jeu de Robinson de manière à ce que tous les carrés de niveau pair soient rouges et ceux de niveau impair soient verts. Pour cela, nous considérons les tuiles qui ont deux axes rouges dans le jeu de Robinson. Ces tuiles représentent les intersections entre deux carrés de niveaux consécutifs et doivent donc être de couleurs différentes. Nous doublons chaque tuile avec deux axes rouges en remplaçant d'abord un des axes en vert dans la première tuile puis l'autre axe en vert dans la deuxième tuile (figure 3.17). Nous doublons aussi toutes les tuiles ne possédant qu'un seul axe rouge et nous le changeons en vert. Il existe donc une version verte et une rouge de chacune de ces tuiles. Nous obtenons ainsi un pavage dont les couleurs des carrés alternent entre le rouge et le vert suivant les niveaux auxquels ils appartiennent. La figure 3.18 montre une vue schématisée du pavage de Robinson. Les carrés rouges sont ceux de niveaux pairs. Les verts sont ceux de niveaux impairs. Deux carrés de même couleur ne s'intersectent jamais.

A partir de maintenant, seuls les carrés de niveaux pairs sont considérés. Ils contiennent les zones dans lesquelles seront simulées le calcul d'une machine de Turing. Dans un carré de niveau  $2n$ , une tuile sera une *tuile de simulation* si elle peut envoyer une information à une tuile de simulation se trouvant au nord et une autre information à une tuile de simulation à l'est. C'est une condition nécessaire

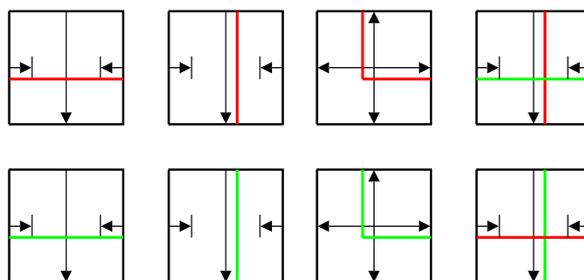


Fig. 3.17 – Les nouvelles tuiles pour obtenir l’alternance de carrés rouges et verts

pour que la simulation puisse s’effectuer.

Un carré de niveau  $2n$  contient 4 carrés de niveau  $2n - 2$ . Aucune information ne peut traverser ces carrés verticalement ou horizontalement sinon les calculs se superposent. Cela implique que toutes les tuiles se trouvant au sud ou au nord d’un carré de niveau  $2n - 2$  ne peuvent transmettre d’information verticale et que toutes les tuiles se trouvant à l’est ou à l’ouest d’un carré de niveau  $2n - 2$  ne peuvent transmettre d’information horizontale. Ce principe s’applique pour tout carré de niveau  $2m$ , avec  $m < n$ , contenu dans le carré de niveau  $2n$ . La figure 3.19 montre une version schématique des carrés du pavage de Robinson. Les zones blanches sont pavées par des tuiles de simulation. Les zones grises sont des zones d’obstruction composées de tuiles autorisant le passage de l’information soit verticalement, soit horizontalement.

Pour obtenir un tel pavage, d’autres tuiles doivent être ajoutées au jeu de Robinson. Le périmètre de tout carré de niveau pair envoie une information, c’est-à-dire une flèche spéciale, vers l’extérieur du carré. Cette information se déplace jusqu’à atteindre le périmètre d’un autre carré. Les tuiles du périmètre des carrés sont modifiées de manière à ce que les tuiles soient différentes suivant qu’elles soient sur le côté nord, sud, est ou ouest du carré. Toutes les tuiles du jeu sont modifiées afin que cette flèche continue jusqu’à ce qu’elle rencontre un autre périmètre. Les tuiles du côté nord d’un carré envoient chacune une flèche partant vers le nord. Nous faisons de même pour les autres côtés du carré.

Soit  $M$  une machine de Turing et  $w$  une entrée. Nous construisons  $\tau_{M,w}$  le jeu de tuiles qui simule  $M$  sur  $w$ . Le jeu de Robinson est modifié de manière à ce que, dans chaque carré de niveau  $2n$ , la tuile en bas à gauche soit toujours la tuile de  $\tau_{M,w}$  représentant l’état initial  $q_0$  sur la première lettre de  $w$ . Le jeu de tuiles  $\tau_{M,w}$  est superposé aux tuiles du jeu de Robinson, permettant à la simulation du calcul de s’effectuer. Lorsqu’une tuile de simulation a sur son côté est une tuile obstruée, cela signifie qu’il existe un nombre fini de tuiles obstruées sur la ligne de cette tuile qui la sépare de la prochaine tuile de simulation. De plus, par construction, ces tuiles ne sont obstruées que verticalement. Ces tuiles peuvent donc faire suivre l’information horizontalement entre les deux tuiles de simulation afin que le calcul continue à se

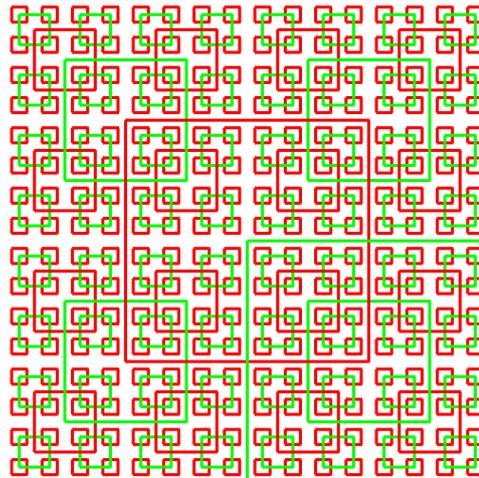


Fig. 3.18 – Une vue schématisée du pavage de Robinson où les carrés de niveau pair sont rouges et ceux de niveau impair verts

dérouler. Le même raisonnement s'applique si une tuile de simulation a une tuile obstruée sur son côté nord. Pour satisfaire ces conditions, il faut modifier les tuiles obstruées afin qu'elles puissent transmettre une information dans la direction qui n'est pas obstruée.

Pour finir la construction, nous comptons le nombre de tuiles de simulation se trouvant chaque carré de niveau pair. Parmi les colonnes d'un carré de niveau  $2n$  il y en a certaines qui sont obstruées par :

- deux carrés de niveau  $2n - 2$ ,
- huit carrés de niveau  $2n - 4$ , mais comme quatre de ces carrés se trouvent déjà dans la zone d'obstruction des carrés de niveau  $2n - 2$ , alors seulement quatre de ces carrés obstruent de nouvelles colonnes,
- et de manière générale,  $2^i$  carrés de niveau  $2n - 2i$  obstruent de nouvelles colonnes.

Le carré de niveau  $2n$  est de côté  $2^{2n} + 1$  et il contient  $2^{2n} - 1$  colonnes car le périmètre du carré ne peut pas être composé de tuiles de simulation. Chaque carré de niveau  $2n - 2i$  obstrue  $2^{2n-2i}$  colonnes. Nous obtenons le calcul suivant pour le nombre de colonnes non obstruées :

$$\begin{aligned}
 (2^{2n} - 1) - \sum_{i=1}^{n-1} 2^i (2^{2n-2i} + 1) &= (2^{2n} - 1) - \sum_{i=1}^{n-1} (2^{2n-i} + 2^i) \\
 &= (2^{2n} - 1) - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} 2^i \\
 &= (2^{2n} - 1) - 2^{n+1} \sum_{i=0}^{n-2} 2^i - (2^n - 2) \\
 &= (2^{2n} - 1) - 2^{n+1} \times (2^{n-1} - 1) - (2^n - 2) \\
 &= (2^{2n} - 1) - (2^{2n} - 2^{n+1}) - (2^n - 2) \\
 &= 2^n + 1
 \end{aligned}$$

Le nombre de colonnes (et de lignes) est de  $2^n + 1$  pour un carré de niveau  $n$ . Le

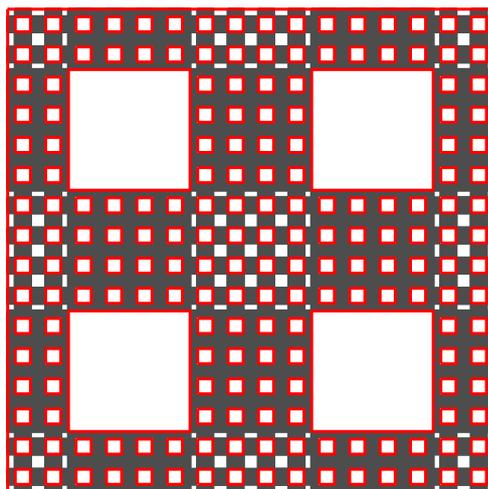


Fig. 3.19 – Les zones d'obstruction dans le pavage de Robinson

nombre de colonnes libres dans un carré de niveau  $n$  correspond environ à la racine carrée du nombre de colonnes de ce carré. Chaque carré de Robinson contient la simulation de  $M$  sur  $w$  et le pavage complet contient des simulations du calcul de  $M$  sur  $w$  arbitrairement grandes. Si la machine  $M$  ne s'arrête jamais sur l'entrée  $w$ , alors chaque carré du pavage sera rempli par des calculs partiels du calcul et donc le pavage sera complet. Si par contre  $M$  s'arrête sur  $w$ , il existe un niveau  $n$  tel que tous les carrés de niveau  $n$  contiennent une tuile représentant un état final de  $M$ . Comme cette tuile ne peut être associée à aucune tuile sur son côté nord, alors le pavage est incomplet et notre jeu de tuiles ne pave pas le plan.

En construisant la réduction du problème de l'arrêt au problème du domino, nous obtenons le résultat de Berger :

|| **Théorème 10** *Le problème du domino est indécidable.*

Ce résultat est valable pour tous les modèles vus dans la section 1 car les réductions construites entre ces différents modèles conservaient la notion de pavabilité du plan. En améliorant un peu plus la construction, nous arrivons à un autre résultat traditionnel sur les pavages, celui de Gurevich et Koryakov qui ont montré qu'il n'était pas décidable de savoir si un jeu de tuiles pavait le plan périodiquement.

### 3.3 Indécidabilité du pavage périodique du plan

Dans cette section, nous montrons que le problème du pavage périodique du plan est aussi indécidable. Ce problème est le suivant :

**Problème du pavage périodique du plan**

– Entrée : Un jeu de tuiles  $\tau$ .

– Question : Existe-t-il un  $\tau$ -pavage périodique  $P$  du plan ?

Le but est de construire un jeu de tuiles qui pave le plan périodiquement si, et seulement si, une machine de Turing  $M$  s'arrête sur une entrée  $w$ . L'idée sera donc de faire apparaître une condition dans le pavage qui permet d'arrêter l'auto-similarité du pavage de Robinson et de retomber dans un cas périodique.

Nous reprenons le jeu de tuiles de Robinson et nous ajoutons une autre couleur pour les carrés, disons violet. Le pavage commence normalement, en pavant des carrés rouges de niveaux croissants. Des tuiles sont rajoutées au jeu de Robinson de manière à ce que, lorsqu'est généré un pavage de Robinson comme dans la section 3.2.2, c'est-à-dire en commençant par la grille de niveau 1, puis en y ajoutant successivement les grilles de niveaux supérieurs, nous ayons la possibilité à tout moment de paver avec une grille ne contenant que des carrés violets. Nous ajoutons en plus la condition que, si ces carrés sont de niveaux  $n$ , alors aucun autre carré de niveaux supérieurs à  $n$  ne peut être rajouté. Pour faire cela, nous modifions légèrement les tuiles de la figure 3.21 pour obtenir les tuiles de la figure 3.20. Ces tuiles permettent de paver les carrés en rouge et d'avoir le choix à un certain moment de paver les carrés d'un niveau en violet. Une fois ce choix fait, il n'est plus possible de rajouter des grilles de niveaux supérieurs.

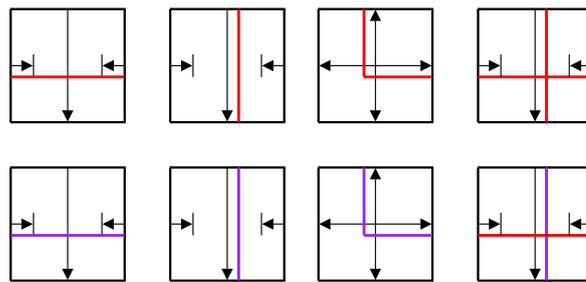


Fig. 3.20 – Les tuiles permettant de paver des carrés violets

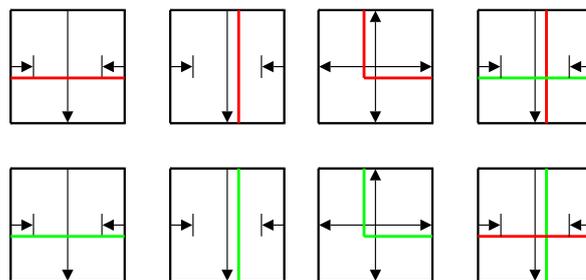


Fig. 3.21 – Les tuiles permettant de paver des carrés verts

Ce pavage n'est pas complet. Il existe de nombreuses tuiles vides ou incomplètes, c'est-à-dire que les flèches horizontales ou verticales manquent. En fait,

toutes ces tuiles se trouvent sur une grille de même taille que la grille contenant les carrés violets, mais translatée de manière à ce que ses intersections coïncident avec les milieux des trous de cette grille.

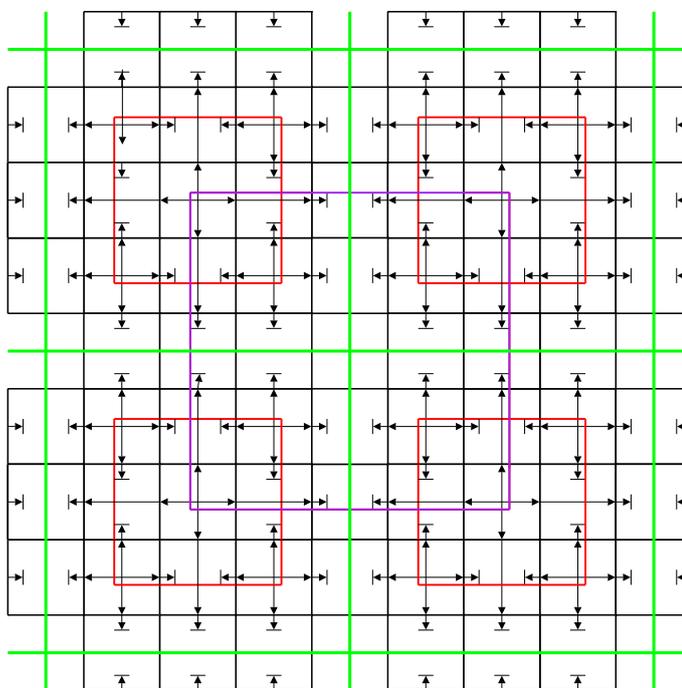


Fig. 3.22 – Les carrés violets et les tuiles à information manquante

Dans la figure 3.22 nous avons décidé de paver avec les carrés violets dès le niveau 3. L'ensemble des tuiles qui ne sont pas complètes repose sur une grille de taille 4, c'est-à-dire la même taille que la grille de niveau 2 qui contient les carrés violets. Pour compléter le pavage, il suffirait donc de rajouter une grille simple sur ces tuiles incomplètes pour les compléter et ainsi obtenir un pavage du plan. Une telle grille simple peut être celle de la figure 3.23. Elle a l'avantage de ne pas pouvoir paver le plan toute seule, et de pouvoir être de taille arbitraire. Elle ne peut apparaître que si les carrés violets ont été pavés. Finalement, en pavant avec les carrés violets, l'auto-similarité a été stoppée et en pavant la grille verte nous complétons le pavage qui devient périodique. Si la grille verte est de taille  $n$ , alors la période du pavage est un carré de côté  $2n + 2$ . Plus généralement, si la grille qui contient les carrés violets est de niveau  $n$ , alors le pavage est périodique de période  $2^{n+1}$ .

Si nous enlevons la dernière ligne et la dernière colonne du motif de la figure 3.23, nous obtenons un motif périodique.

Le jeu de tuiles ainsi défini est un jeu de tuiles générant une infinité dénombrable de pavages périodiques et générant les pavages de Robinson. La périodicité peut apparaître à n'importe quel niveau de la hiérarchie de Robinson. Nous améliorons

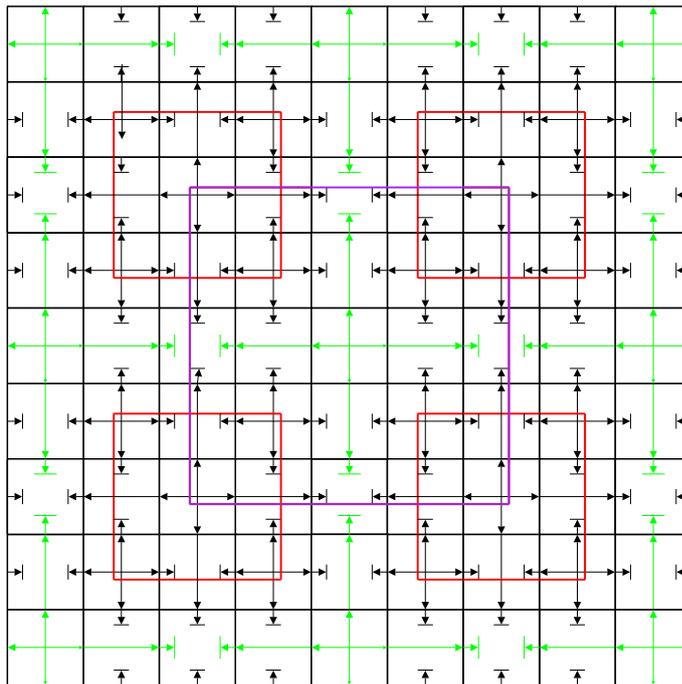


Fig. 3.23 – Le codage de la grille verte en tuiles fléchées

ce jeu de tuiles afin que la périodicité ne puisse apparaître que sous certaines conditions.

Soient  $M$  une machine de Turing et  $w$  une entrée. Soit  $\tau_{M,w}$  le jeu de tuiles simulant le calcul de  $M$  sur  $w$ . Comme précédemment, nous insérons ce jeu de tuiles dans les carrés de niveaux pairs des pavages de Robinson en imposant que la tuile inférieure gauche de chacun de ces carrés soit la tuile représentant l'état initial  $q_0$  agissant sur la première lettre de l'entrée  $w$ . Chaque carré de niveau pair contient la simulation d'un calcul partiel de  $M$  sur  $w$ .

Nous doublons les tuiles du jeu de tuiles  $\tau_{M,w}$  afin que la simulation de  $M$  sur  $w$  puisse aussi s'effectuer dans des carrés violets avec la condition spéciale que cette simulation peut s'associer avec le côté intérieur nord de ce carré si, et seulement si, un état final est atteint dans la zone de simulation de ce carré. Cela peut être fait de la manière suivante : nous avons doublé les tuiles de  $\tau_{M,w}$  afin que la simulation puisse aussi être lancée dans un carré violet. Cela implique que ces nouvelles tuiles peuvent s'associer aux côtés intérieurs sud, est et ouest du carré. Le côté nord de ces tuiles ne change pas par contre. Si le côté nord des tuiles n'est pas changé, alors les tuiles ne peuvent s'associer au côté intérieur nord d'un carré que si ce carré est rouge. Par contre, si un état final est atteint, un calcul est lancé et remplace progressivement toutes les tuiles de la ligne finale en leurs équivalentes pouvant être associées au côté nord du périmètre du carré.

Il est souvent plus intuitif de voir l'explication précédente comme étant l'état final qui envoie au nord une information qui force la coloration en violet du périmètre du carré dans lequel s'effectue le calcul. Nous privilégierons par la suite cette idée intuitive puisque sa mise en pratique a déjà été prouvée possible.

Tant que le calcul n'atteint pas un état final, le carré qui le contient est rouge. Mais s'il atteint un état final, celui-ci force la coloration du périmètre de ce carré en violet qui est une couleur bloquante, et qui, donc, stoppe l'auto-similarité du pavage. Si  $M$  s'arrête sur  $w$  alors il existe un  $n$  tel que tous les carrés de niveau  $n$  contiennent la tuile représentant l'état final de  $M$  et, donc, tous ces carrés sont violets, et ainsi le pavage est périodique. Si  $M$  ne s'arrête pas sur l'entrée  $w$ , alors aucun carré ne contient la tuile représentant l'état final de  $M$  et donc tous ces carrés sont rouges ; ce pavage contient en lui la structure du pavage de Robinson et ne peut pas être périodique.

Nous obtenons ainsi le résultat de Gurevich et Koryakov :

||| **Théorème 11** *Le problème de pavabilité périodique du plan par un jeu de tuiles est non-décidable.*

Il est possible de montrer que ce résultat s'applique à tous les modèles vus dans la section 1. En effet, les réductions entre ces modèles conservent aussi la périodicité.

### 3.4 Inséparabilité récursive des jeux de tuiles finis et de ceux périodiques

Par la suite, ces constructions seront utilisées de nombreuses fois sous différentes versions afin d'obtenir des résultats forts sur les pavages. Nous *introduirons* le calcul d'une machine de Turing  $M$  sur une entrée  $w$  dans un pavage de Robinson si dans ce pavage s'alternent des carrés rouges et verts, et que nous obligeons la tuile en bas à gauche de chaque carré rouge à être la tuile représentant l'état initial  $q_0$  de  $M$  sur la première lettre de  $w$ . Un état *force* le périmètre du carré dans lequel il est à avoir une certaine couleur si, comme précédemment, seuls les carrés colorés de cette manière peuvent contenir un calcul atteignant un état final. Enfin, une couleur est *bloquante* si, lorsque tous les carrés d'un niveau sont de cette couleur, le pavage est périodique.

Dans la continuité de leur résultat, Gurevich et Koryakov ont montré un théorème plus fort :

||| **Théorème 12** *L'ensemble des jeux de tuiles finis et l'ensemble des jeux de tuiles périodiques sont récursivement inséparables.*

- ◇ *Preuve.* Ce théorème nous dit qu'il n'existe pas d'algorithme qui prend en entrée un jeu de tuiles et qui l'accepte s'il est périodique, le refuse s'il est fini et donne n'importe quelle réponse autrement. Pour cela nous reprenons le jeu de tuiles

précédent en y ajoutant une autre couleur possible pour les carrés. Cette couleur, disons bleu, est plus restrictive que le violet car, lorsqu'un carré est pavé en bleu, les tuiles de son périmètre contiennent une couleur unique qui les empêche d'être associées à d'autres tuiles. De ce fait, si un carré est pavé en bleu, le pavage s'arrête et il est fini.

Soit le jeu de tuiles de Robinson dans lequel nous pouvons paver les carrés en rouge, vert, violet (impliquant la périodicité du pavage) ou bleu (impliquant la finitude du pavage). Nous introduisons dans les carrés la simulation d'une machine de Turing  $M$  sur une entrée  $w$ . Cette machine a la particularité de pouvoir atteindre deux types d'états finaux :  $q_F$  ou  $q'_F$ . Si c'est  $q_F$  qui est atteint, alors cet état envoie une information au nord qui force le périmètre du carré dans lequel le calcul s'effectue à être coloré en violet ; si c'est l'état  $q'_F$  qui est atteint, alors cet état force le périmètre à être coloré en bleu, et donc le pavage est fini.

Il suffit maintenant de bien choisir la machine de Turing qui va être simulée. Pour cela, nous simulons une machine  $M$  qui calcule sur l'entrée vide et qui renvoie soit 1, soit 0, soit diverge. Puisque les ensembles  $A = \{x \mid M_x(\epsilon) = 0\}$ ,  $B = \{x \mid M_x(\epsilon) = 1\}$  et  $C = \{x \mid M_x(\epsilon) \text{ diverge}\}$  sont récursivement inséparables, nous en déduisons le théorème car :

- si  $x \in A$  alors le jeu de tuiles qui simule  $M_x$  sur l'entrée  $\epsilon$  est périodique,
- si  $x \in B$  alors le jeu de tuiles qui simule  $M_x$  sur l'entrée  $\epsilon$  est fini et n'admet pas de pavages du plan,
- si  $x \in C$  alors le jeu de tuiles qui simule  $M_x$  sur l'entrée  $\epsilon$  génère des pavages non-périodiques du plan.

Et donc, la non-séparabilité de  $A, B$  implique celle des jeux de tuiles périodiques et finis. □

## 3.5 Fonctions de quasipériodicité atteignables

A l'aide des constructions précédentes, nous étudions plus en profondeur les fonctions de quasipériodicité qui peuvent être atteintes par des jeux de tuiles. Nous nous intéressons en particulier aux fonctions de quasipériodicité de pavages apériodiques. Le premier exemple construit est le pavage de Robinson. Sa structure présente une grande régularité, comme tout pavage auto-similaire, et nous pouvons nous attendre à ce que sa fonction de quasipériodicité conforte cette idée :

**Théorème 13** *Le pavage de Robinson a une fonction de quasipériodicité bornée par une fonction linéaire.*

- ◇ *Preuve.* Puisque le pavage est auto-similaire, alors tout carré de taille  $n$  est inclus dans un carré de taille  $2^i$  qui, par auto-similarité et changement d'échelle, correspond à un carré de côté 2. La figure 3.24 montre le passage d'un motif  $M$  (sur une représentation schématique de Robinson) inclus dans un carré de côté

$2^i$  qui lui-même correspond à un carré de côté 2 dans le pavage de Robinson. Si ce carré apparaît dans chaque fenêtre de taille  $c$ , cela implique que  $M$  apparaît dans chaque fenêtre de côté  $c \times 2^{i-1}$ .

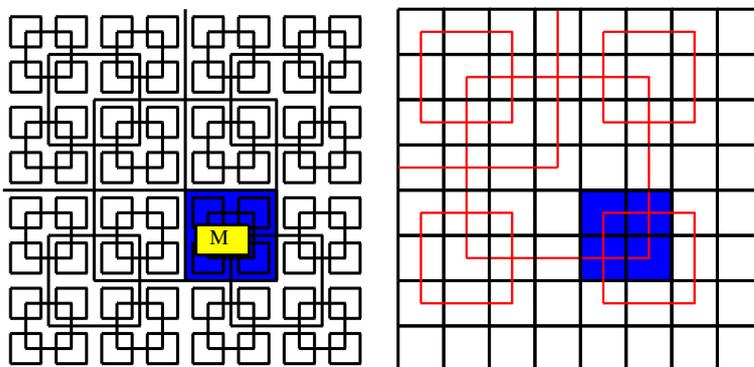


Fig. 3.24 – Un motif  $M$  peut être vu comme un motif de côté 2 à échelle près

Chaque motif  $M$  carré de taille  $n \in [2^{i-1}, 2^i]$  est inclus dans un carré de côté  $2^{i+1}$  qui peut être vu comme un carré de côté 2 dans le pavage de Robinson. Si tout motif de côté 2 apparaît dans chaque fenêtre de taille  $c$ , alors la fonction de quasipériodicité  $G_R$  du pavage de Robinson nous donne  $G(n) \in [2n, 4nc]$  pour  $n \in [2^{i-1}, 2^i]$ . La fonction est donc bornée par la fonction linéaire  $f(n) = 4cn$ .  $\square$

Ce genre de preuve peut s'adapter à tout autre pavage auto-similaire. Nous obtenons ainsi un résultat plus général :

**Corollaire 3.1** *Si un pavage est auto-similaire, alors sa fonction de quasipériodicité est bornée par une fonction linéaire.*

Nous montrons maintenant qu'il est possible de construire des jeux de tuiles dont la fonction de quasipériodicité ne peut pas être bornée par une fonction calculable. Cela implique que les pavages générés par ces jeux de tuiles ont une régularité qui ne peut pas être observée.

**Théorème 14** *Il existe des jeux de tuiles qui ne génèrent que des pavages dont la fonction de quasipériodicité croît plus vite que toute fonction récursive.*

- ◇ *Preuve.* Nous allons modifier le jeu de tuiles de Robinson de manière à ce qu'il simule une machine de Turing qui énumère les mots d'un langage non-récursif mais récursivement énumérable. Pour cela, nous choisissons le langage  $K = \{i \mid \varphi_i(i) \downarrow\}$  qui est récursivement énumérable mais non-récursif, et une machine  $M_k$  qui travaille sur une bande et qui énumère les mots acceptés par  $K$ . Cette machine commence sur l'entrée vide, et effectue des calculs jusqu'à trouver la première fonction  $\varphi_i$  qui s'arrête sur l'entrée  $i$ . Elle écrit alors en début de mot la valeur  $i\#$ . Après avoir écrit les  $s$  premiers éléments de  $K$  au début de la bande

sous la forme suivante :  $n_1\#n_2\#\dots n_s\#$ , si  $M$  trouve un nouvel entier  $n_{s+1}$  élément de  $K$ , alors  $M_k$  l'inscrit à la suite des autres.

Nous simulons cette machine dans le pavage de Robinson. Nous obtenons ainsi des énumérations de plus en plus grandes de  $K$  dans les carrés de niveaux pairs. Supposons que la fonction de quasipériodicité de ce pavage soit bornée par une fonction récursive  $f$ . Nous obtenons alors l'algorithme récursif suivant pour  $K$  :

- i) Entrée : le code  $i$  d'une fonction
- ii) Construire le pavage de Robinson et la simulation de  $M$  dans les carrés de niveaux pairs
- iii) Lorsque les côtés des carrés dépassent  $f(|i|)$  vérifier si les tuiles représentant  $\#i\#$  sont présentes dans notre pavage partiel.
- iv) Si oui accepter, si non refuser.

Le calcul dans les carrés de niveaux pairs est toujours le même, donc arrivé à un certain niveau, soit ils contiennent tous la valeur  $\#i\#$ , soit aucun ne la contient. Dans ce cas-là, le fait de borner la fonction de quasipériodicité revient à borner le nombre d'étapes de calcul d'une machine de Turing. Le problème devient récursif. Par contradiction, nous montrons donc que la fonction de quasipériodicité de ce pavage croît plus vite que toute fonction récursive.

□



## Simulation entre pavages

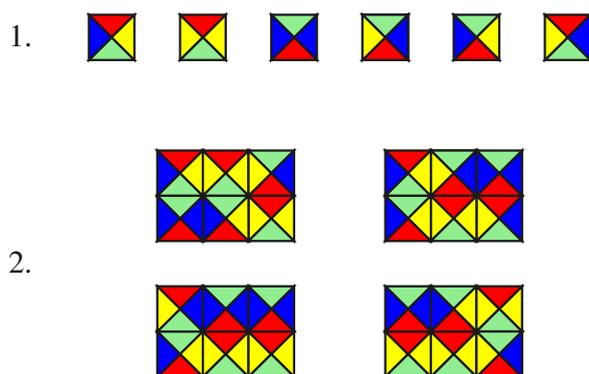
Dans les chapitres précédents, nous avons vu que le résultat de Berger prouve l'équivalence entre les machines de Turing et les pavages [Ber64, Ber66]. Les pavages représentent un modèle de calcul à part entière faisant naître de nombreuses questions à propos du calcul qui peut y être généré. L'idée est donc d'obtenir des notions de calculabilité propres aux pavages. Même si les premières notions seront dépendantes des machines de Turing, nous essayerons au cours de ce chapitre et des deux suivants de se détacher de plus en plus des machines de Turing, afin de mieux comprendre le calcul et le déplacement de l'information dans les pavages.

La première direction étudiée est celle de l'universalité. Une première approche pourrait être de simuler une machine de Turing universelle avec un jeu de tuiles. Cela permettrait d'obtenir des pavages qui simulent toutes les machines de Turing mais ne donnerait pas une notion propre d'universalité pour les pavages. L'outil principal qu'il faut définir pour les pavages, dans le but d'obtenir une définition de l'universalité, est la *simulation*. Cette notion de simulation, défini dans la section qui suit, est une notion proche de celle du groupage qui existe sur les automates cellulaires. Cette première notion de simulation, la plus générale de cette thèse, nous permettra de comparer les pavages et ainsi de chercher des pavages qui *atteignent* ou *approchent* l'universalité.

### 4.1 Notions de simulation

Pour atteindre une notion de simulation il faut comprendre comment l'information est contenu dans un pavage. Un  $\tau$ -pavage peut être vu de différente manière. Il peut être vu au niveau des tuiles de  $\tau$ . L'information est alors celle des tuiles. Nous pouvons maintenant grouper les tuiles par blocs rectangulaires de même taille. Ces blocs peuvent être assimilés à un nouveau jeu de tuiles, sous certaines conditions qu'il resterait à spécifier, pouvant donc être *simulés* par le jeu de tuiles  $\tau$ . Pour formaliser cette idée, nous introduisons différentes définitions :

**Définition 19** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. Un *jeu de  $\tau$ -motifs*  $M$  est un ensemble de  $\tau$ -motifs rectangulaires de même taille.

Fig. 4.1 – 1. Un jeu de tuiles  $\tau$  et 2. un jeu de  $\tau$ -motifs

La figure 4.1 représente un jeu de tuiles  $\tau$  et un jeu de  $\tau$ -motifs. Pour simplifier, si les motifs sont de taille  $a \times b$ , nous considérerons qu'ils sont tous définis sur le domaine  $[0, a - 1] \times [0, b - 1] \subset \mathbb{Z}^2$ . Nous définissons la notion de pavabilité à partir d'un jeu de motifs :

**Définition 20** Soient  $\tau$  un jeu de tuiles et  $M$  un jeu de  $\tau$ -motifs de taille  $a \times b$ . Un pavage  $P_M$  du plan généré par  $M$  est défini par deux entiers positifs  $c < a$ ,  $d < b$  et une fonction :

$$f_{P_M} : \{c + ka \mid k \in \mathbb{Z}\} \times \{d + k'b \mid k' \in \mathbb{Z}\} \rightarrow M$$

tels que la fonction  $f_{P_M}^\tau : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \tau$  définie par :

$$f_{P_M}^\tau(c + ka + x, d + k'b) = f_{f_{P_M}(c + ka, d + k'b)}(x, y), \text{ pour tout } 0 \leq x < a \text{ et } 0 \leq y < b,$$

soit une fonction de pavage du plan.

Ici,  $f_{f_{P_M}(c + ka, d + k'b)}$  est la fonction partielle de pavage du motif  $f_{P_M}(c + ka, d + kb)$ .

Avec les mêmes notations, nous définissons la fonction  $s_{P_M} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow M$  par :

$$s_{P_M}(k, k') = f_{P_M}(c + ka, d + k'b).$$

Cette définition décrit formellement ce que nous attendons intuitivement. Paver avec un jeu de tuiles consiste à poser les tuiles de ce jeu sur la grille  $\mathbb{Z}^2$ . Pour paver avec un jeu de motifs, il faut extraire une sous-grille régulière de  $\mathbb{Z}^2$  de taille  $a, b$ , c'est-à-dire que les colonnes de cette grille sont séparées de  $a - 1$  colonnes et les lignes de cette grille sont séparées de  $b - 1$  lignes. Cette sous-grille ne passe pas forcément par l'origine du plan. Ensuite, il est possible de disposer les motifs de  $M$  de manière à ce que le périmètre de chaque motif repose sur les lignes et colonnes de cette sous-grille (c'est ce que décrit la fonction  $f_{P_M}$ ). Le pavage obtenu peut être vu au niveau des tuiles et non plus des motifs, et nous nous attendons à ce que ce pavage respecte les règles locales imposées par  $\tau$  (c'est ce que décrit la condition sur la fonction  $f_{P_M}^\tau$ ). Cette condition implique que les bords de deux motifs voisins doivent avoir les mêmes compositions de couleurs. Par analogie avec les jeux de tuiles, nous dirons que  $P_M$  est un  $M$ -pavage et qu'il est associé à la fonction de pavage par motif  $f_{P_M}$ .

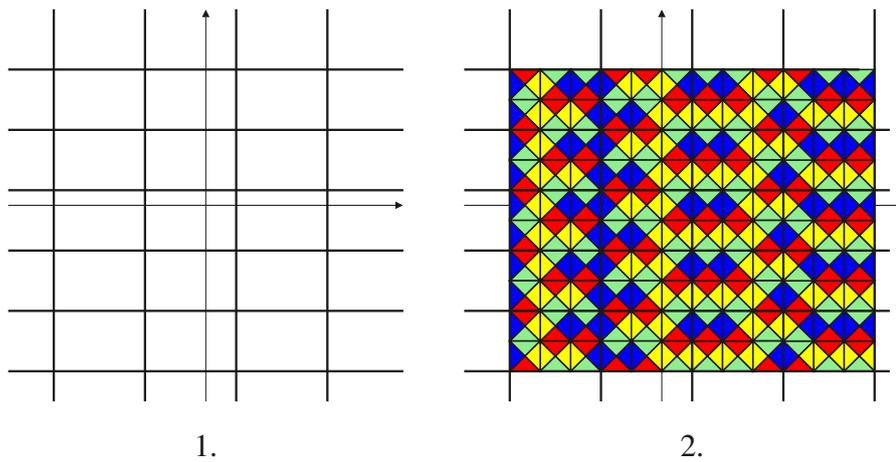


Fig. 4.2 – 1. Une sous-grille régulière de  $\mathbb{Z}^2$  et 2. un pavage généré par le jeu de motifs de la figure 4.1.2

La figure 4.2 montre une sous-grille régulière de  $\mathbb{Z}^2$  sur laquelle il est possible de placer les motifs du jeu de motifs de la figure 4.1.2 afin d'obtenir un pavage de motifs. Les contraintes du jeu de tuiles de la figure 4.1.1 sont respectées localement. La seconde fonction de la définition précédente,  $s_{P_M}$ , prend en entrée un couple  $(x, y)$  et renvoie le motif se trouvant sur la  $x^{ieme}$  colonne et la  $y^{ieme}$  ligne de la sous-grille sur laquelle les motifs reposent.

La fonction  $f_{P_M}^\tau$  est une fonction de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\tau$ , et comme les contraintes locales sont respectées, alors  $f_{P_M}^\tau$  est une fonction de pavage d'un  $\tau$ -pavage  $P'$ . Il existe donc une connexion forte entre le pavage de motifs  $P_M$  et le  $\tau$ -pavage  $P$  puisque tous les deux représentent le même pavage géométrique à la différence que  $P_M$  le représente en motifs rectangulaires et  $P$  le représente au niveau des tuiles. C'est là une des idées fondamentales de la simulation : tout pavage peut être vu de différentes hauteurs. Nous obtenons la définition suivante :

**Définition 21** Soient  $\tau$  un jeu de tuiles,  $M$  un jeu de  $\tau$ -motifs,  $P$  un  $M$ -pavage et  $Q$  un  $\tau$ -pavage.  $P$  est dit *extrait* de  $Q$  si  $f_P^\tau = f_Q$ . Nous dirons que  $Q$  est une représentation du pavage au niveau unitaire et que  $P$  en est une représentation au niveau  $a \times b$  (si les motifs de  $M$  sont de taille  $a \times b$ ).

Bien que le même terme *extraire* soit utilisé ici et pour l'extraction diagonale, la confusion ne sera pas possible. Lorsque il s'agira de l'application du lemme de König, nous précisons toujours que nous effectuons une extraction diagonale. Si le verbe *extraire* est utilisé sans autre précision, cela fera référence à la définition précédente.

Le pavage de la figure 4.3.2 est extrait du pavage 4.3.1. Dans cette figure, le deuxième pavage représente le premier au niveau  $3 \times 2$ . Lorsque nous voudrions insister sur le fait qu'un pavage est généré par un jeu de motifs, nous le représenterons

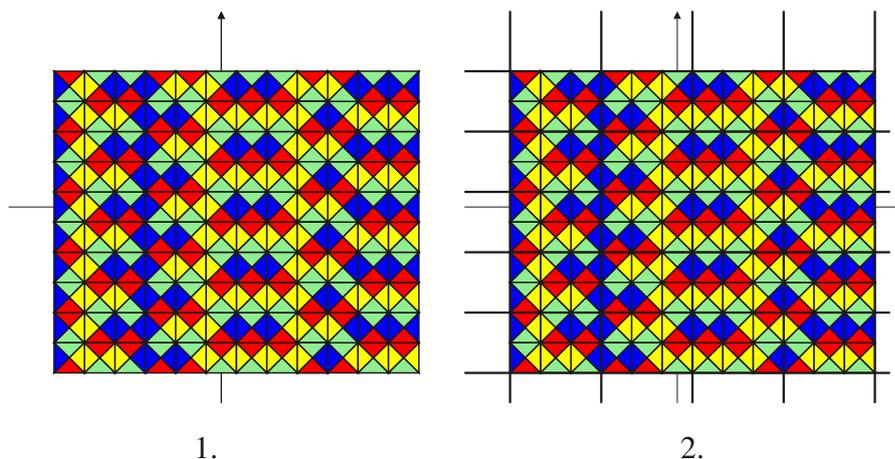


Fig. 4.3 – Le pavage 2. est extrait du pavage 1.

avec la sous-grille sur laquelle les motifs reposent.

Nous sommes maintenant plus à même de donner une définition intuitive de ce que nous entendons par *simulation* et *réduction*. A partir d'un  $\tau$ -pavage  $P$ , il est possible d'extraire une infinité de pavages suivant la hauteur à laquelle il est regardé. Soit un de ces pavages  $P'$  extrait de  $P$ . Par définition, il existe un jeu  $M$  de  $\tau$ -motif de taille  $a \times b$  qui génère  $P'$ . Nous associons à  $M$  un jeu de tuiles  $\tau'$  à l'aide d'une fonction  $R : M \rightarrow \tau'$  telle que deux motifs  $m_1$  et  $m_2$  de  $M$  puissent être associés sur un de leurs côtés si, et seulement si,  $R(m_1)$  et  $R(m_2)$  s'associent de la même manière. Cela implique que  $R$  doit satisfaire la condition suivante :

*Condition 1* : Si  $m_1$  et  $m_2$  sont deux motifs de  $M$  dont les couleurs des périmètres sont les mêmes, alors  $R(m_1) = R(m_2)$ .

Nous remarquons que, pour n'importe quel jeu de motifs, il existe au moins un jeu de tuiles auquel il peut être associé de cette manière. En effet, si les différentes séquences de couleurs se trouvant sur les côtés des motifs de  $M$  sont énumérées, il est possible d'associer une couleur à chacune de ces séquences et créer des tuiles selon les séquences de couleurs des côtés de chaque motif. Nous appelons cette réduction la *réduction canonique*. Dans une réduction canonique, deux motifs s'envoient sur une même tuile si, et seulement si, les séquences de couleurs sur leur périmètre sont les mêmes. Avec  $R$  nous construisons un  $\tau'$ -pavage  $Q$  défini par :  $f_Q(x, y) = R \circ s_{P'}(x, y)$ . Puisque  $P'$  est extrait de  $P$  et que  $P'$  contient l'information de  $Q$ , alors nous pouvons voir  $Q$  comme un pavage plus *simple* que  $P$ . C'est l'idée de la simulation définie formellement maintenant :

**Définition 22** Soient  $\tau$  et  $\tau'$  deux jeux de tuiles, et soient  $P$  un  $\tau$ -pavage et  $Q$  un  $\tau'$ -pavage.  $Q$  se réduit fortement à  $P$ , noté  $Q \triangleleft P$ , s'il existe un jeu de  $\tau$ -motifs  $M$ , un  $M$ -pavage  $P'$  extrait de  $P$  et une fonction  $R : M \rightarrow \tau'$  satisfaisant la condition 1, tels que  $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, R \circ s_{P'}(x, y) = f_Q$ .  $R$  est appelé la fonction de réduction et sa taille est la taille des motifs de  $M$ , c'est-à-dire  $taille(R) \in \mathbb{Z}^2$ . Lorsque nous voudrions spécifier la fonction de réduction  $R$ , nous noterons  $Q \triangleleft^R P$ .  $R$  est dite canonique si pour tous  $m_1, m_2 \in M$ ,  $R(m_1) = R(m_2)$  si, et seulement si, la séquence de couleurs du périmètre de  $m_1$  est la même que celle du périmètre de  $m_2$ .

La fonction  $R$  doit satisfaire la condition 1 sinon nous pourrions nous retrouver dans un cas où le jeu de tuiles  $\tau'$  devrait contenir deux tuiles similaires, ce qui n'est pas possible. Si  $Q \triangleleft P$ , cela implique qu'il est possible de couper le pavage  $P$  en rectangles de même taille qui représentent les tuiles de  $Q$ . Dans un sens intuitif,  $P$  contient l'information de  $Q$ . Nous dirons que  $P'$ , le pavage extrait de  $P$ , simule  $Q$ . Un fait à mettre en valeur est que différents motifs peuvent représenter la même tuile.

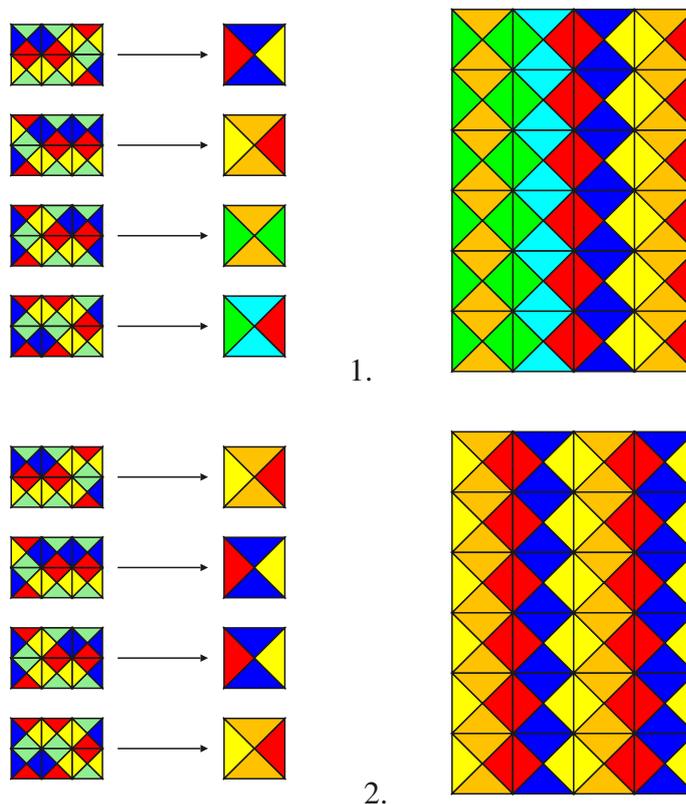


Fig. 4.4 – Le pavage 2. est extrait du pavage 1.

Dans la figure 4.3, le second pavage est extrait du premier. Nous pouvons

maintenant effectuer différentes réductions. Nous en proposons deux dans la figure 4.4. La première est la réduction canonique. À chaque séquence de couleurs est associée une couleur. Et à l'aide de cette association, il est possible de construire un jeu de tuiles. Le pavage ainsi obtenu est simulé par le pavage de la figure 4.3.1. La deuxième réduction permet d'obtenir une autre simulation. Cette réduction n'est pas canonique.

Nous restreignons maintenant la notion de simulation aux motifs :

**Définition 23** Soient  $A$  un  $\tau$ -motif rectangulaire défini sur le domaine  $[0, a - 1] \times [0, b - 1]$  et  $B$  un  $\tau'$ -motif rectangulaire défini sur le domaine  $[0, ac - 1] \times [0, bd - 1]$ .  $A$  se réduit à  $B$ , noté  $A \trianglelefteq B$  s'il existe une application  $R$  allant des  $\tau'$ -motifs rectangulaires de taille  $c \times d$  dans  $\tau$  telle que la fonction  $f(x, y) = R(f_B([xc, (x + 1)c - 1] \times [yd, (y + 1)d - 1]))$ , où  $f_B([xc, (x + 1)c - 1] \times [yd, (y + 1)d - 1])$  correspond au sous-motif de  $B$  de taille  $c \times d$  défini sur le domaine  $[xc, (x + 1)c - 1] \times [yd, (y + 1)d - 1]$ , soit égale à la fonction  $f_A$ .

Si nous voulons spécifier  $R$ , nous noterons  $A \trianglelefteq^R B$ .

Nous dirons que  $B$  simule  $A$ . Cette réduction entre motifs est nécessaire pour la suite. En effet, nous nous attendons à ce que la réduction entre deux pavages conserve l'information. Il faut donc comprendre ce qu'est l'information contenue dans un pavage. La première idée, celle qui est implicitement contenue dans la réduction forte, est de considérer que l'information d'un pavage est contenue dans l'intégralité du plan et dans le comportement que ce pavage a sur le plan. Une autre possibilité est de considérer l'ensemble des motifs que contient un pavage. Ces motifs représentent les calculs finis effectués dans ce pavage. Cette autre vue de l'information donne une autre possibilité de réduction : la *réduction faible*. Nous dirons qu'un  $\tau'$ -pavage  $Q$  se réduit faiblement à un  $\tau$ -pavage  $P$  si il est possible d'extraire un pavage  $P'$  de  $P$  et construire une correspondance entre les motifs de  $P'$  et les tuiles de  $\tau'$  de manière à ce que le pavage  $Q'$  obtenu en composant  $R$  avec  $P'$  contienne tous les motifs de  $Q$ . Plus formellement, nous obtenons la définition suivante :

**Définition 24** Soient  $P$  un  $\tau$ -pavage et  $Q$  un  $\tau'$ -pavage.  $Q$  se réduit faiblement à  $P$  s'il existe un jeu de  $\tau$ -motifs  $M$ , un  $M$ -pavage  $P'$  extrait de  $P$  et une fonction  $R : M \rightarrow \tau'$  satisfaisant la condition 1, tel que l'arbre associé à  $Q$  soit un sous-arbre de l'arbre associé à  $Q'$ , où  $Q'$  est défini par la fonction  $f_{Q'}(x, y) = R \circ s_{P'}(x, y)$  (c'est-à-dire, tout motif de  $Q$  est contenu dans  $Q'$ ).

Nous dirons que  $P$  simule faiblement  $Q$  et nous noterons  $Q \preceq P$ . Dans la figure 4.5, deux pavages, dont le deuxième contient les motifs du premier, sont montrés. Si le deuxième contient *tous* les motifs du premier alors il simule faiblement le premier. Nous obtenons à partir de ces définitions les propriétés suivantes :

**Lemme 4.1**  $\trianglelefteq$  et  $\preceq$  sont des pré-ordres sur l'ensemble des pavages  $\mathcal{T}$ .

◇ *Preuve.*

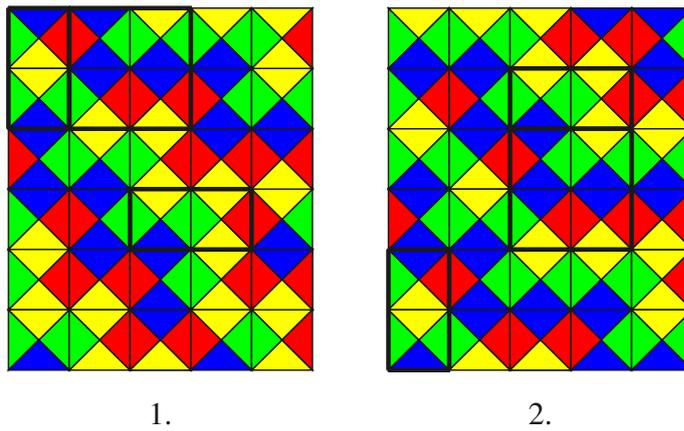


Fig. 4.5 – Le pavage 2. contient des motifs du pavage 1.

1) Réflexivité : si  $P$  est un  $\tau$ -pavage, alors  $P \preceq^{id_\tau} P$ .

Transitivité : soient  $P$  un  $\tau$ -pavage,  $Q$  un  $\tau'$ -pavage et  $S$  un  $\tau''$ -pavage tels que  $P \preceq^{R_1} Q$  et  $Q \preceq^{R_2} S$ . Cela signifie que chaque tuile de  $P$  est représentée par un motif de taille  $a \times b$  de  $Q$  et chaque tuile de  $Q$  est représentée par un motif de taille  $c \times d$  de  $S$ . Donc chaque tuile de  $P$  est représentée par un motif de taille  $ac \times bd$  de  $S$ . Ainsi  $S$  simule  $P$  et  $P \preceq S$ .

2) Réflexivité : si  $P$  est un  $\tau$ -pavage, alors  $P \preceq^{id_\tau} P$ .

Transitivité : soient  $P$  un  $\tau$ -pavage,  $Q$  un  $\tau'$ -pavage et  $S$  un  $\tau''$ -pavage tels que  $P \preceq^{R_1} Q$  et  $Q \preceq^{R_2} S$ . D'un côté, nous avons que pour tout motif  $A$  de taille  $a \times b$  de  $P$  il existe un motif  $B$  de taille  $ax \times by$  de  $Q$  tel que  $A \preceq B$ , où  $(x, y)$  est la taille de  $R_1$ . D'un autre côté, nous avons que pour tout motif  $B$  de taille  $c \times d$  de  $Q$  il existe un motif  $C$  de taille  $cx' \times dy'$  de  $S$  tel que  $B \preceq C$ , où  $(x', y')$  est la taille de  $R_2$ . Par transitivité de  $\preceq$ , il existe une réduction  $R$  de taille  $(xx', yy')$  telle que, pour tout motif  $A$  de taille  $a \times b$  de  $P$ , il existe un motif  $C$  de taille  $axx' \times byy'$  de  $S$  tel que  $A \preceq C$ . Donc  $P \preceq S$ .

□

$\preceq$  et  $\preceq$  ne sont pas des ordres sur  $\mathcal{T}$  car la propriété de l'antisymétrie n'est pas respectée. En effet, il est possible de trouver deux pavages  $P$  et  $Q$  tels que  $P \preceq Q$  et  $Q \preceq P$  mais  $P \neq Q$ . En fait, nous avons la propriété suivante pour tout pavage  $P$  :

Il existe  $Q \neq P$ ,  $P \preceq^R Q$  et  $Q \preceq^{R'} P$  tels que, si  $\text{taille}(R) = (a, b)$  et  $\text{taille}(R') = (c, d)$ , alors  $ac > 1$  et  $bc > 1 \Leftrightarrow P \preceq^R P$  avec  $\text{taille}(R) = (e, f)$  et  $e, f > 2$ .

$Q \not\equiv P$  signifie que  $P \not\leq^R Q$  avec  $\text{taille}(R) = (1, 1)$ . Cela revient à dire que  $P$  et  $Q$  ne sont pas le même pavage à permutation des couleurs près. Nous prouvons cette propriété :

Bien évidemment, si  $P \leq^R Q$  et  $Q \leq^{R'} P$ , alors par transitivité de  $\leq$ , nous avons que  $P \leq P$ . Comme  $ac > 1$  et  $bc > 1$  alors cela implique que l'auto-réduction de  $P$  à  $P$  a une taille supérieure à  $(2, 2)$ . Dans l'autre sens, nous avons  $P$  qui se réduit à lui-même avec une réduction de taille  $(a, b)$  où  $a$  et  $b$  sont supérieurs à 2. De  $P$  nous pouvons extraire un pavage  $Q'$  construit avec les motifs de taille  $a \times 1$  de  $P$ . Nous associons à  $Q'$  le pavage  $Q$  qui est le pavage obtenu par réduction canonique à partir de  $Q'$ . Maintenant,  $Q$  se réduit aussi à  $P$ . En effet, nous pouvons extraire de  $Q$  un pavage  $P'$  composé des motifs de taille  $1 \times b$  de  $Q$ . Par réduction canonique, nous obtenons de nouveau  $P$ . Par construction, cela implique que  $P \not\equiv Q$ .

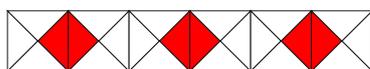


Fig. 4.6 – Première étape de la construction

Nous remarquons que les pavages qui se réduisent à eux-mêmes de manière non-triviale, peuvent le faire avec une infinité de réductions différentes possibles. Cela est dû à la transitivité de la réduction forte qui peut être répété un nombre arbitraire de fois. Nous montrons maintenant un pavage qui se réduit à lui-même. La première étape de la construction est de paver une ligne infinie avec un jeu de tuiles  $\tau$ , comme dans la figure 4.6. Puis nous établissons une réduction entre des motifs de taille  $2 \times 2$  et les tuiles de  $\tau$  (figure 4.7). Dans une dernière étape, nous complétons le pavage de manière à respecter la réduction (figure 4.8).

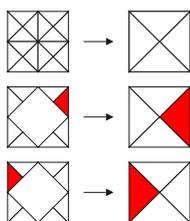


Fig. 4.7 – L'auto-réduction

Les notions de réduction, et donc de simulation, définies précédemment, nous permettent de nous approcher d'une notion d'universalité. Cette dernière sera relative aux pavages puisque la réduction s'effectue entre ceux-ci. Nous proposerons un équivalent pour les jeux de tuiles. Les définitions qui sont proposées dans la prochaine section sont les moins restrictives de cette thèse. Nous établirons par la suite des notions de réductions plus strictes qui nous mèneront vers des résultats plus forts et plus restrictifs.

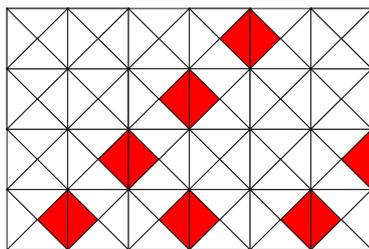


Fig. 4.8 – Un pavage qui se réduit à lui-même

## 4.2 Définition de l'universalité et de la complétude

La première définition concerne une approche de la complétude. C'est une propriété qui est relative aux ensembles de tuiles et qui signifie qu'un jeu de tuiles arrive à simuler le comportement d'une certaine classe de pavages :

**Définition 25** Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de pavages. Un jeu de tuiles  $\tau$  est  $\mathcal{A}$ -complet si pour tout pavage  $Q \in \mathcal{A}$ , il existe un  $\tau$ -pavage  $P$  tel que  $Q \preceq P$ . Si  $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ , alors  $\tau$  est dit *complet*.

Cette définition répond à l'idée intuitive de complétude qui peut être faite. Chaque pavage peut être réduit à un pavage du jeu de tuiles complet, et ce dernier peut donc reconstruire, même de manière artificielle, l'information de tout pavage. La complétude est une propriété des jeux de tuiles. L'universalité, quant à elle, est une propriété des pavages.

Nous voudrions qu'un pavage universel contienne l'information de la plupart des autres pavages. Comme nous avons vu précédemment, il existe différentes manières de quantifier l'information d'un pavage. Dans cette thèse, nous suggérons principalement deux types d'information. La première, et la plus naturelle, est le pavage en lui-même, comment il est construit, et comment il se développe sur le plan. La seconde prend en compte les différents motifs qu'il contient, et cette information peut être résumée dans l'arbre associé au pavage qui est étudié. Ces deux manières d'approcher l'information d'un pavage donne naissance à deux façons de considérer l'universalité. Un pavage contient-il assez d'information pour simuler le comportement de tout pavage (ce que nous appellerons l'*universalité forte dense*) ou seulement le comportement de quelques pavages pour chaque jeu de tuiles (l'*universalité forte éparse*) ? Un pavage contient-il assez d'information pour simuler tous les motifs de tous les pavages (l'*universalité faible dense*) ou seulement le comportement de tous les motifs de quelques pavages pour chaque jeu de tuiles (l'*universalité faible éparse*) ?

Avec ces motivations, nous obtenons les définitions qui suivent :

**Définition 26** Soit  $P$  un  $\tau$ -pavage.  $P$  est :

- *universel fort dense* si pour tout pavage  $Q$ ,  $Q \trianglelefteq P$ ,
- *universel fort épars* si pour tout jeu de tuiles  $\tau'$ , il existe un  $\tau'$ -pavage  $Q$  tel que  $Q \trianglelefteq P$ ,
- *universel faible dense* si pour tout pavage  $Q$ ,  $Q \preceq P$ ,
- *universel faible épars* si pour tout jeu de tuiles  $\tau'$ , il existe un  $\tau'$ -pavage  $Q$  tel que  $Q \preceq P$ .

À partir de ces définitions, nous obtenons les premières propriétés suivantes :

**Lemme 4.2** i)  $P$  est universel fort (resp. faible) dense  $\Rightarrow P$  est universel fort (resp. faible) épars.

ii)  $P$  est universel fort dense (resp. épars)  $\Rightarrow P$  est universel faible dense (resp. épars).

iii) La réduction forte préserve les universalités.

iv) La réduction faible préserve l'universalité faible.

◇ *Preuve.*

i) L'universalité dense est plus générale que l'universalité épars.

ii) Un pavage universel fort simule l'intégralité du pavage. Il en simule donc tous les motifs.

iii) Soit  $P_u$  un pavage universel et soit  $P$  un pavage tel que  $P_u \trianglelefteq P$ . Si  $Q$  est un pavage tel que  $Q \trianglelefteq P_u$ , alors par transitivité de la réduction forte nous avons que  $Q \trianglelefteq P$ . Donc, si  $P_u$  est universel fort dense (resp. épars), alors  $P$  est universel fort dense (resp. épars).

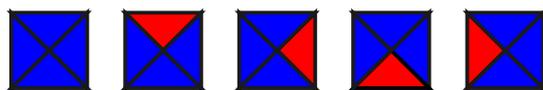
Soit  $P_u$  un pavage universel faible et soit  $P$  un pavage tel que  $P_u \trianglelefteq P$ . Nous savons que  $P_u \trianglelefteq P$  implique  $P_u \preceq P$ . Si  $Q$  est un pavage tel que  $Q \preceq P_u$ , alors par transitivité de la réduction forte cela implique que  $Q \preceq P$ . Donc, si  $P_u$  est universel faible dense (resp. épars), alors  $P$  est universel faible dense (resp. épars).

iv) Soit  $P_u$  un pavage universel faible et soit  $P$  tel que  $P_u \trianglelefteq P$ . Si  $Q \preceq P_u$ , nous avons par transitivité de la réduction faible que  $Q \preceq P$ . Donc, si  $P_u$  est universel faible dense (resp. épars), alors  $P$  est universel faible dense (resp. épars).

□

### 4.3 Complétude

Nous nous intéressons dans cette section à la complétude. Pour montrer l'existence d'un premier jeu de tuiles complet, un jeu composé de cinq tuiles que nous

Fig. 4.9 – Le jeu de tuiles *Simple5*

appelons *simple5* est utilisé (figure 4.9). Ce jeu de tuiles est trivial, puisqu'il peut, entre autres, paver le plan de manière périodique avec une seule de ses tuiles. Nous montrerons ensuite qu'il existe des jeux de tuiles complets bien plus complexes.

|| **Théorème 15** *Le jeu de tuiles Simple5 est complet.*

◇ *Preuve.* Nous montrons que pour chaque pavage  $P$ , il est possible de construire un *Simple5*-pavage  $Q$  tel que  $P \trianglelefteq Q$ . Pour cela, nous prouvons que pour tout jeu de tuiles  $\tau$ , *Simple5* génère un ensemble de motifs qui simule les tuiles de  $\tau$ . Soient  $\tau$  un jeu de tuiles et  $k$  le plus petit entier supérieur à  $\log_2|C| + 3$  où  $C$  est l'ensemble de couleurs de  $\tau$ . Soit *code* une fonction qui associe à chaque couleur de  $C$  un unique code binaire composé de  $k - 2$  bits.

Pour chaque tuile  $t_i$  de  $\tau$ , un *Simple5*-motif  $m_i$  est construit de la manière suivante :  $t_i$  est décrit par un quadruplet  $\{n(t_i), s(t_i), e(t_i), o(t_i)\} \in C^4$ . Les motifs  $m_i$  sont de taille  $k \times k$  et contiennent en leur centre un carré de taille  $(k-2) \times (k-2)$  composé uniquement de tuiles bleues. Sur chacun des bords de ce carré peuvent être assemblées  $k - 2$  tuiles. Sur le côté nord de ce carré, les tuiles sont placées de manière à ce que le bleu et le rouge s'alternent afin de représenter le code de la couleur  $n(t_i)$  donné par la fonction *code*. Un 1 est représenté avec le rouge et un 0 avec le bleu. Nous faisons de même pour les trois autres côtés afin d'obtenir ainsi un carré de côté  $k$ , sans les 4 coins, et dont les bords représentent les codes des couleurs des côtés de  $t_i$ . Nous complétons le motif  $m_i$  en rajoutant aux quatre coins une tuile bleue.

Puisque la fonction *code* renvoie un unique code pour chaque couleur, alors deux motifs  $m_i$  et  $m_j$  peuvent s'associer sur un de leurs côtés si, et seulement si, les tuiles  $t_i$  et  $t_j$  qu'ils représentent s'assemblent de la même manière. Le jeu de motifs  $M = \{m_1, \dots, m_s\}$  peut simuler tout pavage de  $\tau$ .

□

Le jeu de tuiles précédent est complet d'une manière artificielle. Sa complétude réside dans le fait qu'il peut coder n'importe quel code de couleurs. Nous étudions maintenant un jeu de tuiles qui est complet d'une manière plus naturelle. Tout d'abord, nous définissons une machine de Turing  $M$  qui a la particularité de générer des diagrammes espace×temps isomorphes à des tuiles.

Soit  $M$  une machine de Turing à une bande semi-infinie. Une entrée de  $M$  est composée de deux entiers :  $i$  représentant le code du jeu de tuiles à simuler, et  $c$  le code d'une couleur de  $\tau_i$ . Nous rappelons qu'il existe un procédé récursif tel que,

étant donné un entier  $i$ , la structure des tuiles du jeu  $\tau_i$  puisse être recomposée. Nous pouvons nous arranger, étant donné un jeu de tuiles  $\tau_i$ , pour que les codes des couleurs soient toujours de même longueur. La machine  $M$  a le fonctionnement suivant :

- i) Décoder  $i$  pour trouver les tuiles qui composent  $\tau_i$ .
- ii) Isoler les tuiles qui ont pour couleur sud  $c$ .
- iii) Choisir d'une manière non-déterministe une tuile  $t_i$  parmi celles qui ont pour couleur sud  $c$ .
- iv) Choisir de manière non-déterministe l'*est* ou l'*ouest*.
- v) Trouver la couleur  $w(t_i)$  (*resp.*  $e(t_i)$ ).
- vi) Ecrire les bits de  $w(t_i)$  (*resp.*  $w(t_i)$ ) successivement sur le premier bit du mot.
- vii) Trouver la couleur  $e(t_i)$  (*resp.*  $w(t_i)$ ).
- viii) Ecrire les bits de  $e(t_i)$  (*resp.*  $w(t_i)$ ) successivement sur le dernier bit du mot.
- ix) Renvoyer en sortie le code  $i$  suivi de la couleur nord de  $t_i$ ,  $n(t_i)$ .

Nous pouvons supposer que, sur une entrée de longueur  $n$ ,  $M$  met toujours exactement le même temps  $t(n)$  et le même espace  $s(n)$  pour arriver à un état final. Nous rajoutons à la fin de l'entrée un nombre indéterminé de \$ de manière à ce que la longueur totale de l'entrée finale corresponde à l'espace nécessaire à  $M$  pour calculer l'algorithme précédant sur l'entrée  $i, c$ . Une entrée sera alors de la forme :  $i, c, \$^k$  où  $k = s(|i| + |c|) - (|i| + |c|)$ . De plus, il est possible aussi de rajouter la condition que les calculs effectués sur différentes entrées de même longueur s'effectuent dans les mêmes temps. Cela peut être fait à l'aide d'une machine de Turing jouant le rôle de *timer* pour  $M$  et indiquant combien de temps  $M$  doit rester sur chacune des étapes de l'algorithme. La dernière condition est celle consistant à stopper le calcul si l'entrée n'est pas valide, par exemple, si  $c$  n'est pas une couleur valide de  $\tau_i$ .

Maintenant, soit l'ensemble des diagramme espace×temps qui sont générés par  $M$  sur des entrées valides de même longueur. Ces diagrammes contiennent tous à leur base le même entier  $i$ , un entier  $c$ , et le reste composé de \$. Par construction, tous ces diagrammes sont de même taille. Sur leur côté *est*, ces diagrammes ont le code d'une couleur et sur leur côté *ouest*, le code d'une autre couleur. Sur certains diagrammes, le code de la couleur *est* est plus bas que le code de la couleur *ouest* et dans d'autres diagrammes c'est l'inverse qui se produit. Finalement, tous ces diagrammes ont en dernière ligne le même code  $i$ , suivi du code d'une couleur puis de \$.

Nous avons donc deux fois plus de diagrammes que de tuiles de  $\tau$  : l'un représentera la tuile avec la couleur *est* écrite en premier, l'autre représentera la même tuile mais avec la couleur *ouest* écrite en premier. Si nous considérons ces diagrammes comme des motifs, nous obtenons un jeu de motifs qui pave le plan si,

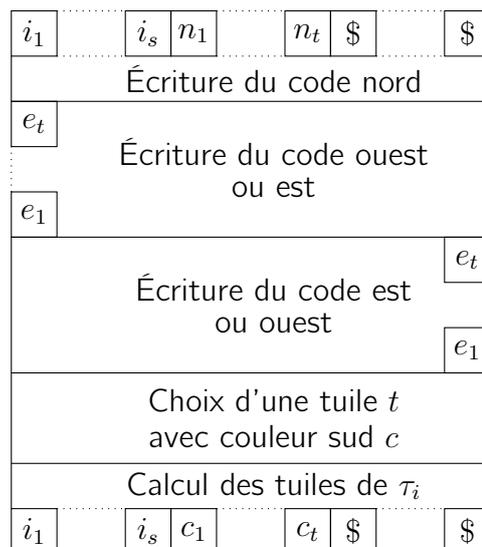


Fig. 4.10 – Un diagramme espace×temps généré par  $M$  et représentant une tuile de  $\tau_i$  avec couleur sud  $c$

et seulement si, le jeu de tuiles  $\tau_i$  qu'il représente le pave.  $M$  peut donc générer des diagrammes espace×temps homomorphes aux tuiles d'un jeu de tuiles.

La figure 4.10 montre le diagramme espace×temps de  $M$  sur l'entrée  $i, c$ . Ce diagramme est homomorphe à une tuile de  $\tau_i$  qui a pour couleur sud  $c$ .

Dans un deuxième temps, nous associons à  $M$  le jeu de tuiles  $\tau_M$  qui simule son comportement et génère des motifs qui correspondent aux diagrammes espace×temps de  $M$ . Les tuiles nous permettent de faire un peu plus que  $M$ . Entre autres, il est possible d'écrire le code des couleurs *est* et *ouest* simultanément. Chaque bit du code d'une couleur peut être 0 ou 1. Comme il y a deux couleurs à écrire en même temps, cela peut être effectué avec quatre états  $q_{0,0}$ ,  $q_{0,1}$ ,  $q_{1,0}$  et  $q_{1,1}$  suivant les bits codant les deux couleurs. L'état  $q_{0,0}$  enverra une flèche verte à gauche et en recevra une verte de la droite, alors que l'état  $q_{0,1}$  enverra une flèche verte à gauche et en recevra une bleue de la droite. Ces flèches se déplacent jusqu'au bord du motif où le calcul s'effectue et code ainsi les couleurs *est* et *ouest*. De la même manière, les codes au *nord* et au *sud* sont représentés par des flèches vertes et bleues selon le codage binaire. Comme pour  $M$ , nous obtenons ainsi des motifs de taille égale qui simulent les tuiles de  $\tau_i$ . La dernière condition est de remarquer que deux motifs peuvent s'associer si les flèches de l'une prolongent celles de l'autre, et donc si les codes des couleurs qu'ils représentent sont les mêmes. Nous obtenons ainsi un jeu de motifs qui simule  $\tau_i$  (figure 4.11). Comme les tuiles de tout jeu de tuiles peuvent être construites de cette manière-ci, alors  $\tau_M$  est complet.

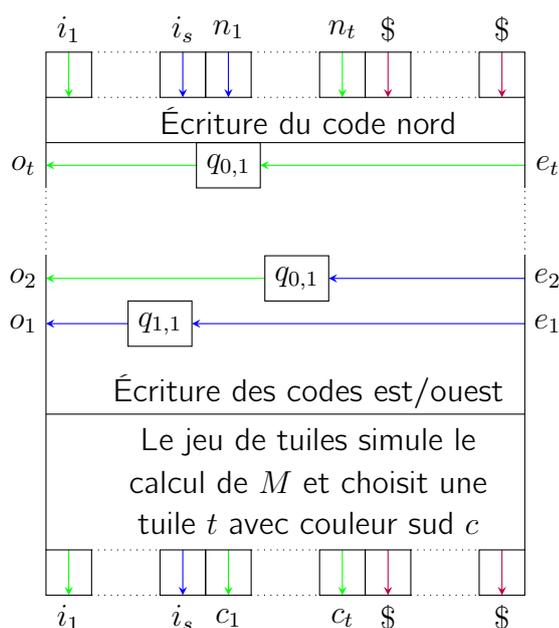


Fig. 4.11 – Un motif généré par  $\tau_M$  qui simule une tuile de  $\tau_i$  qui a pour couleur sud  $c$

## 4.4 Universalités

### 4.4.1 Différentes universalités

Nous nous intéressons maintenant aux différentes notions d'universalité. Nous montrons d'abord un résultat sur la réduction faible et sur l'universalité forte. Nous avons vu que la réduction forte conservait les universalités mais que la réduction faible ne conservait que l'universalité faible. En fait, il est possible de montrer que la réduction faible conserve, d'une certaine manière, l'universalité forte aussi.

**Théorème 16** Soient  $\tau$  un jeu de tuiles et  $P$  un  $\tau$ -pavage. Soit  $P_u$  un pavage universel fort. Si  $P_u \preceq P$ , alors il existe un  $\tau$ -pavage  $Q$  universel fort.

- ◇ *Preuve.* Si  $P_u \preceq P$ , alors il existe une réduction  $R$  tel que pour tout motif carré  $A$  de côté  $a$  de  $P_u$  il existe un motif carré  $B$  de côté  $ab$  de  $P$  tel que  $A \triangleleft^R B$ . Soit  $\{A_i\}_{i \geq 0}$  une suite de motifs où les  $A_i$  sont les motifs carrés de  $P_u$  de côtés  $2i+1$  centrés sur l'origine. Il existe donc une suite de motifs  $\{B_i\}_{i \geq 0}$  de  $P$  telle que  $A_i \triangleleft B_i, \forall i$ . De cette suite, nous extrayons par le procédé d'extraction diagonale, un pavage  $Q$  tel que  $P_u \triangleleft Q$ . Comme la réduction forte conserve l'universalité, alors  $Q$  est universel fort.  $\square$

Le prochain résultat s'intéresse à la structure des pavages universels. Comme un pavage universel fort simule au moins le comportement d'un pavage pour tout

jeu de tuiles, alors sa structure interne doit être complexe.

||| **Théorème 17** *Soit  $P$  un pavage universel. Si  $P$  est universel fort alors  $P$  est non-récuratif.*

- ◇ *Preuve.* Soit  $P$  un  $\tau$ -pavage universel fort épars. Nous savons qu'il existe des jeux de tuiles qui ne génèrent que des pavages du plan qui sont non-récuratifs, c'est-à-dire que ces pavages ne peuvent pas être décrits par une fonction de pavage calculable [Han74, Mye74]. Soient  $\rho$  un tel jeu de tuiles et  $P_{nr}$  un  $\rho$ -pavage tel que  $P_{nr} \triangleleft P$  (un tel pavage existe puisque  $P$  est universel fort épars). Donc  $P_{nr}$  ne peut être décrit par aucune fonction calculable.

Supposons que  $P$  soit quant à lui récuratif. Il existe donc une fonction calculable  $f_p$  qui décrit le pavage  $P$ . Nous pouvons énumérer récurativement toutes les fonctions de réductions possibles à partir de  $\tau$ . Pour cela, nous regardons d'abord les motifs de taille  $1 \times 1$  et nous les associons aux différents jeux de tuiles possibles. Cela peut être fait de même pour tout jeu de  $\tau$ -motif. Nous obtenons ainsi une énumération des réductions possibles  $\{R_1, R_2, \dots\}$ . A partir de chacune de ces réductions  $R_i$ , nous reconstruisons le pavage  $P_i$  tel que  $P_i \triangleleft^{R_i} P$ , et nous définissons la fonction  $f_{P_i}$  qui décrit  $P_i$ . Comme  $P_{nr} \triangleleft P$ , alors il existe un  $j$  tel que  $P_{nr} \triangleleft^{R_j} P$  et donc la fonction  $f_{P_j}$  décrit le pavage  $P_{nr}$ . Cette fonction est récurative, ce qui est une contradiction. Donc  $P$  n'est pas récuratif. □

Nous montrons maintenant l'existence et la non-existence des différentes classes d'universalités. Le premier résultat, qui reprend l'idée de la preuve précédente, montre que l'universalité forte dense n'existe pas.

||| **Théorème 18** *La classe des pavages universels forts denses est vide.*

- ◇ *Preuve.* Soit  $P$  un  $\tau$ -pavage. Pour deux entiers  $a$  et  $b$  il existe un nombre fini de  $\tau$ -motifs de taille  $a \times b$ , et donc il existe un nombre fini de réductions prenant comme entrée un jeu de  $\tau$ -motifs de taille  $a \times b$  et les transformant en des tuiles. Le nombre de paires  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  est dénombrable ce qui implique que le nombre de réductions possibles est dénombrable. Comme chaque réduction ne donne qu'un seul pavage, alors l'ensemble des pavages qui se réduisent à  $P$  est dénombrable. Or, il existe un nombre indénombrable de pavages, et donc tous ne peuvent pas se réduire à  $P$ . Ce qui prouve qu'un pavage ne peut pas être universel fort dense. □

L'universalité forte dense n'est pas atteignable. Nous nous intéressons alors aux autres classes, en commençant par prouver qu'il existe des pavages universels faibles denses. L'idée va être de simuler progressivement tous les motifs possibles. Comme ceux-ci sont dénombrables, nous pouvons le faire de manière récurative :

||| **Théorème 19** *Il existe un pavage universel faible dense.*

- ◇ *Preuve.* Pour montrer l'existence d'un pavage universel faible dense, nous utilisons une fois encore le jeu de tuiles trivial *Simple5*. Nous avons vu dans la preuve de la complétude de *Simple5* que pour tout jeu de tuiles  $\tau_i$  il existe une réduction  $R_i$  telle que pour tout  $\tau_i$ -pavage  $Q$  il existe un *Simple5*-pavage  $P$  tel que  $Q \triangleleft^{R_i} P$ . Pour tout couple  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  nous construisons l'ensemble  $A_{i,j}$  des motifs carrés de taille  $j$  générés par le jeu de tuiles  $\tau_i$ . À tout ensemble  $A_{i,j} = \{m_1, \dots, m_s\}$  est associé l'ensemble  $B_{i,j} = \{m'_1, \dots, m'_s\}$  composé des *Simple5*-motifs carrés  $m'_t$  tels que  $m_t \triangleleft^{R_i} m'_t$ .

Les motifs  $m'_t$  peuvent être entourés d'un anneau de tuiles de *Simple5* de manière à ce que le nouveau motif carré  $p_t$  n'ait que la couleur bleue sur son périmètre. Les différents motifs  $p_t$  sont tous de même taille et ont tous un périmètre bleu. Nous pouvons donc les mettre côte à côte afin d'obtenir un unique motif rectangulaire  $M_{i,j}$  qui contient tous les motifs de  $B_{i,j}$ .

En mettant l'un sur l'autre les différents motifs  $M_{i,j}$ , et en complétant le pavage avec la tuile unicolore, nous obtenons un pavage  $P$  tel que pour tout jeu de tuiles  $\tau$ , il existe une réduction  $R$  telle que pour tout  $\tau$ -motif  $A$ , il existe un sous-motif  $B$  de  $P$  tel que  $A \triangleleft^R B$ . Donc  $P$  est universel faible dense.

□

Ce résultat construit une énumération des motifs pouvant être générés par un jeu de tuiles. Cela se rapproche de la construction d'une machine de Turing qui serait universelle en simulant les calculs partiels de chaque machine de Turing sur chaque entrée et pourrait ainsi énumérer les paires  $(i, w)$  telles que  $M_i$  s'arrête sur  $w$ . Ce résultat montre aussi l'existence de pavages universels faibles épars.

Les résultats qui suivent s'intéressent à la dernière classe d'universalité et montrent l'existence de pavages universels forts épars. Si, dans un premier temps, nous montrerons l'existence d'un pavage universel fort épars à l'aide du jeu de tuiles *Simple5*, et donc qui sera une construction artificielle, nous montrerons dans un deuxième temps l'existence de pavages universels forts épars qui l'est de manière beaucoup plus naturelle.

### || Théorème 20 Il existe un pavage universel fort épars.

- ◇ *Preuve.* Nous construisons un *Simple5*-pavage qui peut simuler au moins un pavage pour chaque jeu de tuiles.

Nous définissons d'abord la *double grille régulière de taille  $n$*  comme étant le domaine de  $\mathbb{Z}^2$  défini par l'union d'une grille régulière de taille  $n + 1$  et son translaté d'un vecteur  $(1, 1)$  (cela correspond à prendre les lignes de largeur deux, séparées par  $n$  tuiles, et des colonnes de largeur deux séparées par  $n$  tuiles). Les *intersections* de cette double grille sont les carrés de côté deux se trouvant à l'intersection d'une double colonne et d'une double ligne et les *trous* sont les espaces hors du domaine délimité par des lignes et des colonnes de la grille. La figure en haut à droite de 4.12 montre une double grille de taille 4.

Notre construction se fait par récursion. À l'étape  $i$ , nous obtenons un pavage partiel du plan  $P_i$  qui simulera un pavage pour chaque jeu de tuiles  $\tau_j$  avec  $j \leq i$ . Pour chaque  $\tau_i$  nous choisissons un  $\tau_i$ -pavage du plan, s'il existe, que nous notons  $P_i$ .

Soit  $\tau_1$  le premier jeu de tuiles de l'énumération des jeux de tuiles. Soit  $C_1$  son ensemble de couleurs et  $k$  le plus petit entier pair supérieur à  $\log_2(|C_1|) + 1$ . Toute couleur de  $C_1$  peut être représentée par  $k$  bits. Soit  $G_1$  la double grille régulière de taille  $k$ . Cette grille peut être vue comme l'assemblage de carrés de côté  $k_1 + 2$  dont nous avons retiré le carré central de côté  $k$ . L'idée est de simuler  $P_1$  sur cette grille. Nous reprenons la construction de la preuve du théorème 15 de la simulation d'un pavage avec *Simple5*. Dans cette simulation, seul le périmètre des motifs comptait. Nous reprenons les motifs de taille  $k + 2$  qui simulent les tuiles de  $\tau_1$  et nous leur enlevons le carré central de côté  $k$  puis les périmètres de ces carrés sont installés sur la double grille  $G_1$  de manière à simuler  $P_1$ . La figure en haut à gauche de 4.12 montre le pavage partiel obtenu ainsi. La dernière chose à faire est de compléter les carrés non pavés qui se trouvent dans les trous de la double grille, et de laisser un unique carré de côté 2 non pavé dans le coin inférieur gauche de chacun de ces trous.

Nous obtenons ainsi un pavage partiel qui simule  $P_1$  et dont des carrés de côté 2 apparaissent périodiquement avec une période verticale et horizontale de longueur  $k + 2$ .

A l'étape  $i$ , nous avons un pavage partiel qui simule tous les pavages  $P_j$  pour  $j < i$ . Et le pavage partiel est pavé partout à l'exception de zones carrées de côté 2 qui apparaissent avec une période verticale et horizontale de longueur  $p$ . Soit  $k'$  le plus petit entier pair supérieur à  $\log_2(|C_i|) + 1$  où  $C_i$  est l'ensemble de couleurs de  $\tau_i$ . Comme précédemment, il est possible de générer un jeu de *simple5*-motifs carrés de côté  $k' + 2$  qui simulent  $\tau_i$ . Soit  $G_i$  la double grille régulière de taille  $s$  dont les intersections reposent sur des zones non pavées du pavage partiel, et dont le nombre de tuiles non pavées se trouvent entre deux intersections soit égal  $k'$ . Cette double grille peut encore être vue comme l'assemblage de carrés de côté  $s + 2$  sur les côtés desquels, à l'exception des tuiles de coins, se trouvent exactement  $k'$  tuiles non pavées. Sur ces carrés, nous étalons les périmètres des motifs carrés de taille  $k' + 2$  qui représentent les tuiles de  $\tau_i$ . Nous obtenons ainsi un pavage partiel qui simule les pavages  $P_j$  pour  $j \leq i$ .

La dernière chose à faire est de remplir les carrés non pavés de côté 2 se trouvant à l'intérieur des périmètres des motifs représentant les tuiles de  $\tau_i$  à l'exception du carré inférieur gauche. Nous obtenons ainsi un pavage partiel dont des zones non pavées carrées de côté 2 apparaissent avec une période horizontale et verticale de longueur  $s + 2$ .

A l'aide de ce procédé, nous générons des zones carrées pavées toujours plus grandes desquelles il est possible d'extraire, par le procédé d'extraction diagonale, un pavage du plan qui est universel fort épars.

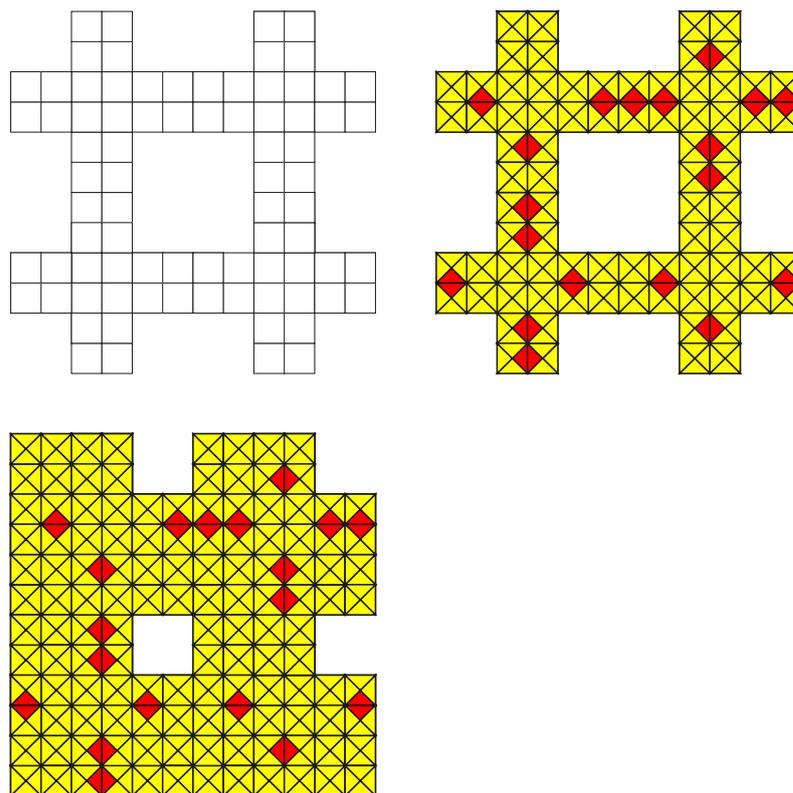


Fig. 4.12 – Une double grille régulière de taille 4 sur laquelle nous simulons  $P_1$  puis nous complétons le pavage partiel pour finir la première étape

□

Cette construction est artificielle puisque nous montrons l'existence d'un tel pavage en le construisant petit à petit. Il serait plus intéressant de pouvoir exhiber un jeu de tuiles qui, de manière assez naturelle, puisse générer l'universalité. Une telle construction est faite dans la suite en réutilisant la construction de la section précédente où un pavage complet avait été généré.

Nous reprenons le jeu de tuiles  $\tau_M$  qui a été prouvé complet dans la section 4.3. L'idée va être d'insérer ce jeu de tuiles dans le pavage de Robinson afin que tous les carrés d'un certain niveau de la hiérarchie de ce pavage simulent les tuiles d'un jeu de tuiles.

Nous avons vu que dans un carré de niveau  $n$  il y avait  $2^n + 1$  colonnes et lignes non obstruées dans lesquelles un calcul pouvait être effectué. Nous modifions donc notre machine  $M$  telle que, sur l'entrée  $i, j$ ,  $M$  mettra exactement  $2^i + 1$  étapes de calcul pour arriver à un état final. Ce temps est largement supérieur à celui qui est nécessaire pour effectuer le calcul de  $M$ . Il suffira donc de modifier la machine de Turing qui joue le rôle de timer pour  $M$  pour qu'elle ralentisse les calculs de  $M$  et que ceux-ci s'effectuent en  $2^i + 1$  étapes exactement. Le jeu de tuiles  $\tau_M$  génère

des motifs carrés de côtés  $2^n + 1$  qui simulent les tuiles du jeu de tuiles  $\tau_n$ .

Nous superposons les tuiles de  $\tau_M$  aux zones de calcul du pavage de Robinson. Nous obtenons ainsi un pavage de Robinson dont les carrés contiennent les simulations des tuiles. En fait, tous les carrés d'un certain niveau  $n$  simulent les tuiles du jeu de tuiles  $\tau_n$ . Les carrés du pavage de Robinson étant séparés, les simulations des tuiles ne sont soumises à aucune contrainte. Pour que la contrainte locale de  $\tau_n$  soit respectée, il faut que l'information du code des couleurs puisse passer d'un carré de niveau  $n$  à son voisin.

Soit un bit représentant le code de la couleur *est* d'une tuile de  $\tau_n$ . Ce bit se trouve sur le bord *est* d'un  $\tau_n$ -motif carré, et donc d'un carré de niveau  $n$  du pavage de Robinson. Ce bit est en contact avec le bord du carré de niveau  $n$  dans lequel le calcul de cette tuile s'effectue. Par construction de la simulation d'une machine de Turing dans un pavage de Robinson, le carré de niveau  $n$  envoie à l'extérieur de ses frontières une couleur d'obstruction pour indiquer aux calculs s'effectuant dans des carrés de niveaux supérieurs que ceux-ci sont obstrués dans une direction. Cette couleur peut se déplacer de trois manières : soit elle rencontre le périmètre d'un carré de niveau inférieur, soit elle rencontre le périmètre d'un carré de même niveau, soit elle rencontre le périmètre d'un carré de niveau supérieur. Nous remplaçons cette couleur d'obstruction par le bit du code de la couleur en changeant la couleur d'obstruction par une flèche pointant dans la direction et ayant la couleur de la flèche du bit codant la couleur. Cette flèche part d'une zone où le calcul pouvait s'effectuer, donc non obstruée par des carrés de niveaux inférieurs. La flèche ne peut donc pas rencontrer un carré de niveau inférieur. Si la flèche rencontre le périmètre d'un carré de niveau supérieur, elle peut le traverser sans gêner le calcul qui s'effectue dans ce carré-là, car c'est une zone d'obstruction pour ce carré et donc aucun calcul ne se passe dans cette direction. Donc, finalement, cette flèche rencontre forcément à un moment le périmètre du carré de niveau  $n$  qui est voisin de celui qui l'a généré (figure 4.13).

L'information du code des couleurs passe ainsi entre les carrés de niveau  $n$ , et donc les tuiles sont soumises à la contrainte locale du jeu de tuiles  $\tau_n$ . Ainsi, tous les carrés de niveau  $n$  simulent un pavage généré par  $\tau_n$ . Cette simulation se fait par le biais de motifs carrés de côté  $2^{2n+1}$ . Puisqu'il n'est pas possible de savoir si un jeu de tuiles va paver le plan ou non, nous devons toujours avoir la possibilité, dans un carré de Robinson, de commencer la simulation d'une tuile ou de ne rien faire. Si la simulation d'une tuile est initiée dans un carré de niveau  $n$ , alors tous les carrés de niveau  $n$  doivent simuler une tuile de  $\tau_n$ .

Nous appelons  $\tau_u$  le jeu de tuiles qui génère ce pavage. Par construction il existe au moins un  $\tau_u$ -pavage qui est universel fort épars.

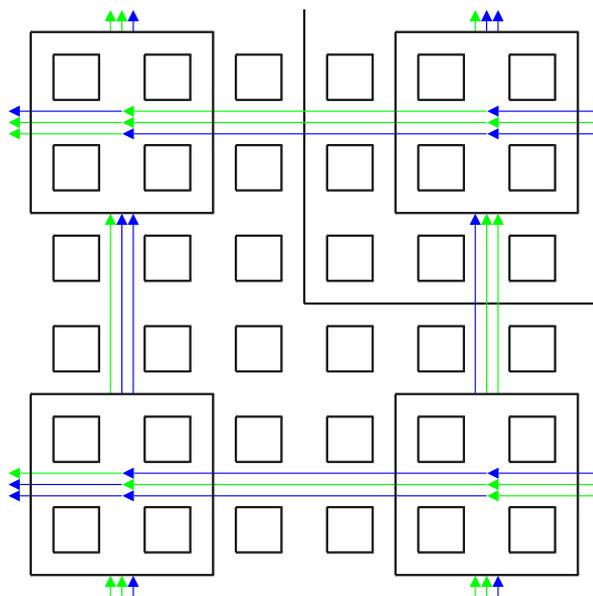


Fig. 4.13 – Circulation de l'information entre les carrés de même niveau

#### 4.4.2 Universalité et complétude

La complétude est une propriété des jeux de tuiles et l'universalité une propriété des pavages. Les deux donnent une échelle de la quantité d'information que peuvent générer les tuiles qui composent le jeu de tuiles complet, ou qui génère le pavage universel. Nous pouvons nous attendre à ce que des liens plus forts puissent exister entre ces deux notions.

Nous avons vu que l'universalité forte dense n'était pas atteignable par un jeu de tuiles. Par contre, les deux constructions précédentes de pavages universels forts épars laissent penser qu'une universalité plus forte que l'éparse pourrait être obtenue. En effet, soit  $P_u$  un  $\tau_u$ -pavage qui est universel fort épars. Le pavage obtenu simule un  $\tau_1$ -pavage  $P_1^1$  dans les carrés de niveau 1, et, de manière générale, simule un  $\tau_i$ -pavage  $P_i^1$  dans les carrés de niveau  $i$ . Lors de la construction, nous pouvons choisir quel  $\tau_i$ -pavage sera simulé. Puisque  $\tau_u$  est un jeu de tuiles, alors il existe un indice  $m$  tel que  $\tau_m = \tau_u$ . Les carrés de niveau  $m$  simulent les tuiles du jeu de tuiles  $\tau_u$  et donc le jeu de tuiles arrive à un moment où il s'auto-simule. Soit  $P_m^2$  le  $\tau_u$ -pavage qu'il simule. Il est possible de choisir  $P_m^2$  de manière à ce que ce soit aussi un pavage universel fort épars mais qui simule pour tout jeu de tuiles  $\tau_i$ , un autre  $\tau_i$ -pavage différent de  $P_i^1$ . Nous appelons  $P_i^2$  le  $\tau_i$ -pavage simulé dans  $P_m^2$  et tel que  $P_i^2 \neq P_i^1$ . De même, comme  $P_m^2$  est universel fort épars, il se simule à un certain moment. Nous pouvons supposer qu'il simule un  $\tau_u$ -pavage universel fort épars  $P_m^3$  qui simule pour tout  $i$ , un  $\tau_i$ -pavage  $P_i^3 \neq P_i^2 \neq P_i^1$ . En itérant cette construction, et puisque la réduction forte est transitive, nous obtenons un pavage

$P_u$  qui pour tout  $i$  simule une infinité dénombrable de  $\tau_i$ -pavage. Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

**Théorème 21** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. Si pour tout ensemble :

$$A = \{P_1, P_2, \dots \mid P_i \text{ est un } \tau_i\text{-pavage pour tout } i\},$$

il existe un  $\tau$ -pavage universel fort épars  $P_A$  tel que  $P_j \triangleleft P_A$  pour tout  $P_j \in A$ , alors il existe un  $\tau$ -pavage universel fort épars  $P_u$  tel que pour tout  $j$ , il existe un ensemble dénombrable  $A_j = \{P_1, P_2, \dots\}$  de  $\tau$ -pavages tels que  $P_i \triangleleft P_u$  pour tout  $i$ . Nous disons qu'un pavage a la propriété d'universalité infinie, noté UIP, s'il satisfait les conditions de ce théorème.

- ◇ *Preuve.* Nous reprenons l'idée intuitive du paragraphe précédent. Comme  $\tau$  est un jeu de tuiles, alors il existe un  $i$  tel que  $\tau = \tau_i$ . Nous prenons comme ensemble l'ensemble défini ainsi :  $A_1 = \{P_1^1, P_2^1, \dots, P_{i-1}^1, P_{i+1}^1, \dots\} \cup \{P_i^1\}$ , où  $P_j^1$  est un  $\tau_j$ -pavage, et par itération,  $P_i^{n-1}$  est le  $\tau$ -pavage qui simule tout pavage de l'ensemble  $A_n = \{P_1^n, P_2^n, \dots, P_{i-1}^n, P_{i+1}^n, \dots\} \cup \{P_i^n\}$ . En choisissant les ensembles  $A_n$  tels que  $A_n \cup A_m = \emptyset$  pour tout  $n, m$ , alors le  $\tau$ -pavage  $P_i^0$  qui simule tout pavage de  $A_1$  simule une infinité dénombrable de  $\tau_i$ -pavages pour tout  $i$ .

□

La propriété d'universalité infinie est l'universalité la plus restrictive que nous arrivons à obtenir à partir des notions de simulation introduites dans ce chapitre. Une question encore ouverte consiste à savoir si un jeu de tuiles qui génère un pavage universel fort épars, génère forcément un pavage UIP.

Le théorème suivant lie entre elles les différentes notions introduites :

**Théorème 22** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles. Les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes :

- i)  $\tau$  génère un pavage ayant la propriété d'universalité infinie ;
- ii)  $\tau$  est complet ;
- iii)  $\tau$  génère un pavage universel faible dense.

- ◇ *Preuve.*

$i) \Rightarrow ii)$  : Soit  $\tau$  un jeu de tuiles qui a la propriété d'universalité infinie. Alors, pour tout sous-ensemble  $A = \{P_1, P_2, \dots\}$ , où  $P_j$  est un  $\tau_j$ -pavage, il existe un  $\tau$ -pavage  $P_A$  qui simule tous les pavages contenus dans  $A$ . Donc pour tout pavage  $Q$ , il existe un  $\tau$ -pavage  $P$  tel que  $Q \triangleleft P$ . Donc  $\tau$  est complet

$ii) \Rightarrow i)$  : Soient  $\tau$  un jeu de tuiles complet et  $\tau'$  un jeu de tuiles avec la propriété de l'universalité infinie. Nous avons vu que de tels jeux de tuiles existent. Soit un ensemble de pavages  $A = \{P_1, P_2, \dots\}$ , où  $P_j$  est un  $\tau_j$ -pavage. Comme  $\tau'$  a la propriété de l'universalité infinie, alors il existe un  $\tau'$ -pavage  $P_A$  tel que  $P_i \triangleleft P_A$  pour tout  $P_i \in A$ . Comme  $\tau$  est complet, alors il existe un pavage  $P$  tel que

$P_A \trianglelefteq P$ , et donc par transitivité de la réduction forte, cela implique que  $P_i \trianglelefteq P$  pour tout  $P_i \in A$ .

$ii) \Rightarrow iii)$  : Soient  $\tau$  un jeu de tuiles complet et  $P_u$  un pavage universel faible dense. Comme  $\tau$  est complet, il existe un pavage  $P$  tel que  $P_u \trianglelefteq P$ . Comme la réduction forte conserve les universalités, alors  $P$  est universel faible dense.

$iii) \Rightarrow ii)$  : Soit  $P_u$  un  $\tau$ -pavage universel faible dense. Par définition, pour tout pavage  $Q$  il existe une réduction  $R$  telle que  $Q \preceq^R P_u$ . Soit l'ensemble de motifs  $A = \{A_i\}_{i>0}$  où  $A_i$  est le motif carré de côté  $2i + 1$  de  $Q$  centré sur l'origine. Par définition, il existe un ensemble de motifs  $B = \{B_i\}_{i>0}$  de  $P_u$  tel que  $A_i \trianglelefteq^R B_i$  pour tout  $i$ . De l'ensemble  $B$  il est possible d'extraire par le procédé d'extraction diagonale un  $\tau$ -pavage  $P$  tel que  $Q \trianglelefteq^R P$ . Donc  $\tau$  est complet. □

Ce théorème montre que les propriétés de générer l'universalité faible dense, de générer un pavage qui a la propriété de l'universalité infinie, et d'être complet sont équivalentes. Nous obtenons ainsi une classe minimale de jeu de tuiles qui a les trois propriétés. Nous appelons cette classe la classe  $[UIP]$ .

Cette classe de jeu de tuiles est intéressante puisque deux jeux de tuiles  $\tau$  et  $\tau'$  appartenant à  $[UIP]$  ont la propriété suivante : pour tout  $\tau$ -pavage  $P$  il existe une infinité non-dénombrable de  $\tau'$ -pavage  $\{Q_x\}_{x \in \mathbb{R}}$  tel que  $P \trianglelefteq Q_x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et réciproquement. L'interaction entre deux jeux de tuiles de cette classe est donc très grande, et, dans un certain sens, deux jeux de tuiles de  $[UIP]$  génèrent les mêmes types de comportement, relativement aux réductions introduites dans ce chapitre.

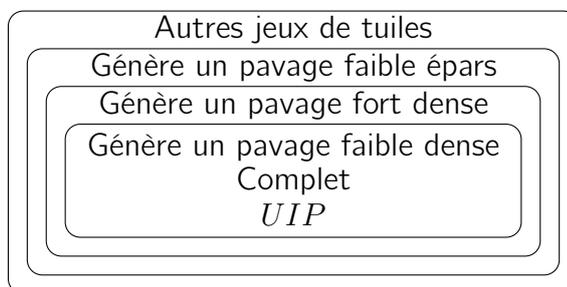


Fig. 4.14 – Classification des jeux de tuiles

La classification de la figure 4.14 est ainsi obtenue. Cette classification n'est pas figée. Il n'est pas prouvé que les classes de jeux de tuiles générant un pavage universel faible épars, ou universel fort épars soient strictement incluses dans  $[UIP]$ .

Nous montrons par contre qu'il existe des pavages non-périodiques qui ne sont pas  $UIP$ . Le résultat qui suit montre une relation entre réduction forte et fonction de quasipériodicité :

**Lemme 4.3** Soient  $P$  et  $Q$  deux pavages du plan. S'il n'existe pas un entier  $c$  tel

que  $G_P(cn) > G_Q(n)$ ,  $\forall n$ , alors  $P$  ne peut pas se réduire à  $Q$ . Nous rappelons que  $G_P$  est la fonction de quasipériodicité du pavage  $P$ .

- ◇ *Preuve.* Soient  $P$  et  $Q$  deux pavages du plan tels que  $Q \leq^R P$  et  $\text{taille}(R) = (a, b)$  et tels que, pour tout  $c$ , il existe un  $n$  tel que  $G_Q(cn) \leq G_P(n)$ . Donc pour tout motif de taille  $c \times d$  de  $Q$  il existe un motif de  $P$  de taille  $ca \times bd$  qui le simule. Par hypothèse absurde, cela implique qu'il existe un  $n$  tel que  $G_P(a \times b \times n) < G_Q(n)$ . Cela signifie qu'il existe un motif  $m$  de  $Q$  de côté  $n$  qui apparaît plus fréquemment dans  $Q$  que n'importe quel motif de  $P$  de côté  $a \times b \times n$ . Ainsi, aucun motif de  $P$  de taille  $a \times b \times n$  ne peut représenter le motif  $m$ , et donc  $Q$  ne peut pas se réduire fortement à  $P$ . □

Comme nous avons vu qu'il existe des jeux de tuiles qui ne génèrent que des pavages avec une fonction de quasipériodicité qui croît plus vite que toute fonction récursive, nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1** *Si  $P$  est un pavage quasipériodique universel fort épars, alors  $G_P$  croît plus vite que toute fonction récursive.*

Comme nous avons vu qu'un jeu de tuiles ne générant que des pavages auto-similaires ne génère que des pavages dont la fonction de quasipériodicité est linéaire, cela implique le résultat suivant :

**Corollaire 4.2** *Un jeu de tuiles ne générant que des pavages auto-similaires ne peut pas être [UIP]..*

## 4.5 Calculabilité des réductions

Nous avons introduit différentes notions de réduction et nous nous sommes intéressés à la construction de pavages possédant ces propriétés. Dans cette section, nous étudions où se trouvent, dans la hiérarchie arithmétique, différents problèmes liés aux réductions. Les problèmes que nous avons choisi d'étudier sont les suivants :

**Problème** RJT (Réduction de jeux de tuiles)

– Entrée : Deux jeux de tuiles  $\tau$  et  $\tau'$ .

– Question : Existe-t-il un  $\tau$ -pavage  $P$  et un  $\tau'$ -pavage  $Q$  tel que  $P \leq Q$  ?

**Problème** C (Complétude)

– Entrée : Un jeu de tuiles  $\tau$ .

– Question :  $\tau$  est-il complet ?

**Problème** RP (Réduction de pavages)

– Entrée : Deux pavages récursifs  $P$  et  $Q$ .

– Question : Est-ce que  $P \leq Q$  ?

Ces différents problèmes sont les problèmes centraux liés aux réductions. Nous montrons d'abord que ces problèmes ne sont pas décidables puis nous les classons

plus précisément dans la hiérarchie arithmétique. Le premier résultat permet la construction d'une réduction entre le problème de l'arrêt et le problème RP :

|| **Théorème 23** *Le problème RP est indécidable.*

- ◇ *Preuve.* Nous montrons que le problème de l'arrêt se réduit au problème RP. Plus précisément, un pavage  $P$  est fixé et, pour toute machine de Turing  $M$  et toute entrée  $w$ , nous construisons un pavage  $Q$  tel que  $P \trianglelefteq Q$  si, et seulement si,  $M$  s'arrête sur  $w$ .

Soit  $\tau$  un jeu de tuiles déterministe et  $P$  l'unique  $\tau$ -pavage à translation près. Soient  $M$  une machine de Turing à une bande, et  $w$  une entrée. Nous construisons un pavage  $Q$  qui se réduit à  $P$  si  $M(w) \downarrow$ . Nous construisons une machine  $M'$  qui sur l'entrée vide a le comportement suivant :  $M'$  inscrit  $w$  sur la bande d'entrée puis simule  $M$  sur cette entrée. Cette machine nous permet de partir de l'entrée vide afin de simuler le calcul de  $M$  sur  $w$ .

Soit  $\tau_{M'}$  le jeu de tuiles qui simule le comportement de  $M'$  et sur lequel nous superposons les tuiles de  $\tau_{M'}$  dans les zones de calcul du pavage de Robinson comme déjà vu. Dans chaque carré, la tuile inférieure gauche est la tuile représentant l'état initial de  $M'$  calculant sur l'entrée vide. Ainsi, dans chaque carré sera simulé le calcul de  $M$  sur  $w$ .

Nous rajoutons la condition que si  $M'$  atteint un état final avant d'atteindre le périmètre du carré dans lequel la simulation s'effectue, alors l'état final envoie une couleur spéciale au nord qui colore l'intégralité du périmètre de ce carré.

Nous remarquons que s'il existe un carré de niveau  $n$  qui est coloré avec la couleur spéciale, alors tout carré de niveau  $m$ , avec  $m \geq n$ , a son périmètre coloré par la couleur spéciale. De plus, cela implique l'équivalence suivante : aucun carré n'est coloré par la couleur spéciale si, et seulement si,  $M$  ne s'arrête pas sur l'entrée  $w$ .

Nous construisons maintenant la machine  $M_\tau$  qui est la machine travaillant sur une bande et qui simule les tuiles de  $\tau$ . Contrairement à la machine de Turing que nous avons construite, et qui simulait toutes les tuiles de tous les pavages, ici nous voulons juste simuler les tuiles de  $\tau$ . Une entrée de  $M_\tau$  est composée d'un unique entier  $c$  représentant une couleur sud d'une tuile de  $\tau$ . Si  $c$  est un entier qui ne représente pas le code d'une couleur sud d'une tuile de  $\tau$ , alors le calcul s'arrête tout de suite. La suite de la simulation de la tuile  $t$  de  $\tau$  avec couleur sud  $c$  se fait comme dans le cas de la machine de Turing  $M$  décrite dans la figure 4.10. Nous obtenons ainsi une machine de Turing  $M$  qui génère des diagrammes espace×temps qui représentent les tuiles de  $\tau$ .

Nous construisons le jeu de tuiles  $\tau'$  qui simule le comportement de  $M$  et donc, qui génère des motifs représentant les tuiles de  $\tau$ . Comme fait précédemment, nous pouvons le faire de manière à ce que les codes des couleurs *est* et *ouest* soient écrits simultanément. Comme nous voulons que les carrés dans lesquels se déroulent les simulations puissent communiquer entre eux, nous permettons à

l'information des codes des couleurs de passer entre des carrés voisins, de manière à ce que deux carrés voisins simulent deux tuiles qui s'assemblent.

Ainsi, si  $M$  s'arrête sur  $w$ , il existe un entier  $n_0$  tel que tout carré de niveau  $m$ , avec  $m \geq n_0$ , contient le calcul de la simulation d'une tuile de  $\tau$ . Un carré de niveau  $n$  contient donc la simulation d'une tuile si :

- le carré est assez grand pour que le calcul de  $M$  sur  $w$  atteigne un état final,
- et le carré est assez grand pour calculer la simulation d'une tuile de  $\tau$ .

Si ces deux conditions sont respectées, alors les carrés de niveau  $n$  contiennent la simulation des tuiles de  $\tau$ . Comme  $\tau$  est déterministe, alors il suffit de placer une unique tuile pour pouvoir en déduire l'intégralité du pavage. Soit  $Q$  le pavage obtenu jusqu'à présent. Nous obligeons les carrés contenant la simulation des tuiles de  $\tau$ , et étant les plus proches de l'origine, qu'ils simulent la tuiles de  $P$  se trouvant à l'origine. Les autres tuiles seront disposées de manière déterministe, et le pavage final simulera  $P$ .

La dernière chose à faire est de vérifier si cette construction génère bien un pavage  $Q$  dont la fonction de pavage  $f_Q$  est récursive. La fonction  $f_Q$  fonctionne de la manière suivante :

- entrée :  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .
- Trouver le carré de plus petit niveau contenant la position  $(a, b)$ .
- Simuler dans ce carré le calcul de  $M$  sur  $w$ .
- Si le calcul n'atteint pas un état final, renvoyer la tuile du pavage de Robinson superposée de la tuile du calcul de  $M$  sur  $w$ .
- Si le calcul atteint un état final, et que le carré est assez grand pour contenir la simulation d'une tuile de  $\tau$ , remplir le carré le plus proche de l'origine avec la simulation de la tuile se trouvant sur l'origine dans  $P$  et remplir les carrés autour de l'origine, de manière déterministe, jusqu'à atteindre le carré contenant  $(a, b)$ .
- Renvoyer la tuile se trouvant en position  $(a, b)$ .

□

Cette construction peut être réutilisée pour montrer la non-décidabilité des deux autres problèmes C et RJT. Nous obtenons ainsi les corollaires suivants :

**Corollaire 4.3** *Le problème C est indécidable.*

- ◇ *Preuve.* L'idée est d'utiliser le même type de construction que la preuve précédente. La différence est que nous utilisons le jeu de tuiles *Simple5* à la place du jeu de tuiles déterministe  $\tau$ .

Nous obtenons ainsi pour toute machine de Turing  $M$  et toute entrée  $w$  un pavage  $Q$  généré par un jeu de tuiles  $\rho$  qui a le fonctionnement suivant : si  $M$  s'arrête sur  $w$ , alors les carrés du pavage de Robinson contiennent à partir d'un certain niveau  $n$  les simulations de tuiles de *Simple5*. Ces simulations de tuiles peuvent être assemblées de n'importe quelle manière tant que les contraintes locales sont respectées. Si  $M$  s'arrête sur  $w$ , le jeu de tuiles  $\rho$  peut simuler tout pavage généré

par *Simple5*. D'un autre côté, si  $M$  ne s'arrête pas sur  $w$ , alors la simulation des tuiles de *Simple5* ne commence pas, et le pavage final est le pavage de Robinson dont les carrés de même niveau sont remplis des mêmes simulations de calcul. Tous les pavages générés par  $\rho$  ont une fonction de quasipériodicité linéaire, ainsi aucun ne peut être universel fort et donc  $\rho$  n'est pas complet.

Nous obtenons le résultat :  $\rho$  est complet si, et seulement si,  $M$  s'arrête sur  $w$ .  $\square$

**Corollaire 4.4** *Le problème RJT est indécidable.*

- ◇ *Preuve.* La preuve du théorème 23 prouve aussi ce résultat puisqu'en choisissant un jeu de tuiles  $\tau$  déterministe, nous nous assurons que  $\tau$  pave le plan d'une manière unique. En reprenant les notations de cette preuve, et en appelant  $\rho$  le jeu de tuiles générant  $Q$ , nous remarquons que savoir s'il existe un  $\tau$ -pavage qui se réduit à un  $\rho$ -pavage revient à savoir si  $P$  se réduit à  $Q$ . Donc le problème est indécidable.  $\square$

Les résultats suivants placent avec plus de précisions les problèmes précédents dans la hiérarchie arithmétique. Ces problèmes sont plus compliqués que ceux traditionnellement liés aux pavages (jeux de tuiles pavant le plan, périodique, finis...). Si nous arrivons à placer précisément le problème RP en montrant qu'il est  $\Sigma_2$ -complet, nous nous contenterons de fixer une borne supérieure pour les deux autres problèmes en montrant que C est  $\Pi_3$  et que RJT est  $\Sigma_2$ .

**Théorème 24** *Le problème RP est  $\Sigma_2$ -complet.*

- ◇ *Preuve.*

[Problème RP est  $\Sigma_2$ ] : Soient  $P$  et  $Q$  deux pavages récursifs. Alors  $Q$  se réduit fortement à  $P$ ,  $Q \leq P$ , s'il existe deux entiers  $a, b$  tels que pour tout entier  $n$ , le motif carré de côté  $n$  de  $Q$  centré sur l'origine se réduit au motif de taille  $na \times nb$  de  $P$  centré sur l'origine. Savoir si deux motifs donnés se réduisent l'un à l'autre avec une réduction de taille  $(a, b)$  peut se faire de manière récursive puisqu'il suffit de vérifier un nombre fini de cas possibles.

Nous avons donc défini notre problème sous forme d'une propriété arithmétique  $\exists \forall$ .

[Fin  $\leq$  Problème RP] : Soient  $\tau$  un jeu de tuiles déterministe et  $Q$  l'unique  $\tau$ -pavage à translation près. Pour chaque code de machine de Turing  $i$ , nous construisons un pavage  $P$  tel que  $Q \leq P$  si  $M_i$  s'arrête sur un nombre fini de mots.

Nous décrivons le comportement de la fonction de pavage  $f_P$  de  $P$ . Le pavage  $P$  est généré par le jeu de tuiles *Simple5*. À l'étape 1, nous commençons par décrire les tuiles qui composent  $P$ , en commençant par celle du centre, puis en effectuant une spirale, de manière à ce que les motifs obtenus simulent les motifs centraux de  $Q$ . En parallèle, nous utilisons un programme qui énumère les mots

acceptés par  $M_i$ . Tant qu'aucun mot n'est accepté, nous continuons à décrire  $P$  de manière à ce que les motifs centraux de  $P$  simulent ceux de  $Q$ . Si un mot est accepté par  $M_i$ , nous passons à l'étape suivante.

A l'étape  $i$ ,  $M_i$  a déjà accepté  $i - 1$  mots, et la fonction  $f_P$  décrit un motif carré  $A$  de côté  $a$  de  $P$  centré sur l'origine qui simule un motif de  $Q$  centré sur l'origine. Nous voulons que cette simulation soit stoppée. Pour cela, nous complétons le motif  $A$  avec uniquement la tuile unicolore bleue afin d'obtenir un motif carré  $A'$  de côté  $3a$ . Ce nouveau motif ne peut plus simuler un motif central de  $Q$ .

Nous recommençons à simuler  $Q$  à partir de  $A'$ , en mettant sur ses bords les codes des couleurs de la tuile de l'origine de  $Q$ . Nous obtenons ainsi un motif carré de côté  $3a + 2$  qui simule la tuile centrale de  $Q$ . Puis nous continuons à décrire  $P$  avec la fonction  $f_P$ , de manière à simuler  $Q$  avec des motifs carrés de côté  $3a + 2$ . En parallèle, nous continuons d'énumérer les mots acceptés par  $M_i$ . Si aucun nouveau mot n'est accepté, nous continuons à décrire  $f_P$  de la manière précédente. Si un nouveau mot est accepté par  $M_i$ , nous passons à l'étape suivante.

Si le langage accepté par  $M_i$  est fini, alors il existe une étape  $n$  à partir de laquelle la fonction  $f_P$  va décrire un pavage dont les motifs centraux simulent les motifs centraux de  $Q$ . Nous aurons donc  $Q \preceq P$ . Si par contre, le langage accepté par  $M_i$  est infini, alors la simulation est toujours réinitialisée, et le pavage final  $P$  ne peut pas simuler  $Q$ .

Nous obtenons ainsi un pavage  $P$  tel que  $Q \preceq P$  si, et seulement si, le langage accepté par  $M_i$  est fini.

□

Le résultat suivant donne une borne supérieure aux deux autres problèmes :

|| **Théorème 25** *Les problèmes C et RJT sont respectivement  $\Pi_3$  et  $\Sigma_2$ .*

◇ *Preuve.*

- i) Un jeu de tuiles est complet si, et seulement si, il génère un pavage universel faible dense. Nous obtenons ainsi la description de ce problème : pour tout pavage  $\tau'$ , il existe une paire d'entiers  $a, b$  et une application  $R$  prenant en entrée un  $\tau$ -motif de taille  $a \times b$  et renvoyant une tuile de  $\tau'$  tels que, pour tout entier  $n$  et pour tout  $\tau'$ -motif carré  $A$  de côté  $n$ , il existe un  $\tau$ -motif  $B$  de taille  $na \times nb$  tel que  $A \preceq^R B$ .

La dernière partie de la description peut être faite de manière récursive : nous énumérons les  $\tau$ -motifs de taille  $na \times nb$ , qui sont en nombre fini, et nous vérifions que l'un d'eux simule  $A$ .

Nous pouvons donc définir ce problème à l'aide d'une propriété  $\forall \exists \forall$ .

- ii) Ce problème peut être défini de la manière suivante : il existe un  $\tau'$ -pavage  $Q$  qui se réduit à un  $\tau$ -pavage  $P$  si, et seulement si, il existe deux entiers  $a, b$  et une fonction  $R$  allant des  $\tau$ -motifs de taille  $a \times b$  et renvoyant une

tuile de  $\tau'$  tels que, pour tout entier  $n$  et tout  $\tau'$  motif carré  $A$  de côté  $n$ , il existe un  $\tau$ -motif  $B$  de taille  $na \times nb$  tel que  $A \leq B$ .

La dernière partie de la description peut être faite de manière récursive. Nous énumérons les  $\tau'$ -motifs carrés de côté  $n$  et les  $\tau$ -motifs de taille  $na \times nb$ , qui sont tous deux en nombre fini, et nous testons si l'un d'eux se réduit à l'un des autres par la réduction  $R$ .

Si deux tels pavages existent, alors la propriété est vérifiée, et si la propriété est vérifiée, il est alors possible d'extraire par le procédé d'extraction diagonale des deux suites de motifs de tailles croissantes, un  $\tau'$ -pavage  $Q$  et un  $\tau$ -pavage  $P$  tels que  $Q \leq^R P$ .

Nous pouvons donc définir ce problème à l'aide d'une propriété  $\exists\forall$ .

□

# Chapitre 5

## Calculabilité des pavages

L'équivalence entre pavages et machines de Turing obtenue par le résultat de Berger montre l'intérêt d'étudier une calculabilité propre aux pavages. Ces derniers présentent le calcul d'un point de vue géométrique, et correspondent ainsi au modèle théorique le plus apte pour représenter des structures auto-assemblantes qui apparaissent dans la nature, telles que les quasi-cristaux ou encore le calcul ADN. Dans ce chapitre, nous introduisons de nouvelles notions de réductions entre jeux de tuiles, plus restrictives, afin de comparer le calcul entre deux jeux de tuiles. Nous obtenons ainsi un pré-ordre sur les jeux de tuiles, permettant de comparer de manière efficace leur comportement.

Pour obtenir des résultats forts de calculabilité sur les pavages, nous utilisons encore des modifications du pavage de Robinson. En théorie de la calculabilité traditionnelle, le théorème du point fixe de Kleene est une application directe du théorème  $s - m - n$ . Pour les pavages, une approche initiale avec le théorème  $s - m - n$  semble inappropriée en raison de la nature géométrique de ce modèle. Par contre, le théorème de Kleene semble beaucoup plus adapté pour les pavages. Au vu de l'importance de ce résultat en calculabilité traditionnelle, nous sommes optimistes quant aux applications que pourrait apporter un résultat similaire sur les pavages. Nous montrons dans ce chapitre deux théorèmes *à la* Kleene pour les pavages dépendant de la notion de simulation exacte définie par la suite. Nous appliquons ensuite ce théorème pour démontrer d'une nouvelle manière les résultats traditionnels des pavages en utilisant un argument de diagonalisation.

### 5.1 Réductions totale et exacte

Les simulations fortes et faibles introduites précédemment étaient peu restrictives mais permettaient d'approcher l'universalité. Dans cette notion, si un jeu de tuiles  $\tau$  pouvait simuler tous les pavages d'un jeu de tuiles  $\tau'$ , cela ne signifiait pas forcément qu'il se comportait exactement comme  $\tau'$ . En effet, il pouvait aussi générer des pavages qui ne simulaient pas de  $\tau'$ -pavages. Nous souhaiterions rajouter cette précision dans les nouvelles notions de simulation et obtenir ainsi des notions de réductions entre jeux de tuiles. Pour cela, nous dirons qu'un jeu de tuiles  $\tau'$  se

réduit totalement à un jeu de tuiles  $\tau$  s'il existe deux entiers  $a, b$  et une fonction de réduction  $R$  allant des  $\tau$ -motifs de taille  $a \times b$  et renvoyant une tuile de  $\tau'$  tels que, pour chaque  $\tau'$ -pavage  $Q$ , il existe un  $\tau$ -pavage  $P$  tel que  $Q \leq^R P$ , et pour chaque  $\tau$ -pavage  $P'$  il existe un  $\tau'$ -pavage  $Q'$  tel que  $Q' \leq^R P'$ . La première condition signifie que  $\tau$  est complet pour l'ensemble des pavages générés par  $\tau'$  et la deuxième condition signifie que  $\tau$  ne peut pas générer de pavages n'ayant pas le comportement d'un pavage de  $\tau'$ . Nous obtenons ainsi l'idée d'une simulation plus complète entre  $\tau$  et  $\tau'$ . Plus formellement, nous avons la définition suivante :

**Définition 27** Soient  $\tau$  et  $\tau'$  deux jeux de tuiles. Nous disons que  $\tau$  *simule totalement*  $\tau'$  ou que  $\tau'$  *se réduit totalement* à  $\tau$ , noté  $\tau' \leq_t \tau$ , s'il existe deux entiers  $a, b$  et une réduction :

$$R : \{m \mid m \text{ est un } \tau\text{-motif de taille } a \times b\} \rightarrow \tau'$$

tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- i) pour tout  $\tau'$ -pavage  $Q$  il existe un  $\tau$ -pavage  $P$  tel que  $Q \leq^R P$  ;
- ii) pour tout  $\tau$ -pavage  $P'$  il existe un  $\tau'$ -pavage  $Q'$  tel que  $Q' \leq^R P'$ .

Si nous voulons préciser la réduction  $R$ , nous noterons  $\tau' \leq_t^R \tau$ .

Nous dirons que  $\tau$  *simule exactement*  $\tau'$ , ou que  $\tau'$  *se réduit exactement* à  $\tau$ , si  $\tau' \leq_t^R \tau$  et si  $R$  est une bijection. Nous notons cette réduction  $\tau' \leq_e \tau$  et  $\tau' \leq_e^R \tau$  si nous voulons préciser la réduction  $R$ .

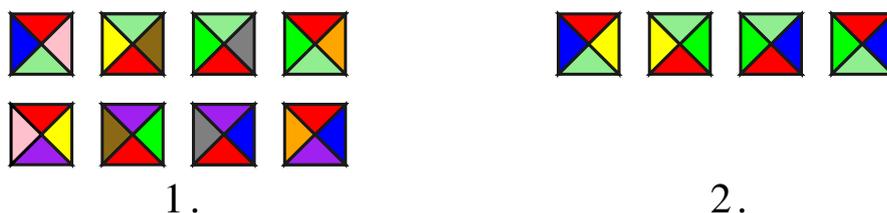


Fig. 5.1 – Le jeu de tuiles 1. simule exactement le jeu de tuiles 2. par la réduction de la figure 5.2

Dans le cas de la réduction exacte, nous remarquons qu'il existe une stricte équivalence entre les tuiles de  $\tau'$  et les motifs de taille  $a \times b$  générés par  $\tau'$ . Les figures 5.1 et 5.2 montrent deux jeux de tuiles et la réduction entre eux permettant de montrer la réduction totale. Nous définissons le problème suivant :

**Problème RT** (Réduction totale)

- Entrée : Deux jeux de tuiles  $\tau$  et  $\tau'$ .
- Question :  $\tau' \leq_e \tau$  ?

Nous montrons que de savoir si deux jeux de tuiles se simulent exactement est récursivement énumérable :

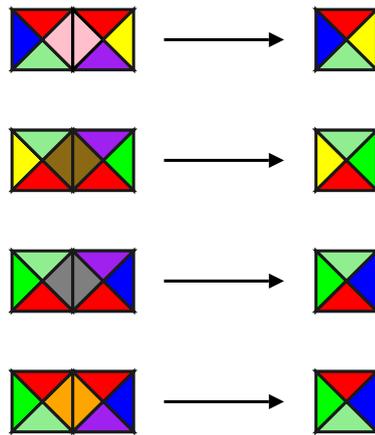


Fig. 5.2 – La réduction entre les jeux de tuiles de la figure 5.1.1 et 5.1.2

**Lemme 5.1** *Le problème RT est récursivement énumérable.*

- ◇ *Preuve.* Soient  $\tau$  et  $\tau'$  deux jeux de tuiles. Nous voulons voir si  $\tau'$  se réduit exactement à  $\tau$ . Nous effectuons un algorithme à double récursion. À l'étape  $i, j$ , nous énumérons tous les  $\tau$ -motifs de taille  $i \times j$  et nous regardons s'il existe une réduction bijective  $R$  entre ces motifs et les tuiles de  $\tau'$ . Si oui, nous mettons en mémoire la taille de la réduction  $(a, b)$  et l'ensemble des motifs  $\{m_i, \dots, m_j\}$  représentant les tuiles de  $\tau'$ . Nous commençons une deuxième double récursion. Nous énumérons les  $\tau$ -motifs dont les côtés sont des multiples de  $a$  pour la longueur et  $b$  pour la largeur. Si à une étape  $i, j$ , tous les  $\tau$ -motifs de taille  $ia \times jb$  contiennent un sous-motif de taille  $(i-1)a \times (j-1)b$  composé uniquement de motifs  $m_i$ , alors nous acceptons l'entrée car  $\tau' \triangleleft_e \tau$ .

En effet, la première double récursion garantit qu'il existe bien un ensemble de  $\tau$ -motifs isomorphe au jeu de tuiles  $\tau'$ . La deuxième double récursion garantit que  $\tau$  ne génère pas de pavages qui ne simulent pas de  $\tau'$ -pavages. S'il existe un  $\tau$ -pavage qui ne simule pas un  $\tau'$ -pavage, cela signifie qu'il contient au moins un motif de taille  $a \times b$  qui n'est pas un des  $m_i$ . Il existe donc des motifs de tailles arbitrairement grandes qui ne sont pas composés que de motifs  $m_i$ . L'algorithme ne s'arrêterait donc pas.  $\square$

## 5.2 Simulation totale des périodiques

Il semble impossible d'obtenir une bonne notion d'universalité avec la réduction totale, puisque cela impliquerait qu'un jeu de tuiles simule totalement tous les jeux de tuiles qui pavent le plan, et donc qu'il puisse déterminer quels jeux de tuiles pavent ou non le plan. Pour approcher néanmoins la notion d'universalité, nous allons essayer de construire des jeux de tuiles qui simulent tous les jeux de tuiles

d'une certaine classe. Pour cela, nous commençons par construire un jeu de tuiles simulant totalement tous les jeux de tuiles périodiques. Cela ne peut pas être fait avec la simulation exacte, puisque la simulation exacte passe par une réduction bijective et implique donc qu'un pavage périodique se réduise à un autre pavage périodique. Par contre, la fonction de réduction d'une simulation totale n'est pas forcément bijective, et donc plusieurs motifs peuvent représenter la même tuile. Ainsi, un jeu de tuiles non-périodique peut simuler totalement un jeu de tuiles périodique.

Avant de passer à ce résultat, nous montrons une façon d'énumérer les calculs d'une machine de Turing dans un pavage de Robinson de manière à contourner le temps et l'espace dont elle a besoin pour s'arrêter et montrer ainsi que ces simulations sont indépendantes des complexités en temps et en espace de la machine.

En effet, si nous voulons simuler dans les carrés de niveau  $n$  de Robinson le comportement de la machine  $M$  sur le  $n^{\text{ième}}$  mot, alors le problème suivant peut arriver : puisqu'il existe un carré de côté  $2^n + 1$  consacré à la simulation dans le carré de niveau  $n$ , si  $M$  met plus que  $2^n + 1$  étapes pour atteindre un état final sur le  $n^{\text{ième}}$  mot, alors le calcul ne pourra pas atteindre un état final dans les limites du carré. Nous modifions donc la construction vue jusqu'à présent de manière à ce que le pavage final contienne la simulation du calcul de  $M$  sur chaque entrée et qu'une entrée supérieure à une autre (selon l'ordre lexicographique) soit simulée dans un carré de niveau supérieur à celui dans lequel est simulée l'autre entrée.

Soit  $M$  une machine de Turing s'arrêtant sur toutes les entrées. Sans perte de généralités, il est possible de supposer que  $M$  travaille en unaire et que les fonctions de complexité en temps  $t$  et en espace  $s$  de  $M$  soient égales et strictement croissantes, et qu'en plus  $t(n+1) > 2t(n)$ . Pour chaque  $n$ , il existe un unique niveau maximal  $n'$  tel que la simulation de  $M$  sur  $1^n$  atteigne un état final dans le carré de niveau  $n'$  mais pas dans le carré de niveau  $n' - 1$ . De plus, comme nous nous sommes assurés que  $t(n+1) > 2t(n)$ , alors cela implique que si les carrés maximaux de deux entrées sont les mêmes, alors les entrées sont les mêmes. Nous voulons nous assurer que la simulation du calcul de  $M$  sur l'entrée  $1^n$  se fasse dans son carré maximal.

Pour cela, chaque première ligne de chaque carré de niveau  $n$  est remplie d'une suite de longueur arbitraire  $m$  de 1, suivie d'un 2 puis complétée par des  $\square$ . Le but est maintenant de vérifier que  $1^m$  est bien la plus grande entrée telle que le calcul de  $M$  sur  $1^m$  atteigne un état final dans ce carré. Cela est vrai si le calcul de  $M$  sur  $1^m$  atteint un état final, et que le calcul de  $M$  sur  $1^{m+1}$  ne l'atteint pas dans les limites du carré  $n$ .

Nous utilisons une modification  $M'$  de  $M$ , qui fonctionne exactement comme  $M$  à la différence qu'un 2 est vu par  $M'$  comme un 1, alors que pour  $M$ , un 2 est vu comme un  $\square$ . Si  $M$  calcule sur  $1^m$ , alors  $M'$  calcule sur  $1^{m+1}$ . Il ne reste plus qu'à simuler en même temps  $M$  et  $M'$  sur l'entrée  $1^m 2$  en ajoutant la condition que la simulation de  $M$  sur  $1^m 2$  peut s'associer avec le côté nord du périmètre du carré de niveau  $n$  si, et seulement si,  $M$  atteint un état final, et que la simulation

de  $M'$  sur  $1^m 2$  peut s'associer avec ce même côté si, et seulement si,  $M'$  n'atteint pas d'états finaux.

Cela implique que le choix du nombre de 1 écrit sur la première bande n'est pas libre puisque ce nombre doit être le plus grand nombre dont le calcul tient dans ce carré. Nous garantissons ainsi que chaque carré contient la plus grande simulation qu'il peut contenir. Nous pouvons donc simuler n'importe quelle machine de Turing, du moment qu'elle s'arrête sur toute entrée, indépendamment de ses fonctions de complexité en temps et en espace.

**Théorème 26** *L'ensemble des jeux de tuiles périodiques peut être simulé totalement par un unique jeu de tuiles  $\tau_p$ , c'est-à-dire que pour tout jeu de tuiles périodique  $\tau$ ,  $\tau \triangleleft_t \tau_p$ .*

- ◇ *Preuve.* Nous utilisons une fonction calculable  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui renvoie une infinité de fois chaque entier et telle que  $f(n) < n$  pour tout  $n$ . Cela peut être fait en utilisant la projection de la première coordonnée d'une bijection entre  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^2$ . Nous appelons  $M_f$  la machine de Turing calculant  $f$ .

Nous construisons maintenant une machine de Turing  $M$ , travaillant sur une unique bande semi-infinie, qui a le fonctionnement suivant : elle prend en entrée un entier écrit en unaire  $1^n$ , calcule l'entier  $1^{f(n)}$  en simulant la machine  $M_f$ , décode les tuiles du jeu de tuiles  $\tau_{f(x)}$  et enfin énumère les motifs générés par  $\tau_{f(x)}$  et vérifie si ces motifs sont une période. Si, à un certain moment,  $M$  trouve un motif qui est périodique, alors le calcul s'arrête. Sinon, le calcul ne s'arrête jamais.

Nous simulons maintenant la machine  $M$  dans le pavage de Robinson étiré par un facteur 2. Cela signifie que nous remplaçons chaque tuile du pavage de Robinson par des motifs rectangulaires de taille  $1 \times 2$ . L'aspect visuel du pavage de Robinson sera alors un pavage auto-similaire basé sur des rectangles dont la hauteur sera 2 fois plus grande que la longueur. Les zones de calcul dans ces rectangles permettront d'insérer des diagrammes espace  $\times$  temps dont le temps est le double de l'espace.

Dans la section 5.2, nous avons vu que nous pouvions simuler dans les carrés de Robinson le calcul de la plus grande entrée qui atteignait un état final dans le périmètre du carré. Nous effectuons cette modification afin que chaque carré de Robinson contienne la plus grande entrée  $1^n$  sur laquelle le calcul de  $M_f$  atteint un état final. Puisque le pavage de Robinson est étiré d'un facteur 2, il reste encore la place équivalente à un carré pour continuer la simulation de  $M$ .  $M$  simule donc les motifs générés par le jeu de tuiles  $\tau_{f(n)}$ . Nous rajoutons la condition spéciale que si  $M$  atteint un état final, c'est-à-dire si  $M$  trouve un motif périodique généré par  $\tau_{f(n)}$ , alors l'état final envoie une couleur spéciale au nord qui colore l'intégralité du périmètre du carré dans lequel la calcul s'effectue. Si le calcul n'atteint pas d'état final, il se poursuit jusqu'à atteindre le périmètre du carré et ce dernier n'est pas coloré avec la couleur spéciale (figure 5.3.1).

Cette couleur spéciale permet le début du calcul d'une nouvelle machine de Turing,  $N$ , qui va simuler les tuiles du jeu de tuiles  $\tau_{f(n)}$ . Comme déjà vu,  $N$  prend en entrée deux entiers  $x$ , écrits en unaire, et  $c$  le code d'une couleur du jeu de tuiles  $\tau_x$ . Ces deux entiers sont écrits de manière non-déterministe et c'est le calcul de  $N$  qui vérifiera que ces entrées sont valides. Comme premier contrôle, nous vérifions que  $x$  est bien le même code que  $1^{f(x)}$ . Pour cela, les bits de  $x$  sont envoyés par superposition jusqu'à la frontière nord, sans être modifiés. La seule condition est que ces bits doivent s'associer avec les bits de  $1^{f(n)}$ . Cette condition peut être remplie de la manière suivante : le dernier bit de  $x$  et le dernier bit de  $1^{f(n)}$  sont marqués comme finaux. Les bits de  $x$  sont envoyés au nord et ne sont influençables que par les bits de  $1^{f(n)}$ . Les bits de  $x$  non finaux traversent les non finaux de  $1^{f(n)}$  et le bit final de  $x$  ne peut traverser que le bit final de  $1^{f(n)}$ . Les bits de  $x$  arrivent jusqu'à la bordure nord du carré et nous rajoutons la condition que la calcul de  $N$  peut s'associer au bord nord du carré si, et seulement si, les bits de  $x$  y sont inscrits. Ainsi, pour que le pavage soit complet il faut que  $x$  soit égal à  $1^{f(n)}$  (figure 5.3.2).

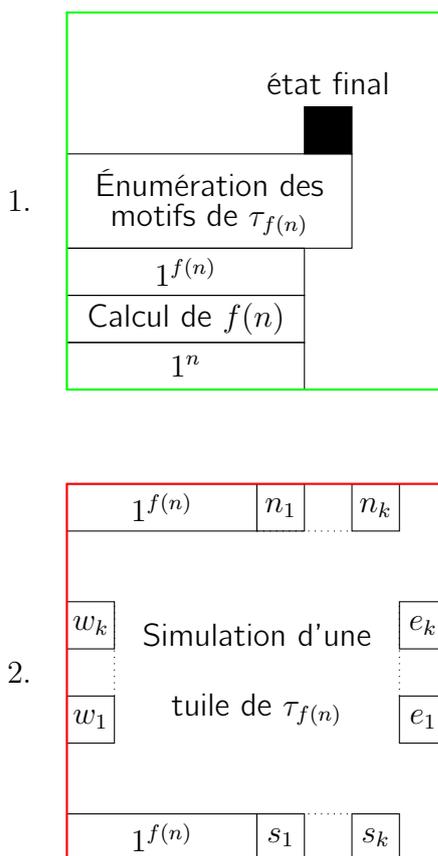


Fig. 5.3 – Représentation des deux calculs qui se déroulent dans un carré de Robinson

La machine  $N$  a le fonctionnement habituel, et génère un diagramme espace×temps qui est isomorphe à une tuile de  $\tau_{f(n)}$ . Il suffit ensuite de faire communiquer les carrés de même niveau afin que les simulations des tuiles respectent les contraintes locales du jeu de tuiles.

La simulation du jeu de tuiles  $\tau_{f(n)}$ , via  $N$ , ne peut commencer que si  $M$  trouve un motif périodique généré par  $\tau_{f(n)}$ . De plus, comme  $f$  énumère une infinité de fois chaque entier, et comme la zone de calcul allouée à la recherche de motifs périodiques est toujours plus grande, si un jeu de tuiles est périodique, alors il existe un niveau de carré  $n$  qui simule les tuiles de ce jeu de tuiles.

Nous appelons  $\tau_p$  le jeu de tuiles décrit ci-dessus. Pour tout pavage  $Q$  généré par un jeu de tuiles  $\tau$  périodique, il existe un  $\tau_p$ -pavage  $P$  tel que  $Q \triangleleft P$ . Comme la réduction doit être la même pour tous les pavages générés par ce jeu de tuiles périodique, nous pouvons prendre comme réduction celle de taille minimale. D'un autre côté,  $\tau_p$  ne peut pas générer de pavages du plan qui ne soient pas une simulation d'un  $\tau$ -pavage. Donc  $\tau_p$  simule totalement tous les jeux de tuiles périodiques.

□

Dans cette preuve, nous avons utilisé le fait que la propriété *être périodique* est récursivement énumérable et qu'avoir cette propriété est suffisant pour garantir que le jeu de tuiles pave le plan ou, dit autrement, qu'il n'existe pas de jeux de tuiles qui ne pavent pas le plan et qui ont cette propriété. Pour essayer de généraliser cette construction à d'autres propriétés que la périodicité, il est nécessaire que les jeux de tuiles qui ne pavent pas le plan n'aient pas cette propriété. En effet, si nous utilisons le même type de construction, et que des jeux de tuiles qui ne pavent pas le plan aient cette propriété, alors la simulation des tuiles de ce jeu de tuiles commencerait et arriverait toujours à un point où la simulation d'une tuile ne pourrait pas être effectuée et le pavage final ne serait pas complet. Nous disons donc d'une propriété sur les jeux de tuiles qu'elle est *décente* si l'ensemble des jeux de tuiles la satisfaisant est récursivement énumérable et si aucun pavage qui ne pave pas le plan n'a la propriété. Nous obtenons ainsi la généralisation suivante :

**Théorème 27** *Soit  $P$  une propriété décente, alors l'ensemble :*

$$L_P = \{ i \mid \tau_i \text{ satisfait } P \},$$

*peut être totalement simulé par un jeu de tuiles.*

Nous montrons quelques exemples de propriétés décentes générant des ensembles pouvant être totalement simulés :

**Corollaire 5.1** *L'ensemble des jeux de tuiles qui pavent le plan périodiquement en utilisant toutes leurs tuiles peut être totalement simulé par un jeu de tuiles.*

Le lemme 5.1 nous donne cette autre application :

**Corollaire 5.2** Soit  $\tau$  un jeu de tuiles qui pave le plan. L'ensemble des jeux de tuiles qui simulent exactement  $\tau$  est un ensemble qui peut être totalement simulé par un jeu de tuiles.

Un dernier résultat, lié encore à la périodicité, nous donne :

**Corollaire 5.3** L'ensemble des jeux de tuiles qui ne pavent le plan que de manière périodique est un ensemble qui peut être totalement simulé par un jeu de tuiles.

- ◇ *Preuve.* Pour une entrée  $i$ , nous énumérons les motifs générés par  $\tau_i$ . Si, après avoir trouvé un nombre non nul de périodes, il existe un motif de taille  $n$  qui ne peut pas être pavé sans utiliser les périodes déjà trouvées, alors nous acceptons l'entrée. En effet, nous avons vu qu'un jeu de tuiles qui ne pave le plan que périodiquement le pave en nombre fini de fois différentes, car s'il le pave périodiquement d'une infinité de façons différentes alors il le pave aussi de manière non-périodique. □

### 5.3 Théorème du point fixe de Kleene

Les différentes constructions de Robinson présentées jusqu'à maintenant nous ont permis d'obtenir des résultats toujours plus forts sur les pavages et sur les réductions. Nous améliorons encore la construction pour adapter des résultats classiques de théorie de la calculabilité aux pavages. Le premier résultat qui nous intéresse est un des théorèmes fondamentaux de la calculabilité traditionnelle : le théorème du point fixe de Kleene. Ce théorème s'énonce de la manière suivante :

**Théorème 28 (Point fixe de Kleene)** Pour toute fonction récursive  $f$ , il existe un indice  $e$  tel que  $\varphi_e^a$  et  $\varphi_{f(e)}$  calculent la même fonction.

<sup>a</sup>Où  $\varphi_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  fonction récursive selon une énumération acceptable de ces fonctions.

Cela signifie que pour toute énumération acceptable des machines de Turing et pour toute machine de Turing  $M$  qui prend en entrée le code d'une machine de Turing et renvoie le code d'une autre machine de Turing, il existe une des machines de Turing dans l'énumération qui est un point fixe pour  $M$ , et telle qu'elle-même et son modifié par  $M$  calculent la même fonction. Nous aimerions obtenir un résultat similaire pour les pavages. Les machines de Turing peuvent être comparées par le langage qu'elles acceptent. Pour pouvoir bien comparer les jeux de tuiles, nous considérons la simulation exacte qui est la plus restrictive des notions introduites jusqu'à présent. Le théorème du point fixe pour les pavages devient alors le suivant :

**Théorème 29** Pour toute fonction récursive  $f$ , il existe un indice  $e$  tel que le jeu de tuiles  $\tau_e$  simule exactement le jeu de tuiles  $\tau_{f(e)}$ .

En prenant comme moyen de comparaison la simulation exacte, nous rejoignons l'idée intuitive du théorème de Kleene. Le but est de montrer que, pour toute

modification de programme  $M$ , il est possible d'en trouver un qui continue à avoir le même comportement même après avoir été modifié par  $M$ . Ici, nous considérons qu'un jeu de tuiles *calcule* de la même manière que le jeu de tuiles qu'il simule exactement, et il est donc naturel de considérer la réduction exacte comme mode de comparaison des jeux de tuiles pour le théorème à la Kleene.

- ◇ *Preuve.* Soient  $f$  une fonction récursive et  $M_f$  une machine de Turing qui calcule  $f$ . Soit une machine de Turing qui a le fonctionnement suivant : quand l'entrée est le mot vide,  $M^i$  génère un entier  $i$  puis simule  $M_f$  sur cette valeur afin d'obtenir  $f(i)$ . Pour l'instant, la valeur  $i$  calculée par  $M^i$  n'a pas d'importance. Nous simulons cette machine  $M^i$  dans les carrés de la hiérarchie de Robinson en forçant la tuile inférieure gauche de chacun des carrés de niveaux pairs à être la tuile représentant l'état initial de  $M$  calculant sur l'entrée vide. La simulation s'effectue jusqu'à obtenir une valeur  $f(i)$ . Lorsque cette valeur est obtenue, nous atteignons un état final qui envoie une couleur spéciale qui colore l'intégralité du périmètre du carré dans lequel le calcul se déroule (figure 5.4.1). Cette couleur est bloquante, ce qui signifie que l'auto-similarité du pavage de Robinson est stoppée et que les carrés de niveaux supérieurs ne peuvent pas être placés. Puis nous envoyons les bits de  $f(i)$  sur le bord sud du carré. Cette dernière action peut être faite comme lors de la preuve du théorème 26 : la première ligne est remplie de manière non-déterministe d'une chaîne de bits. Le pavage ne pourra être complet que si cette chaîne de bits est la même que celle de  $f(i)$ . Les bits de la chaîne choisie sont envoyés de manière inaltérable sur la frontière nord. Ils ne peuvent traverser  $f(i)$  que s'ils sont équivalents, et le calcul ne pourra être complété que si cette chaîne atteint le côté nord.

Ainsi, la première ligne du carré contient en surimposition les bits de  $f(i)$  et le périmètre du carré est marqué par la couleur spéciale. Lorsque le périmètre est marqué de la couleur spéciale, le calcul d'une nouvelle machine de Turing peut débiter. Nous appelons  $N$  cette machine, et son comportement est celui déjà vu plusieurs fois jusqu'à présent :  $N$  prend en entrée deux entiers  $x$ , le code d'un jeu de tuiles, et  $c$ , le code d'une couleur de  $\tau_x$  et calcule un diagramme espace×temps qui représente une tuile du jeu de tuiles  $\tau_x$  qui a pour couleur sud la couleur  $c$ . Dans le pavage que nous construisons, nous voulons simuler les tuiles du jeu de tuiles  $\tau_{f(i)}$ . Ces bits sont déjà accessibles par  $N$  sur la première ligne du carré dans lequel se déroule le calcul. Il suffit donc d'ajouter un entier  $c$  de manière non-déterministe à la suite des bits de  $f(i)$ . La machine  $N$  nous dira par la suite si le choix était bien celui d'une couleur sud d'une tuile de  $f(x)$  car si  $c$  n'est pas une couleur valide alors le calcul rentre dans un état d'erreur qui, lors de sa représentation en tuile, empêche le pavage d'être complet.

Nous simulons  $N$  sur  $f(i)$  et  $c$  afin d'obtenir une tuile du jeu de tuiles  $\tau_{f(i)}$  qui a pour couleur sud  $c$  (figure 5.5.2). Il existe donc un entier  $n$  tel qu'une simulation d'une tuile de  $\tau_{f(i)}$  soit effectuée dans chaque carré de niveau  $n$ . Comme pour toute simulation de tuiles, nous ajoutons la condition que les bits représentant les

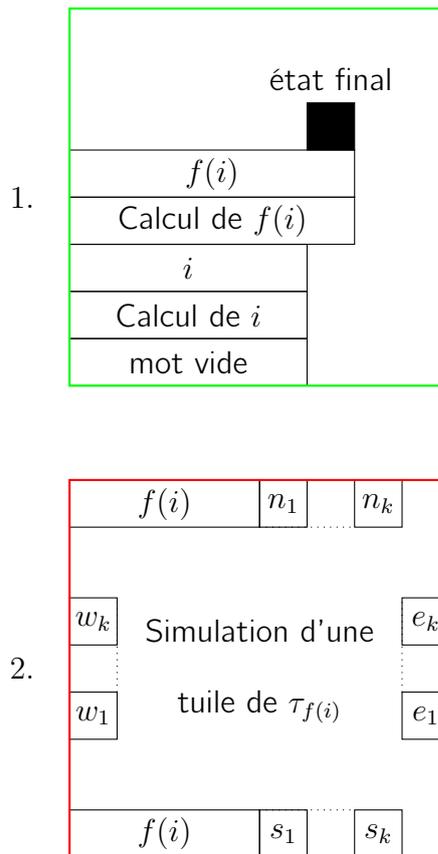


Fig. 5.4 – Calculs s'effectuant dans les carrés de Robinson et simulant les tuiles de  $\tau_{f(i)}$

codes des couleurs soient envoyés à l'extérieur du carré où la simulation se déroule. Les zones entre deux carrés contiennent ainsi le code de la couleur commune à ces deux carrés et nous obtenons la simulation d'un  $\tau_{f(i)}$ -pavage. Nous pouvons simuler tout  $\tau_{f(i)}$  avec ce jeu de tuiles et, de plus, comme l'auto-similarité a été stoppée, le jeu de tuiles ainsi construit simule totalement  $\tau_{f(i)}$ . Pour montrer que la simulation est exacte, il suffit de noter que seul un niveau  $n$  contient des carrés simulant des tuiles de  $\tau_{f(i)}$ . Deux carrés de niveaux strictement inférieurs à  $n$  contiennent exactement le même calcul partiel et sont donc tous équivalents. Ainsi, deux carrés de niveau  $n$  représentant la même tuile de  $\tau_{f(i)}$  ont exactement la même structure interne. La réduction est donc une bijection et la simulation est exacte.

Nous appelons  $\tau_k$  le jeu de tuiles défini jusqu'à présent. Dans notre construction, la seule variable est  $M^i$  qui génère l'entier qui va être modifié par  $f$ . Pour obtenir un point fixe, nous voudrions que cet entier soit  $k$ , nous aurions alors  $\tau_k$  qui simule exactement  $\tau_{f(k)}$ . Pour cela, il faudrait que  $M^i$  nous renvoie le code de son propre

jeu de tuiles. Mais modifier les tuiles, afin de simuler une machine de Turing  $M^i$  qui nous renvoie le code de son propre jeu de tuiles, change aussi le code du jeu de tuiles, et empêche d'avoir accès à son propre code.

Pour montrer que nous pouvons considérer que notre jeu de tuiles  $\tau$  aura bien accès à son propre code, nous utilisons le théorème traditionnel du point fixe de Kleene qui nous dit que, pour chaque fonction récursive  $f$ , il existe un indice  $e$  qui est un point fixe, c'est-à-dire que  $M_e$  et  $M_{f(e)}$  calculent la même fonction. Nous montrons qu'il est possible de modifier le pavage de Robinson de manière à ce qu'une machine de Turing génère son propre code dans chacun de ces carrés. Nous prenons la fonction  $f$  qui est définie de la manière suivante : au code  $i$  d'une machine de Turing,  $f$  associe le code  $f(i)$  de la machine de Turing telle que  $M_{f(i)}(\epsilon)$  soit égal au code du jeu de tuiles représentant le jeu de tuiles de Robinson dans lequel nous simulons dans chacun de ses carrés la machine  $M_i$ . De plus,  $M_{f(i)}(x) \uparrow$  pour tout  $x$  différent du mot vide  $\epsilon$ . Selon le théorème du point fixe, il existe un point fixe  $e$  tel que  $M_e$  calcule la même fonction que  $M_{f(e)}$ . Donc  $M_e() = M_{f(e)}(\epsilon)$  et  $M_{f(e)}(\epsilon)$  est égal au code du jeu de tuiles de Robinson dans les carrés duquel est simulé  $M_e(\epsilon)$ . L'indice  $k$  généré par  $M_{f(e)}(\epsilon)$  est donc l'indice d'un jeu de tuiles qui a accès à son propre code.

Nous pourrions donc toujours considérer qu'un pavage de Robinson dans lequel nous effectuons des simulations de machines de Turing, peut avoir accès quelque part à son propre code. Nous reprenons le jeu de tuiles  $\tau_k$  et nous savons qu'il existe une machine  $M^k$  qui écrit dans le pavage le code  $k$ . Ce jeu de tuiles  $\tau_k$  va générer des pavages qui simulent exactement le modifié de  $\tau_k$  par  $f$ . C'est notre point fixe.  $\square$

Dans la section qui suit, nous adaptions aux pavages un résultat plus général : le théorème du point fixe avec paramètres.

## 5.4 Théorème du point fixe de Kleene avec paramètres

Le théorème de Kleene avec paramètres est un autre théorème fondamental de la théorie de la calculabilité, et un équivalent pour les pavages serait un outil prometteur. L'idée est de pouvoir injecter un paramètre et de conserver la notion de point fixe. Ceci nous mènera naturellement à la construction de réduction de propriétés entre pavages que nous verrons dans la section suivante.

Tout d'abord, nous citons le théorème traditionnel du point fixe avec paramètres :

**Théorème 30 (Point fixe de Kleene avec paramètres)** *Soit  $g$  une fonction calculable à deux paramètres. Il existe une fonction calculable  $n$  qui est un point fixe pour  $g$ , c'est-à-dire, pour tout indice de machine de Turing  $e$ ,  $M_{n(e)}$  et  $M_{g(e,n(e))}$  calculent la même fonction.*

Ce théorème est une généralisation du théorème du point fixe puisqu'il permet de construire, à partir de toute machine de Turing, une modification de cette machine qui sera un point fixe pour  $g$ . La fonction  $g$  peut être vue comme un programme qui prend en entrée deux programmes et qui, à partir d'eux, crée un nouveau programme. Ce théorème nous permet de construire à partir de tout programme  $M$ , un modifié de ce programme  $n(M)$  tel que le modifié  $n(M)$  calcule la même fonction que  $g(M, n(M))$ .

Pour les pavages, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 31** *Soit  $g$  une fonction calculable à deux paramètres. Il existe une fonction calculable  $n$  qui est un point fixe pour  $g$ , c'est-à-dire que pour tout jeu de tuiles  $\tau_i, \tau_{n(i)}$  simule exactement  $\tau_{g(i, n(i))}$ .*

- ◇ *Preuve.* Soit  $g$  une fonction récursive à deux paramètres qui prend en entrées deux entiers  $x, y$  et renvoie un entier  $g(x, y)$ . Soit  $M_g$  la machine de Turing qui prend en entrée deux entiers  $x$  et  $y$  et calcule  $g(x, y)$ .

Pour obtenir les valeurs de  $x$  et de  $y$ , nous utilisons le même moyen que dans la preuve précédente du théorème 29 : nous utilisons deux machines de Turing  $M^x$  et  $M^y$  qui, sur l'entrée vide, calculent respectivement  $x$  et  $y$ . Soit  $M$  la machine de Turing qui a le fonctionnement suivant : à partir du mot vide, elle simule d'abord  $M^x$  puis  $M^y$  afin d'obtenir un couple d'entiers  $(x, y)$ , puis simule sur ces deux entiers la machine  $M_g$  afin d'obtenir  $g(x, y)$  (figure 5.5). Les valeurs exactes de  $(x, y)$  ne sont pas importantes pour l'instant. Nous les ferons varier par la suite afin d'obtenir le résultat du théorème.

Nous simulons la machine  $M$  dans le pavage de Robinson de manière à ce que la tuile inférieure gauche de chaque carré de niveaux pairs du pavage de Robinson corresponde à la tuile représentant l'état initial de  $M$  sur l'entrée vide. Ainsi chaque carré contient le calcul partiel ou complet de  $x, y$  et  $g(x, y)$ . Si le calcul atteint un état final, alors une couleur spéciale est envoyée au nord et colore l'intégralité du périmètre du carré dans lequel le calcul se déroule. Cette couleur est une couleur bloquante et stoppe l'auto-similarité. Dans le pavage final, il existe donc un niveau maximal de carrés  $n$  qui sont les seuls à contenir le calcul complet de  $M$  sur l'entrée vide. Les carrés de niveaux inférieurs ne contiennent qu'un calcul partiel, et les carrés de niveaux supérieurs n'existent pas car l'auto-similarité a été stoppée. À ce niveau de la construction, nous obtenons un pavage périodique. Comme dans la preuve 29, nous envoyons les bits de  $g(x, y)$  sur la première ligne du carré.

La couleur spéciale permet le début du calcul d'une nouvelle machine de Turing, que nous appelons  $N$ , et qui, comme il est de coutume maintenant, simule les tuiles du jeu de tuiles  $g(x, y)$ . La machine  $N$  prend deux paramètres, qui sont l'indice d'un jeu de tuiles, ici  $g(x, y)$ , et l'indice d'une couleur de ce jeu de tuiles, ici, un entier  $c$  que nous inscrivons de manière non-déterministe à la suite de  $g(x, y)$ . En faisant communiquer l'information des simulations entre les carrés de

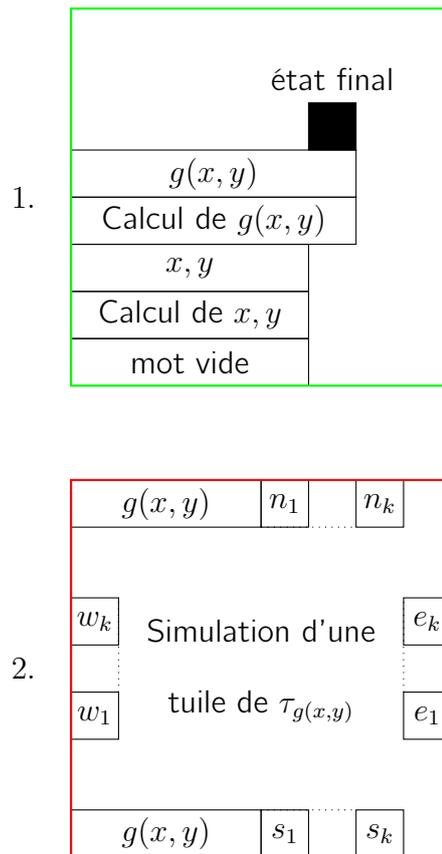


Fig. 5.5 – Calculs s’effectuant dans les carrés de Robinson et simulant les tuiles de  $\tau_{g(x,y)}$

niveaux  $n$ , nous obtenons, comme vu précédemment, une simulation exacte entre le jeu de tuiles décrit jusqu’à présent, que nous notons  $\tau^{M^x, M^y}$ , et le jeu de tuiles  $g(x, y)$ .

Les seuls paramètres qui varient dans ce jeu de tuiles sont  $M^x$  et  $M^y$ . L’idée est de laisser un des paramètres libre et de forcer l’autre à renvoyer le code de son propre jeu de tuiles. Pour tout jeu de tuiles  $\tau_i$ , et pour toute machine de Turing  $M^i$  qui calcule la valeur  $i$  sur l’entrée vide, nous avons vu dans la preuve du théorème 29 que nous pouvons trouver une machine  $\mathcal{M}$  qui calcule sur l’entrée vide le code du jeu de tuiles  $\tau^{\mathcal{M}, M^i}$  permettant à ce jeu de tuiles d’avoir accès à son propre indice. Nous avons ainsi un jeu de tuiles  $\tau^{\mathcal{M}, M^i}$  qui a le fonctionnement suivant : dans chacun des ces carrés, nous générons l’indice de ce jeu de tuiles, disons  $k$ , puis un indice de jeu de tuiles  $i$ , nous calculons  $g(k, i)$  et nous simulons les tuiles de  $\tau_{g(k,i)}$ . Nous pouvons faire cette construction pour tout jeu de tuiles  $\tau_i$ . Comme la construction est récursive, nous en déduisons une fonction récursive  $n$  qui permet de passer d’un jeu de tuiles  $\tau_i$  au jeu de tuiles  $\tau^{\mathcal{M}, M^i} = \tau_k$  (et donc

$= \tau_{n(i)}$ , par définition de  $n$ ). Nous affirmons que  $n$  est notre point fixe. En effet, pour tout indice de jeu de tuiles  $i$ , nous avons que  $\tau_{n(i)} = \tau^{\mathcal{M}, M^i}$ . Or,  $\tau^{\mathcal{M}, M^i}$  simule exactement le jeu de tuiles  $\tau_{g(\mathcal{M}(\epsilon), M^i(\epsilon))} = \tau_{g(k, i)} = \tau_{g(n(i), i)}$  car  $n(i) = k$ .  $\square$

À partir de ces deux théorèmes, nous montrons la dernière version du théorème de Kleene pour les pavages : le double point fixe. Nous rappelons d'abord l'énoncé de ce théorème en théorie de la calculabilité :

**Théorème 32 (Le double point fixe de Kleene)** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions récursives à deux variables. Il existe deux indices  $a$  et  $b$  tels que  $M_a$  et  $M_{f(a, b)}$  calculent la même fonction et tels que  $M_b$  et  $M_{g(a, b)}$  calculent la même fonction.*

Pour les pavages, le théorème s'énonce de la manière suivante :

**Théorème 33** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions récursives à deux variables. Alors il existe deux entiers  $j$  et  $k$  tels que le jeu de tuiles  $\tau_j$  simule exactement le jeu de tuiles  $\tau_{f(j, k)}$  et tels que le jeu de tuiles  $\tau_k$  simule exactement le jeu de tuiles  $\tau_{g(k, j)}$ .*

- ◇ *Preuve.* Nous utilisons les deux théorèmes du point fixe qui viennent d'être démontrés. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions récursives à deux variables. Puisque  $f$  est une fonction récursive à deux variables, alors d'après le théorème 31, il existe une fonction récursive  $n$  telle que, pour tout indice  $i$  de jeu de tuiles,  $\tau_{n(i)}$  simule exactement  $\tau_{f(n(i), i)}$ . Maintenant, par le théorème 29, il existe un jeu de tuiles  $\tau_j$  qui simule exactement  $\tau_{g(n(j), j)}$ . Si nous posons  $k = n(j)$  alors nous obtenons le théorème.  $\square$

## 5.5 Réduction de propriétés et théorème à la Rice pour les pavages

Les constructions de la section précédente peuvent être utilisées et améliorées pour obtenir une notion de réduction de propriétés. Il est commun en calculabilité traditionnelle de construire des machines de Turing avec une certaine propriété si une autre machine de Turing possède une autre propriété. Ces réductions sont la base des hiérarchies arithmétiques et des différents degrés caractérisant les sous-ensembles des entiers.

Nous aimerions obtenir le même type de réduction pour les propriétés sur les pavages afin de pouvoir classer les ensembles caractérisés par une certaine propriété  $P$  de la forme :

$$A_P = \{ i \mid \tau_i \text{ a la propriété } P \}.$$

Dans la section 3.3, nous avons montré l'indécidabilité de la pavabilité périodique du plan. La preuve consistait en une réduction entre l'ensemble  $K_0$ , où  $K_0$

est l'ensemble des paires  $(i, w)$  telles que la machine de Turing  $M_i$  s'arrête sur l'entrée  $w$ , et les jeux de tuiles périodiques. Le résultat montrait que cet ensemble, qui correspond à  $A_{per} = \{i \mid \tau_i \text{ est un pavage périodique}\}$ , se réduisait à  $K_0$ , que nous notons  $K_0 \leq A_{per}$ , où  $\leq$  correspond à la réduction many-one introduite ci-dessous :

**Définition 28** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles des entiers.  $A$  se réduit à  $B$ , que nous notons  $A \leq B$  s'il existe une fonction récursive  $f$  telle que  $i \in A \Leftrightarrow f(i) \in B$ .

Nous concluons la classification de  $A_{per}$  en montrant que cet ensemble est  $\Sigma_1$ -complet :

**Théorème 34**  $A_{per} \equiv K_0$  et est donc  $\Sigma_1$ -complet.

- ◇ *Preuve.* Nous savons déjà que  $K_0 \leq A_{per}$ . Il suffit de montrer maintenant que  $A_{per} \in \Sigma_1$ . La propriété *être périodique* se définit de la manière suivante :  $\exists n$  tel que  $\tau_i$  génère un motif carré de taille  $n$  qui est un motif périodique. Vérifier si un motif est un motif périodique est récursif puisqu'il suffit de vérifier que les bords est et ouest d'un côté, et nord et sud d'un autre aient les mêmes couleurs.

L'ensemble est donc  $\Sigma_1$ -complet.  $\square$

Le but est maintenant de pouvoir construire des réductions permettant de comparer des ensembles de jeux de tuiles entre eux sans devoir passer par des ensembles générés par des propriétés sur les machines de Turing, ceci dans le but d'obtenir des constructions propres aux pavages. La première de ces constructions proposées est une réduction entre les jeux de tuiles périodiques et ceux qui ne génèrent que des pavages non-récursifs.

**Théorème 35** Soit  $B_{nr}$  l'ensemble des jeux de tuiles ne générant que des pavages non-récursifs. Alors  $A_{per} \leq B_{nr}$  et donc,  $B_{nr}$  n'est pas récursifs.

- ◇ *Preuve.* Nous construisons une réduction entre les jeux de tuiles récursifs et les jeux de tuiles ne produisant que des pavages non-récursifs. Soit  $\rho$  un jeu de tuiles non-récursif. Depuis les articles de Hanf et Myers [Han74, Mye74], nous savons que de tels jeux de tuiles existent.

Soit  $\tau_i$  un jeu de tuiles. Nous construisons la machine de Turing  $M$  qui énumère les motifs de  $\tau_i$  et qui s'arrête uniquement si un motif périodique est trouvé. Nous simulons  $M$  dans les carrés du pavage de Robinson. Si un état final est atteint, ce dernier envoie une couleur spéciale au nord qui colore l'intégralité du périmètre du carré dans lequel le calcul a lieu. Cette couleur est bloquante et stoppe donc l'auto-similarité du pavage de Robinson et permet aussi le début du calcul d'une nouvelle machine de Turing, que nous appelons  $N$ , et qui a la particularité de générer des diagrammes espace×temps isomorphes aux tuiles de  $\rho$ .

En ajoutant la condition que les codes des couleurs des simulations des tuiles peuvent être envoyés entre deux carrés de même niveau, alors nous garantissons que les contraintes locales du jeu de tuiles  $\rho$  sont respectées. Ce jeu de tuiles

simule exactement  $\rho$ . Soit  $f$  la fonction récursive qui permet de passer de l'indice  $i$  à l'indice  $f(i)$  du jeu de tuiles décrit ci-dessus. Si  $\tau_i$  est périodique, alors il existe un entier  $n$  tel que les carrés de niveau  $n$  du pavage généré par  $\tau_{f(i)}$  contiennent la simulation des tuiles du jeu de tuiles  $\rho$ . Comme la simulation est exacte, si ce pavage était récursif, alors il existerait au moins un pavage généré par  $\rho$  qui serait récursif. Donc ce pavage ne peut pas être récursif. Par contre si  $\tau_i$  n'est pas périodique, alors pour tout  $n$ , les carrés de niveau  $n$  du pavage générés par  $\tau_{f(i)}$  contiennent tous une simulation partielle du calcul de  $M$ , qui ne s'arrête jamais. Il existe donc au moins un pavage récursif qui est la superposition d'un pavage de Robinson récursif et de la simulation dans ses carrés de la machine  $M$ .

Donc  $\tau_i$  est périodique si, et seulement si,  $\tau_{f(i)}$  ne génère que des pavages non-récursifs et ainsi  $B_{nr}$  est non-récursif.  $\square$

Dans cette preuve, nous avons réduit la propriété d'être périodique à la propriété de ne pas pouvoir générer de pavages récursifs. Cette construction peut être généralisée pour obtenir tout un panel de réductions de propriétés. L'argument principal est, comme pour le théorème de Kleene avec paramètres, d'injecter dans un pavage un programme qui vérifie la validité d'une propriété afin d'en générer une autre si la première est satisfaite. La propriété que nous voulons vérifier peut être n'importe quelle propriété qui soit récursivement énumérable. Nous pouvons ainsi réduire des jeux de tuiles ayant une propriété récursivement énumérable à des jeux de tuiles ayant une autre propriété plus haute dans la hiérarchie arithmétique. De telles propriétés récursivement énumérables peuvent être par exemple :  $\tau$  ne pave pas le plan,  $\tau$  simule exactement  $\rho$  (où  $\rho$  est un jeu de tuiles fixé),  $\tau$  génère un motif utilisant toutes ses tuiles... Si une de ces propriétés est vérifiée, la simulation d'un autre jeu de tuiles avec une autre propriété peut débuter, donnant ainsi la réduction.

En généralisant cette construction, nous obtenons un théorème *à la* Rice pour la simulation exacte de jeu de tuiles. Ce théorème n'est pas encore exactement un théorème *à la* Rice puisqu'il implique des conditions sur la propriété, liées à la simulation exacte. D'après la preuve, nous avons besoin que, si un jeu de tuiles  $\tau_i$  satisfait la propriété, si un jeu de tuiles  $\tau_j$  simule exactement  $\tau_i$  alors  $\tau_j$  satisfait la propriété. Nous obtenons la définition suivante :

**Définition 29** Soit  $A$  un ensemble d'indices de jeux de tuiles.  $A$  est un *ensemble exact d'indices* si :

- i) il existe un indice de jeu de tuiles  $i \in A$  tel que si  $\tau_j$  simule exactement  $\tau_i$ , alors  $j \in A$  ;
- ii) il existe un indice de jeu de tuiles  $k \notin A$  tel que si un jeu de tuiles  $\tau_l$  simule exactement  $\tau_k$ , alors  $l \notin A$ .

Le théorème de Rice, en calculabilité traditionnelle, nous dit que de savoir si une machine de Turing accepte un langage, inclus dans un ensemble  $A$  de langages récursivement énumérables, n'est pas décidable sauf si  $A$  est trivial, c'est-à-dire que

$A$  contient tous les langages récursivement énumérables ou aucun. Les machines de Turing peuvent donc être comparées à l'aide des langages qu'elles acceptent. Le choix dans cette thèse est de comparer les jeux de tuiles à l'aide de la simulation exacte. Pour obtenir un théorème à la Rice en respectant la simulation exacte, nous avons besoin de restreindre la propriété et d'imposer que cette propriété génère un ensemble exact d'indices. De plus, il est nécessaire que cette propriété satisfasse soit tous les jeux de tuiles générant Robinson, soit aucun. En effet, si aucune période n'est trouvé, il nous reste à la fin le pavage de Robinson contenant un calcul. Il est donc nécessaire que ces pavages ne satisfassent pas la propriété. Nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 36 (à la Rice)** *Soit  $A$  un ensemble exact d'indices tel que tous les jeux de tuiles générant Robinson soient, soit tous dans  $A$ , soit aucun dans  $A$ . Alors  $A$  est récursif si, et seulement si,  $A$  est trivial, c'est-à-dire,  $A = \mathbb{N}$  ou  $A = \emptyset$ .*

◇ *Preuve.* Soit  $A$  un ensemble exact d'indices. Comme  $A$  n'est pas trivial, il existe alors un indice  $i \in A$  et un indice  $k \notin A$  (où  $i$  et  $k$  satisfont aux conditions de la définition 29). Nous supposons en premier que le jeu de tuiles de Robinson n'est pas dans  $A$ . Nous construisons une réduction entre  $A_{per}$  et  $A$ .

Cette réduction est la même que celle de la preuve de la réduction entre  $A_{per}$  et  $B_{nr}$ . À partir d'un jeu de tuiles  $\tau_j$ , nous construisons un jeu de tuiles  $\tau_{f(j)}$  qui simulera un jeu de tuiles  $\tau_i$  (dont l'indice est dans  $A$ ) si, et seulement si,  $\tau_j$  est périodique. Alors  $f(j)$  est dans  $A$  car  $A$  est un ensemble exact d'indices.

Par contre, si  $\tau_j$  n'est pas périodique, alors le pavage final est le pavage de Robinson, qui n'est pas dans  $A$ .

Alors,  $\tau_j \in A_{per} \Leftrightarrow \tau_{f(j)} \in A$ .

Si, par contre, le jeu de tuiles de Robinson est dans  $A$ , il suffit de considérer  $\bar{A}$  et de simuler  $\tau_k$ .

□

Ce théorème peut être énoncé différemment. Soit  $I$  un ensemble d'indices de jeux de tuiles qui contient soit tous les jeux de tuiles générant les constructions de Robinson, soit aucun, et tel qu'il existe au moins un indice  $k$  de jeux de tuiles tel que l'ensemble  $\{s \mid \tau_k \leq_e \tau_s\} \cap I = \emptyset$ , c'est-à-dire qu'il existe un jeu de tuiles tel que tous les jeux de tuiles qui le simulent exactement ne soient pas dans  $I$ . Alors savoir si un jeu de tuiles simule exactement un jeu de tuiles de  $I$  est indécidable. Nous verrons dans la section 5.7 une version moins restrictive de ce théorème en utilisant la diagonalisation sur les pavages.

Comme application de ce théorème, nous citons différentes propriétés qui sont invariantes par simulation exacte, et donc qui génèrent un ensemble non-récursif d'indices de jeux de tuiles satisfaisant cette propriété.

**Corollaire 5.4** *Soit  $P$  la propriété "générer un pavage auto-similaire". Alors  $L_P$  est non-récursif.*

**Corollaire 5.5** Soit  $P$  la propriété "générer un pavage dont la fonction de quasipériodicité est de même ordre qu'une fonction fixée  $f(x)$ ". Alors  $L_P$  est non-récuratif.

Dans la section suivante, nous montrons l'indécidabilité d'autres problèmes qui ne satisfont pas les conditions du théorème de Rice.

## 5.6 Autres problèmes indécidables

La condition sur le théorème à la Rice reste une condition assez forte et certaines propriétés naturelles ne la satisfont pas. Entre autres, la grande différence entre machine de Turing et pavages est que dans le pavage, c'est-à-dire le calcul final du jeu de tuiles, les calculs partiels sont aussi inclus et font partie intégrante du calcul final. Ceci est à mettre en confrontation avec une machine de Turing, puisque cette dernière renvoie une sortie, qui ne donne pas d'indication sur les moyens d'arriver à ce résultat. Ainsi, deux machines de Turing peuvent accepter un même langage tout en ayant un comportement complètement différent. Le théorème traditionnel de Rice pour les machines de Turing s'adresse aux calculs finaux de ces machines, c'est-à-dire les langages acceptés. D'autres ensembles d'indices de machines de Turing pourraient être considérés, par exemple en sélectionnant des propriétés sur les calculs partiels d'une machine de Turing : *M utilise-t-elle tous ses états? M utilise-t-elle toujours l'état  $q_j$ , pour un état  $q_j$  fixé?* Ces sous-ensembles ne satisfont pas le théorème de Rice, puisque la propriété n'est pas sur le langage accepté. De même, il existe de nombreux ensembles d'indices de jeux de tuiles qui ne satisfont pas la condition du théorème à la Rice de la section précédente. La différence entre une propriété sur le calcul final d'un jeu de tuiles, et une propriété sur le moyen d'être mené au calcul final est trop subtile pour être caractérisée. Nous nous contenterons de citer différents problèmes qui ne satisfont pas la condition du théorème à la Rice et nous montrerons néanmoins, au cas par cas, que ces problèmes ne sont pas calculables.

Nous définissons le premier problème dont la non-décidabilité ne peut être prouvée directement par le théorème à la Rice :

### Problème P1

- Entrée : Un jeu de tuiles  $\tau$ .
- Question : Existe-t-il un  $\tau$ -pavage du plan  $P$  qui utilise toutes les tuiles de  $\tau$ ?

Ce problème ne peut pas être prouvé directement, car la propriété n'est pas conservée par la simulation exacte. De plus, il semblerait difficile d'arriver à construire la réduction de manière à ce que le pavage final utilise toutes ces tuiles si un autre pavage est périodique. C'est ici un exemple des limites du théorème à la Rice qui essaie de caractériser les ensembles d'indices de jeux de tuiles auxquels les jeux de tuiles périodiques peuvent se réduire. Il fournit une condition suffisante mais pas nécessaire. Nous pouvons pourtant nous inspirer de la réduction pour montrer que

le problème P est lui aussi non-décidable car la construction de cette réduction est assez flexible pour pouvoir quand même forcer la propriété à apparaître dans la réduction. Pour cela, nous introduisons deux autres problèmes :

**Problème P2**

- Entrée : Un jeu de tuiles  $\tau$  et un sous-ensemble  $A \subseteq \tau$ .
- Question : Existe-t-il un  $\tau$ -pavage du plan  $P$  qui utilise toutes les tuiles de  $A$  ?

**Problème P3**

- Entrée : Un jeu de tuiles  $\tau$  et un ensemble de sous-ensembles  $A_i \subseteq \tau$ .
- Question : Existe-t-il un  $\tau$ -pavage qui pave le plan et qui utilise au moins une tuile de chaque sous-ensemble  $A_i$  ?

Le premier résultat que nous montrons est l'indécidabilité du problème P3. Nous allons voir que le problème P3 est le problème dans lequel se transforme le problème P1 lorsque nous passons à la simulation exacte.

|| **Théorème 37** *Le problème P3 est non-décidable.*

- ◇ *Preuve.* Soit  $\rho$  un jeu de tuiles qui génère au moins un pavage du plan utilisant toutes les tuiles de  $\rho$ . Nous transformons maintenant une instance du problème être périodique en une instance du problème P3.

Soit  $i$  l'indice d'un jeu de tuiles. Comme pour toutes les réductions vues jusqu'à présent, nous simulons dans Robinson une machine de Turing, que nous appelons  $M$ , qui énumère les motifs de  $\tau_i$  et qui s'arrête si un de ces motifs est une période. L'état final envoie alors une couleur spéciale au nord, qui colore l'intégralité du périmètre du carré, stoppe l'auto-similarité du pavage de Robinson, et permet le début de la simulation d'une nouvelle machine de Turing, que nous appelons  $N$ , et qui produit des diagrammes espace×temps isomorphes aux tuiles de  $\rho$ .

Il est nécessaire maintenant de regarder de plus près notre machine  $N$ . Nous savons que cette machine prend en entrée deux entiers  $i$  et  $c$  et choisit de manière non-déterministe une tuile du jeu de tuiles  $\tau_i$  ayant comme couleur sud  $c$ . Dans ce cas précis, il n'est pas nécessaire d'avoir comme entrée la valeur  $i$  puisque nous savons déjà quel jeu de tuiles nous voulons simuler. L'entrée n'est donc composée que d'un unique entier  $c$ . Au moment de choisir la tuile ayant pour couleur sud  $c$ , nous pouvons supposer qu'il le fasse en une unique transition, ce qui revient à choisir un état  $q_i$  qui sera le sous-programme simulant la tuile  $t_i$  de  $\tau$ . Ainsi, chaque simulation de tuile contiendra au moins une unique tuile représentant l'état correspondant au sous-programme simulant cette tuile. Nous appelons  $\{q_1, \dots, q_n\}$  les états initiaux des sous-programmes simulant les tuiles  $\{t_1, \dots, t_n\} = \tau$ .

Dans notre réduction, les tuiles contenant l'information des états  $q_i$  n'apparaissent que si nous simulons  $\rho$ , et donc que si  $\tau_i$  est périodique. Comme la simulation de la machine de Turing  $N$  est superposée à la simulation de la machine de Turing  $M$

et aux tuiles du jeu de tuiles de Robinson, alors différentes tuiles représenteront chaque état  $q_i$ . Nous appelons  $A_i$  l'ensemble des tuiles représentant l'état  $q_i$ .

Nous appelons  $\tau_{f(i)}$  le jeu de tuiles obtenu de cette manière. Nous montrons que :

$$i \in L_{per} \Leftrightarrow (\tau_{f(i)}, A_1, \dots, A_n) \in L_{P3}.$$

Si  $\tau_i$  est périodique, alors  $\tau_{f(i)}$  simule  $\rho$  qui contient au moins un pavage utilisant toutes ces tuiles, et qui donc contient au moins un pavage ayant au moins une tuile de chacun des  $A_i$ . Maintenant, si  $\tau_i$  n'est pas périodique, alors la simulation de  $M$  continue sans s'arrêter, et la simulation de la machine  $N$  ne débute jamais. Donc aucun  $\tau_{f(i)}$ -pavage ne contient de tuiles d'un des  $A_i$ .

Donc le problème P3 est non-décidable. □

A partir du problème P3, nous déduisons que les problèmes P2 et P1 sont non-décidables. Nous montrons d'abord que P2 est non-décidable :

**Lemme 5.2** *Le problème P2 est non-décidable.*

- ◇ *Preuve.* Supposons que le problème P2 soit décidable. Nous allons montrer alors que le problème P3 est décidable aussi. Une instance du problème P3 est de la forme  $\{\tau_i, A_1, \dots, A_n\}$ . Comme les ensembles  $A_i$  sont finis, alors l'ensemble  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  est aussi fini. Il suffit alors pour tout élément  $B \subset A$ ,  $B$  correspondant à un sous-ensemble de  $\tau_i$ , de savoir s'il existe un  $\tau_i$ -pavage qui pave le plan en utilisant toutes les tuiles de  $B$ . Comme ce dernier, par hypothèse, peut être fait récursivement, alors nous pouvons décider le problème P3. Par contradiction, nous obtenons que le problème P2 est non-décidable. □

Nous montrons maintenant la non-décidabilité de notre problème originel P1 :

**Lemme 5.3** *Le problème P1 est non-décidable.*

- ◇ *Preuve.* Nous montrons que si le problème P1 est décidable alors le problème P2 est décidable aussi. Une instance de P2 est de la forme  $(\tau_i, A)$  où  $A \subseteq \tau_i$ . Nous appelons  $\bar{A}$  l'ensemble des tuiles de  $\tau$  qui ne sont pas dans  $A$ . Nous remarquons que le jeu de tuiles  $\tau_i$  génère un pavage contenant toutes les tuiles de  $A$  si, et seulement si, il existe un ensemble de tuiles  $B \subset \tau_i$  tel que  $B \cup A$  génère un pavage du plan utilisant toutes les tuiles de  $B \cup A$ .

Comme  $\bar{A}$  est fini, alors l'ensemble des parties de  $\bar{A}$ ,  $\mathcal{P}(\bar{A})$  est aussi fini. Pour chaque élément  $B \in \mathcal{P}(\bar{A})$  nous regardons s'il existe un pavage généré par le jeu de tuiles  $A \cup B$ . Si oui, nous acceptons  $(\tau_i, A)$ , sinon nous refusons.

Donc par contradiction, nous montrons que le problème P1 est non-décidable. □

Ces constructions et réductions sont complètement indépendantes des machines de Turing, et ne nécessitent pas de réduction à partir d'un problème lié aux

machines de Turing. Le théorème *à la* Rice ne permet pas de résoudre tout type de problèmes, mais nous pouvons remarquer que le principe de la réduction est assez fort et souple pour permettre une étude au cas par cas et obtenir ainsi des résultats d'indécidabilité sur les ensembles d'indices de jeux de tuiles. Ces différents résultats nous laissent penser qu'une construction plus générale pourrait être utilisée pour montrer un théorème *à la* Rice plus consistant.

## 5.7 Diagonalisation

Dans cette section, et à l'aide des théorèmes montrés jusqu'à présent, nous montrons comment il est possible de diagonaliser sur les jeux de tuiles, et obtenir des résultats par contradiction. La diagonalisation a été utilisée en premier par Georg Cantor pour montrer la non-dénombrabilité des réels. Cette technique consistant à considérer les éléments se trouvant sur la diagonale d'un tableau est aussi à la base du résultat montrant l'indécidabilité du problème de l'arrêt. En effet, si nous savions décider le problème de l'arrêt, il existerait alors une machine  $M$  qui s'arrête sur une entrée  $i$  si, et seulement si, cette même machine  $M$  boucle sur  $i$ . Cette contradiction mène donc à l'indécidabilité du problème de l'arrêt.

À l'aide du théorème du point fixe *à la* Kleene, nous pouvons utiliser ce genre de construction pour démontrer les problèmes traditionnels des pavages à l'aide d'un argument de diagonalisation. Cette technique de preuve adaptée aux pavages nous permet de montrer des résultats qui, jusqu'à présent, n'étaient prouvés que par construction et par réduction à partir du problème de l'arrêt. Ici, nous montrons que nous pouvons prouver ces résultats sans avoir à faire à une construction compliquée.

Nous redémontrons ainsi les trois problèmes classiques des pavages : le problème du domino, le problème de la pavabilité périodique du plan, et l'inséparabilité de l'ensemble des jeux de tuiles périodiques et de l'ensemble des jeux de tuiles finis. Nous prouvons le résultat de deux manières différentes : d'abord en montrant une contradiction sur la construction puis en s'aidant du théorème du point fixe *à la* Kleene sans aucune construction :

|| **Théorème 38 (Problème du domino)** *Le problème du domino est indécidable.*

- ◇ *Preuve.* La première preuve reprend les grandes lignes des constructions précédentes, et conclut par contradiction grâce au théorème du point fixe *à la* Kleene. La deuxième preuve n'utilise que le théorème du point fixe *à la* Kleene pour obtenir une preuve directe du théorème.
  - i) Nous supposons que le problème du domino est décidable. Il existe donc une machine de Turing  $M$  qui prend en entrée le code  $i$  d'un jeu de tuiles et renvoie en sortie *oui* si  $\tau_i$  pave le plan et *non* sinon. Pour chaque  $i$  nous construisons le jeu de tuiles suivant : nous simulons  $M(i)$  dans le pavage de Robinson. Comme  $M$  s'arrête sur toutes les entrées,

alors il existe un entier  $n$  tel que tous les carrés de niveau  $n$  du pavage de Robinson contiennent un état représentant l'état final *oui* ou l'état final *non*. La tuile représentant l'état final *oui* a la particularité d'envoyer une couleur stoppante qui colorie l'intégralité du périmètre du carré dans lequel se produit le calcul en bleu. Cette couleur, comme vu dans le chapitre 3 est une couleur stoppante, c'est-à-dire qu'aucune autre tuile ne peut être associée à la bordure de ce périmètre. Le processus de pavage s'arrête donc et le jeu de tuiles est fini.

Par contre, la tuile représentant l'état final *non* ne fait rien. Le processus de calcul continue donc, et dans chaque carré de niveaux supérieurs à  $n$ , il existe une tuile représentant l'état final *non*.

Soit  $f$  la fonction qui associe à  $i$  le jeu de tuiles défini ci-dessus. Par hypothèse absurde,  $f$  est récursive. Et donc, par le théorème du point fixe à la Kleene, (théorème 29), il existe un jeu de tuiles  $\tau_j$  tel que  $\tau_j$  simule exactement  $\tau_{f(j)}$ . Par construction, si  $\tau_j$  pave le plan, alors  $\tau_{f(j)}$  ne pave pas le plan et si  $\tau_j$  ne pave pas le plan alors  $\tau_{f(j)}$  le pave. Or, comme  $\tau_j$  simule exactement  $\tau_{f(j)}$ ,  $\tau_{f(j)}$  pave le plan si, et seulement si,  $\tau_j$  pave le plan. Donc  $\tau_j$  pave le plan si, et seulement si,  $\tau_j$  ne pave pas le plan. Donc le problème du domino est indécidable.

- ii) La deuxième preuve est beaucoup plus rapide, et n'exhibe aucune construction, bien qu'en utilisant le théorème du point fixe, la construction de ce dernier soit sous-entendue.

Supposons que le problème du domino soit décidable. Il existe une fonction récursive  $f$  qui renvoie 1 si un jeu de tuiles pave le plan et 0 sinon. Soit  $\tau_j$  un jeu de tuiles qui pave le plan et  $\tau_k$  un jeu de tuiles qui ne le pave pas.

À partir de  $f$  nous construisons la fonction récursive  $g$  suivante :

$$g(i) = \begin{cases} j & \text{si } f(i) = 0, \\ k & \text{, si } f(i) = 1. \end{cases}$$

Comme  $g$  est récursive, par le théorème du point fixe à la Kleene, il existe un jeu de tuiles  $\tau_e$  tel que  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{g(e)}$ .

Si  $\tau_e$  pave le plan, alors  $\tau_{g(e)} = \tau_k$  ne le pave pas et vice-versa. Et puisque  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{g(e)}$ , alors  $\tau_e$  pave le plan si, et seulement si,  $\tau_{g(e)}$  le pave aussi.

Nous avons construit un jeu de tuiles  $\tau_e$  qui pave le plan si, et seulement si,  $\tau_e$  ne le pave pas. Donc le problème du domino est indécidable.

□

La deuxième preuve montre l'utilité du théorème du point fixe à la Kleene. Ce théorème nous permet de montrer des résultats sur les jeux de tuiles d'une manière beaucoup plus rapide et propose un autre de point de vue sur l'indécidabilité de

certain problèmes liés aux pavages. Nous montrons maintenant l'indécidabilité de la pavabilité périodique du plan.

**Corollaire 5.6** *Le problème de savoir si un jeu de tuiles pave le plan périodiquement est indécidable.*

- ◇ *Preuve.* Nous reprenons l'idée de la deuxième preuve par l'absurde du théorème précédent en montrant que, si nous supposons que le problème est décidable, alors il est possible de construire un jeu de tuiles qui est périodique et non-périodique simultanément.

Nous supposons qu'il existe un programme  $f$  qui prend en entrée le code  $i$  d'un jeu de tuiles et qui renvoie 0 si ce jeu de tuiles est périodique, et 1 s'il ne l'est pas. Soit  $\tau_k$  un jeu de tuiles périodique, et soit  $\tau_j$  un jeu de tuiles apériodique.

À partir de  $f$ , nous construisons la fonction récursive  $g$  qui suit :

$$g(i) = \begin{cases} k, & \text{si } f(i) = 1, \\ j, & \text{si } f(i) = 0. \end{cases}$$

Par le théorème à la Kleene, il existe un jeu de tuiles  $\tau_e$  qui simule exactement  $\tau_{f(e)}$ . Or,  $\tau_{f(e)}$  est périodique si, et seulement si,  $\tau_e$  est apériodique. Mais comme  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{f(e)}$ , alors  $\tau_e$  est périodique si, et seulement si,  $\tau_{f(e)}$  est périodique. Ainsi  $\tau_e$  est périodique si, et seulement si,  $\tau_{f(e)}$  est apériodique. Donc le problème de la pavabilité périodique du plan est indécidable. □

En généralisant ce genre de raisonnement, nous prouvons d'une autre manière le théorème 36. Ce théorème est moins restrictif car il ne pose aucune condition sur les jeux de tuiles générant les constructions de Robinson :

**Théorème 39 (à la Rice, version 2)** *Soit  $I$  un ensemble exact d'indices.  $I$  est non-récursif sauf si  $I$  est trivial, c'est-à-dire  $I = \emptyset$  où  $I = \mathbb{N}$ .*

- ◇ *Preuve.* Soit  $I$  un ensemble exact d'indices non-trivial. Il existe donc un indice de jeu de tuiles  $j$  tel que l'ensemble des indices de jeux de tuiles simulant  $\tau_j$  soit dans  $I$  et il existe un indice de jeu de tuiles  $k$  tel qu'aucun des indices de jeux de tuiles simulant exactement  $\tau_k$  ne soit dans  $I$ .

Supposons qu'il existe une fonction récursive  $f$  qui prend en entrée un indice  $i$  de jeux de tuiles et renvoie 0 si  $i \in I$  et renvoie 1 si  $i \notin I$ . À partir de  $f$  nous construisons la fonction récursive  $g$  suivante :

$$g(i) = \begin{cases} j, & \text{si } f(i) = 1, \\ k, & \text{si } f(i) = 0. \end{cases}$$

Comme  $g$  est récursive, le théorème à la Kleene nous dit qu'il existe un indice  $e$  tel que  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{f(e)}$ . Supposons que  $e \in I$ . Alors  $f(e) = 0 \Rightarrow g(e) = k$  et donc  $g(e) \notin I$ . Mais comme  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{g(e)} = \tau_k$ , alors  $e \notin I$ , car aucun jeu de tuiles simulant exactement  $\tau_k$  n'est dans  $I$ .

Supposons que  $e \notin I$ . Alors  $f(e) = 1 \Rightarrow g(e) = j$  et donc  $g(e) \in I$ . Mais comme  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{g(e)}$ , alors  $e \in I$ , car  $I$  est un ensemble exact d'indices.

Ainsi  $e \in I \Leftrightarrow e \notin I$ . Donc  $I$  est non-récuratif.

□

Nous terminons en prouvant de nouveau le deuxième problème de Gurevich et Koriakov, c'est-à-dire la non-séparabilité des jeux de tuiles finis des jeux de tuiles périodiques :

**Théorème 40** *L'ensemble des jeux de tuiles ne pavant pas le plan est récursivement inséparable de l'ensemble des jeux de tuiles pavant le plan périodiquement.*

◇ *Preuve.* Nous supposons qu'il existe une fonction récursive  $f$  qui prend en entrée un indice  $i$  et renvoie 0 si  $\tau_i$  ne pave pas le plan, 1 si  $\tau_i$  le pave périodiquement et 0 ou 1 sinon. Soit  $\tau_j$  un jeu de tuiles qui ne pave pas le plan et  $\tau_k$  un jeu de tuiles qui le pave périodiquement.

À partir de  $f$  nous construisons la fonction récursive  $g$  qui suit :

$$g(i) = \begin{cases} k, & \text{si } f(i) = 0, \\ j, & \text{si } f(i) = 1. \end{cases}$$

Comme  $g$  est récursive, et d'après le théorème du point fixe à la Kleene, il existe un jeu de tuiles  $\tau_e$  qui simule exactement  $\tau_{g(e)}$ .

Si  $\tau_e$  est fini, alors  $\tau_{g(e)} = \tau_k$  pave le plan périodiquement et comme  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{g(e)}$  alors  $\tau_e$  pave le plan.

Si  $\tau_e$  est périodique, alors  $\tau_{g(e)} = \tau_k$  ne pave pas le plan et comme  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{g(e)}$  alors  $\tau_e$  ne pave pas le plan.

Finalement, si  $\tau_e$  pave le plan seulement de manière apériodique, alors  $\tau_{g(e)} = \tau_k$  ne pave pas le plan ou le pave de manière périodique, et comme  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{g(e)}$  alors  $\tau_e$  ne pave pas le plan ou le pave de manière périodique.

Donc l'ensemble des jeux de tuiles qui pavent le plan périodiquement est récursivement inséparable de l'ensemble des jeux de tuiles qui ne pavent pas le plan.

□

# Chapitre 6

## Apériodicité

Dans le domaine des pavages, l'apériodicité représente un défi puisque ces jeux de tuiles ne pave le plan que d'une manière irrégulière. Mais grâce à la recherche active dans cette direction, nous sommes en mesure aujourd'hui d'exhiber de nombreux jeux de tuiles apériodiques sans pour autant avoir de schémas généralisant ce type de construction.

L'apériodicité, dans les pavages au sens large, a d'abord été étudié par Penrose [Pen74] ou encore Radin [Rad94, Rad95c, Rad99], montrant les difficultés à prouver la stricte apériodicité, c'est-à-dire à montrer que le jeu de tuiles en question ne génère pas de pavages périodiques. Le premier apériodique construit à l'aide de tuiles de Wang est dû à Berger, [Ber66], et contenait un peu plus de 20'000 tuiles. Cette construction à par la suite été améliorée grâce aux travaux de Robinson [Rob71]. Une version simplifiée peut être trouvée dans [AD96]. D'autres approches de l'apériodicité ont été faites directement ou indirectement. Nous notons en particulier les pavages non-récursifs de Hanf et Myers, [Han74, Mye74], dont la non-récursivité implique l'apériodicité, les pavages de Kari et Čulik pour obtenir le plus petit jeu de tuiles apériodique [Kar96, CK97] ou encore l'utilisation des substitutions à la Mozes, [Moz89], que Ollinger utilise pour construire des pavages auto-similaires [Oll08].

Une autre approche nous intéressant tout particulièrement, est celle de Durand *et al.*, [DRS08], qui ont construit un jeu de tuiles apériodique en utilisant le théorème traditionnel du point fixe. L'idée est de généraliser ce type de constructions auto-similaires afin d'obtenir tout un panel de jeux de tuiles auto-similaires en utilisant le théorème du point fixe *à la* Kleene. Cette construction nous permet d'obtenir de manière très simple des structures non-périodiques et les exemples que nous montrerons dans la dernière partie montre l'originalité que peuvent avoir ces constructions.

Ce type de schéma est nouveau et est aujourd'hui possible grâce au théorème du point fixe *à la* Kleene. La diversité des constructions possibles est considérable et de nombreuses améliorations de la technique sont à envisager pour permettre d'obtenir par la suite des structures toujours plus complexes. Nous montrons ainsi qu'il est possible de construire des jeux de tuiles apériodiques à partir de nombreuses structures auto-similaires.

Nous rappelons d'abord la construction de Kari et Čulik. Nous introduisons ensuite la construction de Durand, Romashchenko et Shen qui utilise le théorème traditionnel du point fixe de Kleene pour construire, via une simulation exacte légèrement modifiée pour le cas présenté, un jeu de tuiles qui se simule et qui est donc apériodique. Les parties qui suivront essaieront de généraliser ce genre d'idées pour permettre de définir un principe de construction de jeux de tuiles apériodiques.

## 6.1 Le jeu apériodique de 13 tuiles de Čulik et Kari

La recherche du plus petit jeu de tuiles apériodique a permis la construction d'un jeu de tuiles qui, en plus d'être apériodique, a introduit de nouvelles constructions de jeux de tuiles apériodiques. Ces techniques originales montrent comment transformer des machines séquentielles en jeux de tuiles. La compétition est pour l'instant arrêtée à 13 tuiles, et le record est détenu par Kari et Čulik [CK97]. Nous expliquons maintenant cette construction.

Pour cette construction, il est nécessaire d'introduire différentes notions. Pour un réel  $\alpha$ ,  $[\alpha]$  désigne sa partie entière. Les suites bi-infinies  $A(\alpha)$  et  $B(\alpha)$  sont définies de la manière suivante :

$$A(\alpha)_i = [i \times \alpha], \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$B(\alpha)_i = A(\alpha)_i - A(\alpha)_{i-1}, \forall i \in \mathbb{Z}$$

La suite  $B(\alpha)$  est appelée la représentation équilibrée de  $\alpha$ . Si  $k \leq \alpha \leq k + 1$ , alors  $B(\alpha)$  est une suite de  $k$  et de  $k + 1$  et les moyennes des sous-suites de  $B(\alpha)$  tendent vers la valeur de  $\alpha$  quand la suite tend vers l'infini. Nous avons par exemple :

$$B\left(\frac{7}{2}\right) = \dots 343434 \dots$$

$$B(\sqrt{2}) = \dots 21121211 \dots$$

Les machines séquentielles sont des modèles permettant de définir des relations entre des chaînes bi-infinies. Formellement, une machine séquentielle  $M$  est définie par un quadruplet  $\langle Q, \Sigma, \Delta, \lambda \rangle$ , où  $Q$  est l'ensemble des états,  $\Sigma$  est l'alphabet d'entrée,  $\Delta$  est l'alphabet de sortie, et  $\lambda \subset Q \times \Sigma \times \Delta \times Q$  est l'ensemble des transitions.

La représentation de  $M$  graphiquement s'effectue sous la forme d'un automate dont les sommets sont les états de  $Q$  et dont une arête étiquetée par  $(a, b)$  reliant le sommet  $q$  au sommet  $q'$  existe pour tout quadruplet  $\{q, a, b, q'\} \in \lambda$ .

Une machine séquentielle peut ainsi être vue comme un mode de calcul d'une relation, noté  $\mathcal{R}(M)$ , entre des suites bi-infinies  $x$  et  $y$ , où  $x$  serait une suite bi-infinie sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire décrite par une fonction  $\mathbb{Z} \rightarrow \Sigma$ , et  $y$  serait une suite bi-infinie sur  $\Delta$ , c'est-à-dire décrite par une fonction  $\mathbb{Z} \rightarrow \Delta$ . Nous notons  $x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $x$ . Les valeurs  $x$  et  $y$  sont en relation par  $\mathcal{R}(M)$  s'il existe une suite bi-infinie  $s$  d'états de  $M$  telle que, pour tout entier relatif  $i \in \mathbb{Z}$ , il existe une transition allant de l'état  $s_i$  à l'état  $s_{i+1}$  étiquetée par  $(x_i, y_i)$ .

Nous construisons maintenant une machine séquentielle qui met en relation des suites bi-infinies si ces deux suites sont les représentations équilibrées de deux réels dont l'un est le multiple de l'autre par un certain nombre rationnel. Soit  $q = \frac{n}{m}$  un rationnel. Nous définissons la machine séquentielle  $M_q$  qui met en relation un nombre réel  $\alpha$  en représentation équilibrée  $B(\alpha)$  avec la représentation équilibrée du nombre réel  $q\alpha$ .

Comme  $B(\alpha)$  est défini à partir de  $A(\alpha)$ , il faut considérer comment se comporte la suite bi-infinie  $A(\alpha)$  par rapport à la suite bi-infinie  $A(q\alpha)$ . Il est clair qu'en multipliant  $A(\alpha)_i$  par  $q$ , nous n'obtenons pas forcément  $A(q\alpha)_i$ . Les états de notre machine séquentielle  $M_q$  seront donc les différences possibles entre  $qA(\alpha)_i$  et  $A(q\alpha)_i$ , c'est-à-dire entre  $q[r]$  et  $[qr]$  pour tout réel  $r \in \mathbb{R}$ . Nous avons que :

$$-q \leq q[r] - [qr] \leq 1$$

et donc, comme la différence est un multiple de  $q$ , alors l'ensemble des états de  $M_q$  sera composé de  $n + m - 1$  éléments :

$$Q = \left\{ \frac{-n+1}{m}, \frac{-n+2}{m}, \dots, \frac{-1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m} \right\}.$$

Si deux réels  $\alpha$  et  $q\alpha$  sont mis en relation par  $\mathcal{R}(M_q)$ , alors il existe une suite bi-infinie  $s$  telle que  $s_i$  soit l'état donnant la différence entre  $qA(\alpha)_i$  et  $A(q\alpha)_i$ . À partir de cela, nous voulons mettre en relation les suites bi-infinies  $B(\alpha)$  et  $B(q\alpha)$ .

Comment passer de l'état  $s_{i-1}$  à l'état  $s_i$ ? Que faut-il rajouter à  $s_{i-1}$  pour obtenir  $s_i$  et donc garder la cohérence de la machine séquentielle? Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} s_{i-1} + C &= s_i \\ qA(\alpha)_{i-1} - A(q\alpha)_{i-1} + C &= qA(\alpha)_i - A(q\alpha)_i \\ C &= qA(\alpha)_i - A(q\alpha)_i - qA(\alpha)_{i-1} + A(q\alpha)_{i-1} \\ C &= (qA(\alpha)_i - qA(\alpha)_{i-1}) - (A(q\alpha)_{i-1} - A(q\alpha)_i) \\ C &= qB(\alpha)_i - B(q\alpha)_i \end{aligned}$$

Les transitions sont donc construites à l'aide de l'état de départ, du symbole lu sur la suite bi-infinie en entrée, de celui lu sur la suite bi-infinie en sortie, et l'état d'arrivée. Ce qui revient donc à créer pour tout état  $p \in Q$ , et toute paire  $(a, b) \in \Sigma \times \Delta$ , une transition vers l'état  $p + qa + b$  (où  $a = B(\alpha)_i$  et  $b = B(q\alpha)_i$ ).

Si cet état n'existe pas, la transition n'existe pas non plus. La machine séquentielle  $M_q$  passe ainsi des symboles  $B(\alpha)_i$  aux symboles  $b = B(q\alpha)_i$  et donc, les deux réels  $\alpha$  et  $q\alpha$  en représentation équilibrée sont en relation par  $\mathcal{R}(M_q)$ .

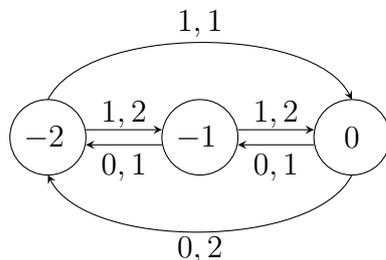


Fig. 6.1 – La machine séquentielle  $M_3$

Nous explicitons maintenant les deux machines séquentielles qui vont nous être utiles pour la construction du pavage apériodique. La première, montrée dans la figure 6.1, est la machine séquentielle mettant en relation des réels en représentation équilibrée multipliés par 3. Comme l'alphabet d'entrée est  $\{0, 1\}$ , alors  $\alpha \in [0, 1]$  et comme l'alphabet de sortie est  $\{1, 2\}$ , alors  $3\alpha \in [1, 2]$ , ce qui restreint donc  $\alpha$  à être dans l'intervalle  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ .

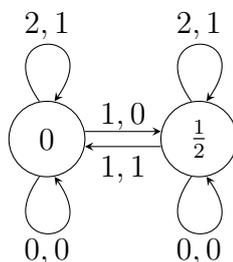


Fig. 6.2 – La machine séquentielle  $M_{\frac{1}{2}}$

La deuxième machine séquentielle,  $M_{\frac{1}{2}}$ , figure 6.2, a comme alphabet d'entrée  $\{0, 1, 2\}$  et comme alphabet de sortie  $\{0, 1\}$ . Donc  $B(\alpha)$  et  $B(\frac{1}{2}\alpha)$  sont en relation par  $\mathcal{R}(M_{\frac{1}{2}})$  pour tout  $\alpha \in [0, 2]$ .

Nous allons utiliser ces deux machines et les itérer successivement de manière à ce que  $M_{\frac{1}{2}}$  ne soit jamais utilisé plus de deux fois consécutivement. Nous modifions donc la machine  $M_{\frac{1}{2}}$  en utilisant un nouveau symbole,  $0'$ , qui sera un symbole d'entrée et de sortie. L'état 0 est changé en  $0'$  pour que les états de  $M_{\frac{1}{2}}$  et de  $M_3$  soient disjoints. Nous obtenons la version modifiée de  $M_{\frac{1}{2}}$  que nous appelons  $M'_{\frac{1}{2}}$  (figure 6.3).

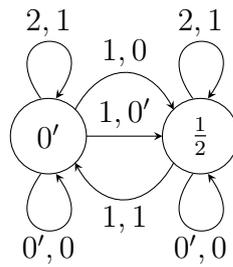


Fig. 6.3 – La machine séquentielle  $M'_{\frac{1}{2}}$

Nous appelons  $M$  la machine séquentielle qui est la réunion de  $M'_{\frac{1}{2}}$  et de  $M'_3$ . Nous remarquons que, quelle que soit la chaîne bi-infinie  $\alpha$  sur  $\{0', 1, 2\}$ , après au plus deux itérations, la relation  $\mathcal{R}(M'_{\frac{1}{2}})$  a transformé  $\alpha$  en une suite bi-infinie sur  $\{0, 1\}$  qui ne peut plus être mise en relation par  $\mathcal{R}(M'_{\frac{1}{2}})$ . Cette suite bi-infinie devra donc être mise en relation par  $\mathcal{R}(M_3)$  et nous avons donc bien garanti que  $M'_{\frac{1}{2}}$  n'est pas utilisé plus de deux fois consécutivement.

Nous arrivons maintenant aux jeux de tuiles. Il est possible de construire une bijection entre les jeux de tuiles et les machines séquentielles. Il est ainsi possible de transformer une machine séquentielle  $N$  avec fonction de transition  $\delta$  en un jeu de tuiles  $\tau_N$  tel qu'il y ait autant de tuiles dans  $\tau_N$  que de transitions dans  $\delta$ . La règle de transformation est décrite dans la figure 6.4.

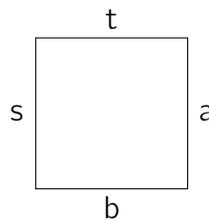


Fig. 6.4 – Une tuile représentant une transition  $s \rightarrow t$  étiquetée par  $(a, b)$

Nous avons ainsi une équivalence entre  $\tau_N$  et  $N$  dans le sens que deux suites bi-infinies  $x$  et  $y$  sont en relation par  $\mathcal{R}(N)$  si et seulement s'il existe une ligne pavée par  $\tau_N$  telle que les arêtes nord de cette ligne représentent  $x$  et les arêtes sud représentent  $y$ . Les  $\tau_N$ -pavages du plan sont donc en bijection avec les itérations bi-infinies de  $N$ .

Nous obtenons ainsi deux jeux de tuiles  $T_3$  et  $T_{\frac{1}{2}}$  représentant respectivement  $M_3$  et  $M_{\frac{1}{2}}$ . Nous appelons  $T$  l'union de  $T_3$  et  $T_{\frac{1}{2}}$ . Le jeu de tuiles  $T$  est décrit dans la figure 6.5.

Le théorème qui suit montre l'apériodicité du jeu de tuiles  $T$  :

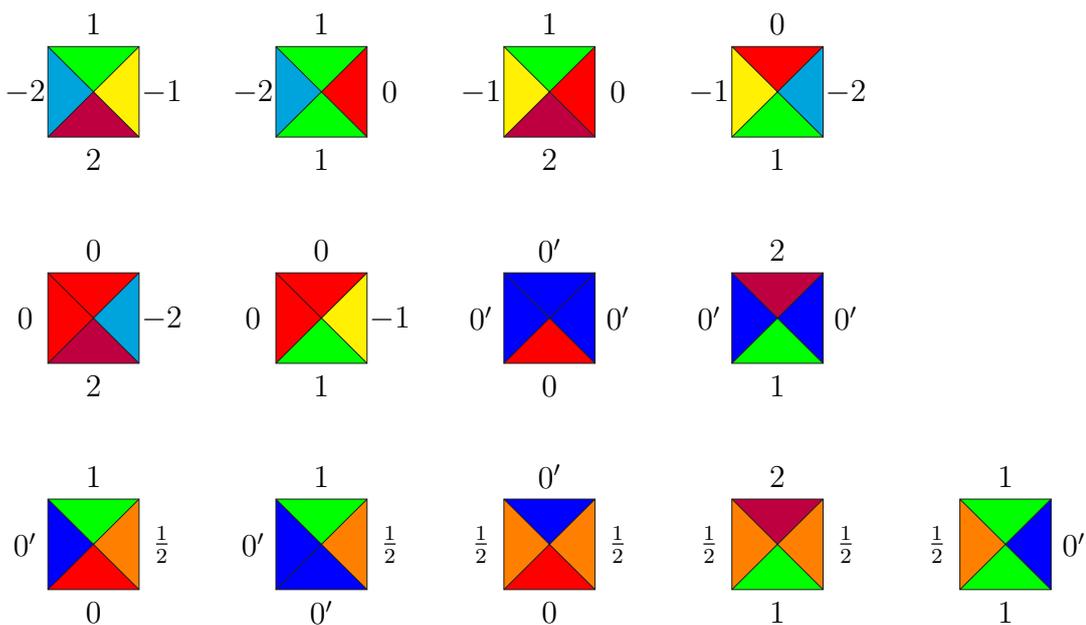


Fig. 6.5 – Les 13 tuiles de  $T$

|| **Théorème 41 (Kari-Čulik)** *Le jeu de tuiles  $T$  est apériodique.*

◇ *Preuve.* La première chose à vérifier est que nous pouvons bien paver le plan avec le jeu de tuiles  $T$ . Nous prenons en entrée  $B(\alpha)$  avec  $\alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$ . La machine  $M$  calcule ensuite  $B(3\alpha)$  si  $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  et  $B(\frac{\alpha}{2})$  si  $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2]$ . Nous pouvons itérer le procédé autant de fois que nous voulons. Ainsi, nous générons des  $T$ -motifs carrés arbitrairement grands, et par le procédé d'extraction diagonale, cela garantit que  $T$  pave le plan.

La deuxième partie consiste à montrer que  $T$  ne génère pas de motifs périodiques. Supposons qu'il existe un motif périodique de période  $c \times d$ . Par étude des tuiles de  $T$ , nous remarquons qu'il ne peut pas exister de périodes de hauteurs 1 ou 2. Nous pouvons donc supposer que  $d \geq 3$ . Comme  $M_{\frac{1}{2}}$  ne peut pas être itéré plus de deux fois consécutivement, alors il existe au moins une ligne de la période qui est une relation de  $\mathcal{R}(M_3)$ . Nous supposons que la première ligne de la période est dans ce cas-là.

Nous appelons  $l_i$  une ligne du motif périodique. Puisque nous avons une période, les étiquettes est et ouest de  $l_i$  sont les mêmes. Nous avons vu qu'une transition  $s \rightarrow t$  étiquetée par  $(a, b)$  pouvait être représentée par l'égalité :  $aq + s - b = t$ , où de manière égale :  $aq + s = b + t$ . Cela implique donc les  $c$  égalités suivantes, où  $\{a_j, s_j, b_j, s_{j-1}\}$  est la  $j^{\text{ème}}$  tuile de la ligne  $l_i$  :

$$\begin{aligned} qa_1 + s_0 &= b_1 + s_1 \\ qa_2 + s_1 &= b_2 + s_2 \\ &\dots \\ qa_c + s_{c-1} &= b_c + s_0 \end{aligned}$$

Suivant la ligne,  $q$  vaut  $\frac{1}{2}$  ou 3. Nous remarquons que, si nous sommes les termes de gauche ensemble et les termes de droite ensemble, alors les  $s_i$  s'annulent presque tous et nous obtenons l'égalité suivante :

$$q(a_1 + a_2 + \dots + a_c) = b_1 + b_2 \dots + b_c$$

En appelant  $n_i$  la somme des étiquettes nord des tuiles de la ligne  $l_i$ , nous obtenons la forme réduite suivante :

$$qn_i = n_{i-1}$$

Nous venons d'utiliser la périodicité horizontale. Nous utilisons maintenant la périodicité verticale. Comme le motif est périodique, cela implique que  $l_d$  est composé des mêmes tuiles que  $l_0$ , et donc  $n_d = n_0$ . Nous obtenons ainsi les  $d$  égalités suivantes :

$$\begin{aligned} q_d n_d &= n_{d-1} \\ q_{d-1} n_{d-1} &= n_{d-2} \\ &\dots \\ q_1 n_1 &= n_d \end{aligned}$$

Dans ces égalités,  $q_i$  vaut  $\frac{1}{2}$  ou 3 dépendant de la relation qui est faite sur la ligne  $l_i$ . En partant du bas, et en exprimant  $n_d$  en remplaçant chaque fois  $n_i$  par l'expression donnée au-dessus, nous obtenons l'égalité suivante :

$$n_d = q_1 q_2 \dots q_d n_d$$

Comme la première ligne est pavée avec  $T_3$  et qu'il n'y a pas de 0 sur les côtés sud des tuiles de  $T_3$ , cela implique que  $n_d$  (qui est égal par périodicité à la somme des étiquettes des côtés sud de la première ligne) est différent de 0, et donc, pour que l'égalité soit respectée, il faut que  $q_1 q_2 \dots q_d = 1$ . Or, ceci est impossible car 3 et  $\frac{1}{2}$  sont premiers entre eux et donc il est impossible d'obtenir 1 en multipliant des puissances de 3 avec des puissances de  $\frac{1}{2}$ .

□

La limite est à ce jour de 13 tuiles. Il est pourtant fortement supposé que l'une des treize tuiles de ce jeu minimal ne soit pas nécessaire pour paver le plan et que, donc, il existerait un jeu apériodique de 12 tuiles. Aucune limite basse n'a été fixée sur le plus petit jeu de tuiles apériodique et il est fortement probable que des jeux de tuiles composés de moins de 13 tuiles existent.

## 6.2 Construction de Durand et al.

Nous expliquons dans cette partie la construction faite par Durand, Romashchenko et Shen pour obtenir un jeu de tuiles apériodique en utilisant le théorème du point fixe de Kleene [DRS08]. Cette construction génère un jeu de tuiles qui se simule lui-même et est donc apériodique. La notion de simulation utilisée pour cette construction est légèrement différente de la notion de simulation exacte.

Nous dirons qu'un jeu de tuiles  $\tau$  *simule* un jeu de tuiles  $\rho$  s'il existe un entier  $n$  et une réduction  $R$  allant des  $\tau$ -motifs de taille  $n \times n$  vers les tuiles de  $\rho$  (ici,  $R$  est un isomorphisme entre les tuiles de  $\rho$  et un ensemble fini de  $\tau$ -motifs de taille  $n \times n$ ) tels que :

- i)  $\tau$  pave le plan ;
- ii) pour tout  $\tau$ -pavage  $P$ , il existe un unique découpage de  $P$  en motifs de côté  $n$  qui représente des tuiles de  $\rho$  via  $R$ .

Ainsi, dans cette notion de simulation, le jeu de tuiles composé d'une unique tuile ne se simule pas lui-même, puisque pour chaque  $R$ , différents découpages du plan peuvent être faits. Dans cette section, le mot *simulation* fera toujours référence à la définition ci-dessus.

Si un jeu de tuiles  $\tau$  s'auto-simule, alors il est forcément apériodique. Ce qui nous est donné dans le résultat suivant :

**Théorème 42 (Durand et al.)** *Un jeu de tuiles qui s'auto-simule ne génère que des pavages apériodiques du plan.*

- ◇ *Preuve.* Soient  $\tau$  un jeu de tuiles qui s'auto-simule et  $P$  un  $\tau$ -pavage. Par définition, il existe un  $n$  et un isomorphisme entre un sous-ensemble de  $\tau$ -motifs de côté  $n$  et les tuiles de  $\tau$ . De plus,  $P$  ne peut être divisé que d'une unique manière en carrés de côté  $n$ . Soit  $t$  une période de  $P$ . Alors  $t$  est un multiple de  $n$  puisque le translaté d'un découpage de  $P$  par  $t$  doit être le même découpage, sinon il y aurait un autre découpage possible de  $P$ .  $P$  est isomorphe à un autre pavage qui lui est de période  $n/t$ . En itérant le procédé, nous montrons que la période est divisible par  $n^k$  pour tout  $k$  et donc le pavage ne peut pas être périodique.  $\square$

Pour chaque jeu de tuiles  $\tau$ , nous construisons une relation  $\mathcal{R}$  qui prend un élément  $x \in C^4$ , où  $C$  est l'ensemble des couleurs de  $\tau$ , et  $x$  est une tuile de  $\tau$ . Cette relation peut être calculée par une machine de Turing qui dira si la tuile simulée est correcte. Cette construction est à mettre en parallèle avec celles vues dans la section 4.3. Nous l'explicitons pour montrer une autre manière de simuler les tuiles d'un jeu de tuiles.

Nous utilisons une division du plan, en carrés de côté  $n$ , de manière à ce que chaque tuile de chacun de ces carrés connaisse sa position par rapport à ce carré. Ainsi, chaque carré est composé de  $n \times n$  tuiles numérotées selon leurs coordonnées : une tuile aura pour étiquette  $(1, 1)$ , une autre  $(1, 2)$ ... jusqu'à une dernière tuile

étiquetée  $(n, n)$ . Chaque tuile connaît sa position dans le carré et peut donc être assignée à une tâche particulière.

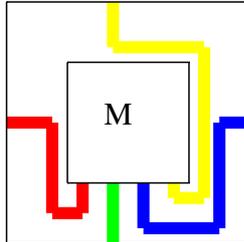


Fig. 6.6 – Simulation d'une tuile de  $\tau$

Pour un jeu de tuiles  $\tau$ , nous construisons la machine  $M$  qui calcule la relation des tuiles de  $\tau$ . Sur les côtés des carrés  $n \times n$ , certaines tuiles sont assignées pour porter le code des couleurs de la tuile simulée. Un chemin de tuiles mène ces codes jusqu'au centre du motif où  $M$  va calculer si les codes correspondent bien à ceux d'une tuile de  $\tau$  (figure 6.6). Si ce ne sont pas les codes des couleurs d'une tuile,  $M$  s'arrête et le pavage est incomplet. Nous avons ainsi construit un jeu de tuiles  $\rho$  qui simule  $\tau$ .

Nous plaçons maintenant au centre une machine universelle  $M_u$  qui prend en entrée les quatre couleurs et, en plus, le code  $i$  d'un jeu de tuiles et vérifie que ces quatre couleurs sont bien celles d'une tuile de  $\tau_i$ . Cette machine ne pourra pas simuler tous les jeux de tuiles, car elle est limitée de deux côtés : par la taille des chemins menant les couleurs à  $M_u$  (ce qui borne le nombre de couleurs du jeu de tuiles simulées) et par le temps alloué au calcul de  $M_u$  (qui est fixé au début). Néanmoins, nous pouvons garantir que les chemins de communication sont assez larges pour transférer un nombre de couleurs  $n$  équivalent au nombre de couleurs du propre jeu de tuiles et que  $M_u$  a assez d'espace pour calculer les tuiles de tout jeu de tuiles ayant un ensemble de couleurs composé d'au plus  $n$  couleurs et possédant, au plus, le nombre de tuiles de ce jeu de tuiles.

Le code  $i$  peut être inscrit en permanence sur la première ligne de calcul de  $M_u$  permettant ainsi la simulation du jeu de tuiles  $\tau_i$  si ce dernier possède moins de  $n$  couleurs et si son nombre de tuiles est inférieur au nombre de tuiles du jeu le simulant. Soit  $\tau_k^i$  le jeu de tuiles simulant  $\tau_i$  de cette manière-là. Nous avons vu qu'un jeu de tuiles peut avoir accès à son propre code. C'est là une application du théorème du point fixe à la Kleene. Il existe donc un jeu de tuiles  $\tau_k^k$  qui s'auto-simule.

Ce jeu de tuiles est donc auto-similaire par le théorème 42.

## 6.3 Construction de jeux de tuiles apériodiques

### 6.3.1 Simulation exacte via un découpage du plan

La construction de la partie précédente a pour point fort de ne pas utiliser le pavage de Robinson, mais pour point faible de devoir connaître à l'avance les temps d'arrêt de la machine simulée. Si cette construction permet d'obtenir une jolie preuve de jeux de tuiles auto-similaires, qui d'ailleurs a le mérite de ne s'appuyer sur aucune autre construction et aurait donc très bien pu être le premier exemple de jeux de tuiles apériodiques, elle ne nous permet pas assez de souplesse pour obtenir des résultats sur les réductions de propriétés de jeux de tuiles, de théorème à *la* Rice ou de diagonalisation.

Le théorème du point fixe à *la* Kleene nous permet de généraliser cette construction pour obtenir tout un panel de jeux apériodiques, possédant chacun ses propriétés propres.

L'idée est de construire une transformation de tuiles en formes géométriques et d'appliquer le théorème du point fixe sur cette transformation pour trouver un jeu de tuiles qui se simule lui-même en respectant ces formes géométriques. Nous obtenons ainsi des jeux de tuiles possédant une structure interne auto-similaire forçant le jeu de tuiles à ne générer que des pavages apériodiques.

La notion de simulation doit être plus générale que la notion de simulation exacte qui se restreint à la représentation des tuiles par des rectangles de même taille. Pour la généraliser, il suffit d'autoriser que la simulation puisse passer par n'importe quel ensemble fini de motifs réguliers qui pave le plan régulièrement et tel que chaque motif ait exactement quatre voisins.

Nous obtenons ainsi une nouvelle simulation qui n'a d'intérêt ici que la construction de jeux de tuiles apériodiques. Nous définissons un ensemble régulier de motifs :

**Définition 30** Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de motifs, c'est-à-dire un ensemble fini de motifs de  $\mathbb{Z}^2$ , qui génère un pavage périodique  $P$  du plan.  $\mathcal{A}$  induit une transformation par  $P$  de  $\mathbb{Z}^2$  s'il existe une fonction bijective  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow P$  telle que deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Z}^2$  soient voisins si, et seulement si,  $f(x)$  et  $f(y)$  sont deux motifs ayant un côté en commun. Une telle transformation est appelée une *transformation régulière* du plan.

Une transformation régulière du plan est, en d'autres termes, une transformation de  $\mathbb{Z}^2$  qui conserve le voisinage. Dans la figure 6.7, nous montrons un ensemble de deux motifs qui peut paver le plan d'une manière périodique, induisant une transformation du plan. La figure 6.8 montre une transformation du plan avec un unique motif.

Nous voulons maintenant que les motifs induisant une transformation régulière du plan soient les motifs qui vont représenter les tuiles d'un jeu de tuiles. Dans la réduction forte, les tuiles sont représentées uniquement par des rectangles de même taille. C'est une transformation du plan basique. Nous considérons la version

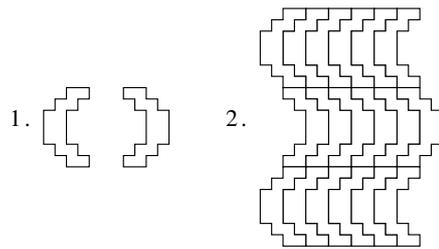


Fig. 6.7 – 1. Un premier ensemble de motifs et 2. un pavage régulier qui induit une transformation régulière du plan

généralisée de la réduction forte en permettant la simulation d'un pavage par tout ensemble de motifs qui induit une transformation régulière du plan. Nous donnons une idée intuitive plus que formelle, contrairement à ce qui avait été fait pour définir la réduction forte puisque la complexification due à la structure géométrique de cette réduction impliquerait l'introduction de nombreuses définitions :

**Définition 31** Soient  $\tau$  et  $\tau'$  deux jeux de tuiles et soient  $Q$  un  $\tau$ -pavage et  $Q'$  un  $\tau'$ -pavage. Soient  $\mathcal{A}$  un ensemble de motifs et  $P$  un pavage généré par  $\mathcal{A}$  induisant une transformation régulière du plan.

$Q$  simule  $Q'$  via  $P$  s'il existe une application  $R$  allant de tuiles de  $\tau'$  vers les motifs de  $\tau$  ayant pour domaine un des motifs de  $\mathcal{A}$  (cet ensemble est noté  $\tau|_{\mathcal{A}}$ ), tel que, si  $Q'$  est découpé selon  $P$  et si nous remplaçons les motifs ainsi obtenus par leur équivalent donné par  $R$ , alors nous obtenons  $f_{Q'}$ .

$R$  est dite *exacte* si deux motifs différents de  $\tau|_{\mathcal{A}}$  ayant même domaine sont envoyés sur deux tuiles différentes. Cette réduction est notée  $Q' \triangleleft^P Q$ . Si nous voulons préciser  $R$ , nous noterons  $Q' \triangleleft^{P,R} Q$

Dans la simulation exacte, plusieurs motifs peuvent représenter une même tuile. Mais si deux motifs représentent la même tuile, alors ces motifs ont des domaines différents. La figure 6.9 montre la réduction entre le pavage de la figure 6.9.1 et celui de la figure 6.9.4, en passant par un découpage du pavage (figure 6.9.2) via le pavage  $P$  (figure 6.8.2) et en utilisant une réduction exacte (figure 6.9.3).

La dernière définition introduit la simulation totale et exacte via  $P$  entre jeux de tuiles :

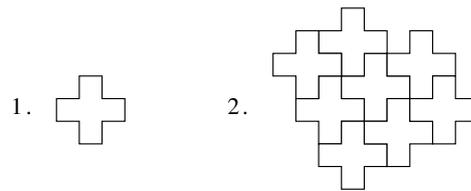


Fig. 6.8 – 1. Un second ensemble de motifs et 2. un pavage régulier qui induit une transformation régulière du plan

**Définition 32** Soient  $\tau$  et  $\tau'$  deux jeux de tuiles. Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de motifs et  $P$  un pavage généré par  $\mathcal{A}$  qui induit une transformation du plan.  $\tau$  *simule totalement*  $\tau'$  ou  $\tau'$  *se réduit totalement* à  $\tau$  via  $P$ , noté  $\tau' \triangleleft_{\mathcal{A}}^P \tau$ , s'il existe une réduction :

$$R : \tau|_{\mathcal{A}} \rightarrow \tau'$$

telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- i) Pour tout  $\tau'$ -pavage  $Q'$  il existe un  $\tau$ -pavage  $Q$  tel que  $Q' \triangleleft_{\mathcal{A}}^{P,R} Q$  ;
- ii) pour tout  $\tau$ -pavage  $Q$  il existe un  $\tau'$ -pavage  $Q'$  tel que  $Q' \triangleleft_{\mathcal{A}}^{P,R} Q$ .

Si  $R$  est exacte, alors nous dirons que  $\tau$  *simule exactement*  $\tau'$  ou que  $\tau'$  *se réduit exactement* à  $\tau$  via  $P$ , que nous notons  $\tau' \triangleleft_e^P \tau$

À partir de cette définition, nous allons construire des jeux de tuiles apériodiques qui se simulent exactement via un découpage du plan  $P$  en prenant le point fixe d'une transformation. La première chose à vérifier est d'être sûr que le point fixe sera bel et bien un jeu de tuiles apériodique car nous remarquons que le jeu de tuiles trivial, composé d'une unique tuile unicolor, pave le plan d'une unique manière et peut se simuler lui-même de toutes les manières possibles. Il faut donc caractériser les jeux de tuiles qui se simulent trivialement, pour s'assurer ensuite qu'ils ne seront pas les points fixes que nous recherchons.

Cette caractérisation passe par une première définition :

**Définition 33** Un jeu de tuiles  $\tau$  *génère une période déterministe* s'il existe un sous-ensemble  $A \subseteq \tau$  tel qu'un motif périodique puisse être généré par  $A$  en utilisant une et une seule fois chaque tuile de  $A$ .

Nous caractérisons maintenant les jeux de tuiles qui se simulent eux-mêmes via un découpage du plan  $P$  généré par un seul motif :

**Lemme 6.1** Soient  $\mathcal{A} = \{m\}$  un ensemble composé d'un unique motif et  $P$  un pavage généré par  $\mathcal{A}$  induisant une transformation régulière du plan. Si  $\tau$  est un jeu de tuiles se simulant exactement via  $P$ , alors :

- i) soit  $\tau$  génère une période déterministe ;
- ii) soit  $\tau$  est apériodique.

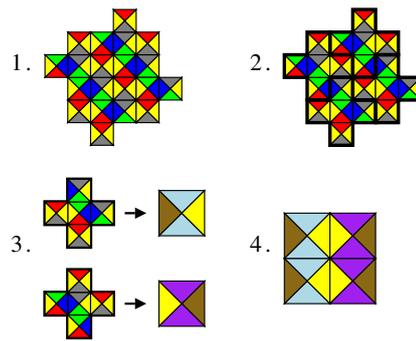


Fig. 6.9 – 1. Un pavage. 2. Le pavage découpé selon le pavage  $P$  de la figure 6.8.2. 3. Une réduction allant des motifs de  $P$  vers des tuiles. 4. Un pavage simulé par le premier pavage via  $P$

- ◇ *Preuve.* Ce lemme peut être énoncé de la manière suivante : si  $\tau$  se simule exactement via  $P$  alors, si  $\tau$  génère une période, cela implique que  $\tau$  génère aussi une période déterministe.

Supposons que  $\tau$  se simule exactement et que  $\tau$  génère des pavages périodiques du plan. Comme  $P$  est périodique, alors un pavage périodique ne peut simuler exactement qu'un autre pavage périodique via  $P$ . Considérons  $Q$  le  $\tau$ -pavage ayant la plus petite période  $q$ . Soient  $a$  et  $b$  les longueurs des côtés de  $q$ . Quel que soit le contour de la forme  $m$ , nous remarquons que, un motif  $M$  qui est composé de  $a$  ligne de motifs  $m$  et de  $b$  colonnes de motifs  $m$  est une période pour  $Q$ . Ce qui revient à dire que si nous remplaçons, par une fonction de réduction  $R$ , les sous-motifs de  $M$  par des tuiles de  $\tau$ , alors nous obtenons un  $\tau$ -pavage  $Q'$  périodique dont la période est au plus  $a \times b$ . Puisque  $p$  est par supposition la plus petite période, et que  $\tau$  se simule exactement, alors  $Q'$  est un  $\tau$ -pavage de période minimale.

Nous en déduisons qu'un  $\tau$ -pavage de taille minimale ne peut simuler exactement qu'un autre  $\tau$ -pavage de taille minimale. Comme ceux-ci sont en nombre fini, alors il en existe au moins un qui se simule lui-même. En effet, à un moment donné, un pavage devra simuler un pavage qui le simule. Par transitivité de la simulation, ce pavage se simule lui-même.

Nous appelons  $T$  le pavage de période minimale qui se simule lui-même et soit  $n$  le motif périodique qui le génère. Nous allons montrer par l'absurde que  $T$  est généré par une période déterministe. Supposons que  $T$  ne le soit pas. Il existe donc au moins une tuile  $t$  qui est répétée deux fois dans  $n$ . Soit  $M$  le motif composé de  $a$  lignes du motif  $m$  et de  $b$  colonnes du motif  $m$ . Chacun des sous-motif  $m$  de  $M$  représente une tuile de  $T$  puisque  $T$  se simule exactement via  $P$ . Et aucun des motifs  $m$  de  $M$  n'a la même position relativement à la période  $n$  sinon il y aurait un sous-motif périodique dans  $M$  et donc  $T$  simulerait un pavage périodique avec une période inférieure à la période minimale.

Comme  $n$  possède au moins une tuile qui y est représentée deux fois, cela signifie que, dans le motif  $M$ , il existe deux motifs égaux. Ces deux motifs n'ont pas la même position dans la période  $n$ , et donc il existe dans la période  $n$  un vecteur  $u$  et deux motifs de taille  $m$  qui sont les translatés l'un par rapport à l'autre par  $u$ . Ces deux motifs sont aussi représentés à une plus grande échelle puisque  $T$  se simule exactement. Nous répétons plusieurs fois la simulation, jusqu'à trouver deux motifs  $M_1$  et  $M_2$  de taille supérieure à la période  $n$ , et représentant chacun la tuile  $t$ . Ces deux motifs n'ont pas la même position relative par rapport à la période  $n$  pour la même raison que précédemment. Il existe donc un vecteur  $u = (u_1, u_2)$  (qui est le même que le vecteur  $u$  précédent) qui translate  $M_1$  vers  $M_2$ . Ces motifs apparaissent périodiquement dans tout le pavage et ils sont assez grands pour contenir la période  $n$ . Comme  $u$  est strictement inférieure à la période  $(a, b)$ , alors il existe un motif de côtés  $u_1 \times u_2$  qui est une période pour  $T$  et qui est inférieure à la période minimale, ce qui est une contradiction. Donc  $n$  est une période déterministe.

Pour conclure la preuve, nous remarquons qu'une période déterministe se simule toujours exactement. Nous donnons l'idée intuitive dans le cas où la simulation se fait par des rectangles, comme dans la simulation forte : si la période est de côté  $a \times b$ , alors il est possible de prendre un motif de taille  $(a(a+1)) \times (b(b+1))$  et le découper en motif de taille  $(a+1) \times (b+1)$ . Cela donne  $a.b$  motifs différents qui peuvent chacun représenter une tuile de la période.

□

### 6.3.2 Constructions de jeux de tuiles apériodiques

À l'aide de la caractérisation du lemme 6.1, et en s'appuyant sur le théorème du point fixe à la Kleene, il est possible de construire tout un panel de jeux de tuiles apériodiques. Il suffit pour cela de définir un pavage du plan avec un motif qui induit une transformation régulière du plan, d'effectuer une transformation de tuiles récursive en évitant les jeux de tuiles qui génèrent une période déterministe, puis d'appliquer le théorème du point fixe pour obtenir un jeu de tuiles apériodique. Nous présentons plusieurs exemples de construction.

**Exemple 6.1 (Croix Suisse)** Soit le pavage de la figure 6.8 qui est une disposition régulière sur le plan de croix composées de 5 tuiles. La transformation de jeux de tuiles que nous construisons, transforme chaque tuile d'un jeu de tuiles en une croix telle que la couleur du côté nord d'une tuile soit représentée par les côtés nord-est de la croix. La figure 6.10 montre la transformation d'un jeu de tuiles en jeu de motifs respectant le découpage du plan donné par  $P$  (figure 6.7). Nous voyons que, par exemple, deux tuiles s'associent sur les côtés nord et sud si les deux croix les représentant s'associent sur leur côté nord-est et sud-ouest.

Nous appelons  $f$  la fonction qui prend en entrée l'indice  $i$  d'un jeu de tuiles, et qui renvoie en sortie le jeu de tuiles qui pave le plan de la même manière que  $\tau_i$

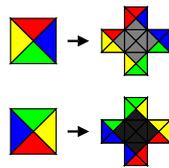


Fig. 6.10 – Transformation d'un jeu de tuiles en un jeu de motifs en croix

mais avec des motifs en croix. Si nous appliquons le théorème du point fixe à *la* Kleene sur cette transformation, nous ne pouvons pas garantir que le point fixe ne soit pas un jeu de tuiles trivial.

Pour garantir que le point fixe sera un jeu de tuiles apériodique, il faut modifier  $f$  en s'assurant que les jeux de tuiles générant des périodes déterministes soient sélectionnés par  $f$ . Savoir si un jeu de tuiles génère une période déterministe est décidable, puisqu'il suffit d'énumérer les motifs de tailles inférieures au nombre de tuiles du jeu de tuiles. Soit  $g$  la fonction récursive qui dit si un jeu de tuiles génère ou non une période déterministe.

Soit  $k$  l'indice d'un jeu de tuiles qui ne génère qu'une et une seule période qui n'est pas déterministe. Si un jeu de tuiles génère une période déterministe, alors il ne peut pas simuler exactement  $\tau_k$ , puisqu'une période déterministe ne peut simuler qu'une autre période déterministe (preuve du lemme 6.1). Nous obtenons ainsi l'algorithme pour notre fonction  $f$  sur l'entrée  $i$  :

- i) Calculer  $g(i)$ .
- ii) Si  $\tau_i$  génère une période déterministe, renvoyer  $k$ .
- iii) Sinon, renvoyer  $j$ , l'indice du jeu de tuiles en croix qui respectent les contraintes locales des tuiles de  $\tau_i$ .

La fonction  $f$  enlève toute possibilité à un jeu de tuiles générant une période déterministe d'être notre point fixe. Par le théorème du point fixe à *la* Kleene, il existe un indice  $e$  tel que  $\tau_e$  simule exactement  $\tau_{f(e)}$ .  $\tau_e$  ne génère pas de périodes déterministes. Donc  $\tau_e$  est apériodique par le lemme 6.1.

Les pavages de  $\tau_i$  ont la particularité de se simuler eux-mêmes par un agrandissement progressif de la taille des croix suisses ajoutée d'une rotation en sens horaire de  $\tan^{-1}(2)$ . En regardant bien la construction du point fixe de Kleene, nous nous rendons compte que tout  $\tau_e$ -pavage se simule lui-même une infinité de fois.

La figure 6.11 montre les différentes extractions pouvant être faites à partir d'un pavage. L'orientation (représentée par une flèche à l'intérieur de la croix) et la taille des motifs changent à chaque niveau, mais chacun de ces motifs peut être remplacé par les tuiles originelles, via une fonction de réduction afin de retrouver le pavage de base.

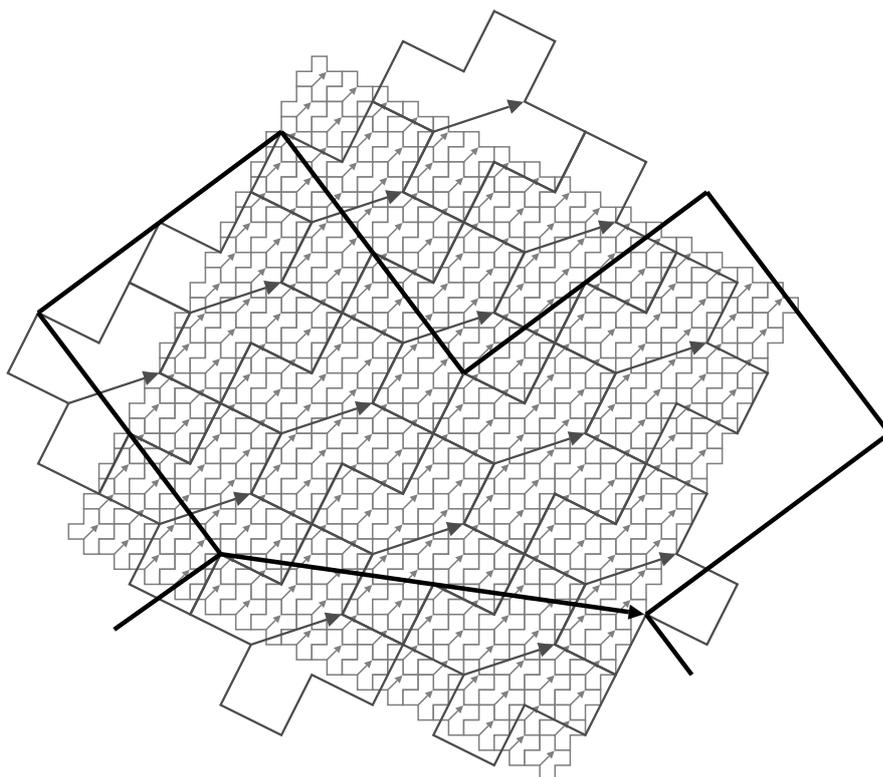


Fig. 6.11 – L'auto-similarité du pavage de la croix Suisse

**Exemple 6.2 (Rectangles)** Cet exemple montre la facilité pour construire un jeu de tuiles auto-similaire suivant une certaine transformation du plan. De nombreux autres exemples peuvent être donnés. Dans la figure 6.12, nous montrons une réduction qui transforme les tuiles en des motifs de taille  $1 \times 2$  ajoutée d'une rotation de 90 degrés dans le sens horaire. Le point fixe est donc un jeu de tuiles qui ne génère que des pavages auto-similaires se simulant eux-mêmes selon des rotations de 90 degrés.

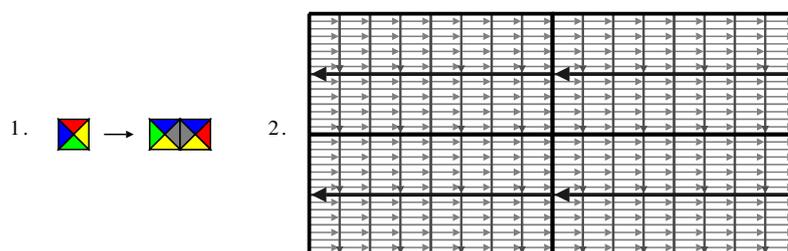


Fig. 6.12 – 1. Une fonction de transformation des tuiles et 2. le pavage auto-similaire qui en est le point fixe

**Exemple 6.3 (Rotations et distortions)** Le dernier exemple permet la construction d'un pavage auto-similaire qui, comme les précédents, se simule lui-même. La transformation utilisée envoie une tuile vers un motif composé d'une barre de longueur 4 à laquelle nous rajoutons deux indentations avec des tuiles. Par le théorème du point fixe à la Kleene, et en s'assurant qu'aucun jeu de tuiles générant une période déterministe ne puisse être point fixe, nous obtenons un jeu de tuiles qui est un point fixe dont nous représentons la structure dans la figure 6.13.

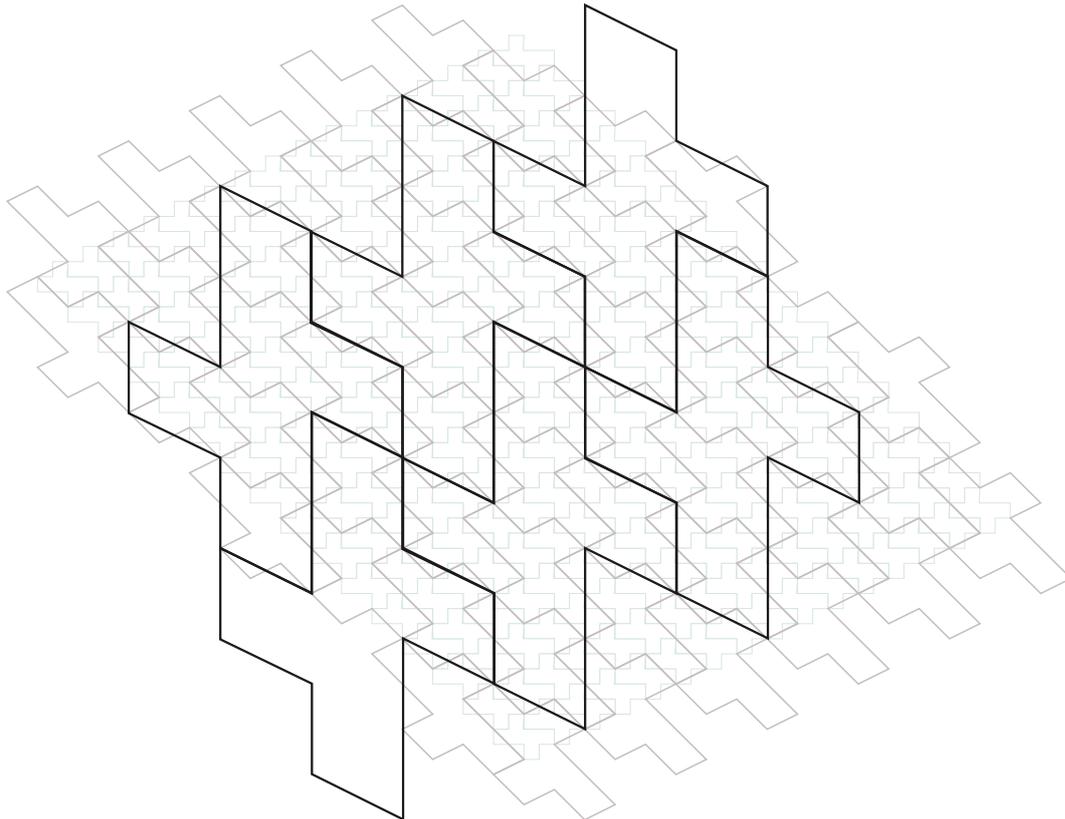


Fig. 6.13 – Un dernier exemple de transformation

Contrairement aux deux autres cas, nous remarquons que la forme de la transformation induit une transformation de l'auto-similarité. Il n'est plus tout à fait juste de parler d'auto-similarité pour ces pavages, puisque la forme générale qui se répète n'est pas exactement conservée à homothétie et rotation près. Une distorsion interne est aussi rajoutée, permettant la construction d'un pavage présentant un certain type d'auto-similarité.

**Exemple 6.4 (Des kilomètres de tuiles...)** Les trois exemples précédents montrent une idée de la diversité des jeux de tuiles aperiodiques pouvant être construits. Il est à noter qu'en modifiant quelques uns de ces jeux de tuiles, nous pourrions les

adapter pour supporter la simulation d'une machine de Turing, redémontrant ainsi de manière différente le problème du domino.

D'autres modifications du plan sont à concevoir, permettant ainsi de comprendre toujours mieux l'apériodicité. Nous pouvons ainsi contrôler de manière assez efficace les rotations et les transformations de la structure auto-similaire, ce qui est tout à fait nouveau. Si le pavage de la figure 6.12 permet une rotation de  $90^\circ$  suivit d'une alternance du rapport de la structure auto-similaire, passant d'un carré à un rectangle, le pavage de la figure 6.12, c'est-à-dire celui de la croix Suisse, présente déjà un comportement plus complexe. Les croix subissent des rotations successives de  $\tan^{-1}(2)$  degré et un agrandissement régulier. Le dernier exemple, en plus d'une rotation de valeur irrationnelle, effectue un changement des angles internes de la structure auto-similaire.

Toutes ces modifications peuvent être mieux contrôlées pour obtenir le type d'auto-similarité souhaitée. Et il est sans aucun doute possible qu'en optimisant l'utilisation des théorèmes du point fixe à la Kleene, de nombreux autres jeux de tuiles pourront être construits satisfaisant certaines propriétés.

Les travaux futurs se concentreront surtout sur l'utilisation du théorème du point fixe à la Kleene, et des nombreuses applications qu'il est possible d'obtenir afin de toujours mieux comprendre les aspects calculatoires des pavages.

---

## Bibliographie personnelle

---

- [LW07] Lafitte (G.) et Weiss (M.), « Universal tilings », dans *Proceeding of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, vol. 4393 (coll. *Lecture Notes in Computer Science*), p. 367–380. Springer, 2007.
- [LW08a] Lafitte (G.) et Weiss (M.), « A topological study of tilings », dans *Proceeding of the conference Theory and Application of Models of Computation*, vol. 4978 (coll. *Lecture Notes in Computer Science*), p. 375–387. Springer, 2008.
- [LW08b] Lafitte (G.) et Weiss (M.), « Simulation between tilings », dans *4th Conference on Computability in Europe, CiE 2008, local proceeding*. University of Athens, éd : Arnold Beckmann, Costas Dimitracopoulos, Benedikt Löwe, 2008.
- [LW08c] Lafitte (G.) and Weiss (M.), « Computability of tilings », in *International Federation for Information Processing, Fifth IFIP International Conference on Theoretical Computer Science*, vol. n° **273**, p. 187–201, 2008.
- [LW08d] Lafitte (G.) et Weiss (M.). « Applications of a fixed-point theorem *à la* Kleene for tilings », submitted for publication, 2008.



---

## Bibliographie

---

- [AD95] Allauzen (C.) et Durand (B.). « Pavages du plan : indécidabilité et périodicité », 1995. <http://lara.inist.fr/handle/2332/644>.
- [AD96] Allauzen (C.) et Durand (B.), « Appendix a : Tiling problems », dans *The classical decision problem*, p. 407–420, 1996.
- [AD97] Allauzen (C.) et Durand (B.). « Structure des ensembles de pavages », 1997. <http://hdl.handle.net/2332/682>.
- [AKKR02] Adleman (L. M.), Kari (J.), Kari (L.) et Reishus (D.), « On the decidability of self-assembly of infinite ribbons », dans *Proceedings of the Symposium on Foundations of Computer Science*, p. 530–537, Washington, DC, USA, 2002. IEEE Computer Society.
- [BDJ08] Ballier (A.), Durand (B.) et Jeandel (E.), « Structural aspects of tilings », dans *Proceeding of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, p. 61–72, 2008.
- [Ber64] Berger (R.), *The undecidability of the domino problem*. PhD thesis, Harvard University, 1964.
- [Ber66] Berger (R.), « The undecidability of the domino problem. », *Mem. Amer. Math Soc.*, vol. 66, 1966, p. 1–72.
- [BGG97] Börger (E.), Grädel (E.) et Gurevich (Y.), *The classical decision problem*. Springer-Verlag Berlin, mathematical logic édition, 1997.
- [BJ08] Ballier (A.) et Jeandel (E.), « Tilings and model theory », dans *Proceeding of the Journées Automates Cellulaires*, p. 29–39, 2008.
- [BN90] Beauquier (D.) et Nivat (M.), « Tiling the plane with one tile », *Symposium on Comp. Geom.*, 1990, p. 128–138.
- [BNRR95] Beauquier (D.), Nivat (M.), Rémila (E.) et Robson (M.), « Tiling figures of the plane with two bars », *Comput. Geom.*, vol. 5, 1995, p. 1–25.
- [Boa83] Boas (P. V. E.), « Dominoes are forever », dans *Proceedings of the GTI workshop*, p. 75–95. Rheie Theoretische Informatik, 1983.
- [BR93] Bernend (D.) et Radin (C.), « Are there chaotic tilings? », *Comm. Math. Phys.*, vol. 152, 1993, p. 215–219.
- [BR04] Bodini (O.) et Rémila (E.), « Tilings with trichitic colored-edges triangles », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 319, n° 1-3, 2004, p. 59–70.

- [BRR06] Becker (F.), Rapaport (I.) et Rémila (E.), « Self-assembling classes of shapes with a minimum number of tiles, and in optimal time », dans *Proceeding of the FSTTCS*, vol. 4337 (coll. *Lecture Notes in Computer Science*), p. 45–56. Springer, 2006.
- [Bru81] de Bruijn (N. G.), « Algebraic theory of penrose's non-periodic tilings of the plane, i », *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.*, vol. A84, 1981, p. 39–66.
- [CD04] Cerveille (J.) et Durand (B.), « Tilings : recursivity and regularity. », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 310, n° 1-3, 2004, p. 469–477.
- [Cer02] Cerveille (J.), *Complexité structurelle et algorithmique des pavages et automates cellulaires*. PhD thesis, Université de Provence, 2002.
- [Chu36a] Church (A.), « A note on the entscheidungsproblem », *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, 1936, p. 40–41.
- [Chu36b] Church (A.), « An unsolvable problem of elementary number theory », *American Journal of Mathematics*, vol. 58, 1936, p. 345–363.
- [CK96] Culik (K.) et Kari (J.), « An aperiodic set of wang cubes », dans *STACS '96 : Proceedings of the 13th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, p. 137–146, London, UK, 1996. Springer-Verlag.
- [CK97] Culik (K.) et Kari (J.), « On aperiodic sets of wang tiles. », dans *Foundations of Computer Science : Potential - Theory - Cognition*, p. 153–162, 1997.
- [Cla86] Clapham (C. R. J.), « Universal tilings and universal  $(0, 1)$ -matrices », *Discrete Math.*, vol. 58, n° 1, 1986, p. 87–92.
- [CR98] Conway (J. H.) et Radin (C.), « Quaquaversal tilings that enriches the theory of tiles », *Inventiones math.*, vol. 132, 1998, p. 179–188.
- [Cul99] Culik (K.), « Small aperiodic sets of triangular and hexagonal tiles », dans *Jewels are Forever, Contributions on Theoretical Computer Science in Honor of Arto Salomaa*, p. 307–313, London, UK, 1999. Springer-Verlag.
- [DGL<sup>+</sup>05] Doty (D.), Gu (X.), Lutz (J. H.), Mayordomo (E.) et Moser (P.), « Zeta-dimension », dans *Proceeding of the conference Mathematical Foundations of Computer Science*, p. 283–294, 2005.
- [DLS01] Durand (B.), Levin (L. A.) et Shen (A.), « Complex tilings. », dans *STOC*, p. 732–739, 2001.
- [DLS05] Durand (B.), Levin (L.) et Shen (A.), « Local rules and global order, or aperiodic tilings », *Math. Intelligenz*, vol. 27, n° 1, 2005, p. 64–68.
- [DMRR04] Desreux (S.), Matamala (M.), Rapaport (I.) et Rémila (E.), « Domino tilings and related models : space of configurations of domains with holes », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 319, n° 1-3, 2004, p. 83–101.

- [DRS08] Durand (B.), Romashchenko (A.) et Shen (A.), « Fixed point and aperiodic tilings », dans *to appear in Proceeding of the conference Development in Language Theory*, p. 375–387, 2008.
- [Dur99] Durand (B.), « Tilings and quasiperiodicity. », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 221, n° 1-2, 1999, p. 61–75.
- [Dur02] Durand (B.), « De la logique aux pavages. », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 281, n° 1-2, 2002, p. 311–324.
- [Fer07] Fernique (T.), *Pavages, fractions continues et géométrie discrète*. PhD thesis, Université de Montpellier, 2007.
- [Gar77] Gardner (M.), « Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles », *Sci. Am.*, vol. 236, 1977, p. 110–119.
- [Gar01] Gardner (M.), chap. 7. W. W. Norton and Company, 2001.
- [GK72] Gurevich (Y. S.) et Koryakov (I. O.), « Remarks on berger's paper on the domino problem », *Siberian Math. Jour.*, vol. 13, n° 2, 1972, p. 319–321.
- [GS89] Grunbaum (B.) et Shephard (G. C.), *Tilings and patterns*. A Series of Books in the Mathematical Sciences, freeman and company édition, 1989.
- [GS99a] Goodman-Strauss (C.), « An aperiodic pair of tiles in  $e_n$  for all  $n \geq 3$  », *Eur. J. Comb.*, vol. 20, n° 5, 1999, p. 385–395.
- [GS99b] Goodman-Strauss (C.), « A small aperiodic set of planar tiles », *Eur. J. Comb.*, vol. 20, n° 5, 1999, p. 375–384.
- [Gum95] Gummelt (P.), « Construction of penrose tilings by a single aperiodic protoset », dans *Proceeding of the International Conference on Quasicrystals*, p. 84–87, 1995.
- [Gur90] Gurevich (Y.), « On the classical decision problem », *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, vol. 42, 1990, p. 140–150.
- [Han74] Hanf (W. P.), « Nonrecursive tilings of the plane. I », *J. Symb. Log.*, vol. 39, n° 2, 1974, p. 283–285.
- [Hod83] Hodges (A.), *Alan Turing : the Enigma*. Simon and Schuster, 1983.
- [IM03] Impagliazzo (R.) et Moser (P.), « A zero-one law for **RP** », dans *Proceedings of the Conference on Computational Complexity*, p. 48–52, 2003.
- [Kar96] Kari (J.), « A small aperiodic set of wang tiles », *Discrete Math.*, vol. 160, n° 1-3, 1996, p. 259–264.
- [Kar02] Kari (J.), « Infinite snake tiling problems », dans *Developments in Language Theory*, p. 67–77, 2002.

- [Kar07] Kari (J.), « The tiling problem revisited (extended abstract) », dans *In proceeding of the conference Machines, Computations and Universality*, vol. 4664 (coll. *Lecture Notes in Computer Science*), p. 72–79. Springer, 2007.
- [Kar08] Kari (J.), « Undecidable properties on the dynamics of reversible one-dimensional cellular automata », dans *Proceeding of the Journées Automates Cellulaires*, p. 3–14, 2008.
- [KM01] Kari (J.) et Moore (C.), « New results on alternating and non-deterministic two-dimensional finite-state automata », dans *Proceedings of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, p. 396–406, London, UK, 2001. Springer-Verlag.
- [KMW62] Kahr (A. S.), Moore (E. F.) et Wang (H.), « Entscheidungsproblem reduced to the  $\forall\exists\forall$  case », *Proc. Natl. Acad. Science*, vol. 48, n° 3, 1962, p. 365–377.
- [KP99] Kari (J.) et Papasoglu (P.), « Deterministic aperiodic tile sets », *Geometric and functional analysis*, vol. 9, 1999, p. 353–369.
- [KT08] Kari (J.) et Taati (S.), « A particular displacement representation for conservation laws in two-dimensional cellular automata », dans *Proceeding of the Journées Automates Cellulaires*, p. 65–73, 2008.
- [Laf02a] Lafitte (G.), « On randomness and infinity », dans *Proceedings of the IFIP 17th World Computer Congress - TC1 Stream*, p. 267–279, Deventer, The Netherlands, The Netherlands, 2002. Kluwer, B.V.
- [Laf02b] Lafitte (G.), *Calculs et infinis*. PhD thesis, ENS Lyon, 2002.
- [LM95] Lind (D.) et Marcus (B.), *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [Luc93] Luck (R.), « Basic ideas of ammann bar grids », *Int. Jour. Mod. Phys. B.*, vol. 7, 1993, p. 1437–1453.
- [Luk07] Lukkarila (V.). « The 4-way deterministic tiling problem is undecidable », 2007.
- [Mac82] Mackay (A.), « Crystallography and the penrose pattern », *Physica*, vol. 114A, 1982, p. 609–613.
- [Mos03] Moser (P.), « Baire's categories on small complexity classes », dans *FCT*, vol. 2751 (coll. *Lecture Notes in Computer Science*), p. 333–342, 2003.
- [Mos04] Moser (P.), *Derandomization and quantitative complexity*. PhD thesis, Université de Genève, 2004.
- [Mos08] Moser (P.), « Martingale families and dimension in  $p$  », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 400, n° 1-3, 2008, p. 46–61.

- [Moz89] Mozes (S.), « Quaquaversal tilings that enriches the theory of tiles », *J. d'Analyse Math.*, vol. 53, 1989, p. 139–186.
- [MRR02] Moore (C.), Rapaport (I.) et Rémila (E.), « Tiling groups for wang tiles », dans *SODA*, p. 402–411, 2002.
- [Mye74] Myers (D.), « Nonrecursive tilings of the plane. II », *J. Symb. Log.*, vol. 39, n° 2, 1974, p. 286–294.
- [Odi89] Odifreddi (P.), *Classical recursion theory, vol. I*, vol. 125. North Holland, 1989.
- [Oge04] Oger (F.), « Algebraic and model-theoretic properties of tilings », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 319, n° 1-3, 2004, p. 103–126.
- [Oll02] Ollinger (N.), *Automates cellulaires : structures*. PhD thesis, ENS Lyon, 2002.
- [Oll08] Ollinger (N.), « Two-by-two substitution systems and the undecidability of the domino problem », dans Beckmann (A.), Dimitracopoulos (C.) et Lowe (B.), éditeurs, *Proceeding of the Conference Computability in Europe*, vol. 5028 (coll. *Lecture Notes in Computer Science*), p. 476–485. Springer, 2008.
- [OR08] Ollinger (N.) et Richard (G.), « Collisions and their catenations : ultimately periodic tilings of the plane », dans *to appear Proceedings of the IFIP World Computer Congress - TC1 Stream*, 2008.
- [ORS95] Ormes (N.), Radin (C.) et Sadun (L.), « A homeomorphism invariant for substitution tiling spaces », *Geometriae dedicata*, vol. 90, 1995, p. 153–182.
- [Pen74] Penrose (R.), « Role of aesthetics in pure and applied research », *Bull. Inst. Maths. Appl.*, vol. 10, n° 266, 1974, p. 153–182.
- [Rad93] Radin (C.), « Symmetry of tilings of the plane », *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 29, 1993, p. 213–217.
- [Rad94] Radin (C.), « The pinwheel tilings of the plane », *Annals of Math.*, vol. 139, 1994, p. 661–702.
- [Rad95a] Radin (C.), « Aperiodic tilings in higher dimensions », *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 123, 1995, p. 3543–3548.
- [Rad95b] Radin (C.), « Space tilings and substitutions », *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 55, 1995, p. 257–264.
- [Rad95c] Radin (C.), « Symmetry and tilings », *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 42, 1995, p. 26–31.
- [Rad96] Radin (C.), « Quasicrystals and geometry », *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 43, 1996, p. 416–421.
- [Rad99] Radin (C.), *Miles of tiles*. American Mathematical Society, 1999.

- [Rob71] Robinson (R. M.), « Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane », *Inv. Math.*, vol. 12, 1971, p. 117–209.
- [RS98] Radin (C.) et Sadun (L.), « An algebraic invariant for substitution tiling systems », *Geometriae Dedicata*, vol. 73, 1998, p. 21–37.
- [The05a] Theyssier (G.), *Automates cellulaires : un modèle de complexités*. PhD thesis, ENS Lyon, 2005.
- [The05b] Theyssier (G.), « How common can be universality for cellular automata? », dans *Proceeding of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, vol. 3404 (coll. *Lecture Notes in Computer Science*), p. 121–132. Springer, 2005.
- [Thu90] Thurston (W. P.), « Conway's tiling groups », *Am. Math. Monthly*, vol. 97, n° 8, 1990, p. 757–756.
- [Tur37] Turing (A.), « On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem », dans *Proceedings of the London Mathematical Society*, p. 230–265, 1937.
- [Wan61] Wang (H.), « Proving theorems by pattern recognition ii », *Bell system journal*, vol. 40, 1961, p. 1–41.
- [Wan62] Wang (H.), « Dominoes and the  $\forall\exists\forall$ -case of the decision problem », dans *Proc. Symp. on Mathematical Theory of automata*, p. 23–55, 1962.