UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Archive ouverte UNIGE

https://archive-ouverte.unige.ch

Article scientifique | Article | 1938

Published version | Open Access

This is the published version of the publication, made available in accordance with the publisher's policy.

Über die Energie-Impuls-Tensoren und die Stromvektoren in der Theorie von Dirac für Teilchen mit Spin grösser als $^1/_2$ h

Jauch, Joseph-Maria

How to cite

JAUCH, Joseph-Maria. Über die Energie-Impuls-Tensoren und die Stromvektoren in der Theorie von Dirac für Teilchen mit Spin grösser als $^1/_2$ h. In: Helvetica physica acta, 1938, vol. 11, n° 4, p. 374–377.

This publication URL: https://archive-ouverte.unige.ch/unige:162208

© This document is protected by copyright. Please refer to copyright holder(s) for terms of use.

Protonenstrom zu 150 μA. Gasentladungsstrom und Protonenstrom verhalten sich also wie 40 : 1. Zum Vergleich sei eine ältere im Phys. Inst. der E. T. H. gebaute Kanalstrahlröhre herbeigezogen. Die entsprechenden Werte waren: Gasentladungsstrom 15 mA, magnetisch ausgeblendeter Protonenstrom 10 μA. Bei dieser Konstruktion verhalten sich die Ströme wie 1500 : 1.

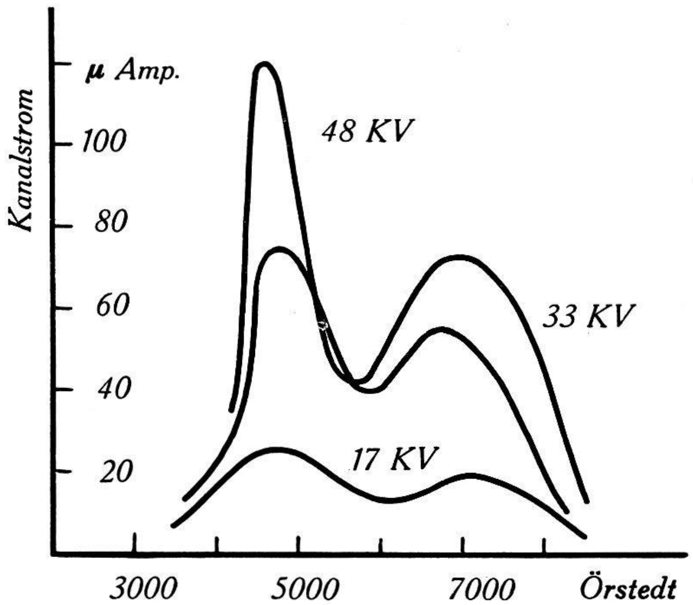

Fig. 1.
Magnetische Spektren von H-Kanalstrahlen.
Gasentladungsstrom 6 mA
Gasentladungspannungen 17 KV, 33 KV, 48 KV.

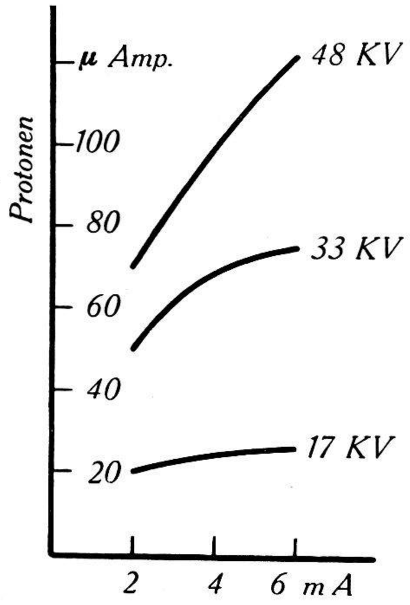

Fig. 2.
Abhängigkeit des Protonenstromes J_P von Gasentladungsspannung und Strom.

Zum unabgelenkten Kanalstrom von 1,5 mA ist zu bemerken, dass in diesem Wert die durch den Kanalstrahl ausgelösten Sekundärelektronen inbegriffen sind, da bei unserer Versuchsanordnung eine Messung des gesamten Kanalstrahles mit Faradaykäfig nicht leicht ausführbar war.

Über die Energie-Impuls-Tensoren und die Stromvektoren in der Theorie von Dirac für Teilchen mit Spin grösser als ½ h.

von J. M. Jauch (Zürich).

Die Dirac'schen Gleichungen[1]), welche die Beschreibung von Elementarteilchen mit grösseren Spineigenwerten liefern sollen, stellen eine Verallgemeinerung dar der alten relativistischen Theorie von Dirac für Teilchen mit Spin ½ h, indem für die Wellenfunktion mehr als vier Komponenten zugelassen werden. An eine solche Verallgemeinerung sind aus physikalischen Gründen die folgenden Forderungen zu stellen:

[1]) Vgl. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., Bd. 155, S. 447, 1936.

1) Die ψ-Funktion (d. h. jede einzelne Komponente davon) soll der Wellengleichung zweiter Ordnung genügen:

$$\Box\, \psi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \psi. \tag{1}$$

2) In Verallgemeinerung der Dirac'schen Gleichungen sollen die einzelnen Komponenten untereinander durch Gleichungssysteme vom Typus

$$\Gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \psi = C \psi \qquad x^4 = \mathrm{ct} \qquad (\mu = 1, \ldots, 4) \tag{2}$$

verknüpft sein, wobei die Γ_μ, C zunächst noch irgendwelche beliebige Matrizen darstellen können. Die Freiheit in der Wahl dieser Matrizen wird aber wesentlich eingeschränkt durch die Forderung:

3) Das Gleichungssystem (2) soll invariant sein bei Lorentztransformationen, d. h. bei der Transformation

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}$$

soll sich ψ derart transformieren: $\psi \rightarrow \psi'$, dass aus (2) folgt

$$\Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}\, \psi' = C \psi'. \tag{2'}$$

Setzen wir $\psi' = S \psi$, so sehen wir, dass die Transformationen S eine Darstellung der Lorentzgruppe bilden. Wir wollen ferner festsetzen:

4) Die ψ sollen sich nach einer *irreduziblen* Darstellung der Lorentzgruppe transformieren. Andernfalls zerfällt nämlich das Gleichungssystem (2) vollständig in mehrere voneinander unabhängige Systeme.

5) Aus dem ψ-Feld sollen die Energiedichte, die Impulsdichte und die Spannungen berechnet werden können. Diese Grössen sollen zusammen einen symmetrischen Tensor zweiten Ranges bilden, und es sollen der Energiesatz und der Impulssatz gelten:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{3}$$

Ausserdem kann man fragen, ob es möglich ist einen Vierervektor zu definieren, den man als Wahrscheinlichkeits- oder Ladungsund Stromdichte interpretieren kann und der deshalb ebenfalls einer Kontinuitätsgleichung genügt:

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial x^\nu} = 0 .$$

Zur Konkurrenz für diese Tensoren lassen wir Grössen zu, die sich durch Bilinearkombination aus der Wellenfunktion, ihrer Konjugierten und ihrer ersten Ableitung bilden lassen. Der Grund für diese Beschränkung ergibt sich aus der Überlegung, dass diese Theorie in der unrelativistischen Näherung in die alte Schrödinger-sche Theorie übergehen soll.

Die Gleichungen von Dirac genügen den Forderungen 1), 2), 3) und 4). Es war der Zweck dieser Untersuchung, festzustellen, ob sich mit ihnen die Forderung 5) verwirklichen lässt.

Dirac unterscheidet die beiden Fälle, dass die Ruhemasse $m = 0$ oder $m \neq 0$ ist. Im ersten Fall lauten die Gleichungen

$$\Gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi = 0 . \tag{5}$$

Die Matrizen Γ^μ bzw. die Anzahl der Komponenten von ψ hängen von einer Quantenzahl k ab, welche alle halbganzen Werte von $1/2$ an annehmen kann.

Der Fall $k = 1/2$ liefert die alte Dirac'sche Theorie für Teilchen mit Spin $1/2$ und Ruhemasse 0. Es existiert die Energie und der Strom, aber die Energie ist nicht positiv definit.

Der Fall $k = 1$ liefert die Lichtquanten. Die Gleichungen sind identisch mit den Maxwell'schen. Es existiert demnach der Energie-Impuls-Tensor, mit positiver Energiedichte. Dagegen existiert kein Strom.

Die höhern Fälle bei Dirac sind auszuschliessen, da keine Energie definiert werden konnte.

Im Fall $m \neq 0$ lassen sich die Dirac'schen Gleichungen folgendermassen schreiben: Es gibt zwei Quantenzahlen k und l und dementsprechend zerfällt ψ in die beiden Teile ψ_A und ψ_B.

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^\mu_A \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_A &= C_B\, \psi_B \\ \Gamma^\mu_B \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_B &= C_A\, \psi_A \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

k und l können unabhängig voneinander sämtliche halb-ganzen

Werte durchlaufen. Der Fall $k = l = \frac{1}{2}$ ist der alte Dirac'sche Fall mit Spin $\frac{1}{2}$. Der Fall $k = \frac{1}{2}$, $l = 1$ ist die Theorie von PROCA[1]).

Die Definition des Energie-Impuls-Tensors und des Stromvektors ist möglich im Fall $k = l$ und $k = l - \frac{1}{2}$. In den übrigen Fällen konnte keine Definition des Energie-Impuls-Tensors gegeben werden. Nun konnte aber gezeigt werden, dass alle Fälle mit $k + l = \text{const.}$ ineinander übergeführt werden können, dass sie also gar nicht als wesentlich verschieden zu betrachten sind. Es hat demnach einen Sinn nur noch die beiden Fälle $k = l$ und $k = l - \frac{1}{2}$ in Betracht zu ziehen.

Es bleibt noch die Frage nach dem Spin zu erwähnen. Um die Grösse des Spins zu bestimmen genügt es, bei vorgegebenem Impuls und Energie die Anzahl unabhängiger Zustände zu ermitteln. Bezeichnen wir $k + l - \frac{1}{2} = f$, so ist diese Zahl $2f + 1$. Die Zahl f kann deshalb als vernünftige Definition des Spins angesehen werden. Im Fall der Ruhemasse 0 dagegen gibt es in jedem Fall nur zwei unabhängige Zustände, wie das bei den Maxwell'schen Gleichungen schon der Fall ist.

Über die relativistische Theorie für Teilchen mit ganzzahligem Spin sowie deren Quantisierung

von MARKUS FIERZ (Zürich, E. T. H.).

(Eine ausführliche Veröffentlichung erfolgt in den Helvetica Physica Acta.)

Einem Tensorfeld $\Phi_{ik\,..\,e}(x, t)$ der f-ten Stufe (f Indices), wo der Feldtensor $\Phi_{ik\,..\,e}$ symmetrisch in allen Indices ist und weiter den Gleichungen

$$\Phi_{iike\,..} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi_{ik\,..\,e}}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

sowie der Wellengleichung 2. Ordnung

$$\Box\, \Phi_{ik\,..\,e} = \frac{1}{\lambda^2}\, \Phi_{ik\,..\,e}$$

genügt, kann man mit Hilfe der relativistischen Quantendynamik Teilchen (Feldquanten) mit dem ganzzahligen Spin f und der Masse $\hbar/\lambda c$ zuordnen. Dies geschieht, indem man zwischen $\Phi^*_{ik\,..\,e}$ und $\Phi_{ik\,..\,e}$ relativistisch invariante Vertauschungsrelationen fordert, welche als Verallgemeinerung der Vertauschungsrelationen der skalaren Theorie für Spin null angesehen werden können.

---

[1]) Journal de phys. VII, 1936, S. 347.