UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Archive ouverte UNIGE
https://archive-ouverte.unige.ch

Thèse 2006

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

L'algorithme du charmeur de serpents

Rodriguez, Eugenio

How to cite

RODRIGUEZ, Eugenio. L'algorithme du charmeur de serpents. Doctoral Thesis, 2006. doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:382

This publication URL: https://archive-ouverte.unige.ch/unige:382
Publication DOI: 10.13097/archive-ouverte/unige:382

© This document is protected by copyright. Please refer to copyright holder(s) for terms of use.

Université de Genève
Section de Mathématiques

Faculté des Sciences
Professeur J.-C. Hausmann

L'algorithme du charmeur de serpents

Thèse

présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Genève
pour l'obtention du grade Docteur ès sciences,
mention mathématiques

par

Eugenio RODRIGUEZ
de
Genève (GE)

Thèse N° 3716

Atelier de reproduction de la Section de physique
Genève, Janvier 2006

道は左右に蛇のように曲がりくねり、いくつもの枝道にわかれながら、下方へ下方へと向かっていた。急な坂こそないが、道は一貫して下りだった。まるで一歩一歩地表の明るい世界が私の背中からはぎとられていくような思いだった。

村上春樹

Le chemin ondulait comme un serpent, à droite et à gauche, et se divisait en plusieurs embranchements qui montaient ou descendaient. Il n'y avait pas de pente vraiment raide mais les dénivellations étaient conséquentes. J'avais l'impression d'abandonner encore plus loin derrière moi à chaque pas le monde lumineux de la surface de la terre.

Haruki Murakami

Table des matières

Introduction **ix**

1 Au sujet des serpents **1**
1.1 Bras articulés 1
1.2 L'espace des configurations 2
1.3 Serpents 6
1.4 La distribution horizontale 7
1.5 Points critiques 11

2 Les outils du charmeur de serpents **15**
2.1 Courbes horizontales 15
2.2 Action du groupe de Möbius 19
2.3 Le théorème principal 26
2.4 Quelques conséquences 29
2.5 Stabilisateurs d'une configuration et sous-variétés 30

3 Charmer les serpents en pratique **33**
3.1 Suites divergentes dans le groupe de Möbius 33
3.2 L'équation différentielle dans le groupe de Möbius 35
3.3 Sédentarité 39
3.4 Près d'une configuration alignée – la condition de Hairer 42

4 La continuité de l'algorithme **49**
4.1 Généralisation de l'espace des configurations 49
4.2 Approximation par des bras articulés 53

5 Quelques expériences de charmeurs de serpents **59**
5.1 Quelques exemples 59
5.2 La méthode des flots hyperboliques 65

Bibliographie **71**

Epilogue **73**

Introduction

Un *serpent de longueur* L est une courbe $\mathcal{S} : [0, L] \to \mathbb{R}^d$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux qui est paramétrée par la longueur d'arc et telle que la « queue » se trouve à l'origine, autrement dit, $\mathcal{S}(0) = 0$. *Charmer ce serpent* consiste à déformer $\mathcal{S}$ de sorte que son « museau », $\mathcal{S}(L)$, suive une courbe γ dans $\mathbb{R}^d$. Plus précisément, *l'algorithme du charmeur de serpents* répond au problème suivant : étant donné un couple $(\mathcal{S}, \gamma)$ où $\mathcal{S}$ est un serpent initial de longueur L et $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$, $\gamma(0) = \mathcal{S}(L)$, est une courbe de classe $\mathcal{C}^1$, on cherche une famille à un paramètre $\mathcal{S}_t$, $t \in [0, 1]$, de serpents de longueur L telle que $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_t(L) = \gamma(t)$. Techniquement, le serpent $\mathcal{S}$ est déterminé par son hodographe $z(s) = \frac{d\mathcal{S}}{ds}(s)$ qui est une courbe continue par morceaux à valeurs dans la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$. La solution, ou « l'output », de notre algorithme est donc une famille z_t d'hodographes obtenu à partir de l'hodographe initial z. Mentionnons quelques propriétés de cet algorithme :

(i) si, sur un ouvert de $[0, L]$, $\mathcal{S}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (pour $1 \leq k \leq \infty$), il en est de même de $\mathcal{S}_t$ pour tout t ;

(ii) si l'hodographe z admet des périodicités partielles, ainsi en est-il de z_t pour tout t ;

(iii) bien que l'espace des serpents soit de dimension infinie, l'algorithme se réduit à résoudre une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans un groupe de Lie de dimension $d(d+1)/2$, à savoir le groupe $\text{Möb}(d-1)$ des transformations de Möbius de la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$;

(iv) la famille $\mathcal{S}_t$ varie continûment en fonction de $(\mathcal{S}, \gamma)$;

(v) la solution $\mathcal{S}_t$ de l'algorithme est l'unique déformation de $\mathcal{S}$ suivant γ qui minimise l'énergie cinétique infinitésimale $\frac{1}{2}\int_0^L \|\frac{d}{dt}z_t(s)\|^2 ds$ de l'hodographe. C'est cette propriété, analogue à celle des lignes de gradient d'une fonction, qui motiva originellement notre algorithme.

La figure 1 ci-dessous illustre le serpent

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : [0, 4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto (s, \sin(s)), \end{aligned}$$

que l'on déforme pour faire suivre un cercle à vitesse constante.

Le principe de l'algorithme est le suivant. Comme indiqué ci-dessus, les serpents sont déterminés par leur hodographe $\frac{d\mathcal{S}}{ds}(s)$. Il s'agit de courbes continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{S}^{d-1}$. Fixons-nous une partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[0, L]$ et désignons par Conf l'espace des applications de $[0, L]$ dans la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ qui sont continues sur chaque morceau de $\mathcal{P}$; cet espace est muni de la topologie de la convergence

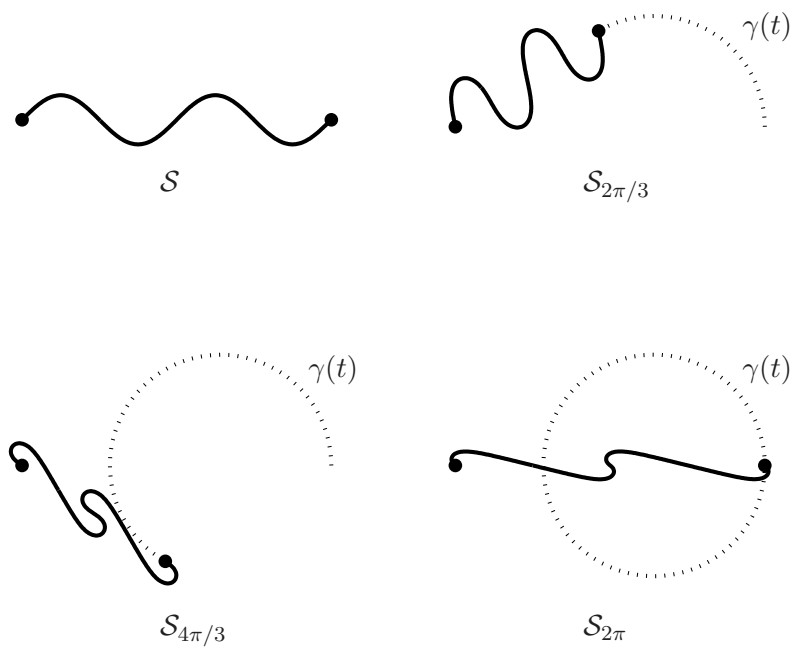


FIG. 1 – Exemple de l'algorithme du charmeur de serpents.

uniforme. On parle de *l'espace des configurations* et les éléments de Conf sont appelés des *configurations*. La partition $\mathcal{P}$ peut être vide, auquel cas les applications considérées sont continues sur tout $[0, L]$. Nous faisons correspondre à chaque configuration z un serpent $\mathcal{S}_z$ par la formule

$$\mathcal{S}_z(s) = \int_0^s z(\tau)d\tau,$$

pour $s \in [0, L]$. L'extrémité (ou le « museau ») est alors l'application $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$, envoyant z sur $\mathcal{S}_z(L) = \int_0^L z(s)ds$. En utilisant la métrique riemannienne standard sur $\mathbb{S}^{d-1}$, on peut munir Conf d'une structure de variété banachique lisse pour laquelle l'application f est lisse. L'image de f est la boule fermée dans $\mathbb{R}^d$ de rayon L et de centre 0. Les points critiques de f sont les *configurations alignées*, c'est-à-dire les configurations z dont l'image $z([0, L])$ est contenue dans une paire antipodale $(p, -p)$. Le serpent $\mathcal{S}_z$ associé à une telle configuration est alors contenu dans la droite vectorielle passant par p. Les valeurs critiques constituent donc un ensemble fini de sphères centrées à l'origine qui dépend de la partition $\mathcal{P}$.

Munis de ces notions, nous pouvons reformuler le problème du charmeur de serpents comme un problème de relèvement de courbes :

soient $z \in \mathrm{Conf}$ une configuration initiale
et $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ une courbe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(z) = \gamma(0)$;
on cherche une coubre $[0, 1] \to \mathrm{Conf}$, $t \mapsto z_t$,
telle que $z_0 = z$ et $f(z_t) = \gamma(t)$.

Afin d'avoir une courbe privilégiée qui s'envoie sur γ, on impose une condition au vecteur vitesse $\dot{z}_t \in T_{z_t}\mathrm{Conf}$. L'espace tangent $T_z\mathrm{Conf}$ est l'espace vectoriel des applications $v : [0, L] \to T\mathbb{S}^{d-1}$ continues par morceaux pour la partition $\mathcal{P}$ et telles que $\pi(v(s)) = z(s)$, où $\pi : T\mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ est la projection canonique. En utilisant l'inclusion $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, on regarde les éléments de $T_z\mathrm{Conf}$ comme des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que $\langle v(s), z(s)\rangle = 0$. Muni de la norme $\|v\| = \sup_{s\in[0,L]} \|v(s)\|$, l'espace vectoriel $T_z\mathrm{Conf}$ est un espace de Banach. On le munit également du produit scalaire $\langle v, w\rangle = \int_0^L \langle v(s), w(s)\rangle\, ds$ qui n'est pas complet. On ne peut donc pas s'attendre à ce qu'une fonction de Conf dans $\mathbb{R}$ admette, en général, un gradient. Nous construisons cependant des gradients pour toutes les fonctions de la forme $\varphi \circ f$, où $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse. Ces gradients engendrent une distribution sur Conf que l'on désigne par Δ. Le sous-espace $\Delta(z) \subset T_z\mathrm{Conf}$ est de dimension d si z est non-alignée et de dimension $d-1$ sinon. On montre que $\Delta(z) = (\ker T_z f)^\perp$, où $T_z f$ désigne l'application tangente à f, et, comme $\ker T_z f$ est de codimension finie,

$$T_z\mathrm{Conf} = \Delta(z) \oplus \ker T_z f. \tag{1}$$

Les courbes dans Conf telles que $\dot{z}_t \in \Delta(z_t)$ sont dites *horizontales* (ou Δ-*courbes*). L'algorithme du charmeur des serpents consiste alors à considérer la distribution Δ comme une connexion d'Ehresmann [Eh51] pour l'application f. Étant donnée une configuration initiale z_0, on prend pour z_t l'unique relèvement de $\gamma(t)$ partant de z_0 en $t = 0$ et qui est horizontal pour Δ. En dehors des points critiques $\Delta(z)$ s'envoie isomorphiquement sur $\mathbb{R}^d$ par $T_z f$, ce qui garantit l'existence et l'unicité du relèvement au moins localement. L'application f n'étant pas propre, l'existence de z_t n'est pas garantie sur tout $[0, 1]$.

Cette idée avait été introduite par Hausmann [Ha05] dans le cadre des *bras articulés* (on utilisera également le terme *serpent polygonal*). Pour $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $a_i > 0$, le bras articulé de type a est l'application $f^a : (\mathbb{S}^{d-1})^N \to \mathbb{R}^d$ qui envoie $z = (z_1, \ldots, z_N)$ sur $\sum_{i=1}^N a_i z_i$. Il s'agit du serpent $\mathcal{S}_z$ où z est l'application constante par morceaux $z : [0, L] \to \mathbb{S}^{d-1}$, avec $L = \sum_{i=1}^N a_i$ et $z(s) = z_i$, pour $s \in [\sum_{j=0}^{i-1} a_j, \sum_{j=0}^{i} a_j[$ et $i = 1, \ldots, N$ (on pose $a_0 = 0$). Les points critiques de f^a sont également les configurations alignées s'écrivant comme $z_i = \pm z_j$ pour tout $i, j = 1, \ldots N$. En dehors des points critiques, f^a est une submersion propre et la distribution $\Delta^a = (\ker T_z f^a)^\perp$ permet de relever horizontalement toute courbe $\mathcal{C}^1$ restant dans les valeurs régulières de f^a. Si les bras articulés sont des serpents particuliers (polygonaux), il est tentant de voir les serpents comme limite de bras articulés (pour $N \to \infty$ et $a_i \to 0$). Nous reviendrons sur ce point de vue plus loin.

Après avoir introduit ce matériel préliminaire, on étudie au chapitre 2 la composante connexe par Δ-courbes d'une configuration initiale z_0 que l'on désigne par $\mathcal{A}(z_0)$. Désignons par $\mathrm{Möb}(d-1)$ le groupe des transformations de Möbius de la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ qui préservent l'orientation ; il s'agit du groupe engendré par les compositions d'un nombre pair d'inversions, dans $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$, en des sphères orthogonales à $\mathbb{S}^{d-1}$. Le groupe $\mathrm{Möb}(d-1)$ agit sur Conf par post-composition : $(g \cdot z)(s) = g(z(s))$. Ceci mène au théorème principal de ce travail :

Théorème Principal. Soit $\mathcal{A}(z_0) \subset \mathrm{Conf}$ la composante connexe par courbes horizontales d'une configuration $z_0 \in \mathrm{Conf}$. Alors,

$$\mathcal{A}(z_0) = \mathrm{Möb}(d-1) \cdot z_0.$$

Ce résultat généralise celui obtenu dans [Ha05] pour les bras articulés isocèles. La preuve dans le cas de la variété de dimension finie $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ utilise un théorème de Sussmann [Su73] qui décrit, pour une distribution Δ sur une variété M, les composantes connexes par Δ-courbes comme les « feuilles » d'une distribution intégrable associée à Δ. Le théorème de Sussmann est valable pour des variétés de dimension finie ; nous n'en connaissons pas de généralisation aux variétés de dimension infinie. En utilisant le fait qu'une transformation de Möbius est déterminée par un nombre fini de points, nous avons réussi à nous ramener à une situation où nous pouvions appliquer le résultat de Hausmann. Le théorème principal implique alors que la solution z_t à notre problème s'écrit comme $z_t = g(t) \cdot z_0$, où $g(t)$ est une courbe dans le groupe de Möbius partant de l'identité. Ceci nous donne la propriété (iii) mentionnée ci-dessus. De plus, il s'ensuit que les invariants classiques des transformations de Möbius, comme le birapport de quatre points, sont également conservés le long des courbes horizontales. Nous obtenons par exemple les propriétés (i) et (ii). La propriété (v) provient de la décomposition (1). La continuité (iv) sera l'objet du théorème de continuité énoncé plus bas.

Au chapitre 3, on montre que la courbe $g(t)$ s'obtient comme solution d'une équation différentielle ordinaire dans le groupe de Möbius. Pour trouver cette équation, on considère, pour tout $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, le sous-groupe à un paramètre Γ_t^v de $\mathrm{Möb}(d-1)$, formé des transformations purement hyperboliques ayant v comme point fixe stable et $-v$ comme point fixe instable. On désigne par $C_v \in \mathfrak{möb}(d-1)$ le générateur de Γ_t^v et par $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{möb}(d-1)$ engendré par l'ensemble des C_v. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension d et, si $\{e_1, \ldots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$, les éléments $\{C_{e_1}, \ldots, C_{e_d}\}$ forment une base de $\mathcal{H}$. On utilise dans la preuve du théorème principal le fait que $\mathcal{H}$ engendre $\mathfrak{möb}(d-1)$ en tant qu'algèbre de Lie (voir [Ha05, Lemme 3.4]). On regardera $\mathcal{H}$ comme une distribution de rang d sur $\mathrm{Möb}(d-1)$ via la correspondance $g \mapsto \mathcal{H}_g = T_{\mathrm{id}}\mathcal{R}_g(\mathcal{H})$, où $\mathcal{R}_g$ désigne la translation à droite par g. Pour un z_0 fixé, on considère encore l'application $F : \mathrm{Möb} \to \mathbb{R}^d$ envoyant g sur $f(g \cdot z_0)$. Si $g \cdot z_0$ n'est pas alignée, alors F est une submersion en g et la restriction $T_gF|_{\mathcal{H}_g} : \mathcal{H}_g \to \mathbb{R}^d$ est un isomorphisme que nous désignons par $M(g \cdot z_0)$. On montre alors que si $g(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\dot{g}(t) = M^{-1}(g(t) \cdot z_0)\dot{\gamma}(t), \quad g(0) = \mathrm{id}, \tag{2}$$

alors $z_t = g(t) \cdot z_0$ est un relevé horizontal de $\gamma(t)$ et la famille $\mathcal{S}_{z_t}$ est une solution à notre problème. On regarde $M(g \cdot z_0)$ comme une matrice inversible qui prend la forme :

$$M(z) = \begin{pmatrix} L & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_0^L z_1(s)z_1(s)ds & \cdots & \int_0^L z_1(s)z_d(s)ds \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^L z_1(s)z_d(s)ds & \cdots & \int_0^L z_d(s)z_d(s)ds \end{pmatrix},$$

où $z = g \cdot z_0 \in \mathrm{Conf}$ et l'on écrit $z(s) \in \mathbb{S}^{d-1}$ en coordonnées $(z_1(s), \ldots, z_d(s))$. Le deuxième terme de la soustraction est la *matrice de Gram* du vecteur $(z_1(s), \ldots, z_d(s))$.

Le cas $d = 2$ est particulièrement intéressant : le groupe de Möbius s'identifie au groupe $\mathrm{PSU}(1,1) = \mathrm{SU}(1,1)/\{\pm\mathrm{id}\}$ agissant par transformations homographiques sur $\mathbb{S}^1$. Le groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ étant un revêtement à deux feuillets au-dessus de $\mathrm{PSU}(1,1)$, on a aussi une équation différentielle comme (2) dans le groupe de

matrices SU(1, 1) qui s'écrit

$$\dot{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda/2 \\ \bar{\lambda}/2 & 0 \end{pmatrix} g(t), \quad g(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $g(t) = \left(\begin{smallmatrix} a(t) & b(t) \\ \bar{b}(t) & \bar{a}(t) \end{smallmatrix}\right)$, $|a(t)|^2 - |b(t)|^2 = 1$ et λ est un nombre complexe dépendant de g, de t, ainsi que de la courbe γ.

Notre deuxième résultat concerne l'existence d'un relevé horizontal sur tout l'intervalle $[0, 1]$. En effet, le groupe de Möbius n'étant pas compact, la solution de l'équation différentielle (2) n'est pas garantie pour tout t. Notre énoncé le plus simple se situe dans le cas d'une configuration *nomade*, c'est-à-dire une configuration telle que $z_0^{-1}(p)$ est de mesure de Lebesgue nulle pour tout $p \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Théorème de relèvement. Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration nomade. Soit $B_L(0)$ la boule ouverte centrée en 0 et de rayon L. Alors, pour toute courbe $\mathcal{C}^1$ $\gamma : [0, 1] \to B_L(0)$ avec $\gamma(0) = f(z_0)$, il existe un unique relèvement horizontal $\hat{\gamma} : [0, 1] \to \mathrm{Conf}$ de γ avec $\hat{\gamma}(0) = z_0$.

Le théorème de relèvement se généralise à des serpents de configuration non-nomade via la notion de *sédentarité* d'une configuration (paragraphe 3.3). Nous présentons également des exemples où la solution n'existe pas pour tout $t \in [0, 1]$, même si γ reste dans les valeurs régulières. Ceci est contraire à ce qui se passe en dimension finie dans le cas des bras articulés.

Lorsque la configuration initiale z_0 est alignée, c'est-à-dire $z_0([0, L]) \subset \{\pm p\}$ pour un certain $p \in \mathbb{S}^{d-1}$, on ne peut relever $\gamma(t)$ que si $\dot{\gamma}(0)$ est perpendiculaire à p. En dimension $d = 2$ et en utilisant des développements de Taylor, E. Hairer a découvert une autre condition nécessaire à l'existence d'un relevé horizontal portant sur la courbure $\kappa(0)$ de $\gamma(t)$ en $t = 0$. Il faut que la courbure satisfasse à $\kappa(0) = \frac{L_+ - L_-}{L}$, où L_+ est la somme des longueurs des intervalles où $z_0(s) = p$ (de même pour L_-). En utilisant le théorème principal, nous montrons que cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un relevé horizontal z_t partant d'une configuration alignée dans le cas des bras articulés planaires. À notre connaissance, l'apparition de telles conditions du second ordre pour l'existence de relevés horizontaux pour des distributions de rang non-constant ne figure pas encore dans la littérature.

Après avoir résolu le problème du relèvement horizontal, nous sommes revenus, au chapitre 4, à la question que nous nous sommes posée plus haut : *que se passe-t-il au niveau de notre algorithme si l'on approxime un serpent par des bras articulés ?* Autrement dit, nous cherchons à comprendre ce qui se passe au niveau de la solution $g(t)$ de l'équation (2) lorsqu'on approche un serpent (une courbe $\mathcal{C}^1$) par un bras articulé (une courbe linéaire par morceaux). Ceci est évidemment très utile pour les simulations numériques puisque les bras articulés sont les seuls serpents que l'on peut « manipuler » avec un ordinateur. Nous avons, pour cela, généralisé l'espace de configurations pour inclure toutes les applications continues par morceaux (pas seulement pour un partage fixé), puis nous avons montré le (voir 4.5 pour un énoncé plus précis) :

Théorème de continuité. La solution $g(t)$ de l'équation différentielle (2) dépend de manière continue de la configuration initiale z_0 et de la courbe à suivre γ.

Pour terminer ce travail, nous présentons au chapitre 5 divers exemples et expériences numériques qui illustrent l'algorithme du charmeur de serpents. L'équation différentielle pour $g(t)$ dans le groupe de Möbius pourrait évidemment se résoudre numériquement, en utilisant par exemple des méthodes géométriques de résolution d'équations différentielles dans des groupes de Lie [HLW02]. Ces méthodes conviendraient particulièrement bien en dimensions deux et trois quand le groupe $\mathrm{Möb}(d-1)$ peut facilement être remplacé par les groupes de matrices $\mathrm{SU}(1,1)$ ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Une autre méthode numérique est présentée au paragraphe 5.2, dite la méthode *des flots hyperboliques*. Celle-ci s'appuie sur le fait que les gradients sur Conf des fonctions $z \mapsto \langle v, f(z)\rangle$, pour $v \in \mathbb{R}^d$, sont explicitement intégrés par des courbes de la forme $t \mapsto \Gamma_t^v \cdot z_0$. La méthode numérique des flots hyperboliques consiste à trouver une courbe $\tilde{z}_t$ qui soit une succession de segments du type $\tau \mapsto \Gamma_\tau^v \cdot z$, telle que $f(\tilde{z}_t)$ approche $\gamma(t)$ à une précision souhaitée. Bien que $\tilde{z}$ ne soit qu'une approximation de la solution exacte z_t, cette méthode nous garantit que la courbe $\tilde{z}_t$ est horizontale. Ce genre de méthode pourrait avoir de l'intérêt pour d'autres équations différentielles dans des groupes de Lie.

Remerciements. Commençons par le début, il y a 28 ans en arrière... Je remercie en premier lieu mes parents pour leur soutien et encouragement ainsi que pour l'éducation qu'ils m'ont donnée. Curiosité et rigueur d'esprit, le premier pas pour entrer dans le monde de la science. Je passe ensuite à mon frère qui m'a énormément aidé au long de ces années et qui, comme moi, a trouvé une passion dans les mathématiques. Bonne chance pour ta thèse à venir, мой брат ! Je pense qu'il me faudrait bien des mots dans diverses langues pour remercier Pauline, mon épouse, pour son soutien, sa patience, son encouragement, son amour et tout le reste.

Je tiens également à remercier tous les professeurs, assistants et le personnel administratif de la section de mathématiques à Genève. Il est toujours agréable de collaborer avec des personnes à la fois compétentes et sympathiques. Je voudrais mentionner en particulier Ernst Hairer de qui j'ai appris les secrets de l'analyse numérique en étant assistant des ses cours, David Cohen qui m'a souvent encouragé lors de périodes creuses de ma recherche (vive eMule !) ainsi que Benoît Dhérin dont les nombreuses discussions mathématiques et philosophiques au cours de mes études m'ont beaucoup inspiré. Encore merci pour m'avoir souvent écouté et pour avoir relu en partie ma thèse !

Pour terminer, je voudrais remercier les membres du jury, les Professeurs Etienne Ghys, Pierre de la Harpe et Tudor Ratiu, pour leur intérêt porté à ma thèse. *Last but not least*, je remercie mon directeur de thèse, Jean-Claude Hausmann, avec qui j'ai eu un véritable plaisir de travailler. Je suis bien content d'avoir appris tant de choses dans des domaines différents, merci !

Il nous faut peu de mots pour exprimer l'essentiel ; il nous faut tous les mots pour le rendre réel.

Paul Éluard

Chapitre 1

Au sujet des serpents

Nous présentons dans ce chapitre les notions de base utiles à l'algorithme du charmeur de serpents. Nous définissons l'espace de configurations et les serpents associés. Nous donnons quelques propriétés de cet espace et introduisons ensuite la distribution horizontale, fondamentale pour notre problème de relèvement de courbes. Nous terminons le chapitre en étudiant les points critiques de l'application « extrémité du serpent ».

Afin de ne pas avoir à nous répéter, nous convenons de certaines notions. Le terme « lisse » sera synonyme de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sauf mention du contraire, les variétés seront toutes lisses. L'espace $\mathbb{R}^d$ sera toujours muni du produit scalaire euclidien standard que l'on désigne par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ et de la métrique induite par celui-ci. Nous désignerons par $\int$ l'intégrale de Riemann.

1.1 Bras articulés

Désignons par $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$. Soit N un entier strictement positif ; considérons le produit $(\mathbb{S}^{d-1})^N$, muni de la métrique produit. Soit $a = (a_1, \ldots, a_N)$ avec $a_i > 0$, pour $i = 1, \ldots, N$. Pour tout $z = (z_1, \ldots, z_N) \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$, on considère un chemin polygonal partant de 0 et passant par les points $\sum_{i=1}^k a_i z_i$ pour $k = 1, \ldots, N$. Il s'agit du ***bras articulé de type*** a associé à z. On s'intéresse spécialement à l'extrémité du bras et on considère l'application $f^a : (\mathbb{S}^{d-1})^N \to \mathbb{R}^d$ définie par

$$f^a(z) = \sum_{i=1}^N a_i z_i.$$

On appelle cette application ***l'extrémité*** du bras ou simplement le bras articulé. S'il n'y a pas de risque de confusion, on écrira simplement f au-lieu de f^a.

Dans le cas $d = 2$, on identifiera souvent $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ et on écrira les éléments de $\mathbb{S}^1$ comme e^{iq}. La figure 1.1 illustre le point

$$z = (e^{i\pi/3}, e^{i\pi/6}, e^{-i\pi/8}, e^{-i\pi/4}, e^{-i\pi/10})$$

dans $(\mathbb{S}^1)^5$ et le bras articulé de type $a = (1, \ldots, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ correspondant.

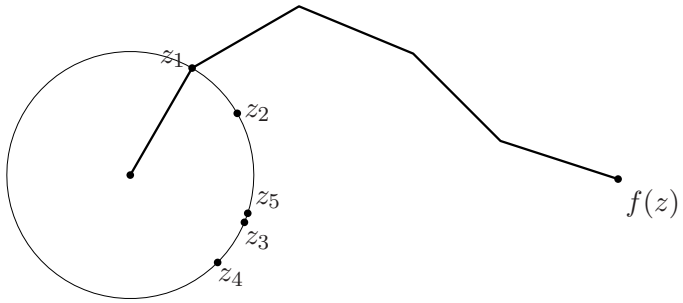


FIG. 1.1 – Un bras articulé dans $\mathbb{R}^2$.

Pour l'étude que nous allons faire, on peut toujours se ramener, modulo un changement de métrique riemannienne sur le produit $(\mathbb{S}^{d-1})^N$, au cas où les a_i sont tous les mêmes [Ha05, Remarque 4.3]. On parle alors de ***bras articulé isocèle***.

Dans les paragraphes 1.2 et 1.3 nous généralisons les bras articulés à des « serpents » qui ne sont plus nécessairement des lignes polygonales mais sont des courbes continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1.2 L'espace des configurations

Soit M une variété lisse et soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une courbe $\gamma : [a, b] \to M$ est dite $\mathcal{C}^k$ ***par morceaux*** s'il existe un ensemble fini $\mathcal{P} = \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = b\}$ tel que, pour tout $i = 0, \ldots, N-1$, la restriction $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}[}$ de γ à l'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite $[s_i, s_{i+1}[$ se prolonge en une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ définie sur l'intervalle fermé $[s_i, s_{i+1}]$. On regarde parfois $\mathcal{P}$ comme une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles sur lesquels γ est $\mathcal{C}^k$. On dit que γ est $\mathcal{C}^k$ ***par morceaux pour*** $\mathcal{P}$. Remarquons qu'en particulier γ est continue à droite. L'ensemble $\mathcal{P}$ peut être réduit à $\{a, b\}$ et dans ce cas γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout $[a, b]$. On désigne par $\mathcal{C}^k([a, b], M)$ l'ensemble des courbes $\mathcal{C}^k$ de $[a, b]$ vers M. Lorsqu'une partition $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ est fixée, $\mathcal{C}^k_{\mathcal{P}}([a, b], M)$ désigne l'ensemble des courbes qui sont $\mathcal{C}^k$ par morceaux pour $\mathcal{P}$.

1.1. DÉFINITION. Soit L un nombre réel strictement positif et soit $\mathcal{P}$ une partition de l'intervalle $[0, L]$. L'***espace des configurations de serpents*** dans $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{P}}_L(d-1) = \mathcal{C}^0_{\mathcal{P}}([0, L], \mathbb{S}^{d-1}).$$

Les éléments de $\mathrm{Conf}^{\mathcal{P}}_L(d-1)$ sont appelés des ***configurations***.

Le terme « $d-1$ » fait référence à la dimension de la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. S'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrirons Conf au lieu de $\mathrm{Conf}^{\mathcal{P}}_L(d-1)$.

Considérons le cas particulier où $L = N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}$ est l'ensemble $\{0, \ldots, N\}$. On a une inclusion de $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ dans Conf : en effet, il suffit d'envoyer $(z_1, \ldots, z_N)$ sur l'application constante par morceaux qui vaut z_i sur le i-ème sous-intervalle. Dans ce sens, nos configurations généralisent celles de Hausmann. La configuration de la figure 1.1 devient alors l'application de $[0, 5]$ dans $\mathbb{S}^1$, $z(s) = e^{iq(s)}$ où

$$q(s) = \begin{cases} \pi/3 & s \in [0, 1[\\ \pi/6 & s \in [1, 2[\\ -\pi/8 & s \in [2, 3[\\ -\pi/4 & s \in [3, 4[\\ -\pi/10 & s \in [4, 5]\,. \end{cases}$$

Observons que la métrique euclidienne $d(p, q) = \|p - q\|$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$ détermine une métrique sur Conf,

$$d(z, w) = \sup_{s \in [0,L]} d(z(s), w(s)) = \sup_{s \in [0,L]} \|z(s) - w(s)\|,$$

qui induit la topologie de la convergence uniforme. Nous munissons Conf de cette topologie. En tant qu'espace métrique, Conf est complet. En considérant également la topologie de la convergence uniforme sur l'ensemble $\mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^{d-1})$, on a un homéomorphisme naturel

$$\mathrm{Conf} \longrightarrow \prod_{i=0}^{N-1} \mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^{d-1})$$

donnée par la restriction d'une configuration aux différents sous-intervalles.

L'espace $(\mathbb{S}^{d-1})^N$, étant un produit de N sphères, possède pour N arbitrairement grand une structure naturelle de variété lisse.

Pourrait-on munir l'espace Conf *d'une structure de variété lisse ?*

Celui-ci serait de « dimension infinie » et il faut donc une généralisation de la notion de variété en dimension infinie.

1.2. Définition. Un espace topologique M est une ***variété banachique lisse*** s'il existe un ensemble de ***cartes*** $\{(U_i, \varphi_i)\}$ tels que :

(1) les U_i sont ouverts et recouvrent M ;

(2) pour tout i, l'application $\varphi_i : U_i \to E$ est un homéomorphisme de U_i vers un ouvert $\varphi_i(U_i)$ d'un espace de Banach E ;

(3) pour tous les i, j, le ***changement de cartes*** $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$, on retrouve la notion classique de variété lisse. De nombreuses notions de géométrie différentielle en dimension finie restent valables en dimension infinie. Nous en mentionnons certaines qui nous seront utiles par la suite. Pour plus d'information, nous renvoyons le lecteur aux livres de Lang [La99] et de Abraham, Marsden et Ratiu [AMR88].

- Soient M une variété banachique lisse et $p \in M$. Soient $\gamma_i : I \to M$, $i = 1, 2$, deux courbes $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma_i(0) = p$. On montre facilement que si γ_1 et γ_2 ont même vecteur vitesse en $t = 0$ dans une certaine carte contenant p, alors elles ont le même vecteur vitesse dans n'importe quelle autre carte contenant p. Le fait « d'avoir même vecteur vitesse au point p » est une relation d'équivalence. Si γ est une courbe passant par p en $t = 0$, alors $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$ désigne sa classe. L'***espace tangent*** à M en p est l'ensemble des classes d'équivalence de courbes en p :
$$T_pM = \left\{ \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} \,\middle|\, \gamma \text{ est une courbe en } p \right\}.$$
On montre que T_pM est un espace de Banach isomorphe (en tant qu'espace de Banach) à E (l'espace sur lequel est modelée M au voisinage de p). La réunion $\bigcup_{p\in M} T_pM$ de tous les espaces tangents peut également être munie d'une structure de variété banachique lisse que l'on note TM et qu'on appelle le ***fibré tangent*** à M. Un ***champ de vecteurs*** est une section lisse du fibré tangent, $X : M \to TM$. L'ensemble des champs de vecteurs est désigné par $\mathrm{Vec}(M)$. La théorie des équations différentielles étant la même en dimension infinie qu'en dimension finie, les notions de « trajectoire » et « flot » d'un champ de vecteurs sont également les mêmes.
- En dimension infinie la caractérisation des vecteurs tangents comme des dérivations sur l'algèbre des fonctions lisses sur M n'est plus possible ; voir par exemple [AMR88, 4.2.16].
- Rappelons qu'on dit qu'un sous-espace fermé F d'un espace de Banach E ***admet un complémentaire*** ou est ***scindé*** s'il existe un sous-espace fermé F' tel que $F \cap F' = \{0\}$ et $E = F + F'$ (somme algébrique). On écrit alors $E = F \oplus F'$.
- Soit $f : M \to N$ une application lisse entre des variétés banachiques lisses. On dit que f est une ***immersion*** si, pour tout $p \in M$, T_pf est injective et si son image est fermée et scindée dans $T_{f(p)}N$; on dit que f est une ***submersion*** si, pour tout $p \in M$, T_pf est surjective et si son noyau est scindé dans T_pM.
- L'espace de Banach E sur lequel est modelée la variété M n'est, en général, pas « hilbertisable[1] » et donc, pour tout $p \in M$, l'espace tangent T_pM non plus. Autrement dit, une variété banachique lisse ne possède pas nécessairement de structure riemannienne, ce qui est évidemment contraire à ce qui se passe en dimension finie.

Dans ce qui suit, nous utiliserons le terme « variété de dimension infinie » pour souligner le fait que E n'est pas de dimension finie. Nous parlerons de « variété de dimension finie » pour des notions valables uniquement en dimension finie et simplement « variété » lorsque la dimension n'a pas d'importance. La proposition 1.3 ci-dessous répond à la question de munir Conf d'une structure de variété banachique lisse.

1.3. Proposition. *L'espace* Conf *possède une structure de variété banachique lisse.*

Démonstration. Commençons par remarquer qu'on peut se ramener au cas où l'ensemble $\mathcal{P} = \{0, L\}$, autrement dit, nous montrons que $\mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{S}^{d-1})$ est une va-

[1] Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est ***hilbertisable***, s'il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tel que la norme induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ soit équivalente à $\|\cdot\|$.

riété banachique lisse. En effet, ceci montre que les espaces $\mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^{d-1})$, pour $i = 0, \ldots, N-1$, sont des variétés banachiques lisses. Comme Conf est homéomorphe au produit fini $\prod_{i=1}^{N} \mathcal{C}^0([s_i, s_{i+1}], \mathbb{S}^{d-1})$, il suffit ensuite de le munir de la structure banachique produit. Nous supposons ainsi jusqu'à la fin de la preuve que $\mathcal{P} = \{0, L\}$.

Nous donnons deux preuves du fait que Conf est une variété banachique lisse. Une première qui est immédiate et une deuxième permettant de voir Conf comme une sous-variété d'un espace de Banach.

Pour la première preuve, on invoque tout simplement un résultat de Eells [Ee58] affirmant que si M est une variété riemannienne et S un espace topologique compact, alors l'espace des applications continues $\mathcal{C}^0(S, M)$ de S vers M est une variété banachique lisse.

Pour la deuxième preuve, soit l'espace de Banach $\mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R}^d)$ muni de la norme $\|v\| = \sup_{s\in[0,L]} \|v(s)\|$. Considérons l'application $\mu : \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})$ définie par

$$\mu(v)(s) = \|v(s)\|^2.$$

Il s'agit d'une application lisse entre des espaces de Banach et sa dérivée est donnée par $D_v\mu(w)(s) = 2\langle v(s), w(s)\rangle$. L'idée est de montrer que l'application constante $\mathbf{1} : s \mapsto 1$ dans $\mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})$ est une valeur régulière. Comme Conf $= \mu^{-1}(\mathbf{1})$, la proposition s'ensuit.

Montrons plus généralement que $D_v\mu$ est surjective et que $K_v = \ker D_v\mu$ admet un complémentaire dans $\mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R}^d)$ pour tout v tel que $v(s) \neq 0$ pour tout $s \in [0, L]$. La surjectivité découle du fait que si $f \in \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})$, alors en choisissant, par exemple,

$$w(s) = \left(\frac{f(s)v_1(s)}{2\|v(s)\|^2}, \ldots, \frac{f(s)v_d(s)}{2\|v(s)\|^2}\right),$$

on a $D_v\mu(w) = f$. Comme $D_v\mu$ est linéaire et continue, le sous-espace K_v est fermé. Pour montrer que K_v admet un complémentaire, remarquons que

$$K_v = \{w \in \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R}^d) \mid \langle v(s), w(s)\rangle = 0 \;\forall\, s \in [0, L]\}.$$

Posons

$$H_v = \{s \mapsto f(s)v(s) \mid f \in \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R})\}.$$

Il s'agit encore d'un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R}^d)$ et on a évidement $K_v \cap H_v = \{0\}$. Pour voir que $\mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R}^d) = K_v + H_v$, il suffit de remarquer qu'on peut écrire tout élément $w \in \mathcal{C}^0([0, L], \mathbb{R}^d)$ comme

$$w(s) = \underbrace{w(s) - \frac{\langle v(s), w(s)\rangle}{\|v(s)\|^2} v(s)}_{\in K_v} + \underbrace{\frac{\langle v(s), w(s)\rangle}{\|v(s)\|^2} v(s)}_{\in H_v}.$$

□

Comme la topologie sur Conf est induite par une métrique, la variété Conf est en particulier séparée. L'espace tangent à Conf au point z est l'espace vectoriel

$$T_z\mathrm{Conf} = \left\{ v : [0, L] \to \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{c} v \text{ est continue par morceaux pour } \mathcal{P} \\ \text{et } \langle v(s), z(s)\rangle = 0 \;\forall\, s \in [0, L] \end{array} \right\}.$$

Notons que si $v \in T_z\mathrm{Conf}$, alors $v(s) \in T_{z(s)}\mathbb{S}^{d-1}$ pour tout s. C'est un espace de Banach pour la norme $\|v\|_z = \sup_{s\in[0,L]} \|v(s)\|$. De plus, nous munissons cet espace d'un produit scalaire

$$\langle v, w\rangle = \int_0^L \langle v(s), w(s)\rangle \, ds.$$

Remarquons que la norme induite par ce produit scalaire n'est pas complète et donc que $T_z\mathrm{Conf}$ est seulement préhilbertien[2]. Soit $\exp : T\mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ l'application exponentielle de la sphère. Celle-ci étant compacte, exp est définie sur tout le fibré tangent. Pour tout $p \in \mathbb{S}^{d-1}$, nous désignons par $\exp_p$ la restriction de l'exponentielle à l'espace tangent $T_p\mathbb{S}^{d-1}$. Elle donne lieu à une paramétrisation locale de Conf,

$$\mathrm{Exp}_z : T_z\mathrm{Conf} \longrightarrow \mathrm{Conf},$$

où $\mathrm{Exp}_z(v)(s) = \exp_{z(s)} v(s)$. Ce sont précisément les applications Exp_z qui permettent dans la première preuve de 1.3 de construire la structure banachique sur Conf ; voir [Ee58].

1.4. Remarque. Nous allons considérer par la suite des courbes $t \mapsto z_t \in \mathrm{Conf}$ pour t dans un intervalle I. L'espace de configurations possédant une structure de variété banachique lisse, on peut demander que z_t soit $\mathcal{C}^1$. Le vecteur vitesse $\dot{z}_t \in T_{z_t}\mathrm{Conf}$ est une application $s \mapsto \dot{z}_t(s)$ telle que $\dot{z}_t(s) \in T_{z_t(s)}\mathbb{S}^{d-1}$. Remarquons que pour calculer $\dot{z}_t(s)$, il suffit de fixer $s \in [0, L]$ et de dériver par rapport à t la courbe $t \mapsto z_t(s) \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Nous terminons ce paragraphe en étudiant le problème suivant. Soit G un groupe de Lie agissant de manière lisse[3] sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Cette action induit une action sur Conf donnée par $(g\cdot z)(s) = g(z(s))$. Comme Conf est une variété lisse, on peut se demander ce qu'il en est de la différentiabilité de l'action. Ceci est un cas particulier du résultat suivant.

1.5. Proposition. *Soit G un groupe de Lie agissant de manière lisse sur une variété riemannienne M. Soit S un espace topologique compact et soit $\mathcal{C}^0(S, M)$ la variété banachique lisse des applications continues de S vers M. L'action naturelle de G sur $\mathcal{C}^0(S, M)$, donnée par $(g \cdot x)(s) = g \cdot x(s)$, est lisse.*

Démonstration. On procède de manière semblable à la preuve de Eells [Ee58]. □

1.3 Serpents

Si v est une application Riemann intégrable d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^d$, nous désignons par $\int_a^b v(s)ds$ le vecteur dont les composantes sont $\int_a^b v_i(s)ds$ pour $i = 1, \ldots, d$.

[2]Rappelons qu'un espace vectoriel E est dit ***préhilbertien*** s'il est muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$; la norme $\|\cdot\|_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ n'est pas nécessairement complète. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel fermé, on n'a pas, en général, de décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Une telle décomposition existe si, par exemple, F est de dimension (ou codimension) finie.

[3]Rappelons qu'une action d'un groupe de Lie G sur une variété M est dite ***lisse***, si l'application $G \times M \to M$ envoyant (g, p) sur $g \cdot p$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour une configuration z donnée, on définit le ***serpent associé à*** z comme la courbe $\mathcal{S}_z : [0, L] \to \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{S}_z(s) = \int_0^s z(\tau)d\tau.$$

Remarquons que $\mathcal{S}_z$ est une courbe continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et de longueur L. Soit $\mathcal{P} = \{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = L\}$, l'ensemble pour lequel z est continue par morceaux. En dehors de $\mathcal{P}$, le serpent $\mathcal{S}_z$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On prolonge la définition de $\dot{\mathcal{S}}_z(s)$ aux points $s_1, \ldots, s_{N-1}$ en posant $\dot{\mathcal{S}}_z(s_i) = \dot{\mathcal{S}}_z|_{[s_i, s_{i+1}[}(s_i)$. La fonction $s \mapsto \dot{\mathcal{S}}_z(s)$ est alors continue par morceaux et on a $\dot{\mathcal{S}}_z(s) = z(s)$.

Comme pour les bras articulés, nous sommes intéressés par l'extrémité de $\mathcal{S}_z$ et considérons ainsi l'application $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$,

$$f(z) = \mathcal{S}_z(L) = \int_0^L z(s)ds.$$

Nous utiliserons le terme « serpent » également pour désigner l'application f. Supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas réduit à $\{0, L\}$ et que la configuration z est constante par morceaux valant z_i sur l'intervalle $[s_{i-1}, s_i[$, pour $i = 1 \ldots, N$. On a évidemment $f(z) = \sum_{i=1}^N L_i z_i$, où $L_i = s_i - s_{i-1}$. Nous parlons dans ce cas de ***serpent polygonal*** ; il s'agit du bras articulé de type $a = (L_1, \ldots, L_N)$ (voir 1.1).

Remarquons encore que l'image de Conf par f est la boule fermée centrée à l'origine et de rayon L.

1.6. Exemple. Pour représenter un serpent dans l'espace à trois dimensions, nous identifions parfois $\mathbb{S}^2$ avec $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Soit $L = 2$. La figure 1.2 illustre la configuration $z(s) = 1.2 + i(s + 0.2)$ (dessinée en pointillé sur la sphère $\mathbb{S}^2$) et le serpent correspondant.

1.7. Proposition. *Le serpent $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$ est une application lisse. Sa dérivée, $T_z f : T_z\mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$, est donnée par*

$$T_z f(v) = \int_0^L v(s)ds. \tag{1.1}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{C}^k_{\mathcal{P}}([0, L], \mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des applications continues par morceaux pour le partage $\mathcal{P}$. L'application $\tilde{f} : \mathcal{C}^k_{\mathcal{P}}([0, L], \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$, $\tilde{f}(v) = \int_0^L v(s)ds$ est linéaire et continue ; elle est donc lisse et sa dérivée est bien (1.1). Le serpent f est la restriction de $\tilde{f}$ à la sous-variété Conf. La proposition s'ensuit. □

1.4 La distribution horizontale

Rappelons qu'une ***distribution*** sur une variété M est une correspondance $x \mapsto \Delta(x)$ où $x \in M$ et $\Delta(x)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $T_x M$. Une distribution est dite ***différentiable*** si elle est engendrée par des champs de vecteurs. Autrement dit, Δ est différentiable s'il existe un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathrm{Vec}(M)$ tel que $\Delta(x) = \langle \xi(x) \mid \xi \in \mathcal{F} \rangle$. De plus, on dit qu'un champ de vecteurs ξ appartient à Δ si $\xi(x) \in \Delta(x)$ pour tout $x \in M$; on écrit $\xi \in \Delta$. Les distributions que nous étudierons seront de

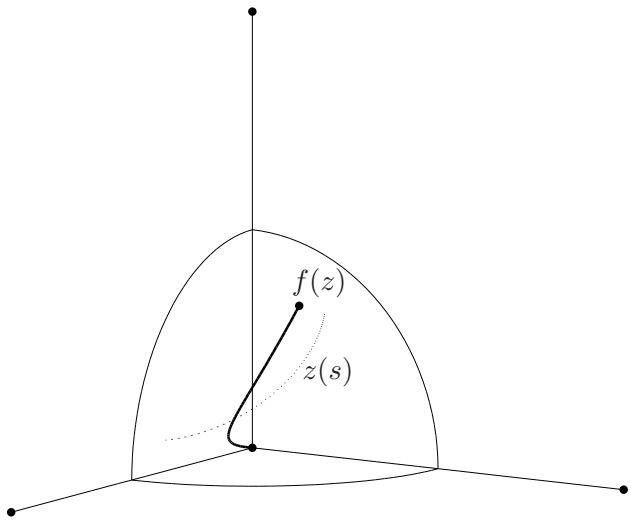


FIG. 1.2 – Un serpent dans $\mathbb{R}^3$ et sa configuration.

rang fini, c'est-à-dire $\dim \Delta(x) < \infty$ pour tout $x \in M$. Elle ne seront cependant pas forcément de rang constant. Nous reviendrons plus longuement sur les distributions au paragraphe 2.1.

Inspirés par les connexions d'Ehresmann [Eh51] et l'article de Hausmann [Ha05], nous cherchons à définir une « distribution horizontale » pour résoudre le problème du charmeur de serpents. Nous utilisons pour cela la structure préhilbertienne sur $T_z\mathrm{Conf}$ donnée par le produit scalaire $\langle v, w\rangle = \int_0^L \langle v(s), w(s)\rangle\, ds$. Désignons par $\|\cdot\|_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ la norme induite par ce produit scalaire. Remarquons que $\|\cdot\|_2^2 \leq L\|\cdot\|^2$. Il s'ensuit que, comme $T_z f$ est continue pour $\|\cdot\|$, elle l'est aussi pour $\|\cdot\|_2$. Le noyau $\ker T_z f$ est donc fermé (pour les deux normes) et, de plus, est de codimension finie. Il s'ensuit que

$$T_z\mathrm{Conf} = (\ker T_z f)^\perp \oplus \ker T_z f. \tag{1.2}$$

Remarquons que cette somme directe topologique est valable non seulement pour $\|\cdot\|_2$, mais également pour $\|\cdot\|$. Nous définissons alors la distribution horizontale comme

$$\Delta(z) = (\ker T_z f)^\perp. \tag{1.3}$$

La distribution horizontale possède évidemment la propriété suivante : soit $x \in \mathrm{im} T_z f \subset \mathbb{R}^d$ et soit $v \in T_z\mathrm{Conf}$ l'unique vecteur dans $\Delta(z)$ tel que $T_z f(v) = x$. Alors, v est le vecteur de norme minimale (pour la norme $\|\cdot\|_2$) dans $T_z\mathrm{Conf}$ au-dessus de x.

Nous cherchons à présent une famille de champs de vecteurs sur Conf qui engendrent Δ. Rappelons pour cela que si M est une variété riemannienne de dimension

finie et si $\varphi : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, il existe un unique champ de vecteurs $\mathrm{grad}(\varphi)$, le ***gradient*** de φ, tel que

$$\mathbb{R} \ni \langle \mathrm{grad}(\varphi)(p), v\rangle = d\varphi(p)(v) \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

pour tout $p \in M$ et $v \in T_pM$. Remarquons que dans le cadre des bras articulés où $f(z) = \sum_{i=1}^N z_i$, le noyau $\ker T_z f \subset T_z(\mathbb{S}^{d-1})^N$ est engendré par les champs de la forme $\mathrm{grad}(\varphi \circ f)$ pour toutes les fonctions lisses $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Cela suit naturellement du fait que $\langle \mathrm{grad}(\varphi \circ f)(z), v\rangle = 0$ pour tout $z \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$ et pour tout vecteur $v \in \ker T_z f$. En dimension infinie, comme $T_z\mathrm{Conf}$ n'est pas un espace de Hilbert, l'existence de gradients n'est a priori pas garantie. Nous procédons alors comme suit. Soit $z = (z_1, \ldots, z_N) \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$; le vecteur $\mathrm{grad}(\varphi \circ f)(z) \in T_z(\mathbb{S}^{d-1})^N$ s'écrit comme $(v_1, \ldots, v_N)$ avec v_i orthogonal à z_i. Par le calcul, on vérifie que

$$v_i = \mathrm{grad}(\varphi)(f(z)) - \langle z_i, \mathrm{grad}(\varphi)(f(z))\rangle\, z_i.$$

Le vecteur v_i est donc la projection orthogonale de $\mathrm{grad}(\varphi)(f(z))$ sur $T_{z_i}\mathbb{S}^{d-1} \simeq z_i^\perp$. Il est alors naturel d'étendre la définition de $\mathrm{grad}(\varphi \circ f)$ à la variété Conf en posant :

$$\mathrm{grad}(\varphi \circ f)(z)(s) = \mathrm{grad}(\varphi)(f(z)) - \langle z(s), \mathrm{grad}(\varphi)(f(z))\rangle\, z(s), \tag{1.5}$$

où $z \in \mathrm{Conf}$ est une configuration donnée. Afin de simplifier les notations, nous écrirons ξ_φ à la place de $\mathrm{grad}(\varphi \circ f)$. Le lemme suivant justifie notre définition de gradient.

1.8. Lemme. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Le champ de vecteurs $\xi_\varphi = \mathrm{grad}(\varphi \circ f)$ est un champ de vecteurs sur* Conf*, c'est-à-dire $\langle \xi_\varphi(z)(s), z(s)\rangle = 0$ pour tout $z \in \mathrm{Conf}$ et pour tout $s \in [0, L]$. De plus, il satisfait à*

$$\langle \xi_\varphi(z), v\rangle = T_z(\varphi \circ f)(v)$$

pour tout vecteur $v \in T_z\mathrm{Conf}$.

Démonstration. (1) $\xi_\varphi(z) \in T_z\mathrm{Conf}$; en effet, nous avons

$$\langle \xi_\varphi(z)(s), z(s)\rangle = \langle \mathrm{grad}(\varphi)(f(z)), z(s)\rangle - \langle z(s), \mathrm{grad}(\varphi)(f(z))\rangle\, \langle z(s), z(s)\rangle = 0,$$

car $\langle z(s), z(s)\rangle = 1$ pour tout $s \in [0, L]$;

(2) $\langle \xi_\varphi(z), v\rangle = T_z(\varphi \circ f)(v)$; développons d'abord le membre de gauche. Pour simplifier l'écriture, désignons par w le vecteur $\mathrm{grad}(\varphi)(f(z))$:

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\varphi(z), v\rangle &= \int_0^L \langle \xi_\varphi(z)(s), v(s)\rangle\, ds \\
&= \int_0^L \langle w - \langle z(s), w\rangle\, z(s), v(s)\rangle\, ds \\
&= \int_0^L \langle w, v(s)\rangle\, ds - \int_0^L \langle z(s), w\rangle \underbrace{\langle z(s), v(s)\rangle}_{=0} ds \\
&= \int_0^L \langle w, v(s)\rangle\, ds, \\
&= \sum_{i=1}^d w_i \int_0^L v_i(s) ds\ ;
\end{aligned}$$

le membre de droite nous donne

$$T_z(\varphi \circ f)(v) = (T_{f(z)}\varphi \circ T_z f)(v) = T_{f(z)}\varphi(\int_0^L v(s)ds)$$
$$= \left\langle w, \int_0^L v(s)ds \right\rangle = \sum_{i=1}^d w_i \int_0^L v_i(s)ds.$$

□

1.9. Remarque. Soit φ_v la forme linéaire $x \mapsto \langle v, x\rangle$, où $v \in \mathbb{R}^d$ et $\xi_v = \xi_{\varphi_v} = \mathrm{grad}(\varphi_v \circ f)$ le gradient correspondant. On a

$$\xi_v(z)(s) = v - \langle v, z(s)\rangle\, z(s). \tag{1.6}$$

Observons que le membre de droite ne dépend que de $z(s) \in \mathbb{S}^{d-1}$. Nous regarderons donc parfois le champ ξ_v comme un champ de vecteurs sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Géométriquement, le vecteur $\xi_v(z)(s) \in \mathbb{R}^d$ est la projection de v sur $T_{z(s)}\mathbb{S}^{d-1}$ que nous identifions à l'hyperplan orthogonal à $z(s)$. Remarquons en passant que $\xi_{v+w} = \xi_v + \xi_w$. Dans le cas particulier $v = e_i$, où e_i est un élément de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, nous écrirons simplement ξ_i à la place de ξ_{e_i} ; si $v = (v_1, \ldots, v_d)$ on a donc $\xi_v = \sum_{i=1}^d v_i\xi_i$. Les gradients ξ_i joueront un rôle important par la suite.

1.10. Proposition. *La distribution Δ est engendrée par les champs de vecteurs ξ_i, $i = 1, \ldots, d$, définis dans la remarque 1.9. Plus précisément, pour toute configuration $z \in \mathrm{Conf}$, on a :*

$$\Delta(z) = \langle \xi_1(z), \ldots, \xi_d(z)\rangle.$$

Démonstration. Soit $F = \langle \xi_1(z), \ldots, \xi_d(z)\rangle \subset T_z\mathrm{Conf}$. Nous allons montrer que $F^\perp = \ker T_z f$. Il s'ensuit que $\Delta(z) = (\ker T_z f)^\perp = (F^\perp)^\perp = F$.

Soit $w \in F^\perp$; ceci est équivalent à $\langle w, \xi_i(z)\rangle = 0$, pour $i = 1, \ldots, d$. En développant le membre de gauche de cette dernière égalité et en utilisant le fait que $\langle w(s), z(s)\rangle = 0$, nous obtenons

$$\langle w, \xi_i(z)\rangle = \int_0^L \langle w(s), \xi_i(z)(s)\rangle\, ds$$
$$= \int_0^L \langle w(s), e_i - z_i(s)z(s)\rangle\, ds = \int_0^L w_i(s)ds = 0,$$

pour $i = 1, \ldots, d$. Ces égalités sont équivalentes à $T_z f(w) = 0$. Nous avons ainsi montré que $w \in F^\perp$ est équivalent à $w \in \ker T_z f$. □

Plus généralement, pour toute fonction lisse $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, le gradient $\xi_\varphi = \mathrm{grad}(\varphi \circ f) \in \mathrm{Vec}(\mathrm{Conf})$ appartient à la distribution Δ. Ceci découle naturellement du fait que $\mathrm{grad}(\varphi) \in \mathrm{Vec}(\mathbb{R}^d)$ est combinaison linéaire des gradients des formes linéaires $x \mapsto \langle e_i, x\rangle$, pour $i = 1, \ldots, d$.

1.11. Exemple. Terminons ce paragraphe en regardant ce qui se passe en dimension 2. Les configurations sont des applications $z : [0, L] \to \mathbb{S}^1$ que l'on écrit comme

$z(s) = \cos q(s) + i \sin q(s) \in \mathbb{S}^1$. Les champs ξ_1 et ξ_2 s'obtiennent par la formule (1.6),

$$\begin{array}{rcrcl} \xi_1(z)(s) & = & \sin^2 q(s) & - & i \cos q(s) \sin q(s) \\ \xi_2(z)(s) & = & -\cos q(s) \sin q(s) & + & i \cos^2 q(s). \end{array}$$

On peut également regarder $\mathbb{S}^1$ comme l'ensemble des classes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et ainsi considérer les configurations comme des applications $s \mapsto q(s) \in \mathbb{R}$. Dans ce système de coordonnées, les gradients ξ_1 et ξ_2 ont une forme particulièrement simple. Soient les deux fonctions de Conf dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} X : q &\longmapsto \int_0^L \cos q(s) ds \\ Y : q &\longmapsto \int_0^L \sin q(s) ds. \end{aligned}$$

On a $\mathrm{grad}(X) = \xi_1$ et $\mathrm{grad}(Y) = \xi_2$. En développant X et Y en série de Taylor autour de q on obtient

$$\mathrm{grad}(X)(q)(s) = -\sin q(s) \quad \text{et} \quad \mathrm{grad}(Y)(q)(s) = \cos q(s).$$

Ainsi, un vecteur tangent $v \in T_q\mathrm{Conf}$ appartient à la distribution $\Delta(q)$ s'il s'écrit comme $v(s) = \lambda_1 \sin q(s) + \lambda_2 \cos q(s)$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1.5 Points critiques

Penchons-nous maintenant sur l'étude des points critiques de l'application f. Dans le cas des bras articulés et du produit $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ comme espace de configurations, la caractérisation des points critiques est bien connue [Ha91] : il s'agit de configurations alignées, c'est-à-dire contenues dans une paire antipodale $(p, -p)$. Dans notre cas, par (1.2), il suffit de regarder ce qui se passe pour la restriction de $T_z f$ au sous-espace de dimension finie $\Delta(z)$. Considérons pour cela l'application linéaire

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \Delta(z) & \longrightarrow & T_{f(z)}\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d \\ e_i & \longmapsto & \xi_i(z) & \longmapsto & T_z f(\xi_i(z)) \end{array}$$

où $(e_1, \ldots, e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Cette application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ est déterminée par une matrice $M(z) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Le résultat suivant explicite $M(z)$.

1.12. Lemme. *Pour toute configuration $z \in$ Conf on a,*

$$M(z) = \begin{pmatrix} L & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_0^L z_1(s) z_1(s) ds & \cdots & \int_0^L z_1(s) z_d(s) ds \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^L z_1(s) z_d(s) ds & \cdots & \int_0^L z_d(s) z_d(s) ds \end{pmatrix},$$

où $z(s) = (z_1(s), \ldots, z_d(s)) \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Démonstration. L'image par $T_z f$ du vecteur $\xi_i(z)$ s'écrit

$$T_z f(\xi_i(z)) = \int_0^L \xi_i(z)(s) ds = \int_0^L (e_i - z_i(s) z(s)) ds = L e_i - \int_0^L z_i(s) z(s) ds.$$

La i-ème colonne de la matrice de $M(z)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_0^L z_1(s)z_i(s)ds \\ \vdots \\ \int_0^L z_i(s)z_i(s)ds \\ \vdots \\ \int_0^L z_d(s)z_i(s)ds \end{pmatrix}.$$

□

1.13. Remarque. La matrice

$$G(z) = \begin{pmatrix} \int_0^L z_1(s)z_1(s)ds & \cdots & \int_0^L z_1(s)z_d(s)ds \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^L z_1(s)z_d(s)ds & \cdots & \int_0^L z_d(s)z_d(s)ds \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

est la ***matrice de Gram*** du vecteur $(z_1(s), \ldots, z_d(s))$. Dans le cas des serpents polygonaux où la configuration ne prend qu'un nombre fini de valeurs $z = (z_1, \ldots, z_N) \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$ et $f = \sum_{i=1}^N a_i z_i$, la matrice $G(z)$ s'écrit

$$G(z) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N a_i z_{i,1} z_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_i z_{i,1} z_{i,d} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^N a_i z_{i,1} z_{i,d} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_i z_{i,d} z_{i,d} \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

où $z_i = (z_{i,1} \ldots, z_{i,d}) \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Afin d'étudier les points critiques du serpent $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$, remarquons que $T_z f$ est surjective si et seulement si $M(z) \in \mathrm{GL}(d)$. Nous commençons par regarder ce qui se passe en dimension $d = 2$. On a $z(s) = (z_1(s), z_2(s)) \in \mathbb{S}^1$. Intéressons-nous aux valeurs propres de

$$G(z) = \begin{pmatrix} \int_0^L z_1^2(s)ds & \int_0^L z_1(s)z_2(s)ds \\ \int_0^L z_1(s)z_2(s)ds & \int_0^L z_2^2(s)ds \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 1.12, l'application $M(z)$ est inversible si, et seulement si, L n'est pas une valeur propre de $G(z)$. Les valeurs propres de $G(z)$ sont :

$$\frac{L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - (A - B)},$$

où $A = \int_0^L z_1^2(s)ds \int_0^L z_2^2(s)ds$ et $B = \left(\int_0^L z_1(s)z_2(s)ds\right)^2$. Il s'ensuit que L est une valeur propre si, et seulement si, $A = B$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cela revient à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_1(s) = \lambda z_2(s)$ pour tout s. Autrement dit, la configuration $z = (z_1, z_2)$ est sur une droite vectorielle de pente λ. Comme z est sur le cercle unité, cela revient à dire que $z(s) = \pm z(t)$ pour tout $s, t \in [0, L]$. Ceci nous mène à la définition suivante.

1.14. Définition. Une configuration $z \in \mathrm{Conf}$ est dite ***alignée*** s'il existe $p \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $z([0,L]) \subset \{\pm p\}$. Sinon, nous dirons qu'elle est ***générique*** ou ***non-alignée***.

Une configuration alignée z est donc telle que le sous-espace vectorielle de $\mathbb{R}^d$ engendré par les points du serpent $\mathcal{S}_z$ est de dimension 1. Remarquons que l'ensemble des configurations alignées est fermé et par conséquent les configurations non-alignées forment un ouvert. La proposition 1.16 ci-dessous nous dit que les configurations alignées sont précisément les points critiques du serpent $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$. Pour la preuve de 1.16, nous aurons besoin du lemme suivant. Considérons l'action du groupe orthogonal $\mathrm{O}(d)$ sur Conf induite par celle de ce même groupe sur $\mathbb{S}^{d-1}$ (voir la proposition 1.5).

1.15. Lemme. *Soit $A \in \mathrm{O}(d)$ une matrice orthogonale. Pour tout $z \in \mathrm{Conf}$, on a l'égalité*

$$AG(z)A^t = G(A \cdot z),$$

où $G(z)$ est la matrice de Gram (1.7).

Démonstration. Désignons par a_{ij} les coefficients de la matrice A. Un simple calcul nous donne

$$(AG(z)A^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} a_{ik} a_{jl} \int_0^L z_k(s) z_l(s) ds.$$

Pour le membre de droite, également par calcul direct, on obtient

$$G(A \cdot z)_{ij} = \int_0^L \Big(\sum_{k=1}^{d} a_{ik} z_k(s) \Big) \Big(\sum_{l=1}^{d} a_{jl} z_l(s) \Big) ds.$$

Le lemme s'ensuit. □

1.16. Proposition. *Une configuration $z \in \mathrm{Conf}$ est un point critique du serpent $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$ si, et seulement si, elle est alignée.*

Démonstration. Supposons que la configuration z soit alignée. Soit d la droite vectorielle engendrée par $z([0,L])$. Remarquons que l'on peut se ramener au cas $z(s) = \pm e_1$. En effet, soit ρ une rotation linéaire envoyant d sur la droite vectorielle par e_1. Par linéarité, nous avons

$$f(\rho \cdot z) = \rho(f(z)). \tag{1.9}$$

Pour ne pas compliquer les notations, nous désignons par ρ l'application $\mathrm{Conf} \to \mathrm{Conf}$, ainsi que la rotation $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. En dérivant (1.9), on obtient le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
T_z\mathrm{Conf} \arrow[r, "T_z f"] \arrow[d, "T_z\rho", "\simeq"'] & \mathbb{R}^d \arrow[d, "\rho", "\simeq"'] \\
T_{\rho(z)}\mathrm{Conf} \arrow[r, "T_{\rho(z)} f"] & \mathbb{R}^d .
\end{tikzcd}$$

Nous avons identifié ici $T_{f(z)}\mathbb{R}^d$ avec $\mathbb{R}^d$ et, comme ρ est linéaire, $T_{f(z)}\rho$ avec ρ. Modulo une rotation envoyant d sur la droite vectorielle engendrée par e_1, nous pouvons donc supposer que $z(s) = \pm e_1$. Mais dans ce cas,

$$M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & L \end{pmatrix}$$

et n'est donc pas inversible. Le point z est ainsi critique.

Montrons maintenant la réciproque. Soit $z \in \mathrm{Conf}$ un point critique ; dans ce cas $M(z)$ n'est pas inversible et il s'ensuit que L est une valeur propre de $G(z)$. Comme $G(z)$ est une matrice symétrique, il existe $A \in \mathrm{O}(d)$ tel que $AG(z)A^t = \left(\begin{smallmatrix} L & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{smallmatrix}\right)$. Soit $w = A \cdot z$. Le lemme 1.15, nous dit que $G(w) = \left(\begin{smallmatrix} L & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{smallmatrix}\right)$. On a donc $\int_0^L w_1^2(s)ds = L$. Comme w est continue par morceaux et que $0 \leq w_1^2(s) \leq 1$, il s'ensuit que $w_1(s) = \pm 1$ pour tout $s \in [0, L]$. Les autres composantes de w sont donc nulles et w est ainsi alignée sur la droite vectorielle par e_1. Il s'ensuit que z est alignée sur la droite passant par le vecteur $A^{-1}e_1$. □

1.17. Remarque. La première partie de la preuve de 1.16 nous dit plus précisément que si z est une configuration alignée, l'image de $T_z f$ est l'hyperplan dans $\mathbb{R}^d$ orthogonal à d, où d est la droite sur laquelle est alignée la configuration z.

Nous terminons ce paragraphe en donnant une description géométrique des valeurs critiques. Les configurations alignées sont telles que $z([0, L]) \subset \{\pm p\}$ pour un certain $p \in \mathbb{S}^{d-1}$. La remarque suivante est importante : si les configurations que nous considérons sont continues sur tout l'intervalle $[0, L]$ (autrement dit, $\mathcal{P} = \{0, L\}$), alors les seuls points critiques sont les applications constantes $z(s) = p$. On a alors $f(z) = Lp$ et il s'ensuit que l'ensemble des valeurs critiques est la sphère dans $\mathbb{R}^d$ centrée à l'origine et de rayon L. Si la partition est composée de plusieurs sous-intervalles, les configurations alignées sont celles qui sont constantes et valent $\pm p$ sur chaque sous-intervalle. Il s'ensuit, comme avant, que les valeurs critiques forment une réunion de sphères centrées à l'origine ; il se peut qu'une des sphères soit de rayon nul, c'est-à-dire réduite à $\{0\}$. On obtient immédiatement :

1.18. Proposition. *Les valeurs régulières de l'application $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$ forment un ouvert qui est le complément dans la boule ouverte $B_L(0)$ d'une union finie de sphères centrées à l'origine.* □

Considérons par exemple la partition de $[0, 4]$ en $[0, 3[\cup [3, 4]$. Les valeurs critiques se situent sur la sphère et rayon 2 et celle de rayon 4. Si nous avions pris $[0, 2[\cup [2, 4]$ comme partition, les valeurs critiques auraient été le point 0 et la sphère de rayon 4.

On peut comprendre intuitivement les points critiques comme suit. Si z est un point régulier, l'image de $T_z f$ est l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier. Autrement dit, on peut déplacer infinitésimalement le serpent $\mathcal{S}_z$ dans toutes les directions de $\mathbb{R}^d$. Par contre, si z est une configurations alignée, les mouvements selon la droite passant par p ne pourront pas être effectués.

Chapitre 2

Les outils du charmeur de serpents

Ce chapitre commence par l'étude des courbes horizontales pour la distribution introduite au paragraphe 1.4. L'action naturelle du groupe de Möbius sur la sphère induit une action de ce même groupe sur l'espace de configurations. Le lien entre ces deux notions est le contenu du théorème principal 2.19. Nous tirons ensuite quelques conséquences immédiates au théorème principal et terminons le chapitre en étudiant des sous-variétés de l'espace de configurations.

2.1 Courbes horizontales

Nous entamons ce chapitre en rappelant quelques notions et résultats classiques relatifs à la géométrie sous-riemannienne. Le lecteur pourra consulter les ouvrages de Montgomery [Mon02] ou de Jurdjevic [Ju97] pour plus de détails.

Une distribution sur une variété M est la donnée d'une correspondance $p \mapsto \Delta(p) \subset T_pM$ où $\Delta(p)$ est un sous-espace vectoriel fermé. On demande parfois que Δ soit un sous-fibré du fibré tangent. Si M est de dimension finie, ceci veut dire que Δ est de rang constant. Nous ne ferons pas cette hypothèse. Nous supposerons cependant que Δ est engendrée par un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Vec}(M)$, c'est-à-dire, $\Delta(p) = \langle X(p) \mid X \in \mathcal{F}\rangle$. Au besoin, nous écrirons $\Delta_{\mathcal{F}}$ pour préciser l'ensemble qui engendre la distribution. Les champs de vecteurs appartenant à Δ sont dits ***horizontaux***.

2.1. Définition. Une courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [a, b] \to M$ est une courbe ***horizontale*** ou une ***Δ-courbe*** si $\dot\gamma(t) \in \Delta(\gamma(t))$ pour tout $t \in [a, b]$ où la dérivée $\dot\gamma(t)$ existe.

Un problème standard que nous pouvons nous poser est le suivant. Soit M une variété connexe et soient p et q deux points de M.

Existe-t-il une courbe horizontale reliant p à q ?

Comme M est connexe, il existe évidement une courbe $\gamma : [a, b] \to M$ telle que $\gamma(a) = p$ et $\gamma(b) = q$. Peut-on la supposer horizontale ? L'exemple le plus simple qui nous montre que ce n'est pas toujours le cas est le suivant. Regardons la distribution

de rang 1 sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par le champ constant $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Les points (a_1, a_2) et (b_1, b_2) peuvent être joints par une courbe horizontale si, et seulement, $a_2 = b_2$.

Donnons-nous à présent un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathrm{Vec}(M)$ de champs de vecteurs complets[1] sur une variété M et soit Δ la distribution engendrée par $\mathcal{F}$. Définissons plusieurs objets relatifs à $\mathcal{F}$ et à Δ.

- Une courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [a, b] \to M$ est dite ***succession des trajectoires des champs de*** $\mathcal{F}$ ou plus simplement une ***trajectoire de*** $\mathcal{F}$ s'il existe une partition finie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ telle que $\gamma_{|_{[t_i, t_{i+1}]}}$ soit une trajectoire d'un champ $X_i \in \mathcal{F}$.
- La ***composante connexe par*** Δ***-courbes*** de $p \in M$ est le sous-ensemble de M

$$\mathcal{A}(p) = \{\gamma(b) \in M \mid \gamma : [a, b] \to M \text{ est une } \Delta\text{-courbe et } \gamma(a) = p\}.$$

  On parlera parfois de la ***composante horizontale de*** p ou de l'ensemble ***d'accessibilité*** de p.
- On désigne par G ou $G_{\mathcal{F}}$ le groupe des difféomorphismes de M engendré par les flots des champs de $\mathcal{F}$,

$$G = \langle \exp(tX) \mid X \in \mathcal{F} \text{ et } t \in \mathbb{R} \rangle.$$

  Ayant supposé que les flots des éléments de $\mathcal{F}$ étaient complets, G est bien un groupe et non seulement un pseudo-groupe. Un élément de G s'écrit donc $g = \exp(t_n X_n) \cdots \exp(t_1 X_1)$. L'***orbite de*** $\mathcal{F}$ ***par*** p est le sous-ensemble $G \cdot p = \{g(p) \in M \mid g \in G\} \subset M$.
- On dit qu'une distribution est ***involutive*** si $X, Y \in \Delta$ implique $[X, Y] \in \Delta$. On désigne par Δ^* la plus petite[2] distribution involutive contenant Δ. Si φ est un difféomorphisme de M, on définit la distribution $\varphi_* \Delta$, ***l'image directe*** de Δ par φ, en posant

$$\varphi_* \Delta(\varphi(p)) = T_p \varphi(\Delta(p)).$$

  La distribution est dite ***invariante par*** φ si $\varphi_* \Delta = \Delta$. On considère alors $\mathcal{D}$, définie comme étant la plus petite distribution contenant Δ et invariante par tout G ; on a ainsi

$$\mathcal{D}(p) = \langle\, T_q \varphi(X(q)) \in T_p M \mid \varphi \in G,\ X \in \Delta(q) \text{ et } p = \varphi(q)\,\rangle.$$

  Remarquons encore que $\Delta^* \subset \mathcal{D}$. En effet, si $X, Y \in \Delta$, alors $\exp(tX)_* Y \in \mathcal{D}$. En dérivant par rapport à t et en posant $t = 0$, il s'ensuit que $[X, Y] \in \mathcal{D}$. De la même manière, on montre que les crochets d'ordre plus élevé sont encore dans $\mathcal{D}$. On résume ce qui précède par les inclusions suivantes :

$$\Delta \subset \Delta^* \subset \mathcal{D}.$$

  Dans [Mon02], Montgomery donne des exemples où les inclusions sont strictes.

[1] Rappelons qu'un champ de vecteurs X et dit ***complet*** si son flot, désignée par $\exp(tX)$, existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

[2] « Plus petite » au sens de l'inclusion : $\Delta \subset \Delta'$ si $\Delta(p) \subset \Delta'(p)$ pour tout $p \in M$.

Nous citons à présent un théorème de Sussmann connu sous le nom de « orbit theorem ». Ce résultat donne une structure de sous-variété immergée à l'orbite $G \cdot x$. Il est valable pour des variétés de dimension finie ; nous ne connaissons pas de généralisation aux variétés de dimension infinie. Pour une preuve, nous renvoyons le lecteur à l'article original de Sussmann [Su73] ou au deuxième chapitre de [Ju97].

2.2. Théorème (Sussmann [Su73]). *Soient M une variété de dimension finie, $p \in M$ et $\mathcal{F}$ une famille de champs de vecteurs complets sur M. Soient G et $\mathcal{D}$ définis ci-dessus. L'orbite $H = G \cdot p$ est une sous-variété immergée et connexe de M telle que $T_qH = \mathcal{D}(q)$ pour tout $q \in H$.* □

Rappelons qu'une ***variété intégrale*** d'une distribution Δ sur M est une sous-variété immergée N telle que $T_pN = \Delta(p)$ pour tout $p \in N$. De plus, la distribution est dite ***intégrable*** si tous les points de M sont dans une variété intégrale de Δ. Dans ce vocabulaire, le théorème de Sussmann dit que les orbites de $\mathcal{F}$ sont des variétés intégrales connexes de $\mathcal{D}$.

Nous montrons à présent deux corollaires bien connus au théorème de Sussmann. Le deuxième porte le nom de « théorème de Chow ».

2.3. Corollaire. *Soient M une variété de dimension finie et $p \in M$. Soit $\mathcal{A}(p)$ la composante connexe par courbes horizontales de p. On a l'égalité $\mathcal{A}(p) = G \cdot p$.*

Démonstration. Le fait que $G \cdot p \subset \mathcal{A}(p)$ est évident car les éléments de $G \cdot p$ sont les extrémités des trajectoires de $\mathcal{F}$. Soit $q \in \mathcal{A}(p)$ et soit γ une Δ-courbe reliant p à q. On a $\dot\gamma(t) \in \Delta(\gamma(t)) \subset \mathcal{D}(\gamma(t))$. Par le théorème de Sussmann, la courbe γ reste donc dans la sous-variété $G \cdot p$. □

Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de champs de vecteurs, nous désignons par $\mathrm{Lie}\mathcal{F}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Vec}(M)$ engendrée par $\mathcal{F}$ et par $\mathrm{Lie}_p\mathcal{F}$ l'espace vectoriel engendrée par les éléments de $\mathrm{Lie}\mathcal{F}$ au point p. Remarquons que si Δ est la distribution engendrée par $\mathcal{F}$, alors $\Delta^*(p) = \mathrm{Lie}_p\mathcal{F}$.

2.4. Corollaire (Théorème de Chow [Ch39]). *Soit M une variété connexe de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de champs de vecteurs complets sur M. Si $\mathrm{Lie}_p\mathcal{F} = T_pM$ pour tout p, alors $G \cdot p = M$. Autrement dit, M est connexe par des courbes qui sont, par morceaux, des trajectoires de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Par le théorème de Sussmann, $G \cdot p$ est une sous-variété immergée de M. On sait que $\mathrm{Lie}_q\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(q)$ et donc $\mathcal{D}(q) = T_q(G \cdot p) = T_qM$, pour tout $q \in M$. La sous-variété $G \cdot p$ est ainsi ouverte. Comme le complémentaire $M \setminus G \cdot p$ est une réunion d'orbites, c'est aussi un ouvert. On a donc que $G \cdot p$ est fermée et par connexité $G \cdot p = M$. □

Nous terminons ce paragraphe en explicitant les divers objets introduits ci-dessus dans le cadre de l'espace Conf. L'ensemble $\mathcal{F}$ est celui qui engendre la distribution Δ définie par (1.3) ; par la proposition 1.10, on a

$$\mathcal{F} = \{\xi_1, \ldots, \xi_d\} \subset \mathrm{Vec}(\mathrm{Conf}). \tag{2.1}$$

Une courbe $\mathcal{C}^1$, $t \mapsto z_t$, est horizontale si $\dot{z}_t$ satisfait à

$$\dot{z}_t = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(z_t)\xi_i(z_t),$$

où $\lambda_i : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}$. Les coefficients λ_i pourraient également dépendre du paramètre t.

2.5. Exemple. Revenons sur l'exemple 1.11 pour donner un exemple d'une courbe horizontale dans Conf(1). Une courbe $t \mapsto q_t$ est horizontale si

$$\dot{q}_t(s) = \lambda_1(q_t)\sin(q_t(s)) + \lambda_2(q_t)\cos(q_t(s)).$$

Si la configuration ne prend qu'un nombre fini de valeurs $q_t = (q_{t,1}, \ldots, q_{t,N})$, on obtient un système d'équations différentielles,

$$\dot{q}_{t,k} = \lambda_1(q_t)\sin q_{t,k} + \lambda_2(q_t)\cos q_{t,k},$$

pour $k = 1, \ldots, N$. Les λ_i sont alors des fonctions $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Nous n'allons nous attarder sur cette équation différentielle. Au chapitre 3 nous présenterons d'autres méthodes pour construire des courbes horizontales.

Une question naturelle à se poser est la suivante :

La distribution Δ est-elle involutive ?

La réponse est non, mais le lemme ci-dessous explicite la sous-algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{F}$.

2.6. Proposition. *Soit $\mathcal{F} = \{\xi_1, \ldots, \xi_d\} \subset \mathrm{Vec}(\mathrm{Conf})$ et soit $\mathrm{Lie}\mathcal{F}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Vec}(\mathrm{Conf})$ engendrée par $\mathcal{F}$. On a alors*

$$\mathrm{Lie}_z\mathcal{F} = \langle \xi_i(z), [\xi_j, \xi_k](z) \mid i, j, k = 1, \ldots, d \text{ et } j < k \rangle.$$

Démonstration. Considérons des coordonnées $x_1, \ldots, x_d$ sur $\mathbb{R}^d$. Nous écrirons le vecteur $\xi_i(z) \in T_z\mathrm{Conf}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \xi_i(z) : [0, L] &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ s &\longmapsto \xi_i(z)(s) = \frac{\partial}{\partial x_i} - z_i(s)\sum_{n=1}^{d} z_n(s)\frac{\partial}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

où $z(s) = (z_1(s), \ldots, z_d(s))$. En utilisant les propriétés classiques du crochet de Lie ainsi que la description en coordonnées locales nous obtenons :

$$\begin{aligned} [\xi_i, \xi_j] &= z_i\frac{\partial}{\partial x_j} - z_j\frac{\partial}{\partial x_i}, \\ [\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] &= \delta_{ij}\xi_k - \delta_{ik}\xi_j, \\ [[\xi_i, \xi_j], [\xi_k, \xi_l]] &= \delta_{il}[\xi_j, \xi_k] + \delta_{jk}[\xi_i, \xi_l] - \delta_{ik}[\xi_j, \xi_l] - \delta_{jl}[\xi_i, \xi_k], \end{aligned}$$

où $\delta_{ab} = 1$ si $a = b$ et 0 sinon. Le lemme s'ensuit. □

2.7. Corollaire. *Pour toute configuration $z \in \mathrm{Conf}$, nous avons l'estimation*

$$\dim \mathrm{Lie}_z \mathcal{F} \leq \frac{d(d+1)}{2}.$$

□

Le groupe G est le groupe engendré par les flots $\exp(t\xi_i)$. Il s'ensuit qu'un élément de G s'écrit comme

$$g = \exp(t_1\xi_{i_1}) \cdots \exp(t_n\xi_{i_n}).$$

Nous décrirons au paragraphe 2.3 l'orbite $G \cdot z$ pour une configuration $z \in \mathrm{Conf}$ donnée.

2.2 Action du groupe de Möbius

Nous rappelons quelques notions concernant le groupe des transformations de Möbius. Les livres de Beardon [Be83], de Benedetti et Petronio [BR92] et Ratcliffe [Ra94] sont d'utiles références sur le sujet. Soit $\{e_1, \ldots, e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. La ***projection stéréographique*** par rapport à e_d est l'application de $\mathbb{S}^{d-1}$ dans $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1} = \mathbb{R}^{d-1} \cup \{\infty\}$ donnée par :

$$(x_1, \ldots, x_d) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_d}, \ldots, \frac{x_{d-1}}{1-x_d} \right)$$

et $e_d \mapsto \infty$. Son inverse est

$$(y_1, \ldots, y_{d-1}) \longmapsto \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \ldots, \frac{2y_{d-1}}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right).$$

Soit $p \in \mathbb{S}^{d-1}$. En identifiant $\mathbb{R}^{d-1}$ à l'hyperplan orthogonal à p, on définit de la même manière la projection stéréographique qui envoie p sur l'infini et $-p$ sur 0. Au moyen d'une projection stéréographique, nous identifions dans ce qui suit $\mathbb{S}^{d-1}$ avec $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$.

2.8. Définition. Soient $a \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $r, t \in \mathbb{R}$ avec $r > 0$. Une ***sphère*** de $\mathbb{S}^{d-1} \simeq \widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$ est, soit une sphère euclidienne, $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \|x-a\| = r\}$, soit un hyperplan affine auquel on ajoute l'infini, $P(a,t) = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \langle x, a\rangle = t\} \cup \{\infty\}$.

Plus généralement, une ***k-sphère*** est l'intersection d'une sphère et d'un sous-espace affine de dimension $k+1$. Rappelons qu'une ***réflexion*** ou ***inversion*** par rapport à une sphère S est un difféomorphisme de $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$, s'écrivant soit comme

$$x \longmapsto x + \frac{2(t - \langle a, x\rangle)}{\|a\|^2}\, a \quad \text{et} \quad \infty \longmapsto \infty, \tag{2.2}$$

si S est de la forme $P(a,t)$, soit comme

$$x \longmapsto a + \frac{r^2}{\|x-a\|^2}(x-a), \quad \infty \longmapsto a \quad \text{et} \quad a \longmapsto \infty, \tag{2.3}$$

si S est de la forme $S(a,r)$.

Le ***groupe de Möbius général***[3] $\mathrm{GM}(d-1)$ est le groupe engendré par les réflexions par rapport aux sphères dans $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$. Nous désignons par $\mathrm{Möb}(d-1)$ le sous-groupe de $\mathrm{GM}(d-1)$ des transformations de Möbius qui préservent l'orientation. Il s'agit du groupe engendré par les compositions d'un nombre pair de réflexions ; nous parlons du ***groupe de Möbius de*** $\mathbb{S}^{d-1}$. On écrira id pour l'élément neutre de $\mathrm{Möb}(d-1)$. On peut définir de manière équivalente le groupe de Möbius comme le groupe engendré par un nombre pair de réflexions de $\widehat{\mathbb{R}}^d$ en des sphères qui sont orthogonales à $\mathbb{S}^{d-1}$.

Si nous désignons par $\mathbb{H}^d$ l'espace hyperbolique de dimension d, alors $\mathrm{GM}(d-1)$ s'identifie au groupe des isometries de $\mathbb{H}^d$ et $\mathrm{Möb}(d-1)$ au sous-groupe des isometries directes. En décrivant $\mathbb{H}^d$ avec le modèle de l'hyperboloïde, on peut montrer que $\mathrm{Möb}(d-1)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{PSO}(d,1) = \mathrm{SO}(d,1)/\{\pm\mathrm{id}\}$ où $\mathrm{SO}(d,1) = \{A \in \mathrm{GL}(d+1) \mid AJA^t = J \text{ et } \det A = 1\}$ et

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons encore que $\mathrm{Möb}(d-1)$ est un groupe de Lie de dimension $\frac{d(d+1)}{2}$. S'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrirons simplement Möb à la place de $\mathrm{Möb}(d-1)$. L'action lisse de Möb sur $\mathbb{S}^{d-1}$ induit une action lisse de ce même groupe sur Conf :

$$(g \cdot z)(s) = g(z(s)),$$

pour $g \in \mathrm{Möb}$ et $z \in \mathrm{Conf}$ (voir la proposition 1.5).

Étant donnée une action lisse d'un groupe de Lie sur une variété M on peut considérer l'application $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Vec}(M)$ définie par

$$\alpha(X)(p) = \frac{d}{dt}(\exp(tX) \cdot p)\big|_{t=0}, \tag{2.4}$$

où $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G, $X \in \mathfrak{g}$, $p \in M$ et exp est l'application exponentielle classique $\mathfrak{g} \to G$. Le terme ***action infinitésimale*** est parfois employé pour désigner cette application. Les champs de vecteurs qui sont dans l'image de α sont des ***champs fondamentaux***. Le résultat suivant est bien connu pour des variétés de dimension finie [He01, Ch. II §3]. La preuve pour des variétés de dimension infinie est la même.

2.9. Proposition. *L'application α définie par* (2.4) *est un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire $\alpha([X,Y]) = -[\alpha(X), \alpha(Y)]$. De plus, si l'action est effective*[4]*, α est injectif.*

Démonstration. (1) Nous commençons par montrer que α est linéaire. Soit $x \in M$. Considérons l'application différentiable

$$\begin{aligned} \beta_x : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

[3] Cette terminologie vient de [Be83, 3.1.2], où Beardon parle du « general Möbius group ».

[4] Rappelons qu'une action est dite ***effective*** ou ***fidèle*** si, $g \cdot z = z$ pour tout z implique $g = e$.

Soit $X \in \mathfrak{g} \simeq T_eG$. La dérivée en l'identité de β_x donne

$$T_e\beta_x(X) = \frac{d}{dt}(\beta_x(\exp(tX)))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(tX)\cdot x)\big|_{t=0} = \alpha(X)(x).$$

La linéarité de $T_e\beta_x$ donne celle de α.

(2) Soit $\overline{X} \in \mathrm{Vec}(G)$ le champ invariant à droite[5] correspondant à $X \in \mathfrak{g}$. Nous montrons à présent que les champs $\overline{X}$ et $\alpha(X)$ sont β_x-reliés : il s'agit de voir que $T_g\beta_x(\overline{X}(g)) = \alpha(X)(\beta_x(g))$. En développant le côté gauche nous obtenons

$$\begin{aligned} T_g\beta_x(\overline{X}(g)) &= (T_g\beta_x \circ T_e\mathcal{R}_g)(X) = T_e(\beta_x \circ \mathcal{R}_g)(X) \\ &= \frac{d}{dt}((\beta_x \circ \mathcal{R}_g)(\exp(tX)))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\exp(tX)g)\cdot x)\big|_{t=0} \\ &= \alpha(X)(\beta_x(g)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les champs $\overline{X}$ et $\alpha(X)$ sont β_x-reliés. On sait que si des champs X_i et Y_i, $i = 1, 2$, sont reliés par une application F, alors il en est de même des crochets $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$. Pour tout $g \in G$, nous avons donc la relation

$$T_g\beta_x([\overline{X}, \overline{Y}](g)) = [\alpha(X), \alpha(Y)](g\cdot x). \tag{2.5}$$

(3) Rappelons que pour deux champs $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons l'égalité

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = -\overline{[X, Y]}. \tag{2.6}$$

En effet, soit J le difféomorphisme de G donné par $g \mapsto g^{-1}$. Désignons par $J_*(X)$ l'image directe par J d'un champ $X \in \mathrm{Vec}(G)$. Les champs X et $-\overline{X}$ sont J-reliés pour tout $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} T_gJ(X(g)) &= (T_gJ \circ T_e\mathcal{L}_g)(X) \\ &= \frac{d}{dt}((J \circ \mathcal{L}_g)(\exp(tX)))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(tX)^{-1}g^{-1})\big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(-tX)g^{-1})\big|_{t=0} = T_e\mathcal{R}_{g^{-1}}(-X) = -\overline{X}(g^{-1}). \end{aligned}$$

Nous avons donc $J_*([X, Y]) = -\overline{[X, Y]}$. De plus, $J_*([X, Y]) = [J_*(X), J_*(Y)] = [\overline{X}, \overline{Y}]$. L'égalité (2.6) s'ensuit.

(4) Posons $g = e$ dans l'équation (2.5) et remplaçons $[\overline{X}, \overline{Y}]$ par $-\overline{[X, Y]}$. Nous obtenons

$$[\alpha(X), \alpha(Y)](x) = T_e\beta_x([\overline{X}, \overline{Y}]) = T_e\beta_x(-\overline{[X, Y]}) = -\alpha([X, Y])(x).$$

(5) Pour terminer nous montrons l'injectivité de α lorsque l'action de G sur M est effective. Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\alpha(X) = 0$. Il s'ensuit que $\frac{d}{dt}(\exp(tX)\cdot x)\big|_{t=0} = 0$ pour tout $x \in M$. Le flot de ce champ de vecteurs est donc constant, c'est-à-dire $\exp(tX)\cdot x = x$. Comme l'action est effective, il s'ensuit que $\exp(tX) = e$ et donc $X = 0$.

□

[5] Si $\mathcal{R}_g$ désigne la translation à droite par g dans G, alors $\overline{X}$ est le champ de vecteurs $\overline{X}(g) = T_e\mathcal{R}_g(X)$.

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{möb}$ désignera l'algèbre de Lie du groupe Möb et $\alpha : \mathfrak{möb} \to \mathrm{Vec}(\mathrm{Conf})$ l'action infinitésimale associée à l'action du groupe de Möbius sur Conf.

Nous définissons à présent une famille d'éléments du groupe de Möbius qui nous permettra de faire le lien avec les courbes horizontales dans Conf. Soit $0 \neq v \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, considérons $\Gamma_t^v \in$ Möb,

$$\Gamma_t^v(p) = (\varphi_{v/\|v\|}^{-1} \circ \rho_{e^{t\|v\|}} \circ \varphi_{v/\|v\|})(p), \tag{2.7}$$

où $p \in \mathbb{S}^{d-1}$ et

(1) $\varphi_{v/\|v\|}$ est la projection stéréographique $\mathbb{S}^{d-1} \to \widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$ envoyant $v/\|v\|$ sur ∞ et $-v/\|v\|$ sur 0 ;

(2) $\rho_{e^{t\|v\|}}$ est une homothétie de $\mathbb{R}^{d-1}$ de rapport $e^{t\|v\|}$, prolongée naturellement à $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$ en envoyant ∞ sur lui-même.

Pour un v fixé, $t \mapsto \Gamma_t^v$ est un sous-groupe à un paramètre de Möb formé de transformations ***purement hyperboliques*** préservant $\pm v/\|v\|$. On utilisera également le terme ***flot hyperbolique***. Remarquons que $\Gamma_t^{\lambda v} = \Gamma_{\lambda t}^v$ pour tout $\lambda > 0$. Nous convenons ainsi que $\Gamma_t^0 = \mathrm{id}$.

Soit $C_v \in \mathfrak{möb}$ le générateur de Γ_t^v ; c'est l'élément de $\mathfrak{möb}$ qui satisfait

$$\exp(tC_v) = \Gamma_t^v, \tag{2.8}$$

Si e_i est un élément de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, nous écrirons simplement C_i à la place de C_{e_i}.

2.10. Exemple. Arrêtons-nous un instant pour étudier l'exemple de Conf(1). Nous identifions $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{S}^1$ avec les nombres complexes de module 1. Le groupe de Möbius Möb(1) est le groupe $\mathrm{PSU}(1,1) = \mathrm{SU}(1,1)/\{\pm\mathrm{id}\}$ où

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

L'action de PSU(1,1) sur $\mathbb{S}^1$ est donnée par les transformations homographiques et donc, pour tout $z \in$ Conf, on a

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot z \right)(s) = \frac{az(s) + b}{\bar{b}z(s) + \bar{a}}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{psu}(1,1) = \mathfrak{su}(1,1)$ est formée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} iu & b \\ \bar{b} & -iu \end{pmatrix}$$

avec $u \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$. Pour $0 \neq v \in \mathbb{C}$, le flot purement hyperbolique Γ_t^v est donné, modulo la reparamétrisation $\Gamma_t^v = \Gamma_{|v|t}^{v/|v|}$, par [Ha05, Formule (7)],

$$\Gamma_t^v = \begin{pmatrix} \cosh(\frac{t}{2}|v|) & \frac{v}{|v|}\sinh(\frac{t}{2}|v|) \\ \frac{\bar{v}}{|v|}\sinh(\frac{t}{2}|v|) & \cosh(\frac{t}{2}|v|) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Si v est de module 1, la configuration $\Gamma_z^v \cdot z$ est donc

$$s \longmapsto \frac{\cosh(t/2)z(s) + v\sinh(t/2)}{\bar{v}\sinh(t/2)z(s) + \cosh(t/2)}.$$

Le générateur C_v du flot Γ_t^v s'obtient facilement en calculant la dérivée par rapport à t de Γ_t^v en $t = 0$. On a

$$C_v = \begin{pmatrix} 0 & v/2 \\ \bar{v}/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Notre identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ fait que $e_1 = 1$ et $e_2 = i$. On a donc,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Les résultats ci-dessous justifient l'importance des éléments $\Gamma_t^v \in$ Möb et leurs générateurs $C_v \in \mathfrak{möb}$. Il s'agit de généralisations à la variété de dimension infinie Conf de résultats que nous trouvons dans [Ha05, §3].

2.11. Lemme. *Soient $v \in \mathbb{R}^d$ et $\xi_v \in$ Vec(Conf) le champ de vecteurs défini à la remarque 1.9. Soit $\alpha : \mathfrak{möb} \to$ Vec(Conf), l'anti-homomorphisme d'algèbres de Lie associé à l'action de* Möb *sur* Conf. *On a*

$$\alpha(C_v) = \xi_v.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que

$$\alpha(C_v)(z)(s) = \xi_v(z)(s) \tag{2.12}$$

pour tout $z \in$ Conf et pour tout $s \in [0, L]$. La remarque 1.9 nous dit qu'on peut regarder ξ_v comme un champ sur $\mathbb{S}^{d-1}$. Le membre de gauche donne

$$\alpha(C_v)(z)(s) = \frac{d}{dt}(\exp(tC_v) \cdot z(s))|_{t=0}.$$

Si l'on pose $q = z(s) \in \mathbb{S}^{d-1}$, l'équation (2.12) devient $\alpha(C_v)(q) = \xi_v(q)$. Nous appliquons alors [Ha05, Lemme 3.2] pour conclure. □

Soit $\exp(t\xi_v)$ le flot sur Conf de ξ_v. Le lemme 2.11 est équivalent à l'égalité de flots sur Conf ci-dessous :

$$\exp(t\xi_v) = \Gamma_t^v.$$

Comme corollaire immédiat du lemme 2.11 nous avons la proposition suivante.

2.12. Proposition. *L'anti-homomorphisme $\alpha : \mathfrak{möb} \to$ Vec(Conf) est injectif et son image est l'algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{F} = \{\xi_1, \ldots, \xi_d\} \subset$ Vec(Conf).*

Démonstration. L'action de Möb sur $\mathbb{S}^{d-1}$ étant fidèle, il en est de même pour celle sur Conf. La proposition 2.9 nous donne l'injectivité.

Les éléments C_v, pour $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, engendrent $\mathfrak{möb}$ en tant qu'algèbre de Lie [Ha05, Lemme 3.4]. Comme $\alpha(C_v) = \xi_v$, la proposition s'ensuit. □

Cette proposition a plusieurs conséquences intéressantes qui reposent sur le fait qu'on a une « copie » de $\mathfrak{möb}$ dans Vec(Conf). On peut donc utiliser les propriétés des ξ_v pour en déduire des propriétés de $\mathfrak{möb}$. Le corollaire ci-dessous un cas particulier de [Ha05, Corollaire 3.6].

2.13. Corollaire. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{möb}$ *est engendrée, en tant qu'algèbre de Lie, par* d *éléments.*

Démonstration. Les éléments ξ_i, pour $i = 1, \ldots, d$, engendrent Lie$\mathcal{F}$. Les éléments C_i engendrent alors $\mathfrak{möb}$. □

La dimension de Möb étant égale à $\frac{d(d+1)}{2}$ nous retrouvons à nouveau le corollaire 2.7.

Dans le cas $d = 2$, l'équation (2.11) nous explicite les éléments C_1 et C_i de Möb(1). Calculons à présent leur crochet de Lie :

$$A = [C_1, C_i] = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}.$$

On constate que $\mathfrak{möb}(1)$ est engendré comme espace vectoriel par C_1, C_i et A et donc C_1 et C_i engendrent $\mathfrak{möb}(1)$ en tant qu'algèbre de Lie.

2.14. Remarque. Dans la remarque 1.9, on a vu que pour tout $v, w \in \mathbb{R}^d$, on a $\xi_{v+w} = \xi_v + \xi_w$. La correspondance $v \mapsto C_v \in \mathfrak{möb}$ possède alors la même propriété. Autrement dit, si $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, on a $C_v = \sum_{i=1}^d v_i C_i$. On peut ainsi voir la correspondance $v \mapsto C_v$ comme un plongement de de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{möb}$.

Nous considérons les deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{möb}$ suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \langle C_1, \ldots, C_d \rangle, \\ \mathfrak{n} &= \langle [C_i, C_j] \mid i, j = 1, \ldots, d \text{ et } i < j \rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Remarquons que $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie. En effet, dans la preuve de la proposition 2.6, nous avons montré que

$$[[C_i, C_j], [C_k, C_l]] = \delta_{il}[C_j, C_k] + \delta_{jk}[C_i, C_l] - \delta_{ik}[C_j, C_l] - \delta_{jl}[C_i, C_k].$$

Par la remarque 2.14, un élément de $\mathfrak{n}$ peut s'écrire comme $[C_v, C_w]$ pour $v, w \in \mathbb{R}^d$. Soit N le sous-groupe de Möb$(d-1)$ qui a $\mathfrak{n}$ comme algèbre de Lie. On a $N \simeq \mathrm{SO}(d)$. Ceci vient du fait que le sous-groupe à un paramètre $\exp(t[C_v, C_w])$ est la rotation d'angle $-t$ dans le 2-plan engendré par v et w [Ha05, Lemme 3.3]. Ces rotations engendrent $\mathrm{SO}(d)$ qui est un sous-groupe compact maximal de Möb$(d-1)$.

Soient $z \in$ Conf et Γ_t^v un flot hyperbolique. Regardons la courbe dans Conf donnée par $t \mapsto \Gamma_t^v \cdot z$. Il nous sera utile par la suite de calculer le vecteur vitesse en $t = 0$ de cette courbe que l'on désigne par

$$\dot{\Gamma}_0^v(z) = \frac{d}{dt}\Gamma_t^v(z)|_{t=0} \in T_z\mathrm{Conf}.$$

Par la remarque 1.4, on a $\dot{\Gamma}_0^v(z)(s) = \dot{\Gamma}_0^v(z(s))$. On calculera donc $\dot{\Gamma}_0^v(p)$ pour $p \in \mathbb{S}^{d-1}$. Par une translation, on identifie $T_p\mathbb{S}^{d-1}$ à l'hyperplan $p^\perp$.

2.15. Lemme. *Le vecteur* $\dot{\Gamma}_0^v(p) \in \mathbb{R}^d$ *est la projection orthogonale de* v *sur* $p^\perp$.

Nous allons donner deux démonstrations du lemme 2.15. La première est une conséquence de 2.11 ; la seconde, par calcul direct, permet de dégager des formules utiles.

Première preuve du lemme 2.15. Il suffit de remarquer que $\dot{\Gamma}_0^v(p) = \frac{d}{dt}(\exp(tC_v) \cdot p)|_{t=0} = \alpha(C_v)(p) = \xi_v(p) = v - \langle v, p\rangle\, p$. □

Deuxième preuve du lemme 2.15. On peut supposer que $v \notin \mathbb{R}\,p$, sinon, $\Gamma_t^v(p) = p$ pour tout t et le lemme 2.15 est banal. On peut également supposer que v est de norme 1, car comme $\Gamma_t^{\lambda v} = \Gamma_{\lambda t}^v$, on a $\dot{\Gamma}_0^{\lambda v} = \lambda \dot{\Gamma}_0^v$ pour tout $\lambda > 0$. Les vecteurs p et v engendrent alors un 2-plan Π que l'on identifie à $\mathbb{C}$ par une isométrie $\mathbb{R}$-linéaire. Le flot Γ_t^v préserve le plan Π et l'on peut donc se ramener au cas de la dimension 2. On regarde ainsi p et v comme des nombres complexes. Par (2.9) on a,

$$\Gamma_t^v(p) = \frac{\cosh(t/2)\, p + v \sinh(t/2)}{\bar{v} \sinh(t/2)\, p + \cosh(t/2)} = \frac{N(t)}{D(t)}\,.$$

Sa dérivée par rapport à t est

$$\dot{\Gamma}_t^v(p) = \frac{\dot{N}(t)D(t) - \dot{D}(t)N(t)}{D(t)^2}\,.$$

Observons que, pour tout t,

$$\dot{N}(t)D(t) - \dot{D}(t)N(t) = \frac{v - \bar{v}p^2}{2}\,.$$

En effet, c'est la valeur en $t = 0$ et, d'autre part, comme $\ddot{N}(t) = N(t)/4$ et $\ddot{D}(t) = D(t)/4$, on a $\frac{d}{dt}(\dot{N}(t)D(t) - \dot{D}(t)N(t)) = 0$. Il s'ensuit que

$$\dot{\Gamma}_t^v(p) = \frac{v - \bar{v}p^2}{2D(t)^2} \qquad \text{et} \qquad \dot{\Gamma}_0^v(p) = \frac{v - \bar{v}p^2}{2}\,. \tag{2.14}$$

Or, l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $\varphi(v) = \frac{1}{2}(v - \bar{v}p^2)$ est la projection orthogonale de v sur $p^\perp$. En effet, φ est $\mathbb{R}$-linéaire et, comme $|p| = 1$, satisfait à $\varphi(p) = 0$ et $\varphi(ip) = ip$. □

En complément à la deuxième preuve de 2.15, calculons encore la dérivée seconde de $\Gamma_t^v(p)$. D'après la formule (2.14), on a

$$\ddot{\Gamma}_t^v(p) = -\frac{(v - \bar{v}p^2)D(t)\dot{D}(t)}{D(t)^4}\,,$$

d'où

$$\ddot{\Gamma}_0^v(p) = \frac{(\bar{v}p^2 - v)\bar{v}p}{2} = \frac{\bar{v}^2p^3 - p}{2}\,. \tag{2.15}$$

Si le vecteur v n'est plus supposé de norme 1, les formules (2.14) et (2.15) donnent :

$$\dot{\Gamma}_0^v(p) = |v|\, \dot{\Gamma}_0^{v/|v|} = \frac{v - \bar{v}p^2}{2}$$

et

$$\ddot{\Gamma}_0^v(p) = |v|^2\, \ddot{\Gamma}_0^{v/|v|} = \frac{\bar{v}^2p^3 - |v|^2p}{2}\,.$$

2.3 Le théorème principal

Nous généralisons à présent le théorème principal de [Ha05] au cas des serpents et de la variété de dimension infinie Conf. Commençons par énoncer le résultat de Hausmann.

Soit Δ la distribution sur $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ donnée par $\Delta(z) = (\ker T_z f)^\perp$ où $f : (\mathbb{S}^{d-1})^N \to \mathbb{R}^d$ est le bras articulé de type $a = (1, \ldots, 1)$, $f(z) = \sum_{i=1}^d z_i$. Le groupe Möb agit diagonalement sur le produit $(\mathbb{S}^{d-1})^N$.

2.16. Théorème ([Ha05]). *Soit $z \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$. Désignons par $\mathcal{A}(z)$ la composante connexe par Δ-courbes de z. On a alors*

$$\mathcal{A}(z) = \text{Möb} \cdot z.$$

□

La preuve de celui-ci utilise à un moment donné le théorème de Sussmann qui n'est pas, à notre connaissance, démontré sur les variétés de dimension infinie. Le théorème 2.16 est une conséquence des deux résultats suivants que nous utiliserons également. Dans ce qui suit, nous regarderons parfois les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{möb}$ comme des champs de vecteurs invariant par translation à gauche.

2.17. Lemme. *Le groupe* Möb *est connexe par des courbes qui sont des successions des trajectoires des champs C_i pour $i = 1, \ldots, d$.*

Démonstration. Désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des champs de vecteurs $\{C_1, \ldots, C_d\}$ et par Lie$\mathcal{D}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{D}$. Rappelons que $\mathfrak{möb} = \text{Lie}\mathcal{D}$ en tant qu'algèbre de Lie (voir le corollaire 2.13). Il s'ensuit que pour tout $g \in$ Möb, $T_g\text{Möb} = \text{Lie}_g\mathcal{D}$. Le théorème de Chow nous permet de conclure. □

Désignons par $\overline{C_i}$ le champ de vecteurs sur Möb invariant à droite correspondant C_i. Remarquons alors que le ce dernier résultat reste valable si nous considérons des trajectoires des champs $\overline{C_i}$ au lieu de C_i. Le résultat suivant n'est pas seulement valable sur $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ (comme dans [Ha05]) mais également dans Conf.

2.18. Proposition. *Soit G le groupe de difféomorphismes engendré par les flots des champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Pour toute configuration z, on a*

$$G \cdot z = \text{Möb} \cdot z.$$

Démonstration. Si $y \in G \cdot z$, on écrit $y = (\exp(t_n \xi_{i_n}) \cdots \exp(t_1 \xi_{i_1}))(z)$. On a vu que $\exp(t_j \xi_{i_j}) = \Gamma_{t_j}^{i_j} \in$ Möb et il s'ensuit que $y \in \text{Möb} \cdot z$.

Soit $y = g \cdot z \in \text{Möb} \cdot z$. Comme Möb est connexe par des trajectoires de $\{C_1, \ldots, C_d\}$, on écrit $g = \Gamma_{t_n}^{i_n} \cdots \Gamma_{t_1}^{i_1}$. On termine comme avant. □

Le théorème principal de [Ha05] est alors une conséquence du corollaire 2.3 au théorème de Sussmann car $\mathcal{A}(z) = G \cdot z = \text{Möb} \cdot z$. Notre approche du problème est différente. Nous allons nous placer dans un cadre où l'on puisse appliquer le théorème 2.16 pour démontrer sa généralisation. Pour l'heure, énonçons le résultat.

2.19. Théorème Principal. *Soit $\mathcal{A}(z) \subset \mathrm{Conf}$ la composante connexe par courbes horizontales d'une configuration $z \in \mathrm{Conf}$. On a alors,*

$$\mathcal{A}(z) = \text{Möb} \cdot z.$$

L'idée fondamentale pour la démonstration du théorème principal est la restriction d'une configuration $z : [0, L] \to \mathbb{S}^{d-1}$ à un ensemble fini $S = \{s_1, \ldots, s_N\} \subset [0, L]$. Nous supposons $s_1 < \ldots < s_N$ et considérons l'application $\mathfrak{r}_S : \mathrm{Conf} \to (\mathbb{S}^{d-1})^N$,

$$z \longmapsto \tilde{z} = (z(s_1), \ldots, z(s_N)).$$

Il ne s'agit pas forcément des points de discontinuités de z. Le nombre de ces points n'est pas non plus le même que le nombre de discontinuités.

2.20. Lemme. *L'application $\mathfrak{r}_S$ est une submersion surjective.*

Démonstration. La dérivée de $\mathfrak{r}_S$ est donnée par

$$T_z\mathfrak{r}_S(v) = (v(s_1), \ldots, v(s_N)).$$

Étant donné N points $z_1, \ldots, z_N$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$, il est toujours possible de faire passer une courbe continue par morceaux par ces points. Quitte à reparamétrer, nous pouvons supposer que $z(s_i) = z_i$. La surjectivité en découle.

Pour montrer que $T_z\mathfrak{r}_S$ est surjective, donnons-nous un vecteur $v = (v_1, \ldots, v_N) \in T_{\mathfrak{r}_s(z)}(\mathbb{S}^{d-1})^N$ Il s'agit de trouver un champ de vecteurs v le long de z tel que $v(s_i) = v_i$. Pour chaque $i = 1, \ldots, N$, on se donne un intervalle $I_i \subset [0, L]$ contenant s_i. Comme les s_i sont distincts, on peut supposer que les I_i sont tous disjoints. En utilisant une « fonction plateau » (fonction lisse qui vaut 1 quand $s = s_i$ et 0 si s est en dehors d'un voisinage de s_i) on construit alors un champ de vecteurs le long de z qui vaut v_i en $z(s_i)$ et 0 en dehors des $z(I_i)$. Comme le noyau de $T_z\mathfrak{r}_S$ est de codimension finie, il est scindé dans $T_z\mathrm{Conf}$, ce qui achève la preuve. □

Pour $i = 1, \ldots, d$, le champ $\xi_i \in \mathrm{Vec}(\mathrm{Conf})$, détermine un champ $\tilde{\xi}_i \in \mathrm{Vec}((\mathbb{S}^{d-1})^N)$ par la formule

$$\tilde{\xi}_i(x) = (\xi_i(z)(s_1), \ldots, \xi_i(z)(s_N)) = (\xi_i(x_1), \ldots, \xi_i(x_N)),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_N) \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$ et z est une configuration telle que $\mathfrak{r}_S(z) = x$. La formule ne dépend pas du choix de la configuration z. La distribution $\widetilde{\Delta}$ sur $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ est définie naturellement comme étant engendrée par $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_d$. Elle coïncide avec celle définie dans [Ha05].

2.21. Lemme. *Si $z, w \in \mathrm{Conf}$ sont joignables par une Δ-courbe alors, $\tilde{z} = \mathfrak{r}_S(z)$, $\tilde{w} = \mathfrak{r}_S(w) \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$ sont joignables par une $\widetilde{\Delta}$-courbe.*

Démonstration. Supposons que z et w sont joignables par une courbe horizontale $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{Conf}$. Considérons les N courbes dans $\mathbb{S}^{d-1}$

$$\gamma_i : t \longmapsto \gamma(t)(s_i),$$

pour $i = 1, \ldots, N$. Soit $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_N(t))$. Il s'agit, par construction, d'une courbe horizontale sur $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ avec $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{z}$ et $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{w}$. Les points $\tilde{z}$ et $\tilde{w}$ sont alors joignables par $\tilde{\gamma}$. □

Rappelons encore un résultat relatif à l'action du groupe de Möbius sur $\mathbb{S}^{d-1}$ que nous utiliserons dans la preuve du théorème principal. Si $S \subset \mathbb{S}^{d-1}$ est une k-sphère, on sait qu'il existe $k+2$ points $x_1, \ldots, x_{d+2}$ qui engendrent S, c'est-à-dire tels que S est l'unique k-sphère contenant $\{x_1, \ldots, x_{d+2}\}$. Inversement, on dit que $k+2$ points de $\mathbb{S}^{d-1}$ engendrent une k-sphère S, si S est l'unique k-sphère contenant ces points. De même, on dira qu'une configuration z ***engendre*** une k-sphère S si l'image $z([0, L])$ est contenue dans S et contient au moins $k+2$ points qui engendrent S.

2.22. Lemme. *Soit $S \subset \mathbb{S}^{d-1}$ une k-sphère et soient $z_1, \ldots, z_{k+2} \in \mathbb{S}^{d-1}$ des points qui engendrent S. Soient $w_1, \ldots, w_{k+2} \in \mathbb{S}^{d-1}$ tels qu'il existe $g \in$ Möb avec $g(z_i) = w_i$ pour $i = 1, \ldots, k+2$. Soit T la k-sphère engendrée par tous les w_i. Alors,*

(1) $g(S) = T$;

(2) la restriction $g|_S : S \to T$ est unique, c'est-à-dire, si $g' \in$ Möb est tel que $g'(z_i) = w_i$ pour $i = 1, \ldots, k+2$, alors $g|_S = g'|_S$.

Démonstration. Le groupe de Möbius envoyant des sphères sur des sphères, le premier point s'ensuit.

Pour le deuxième point, donnons-nous $g' \in$ Möb tel que $g'(z_i) = w_i$ pour $i = 1, \ldots, k+2$. Soit $h = (g'|_S)^{-1} \circ g|_S : S \to S$. On a $h(z_i) = z_i$ pour tous les i et il s'agit de montrer que h est l'identité. Identifions $\mathbb{S}^{d-1}$ à $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$ au moyen de la projection stéréographique φ envoyant z_{k+2} sur ∞ et $-z_{k+2}$ sur 0. Dans $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$, $P = \varphi(S)$ est le k-plan affine engendré par les $\varphi(z_i)$, $i = 1, \ldots, k+1$. L'application h est alors une similitude affine de P fixant $k+1$ points ; c'est donc l'identité. □

Passons à présent à la preuve de notre théorème principal.

Démonstration du théorème principal. Dans un premier temps, nous montrons que $\mathcal{A}(z) \supset$ Möb $\cdot\, z$. Fixons $z \in$ Conf et considérons l'application

$$\beta_z = \beta : \text{Möb} \longrightarrow \text{Conf},$$

définie par $\beta(g) = g \cdot z$. Il s'agit de montrer que si $w \in \beta(\text{Möb})$, alors il existe une courbe horizontale joignant z à w. Soit $\overline{C}_i$ le champ invariant à droite sur Möb correspondant à $C_i \in \mathfrak{möb}$. Nous commençons par montrer que les champs $\overline{C}_i$ et ξ_i sont β-reliés. En effet,

$$\begin{aligned} T_g\beta(\overline{C}_i(g)) &= (T_g\beta \circ T_{\mathrm{id}}\mathcal{R}_g)(C_i) \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(tC_i) \cdot (g \cdot z))\big|_{t=0} = \alpha(C_i)(\beta(g)) = \xi_i(\beta(g)). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du lemme 2.11. Le lemme 2.17 affirme que Möb est connexe par des courbes qui sont des successions des trajectoires des champs $\overline{C}_i$ pour $i = 1, \ldots, d$. L'image de telles courbes par β étant des courbes horionzales, on déduit que Möb $\cdot\, z$ est connexe par courbes horizontales.

Soient z et w deux configurations joignables par une Δ-courbe γ. Soit S la k-sphère engendrée par les $z(s)$ pour $s \in [0, L]$. On choisit $k+2$ points, $z(s_1), \ldots, z(s_{k+2})$ qui engendrent S. Notons $\tilde{z} = (z(s_1), \ldots, z(s_{k+2}))$ et $\tilde{w} = (w(s_1), \ldots, w(s_{k+2}))$ les

points dans $(\mathbb{S}^{d-1})^{k+2}$ correspondant. Le lemme 2.21 affirme qu'il existe une $\tilde{\Delta}$-courbe $\tilde{\gamma}$ dans $(\mathbb{S}^{d-1})^{k+2}$ reliant $\tilde{z}$ à $\tilde{w}$. En appliquant le théorème 2.16, on obtient un élément $g \in$ Möb tel que $g \cdot \tilde{z} = \tilde{w}$. Il reste donc à montrer que pour tout $s \in [0, L]$, on a $g(z(s)) = w(s)$. Soit $s \in [0, L]$ et considérons les deux points de $(\mathbb{S}^{d-1})^{k+3}$ suivants : $\hat{z} = (z(s_1), \ldots, z(s_{k+2}), z(s))$ et $\hat{w} = (w(s_1), \ldots, w(s_{k+2}), w(s))$. On applique à nouveau 2.16 pour avoir un élément g' tel que $g' \cdot \hat{z} = \hat{w}$. Désignons par T la k-sphère engendrée par $w(s_1), \ldots, w(s_{k+2})$. On a $g(S) = g'(S) = T$. Le lemme 2.22 nous garantit que $g|_S = g'|_S$ et donc $g(z(s)) = g'(z(s)) = w(s)$. □

2.4 Quelques conséquences

Le théorème principal nous donne immédiatement une expression particulièrement simple pour les courbes horizontales.

2.23. Proposition. *Une courbe horizontale $z : [0, 1] \to$ Conf partant d'une configuration initiale z_0, s'écrit comme*

$$z_t = g(t) \cdot z_0,$$

où $g(t)$ est une courbe dans le groupe de Möbius telle que $g(0) = \mathrm{id}$. □

Nous mentionnons quelques conséquences directes du théorème principal. L'idée générale est la suivante : *si une propriété relative à des points dans $\mathbb{S}^{d-1}$ est invariante sous l'action du groupe de Möbius, elle le sera aussi par les courbes horizontales.*

Donnons-nous $z : [0, 1] \to$ Conf une courbe horizontale partant d'une configuration initiale z_0. Le résultat suivant est évident, il s'agit du même énoncé que [Ha05, Proposition 5.1].

2.24. Proposition. *Si $z_0(s) = z_0(s')$, alors $z_t(s) = z_t(s')$ pour tout $t \in [0, 1]$.* □

Une configuration $z \in$ Conf est dite ***périodique*** s'il existe un nombre réel $P > 0$ tel que $z(s + P) = z(s)$ pour tout s tel que s et $s + P$ soient dans l'intervalle $[0, L]$. On obtient immédiatement le corollaire suivant :

2.25. Corollaire. *Si z_0 est périodique, alors z_t l'est aussi pour tout $t \in [0, 1]$.* □

Remarquons de plus que, comme l'action du groupe de Möbius sur Conf est lisse, la classe de régularité des configurations est préservée le long des courbes horizontales :

2.26. Proposition. *Si z_0 est $\mathcal{C}^k$ par morceaux pour un $k > 0$, alors z_t l'est aussi pour tout $t \in [0, 1]$.* □

La notion suivante nous sera utile pour l'étude des configurations alignées et leurs voisinage.

2.27. Définition. Une configuration $z \in$ Conf est dite ***bivaluée*** si z prend exactement deux valeurs distinctes. Plus généralement, une configuration est dite ***n-valuée***

si elle prend exactement n valeurs distinctes. Nous dirons également qu'une configuration est ***au moins n-valuée***, si elle prend au moins n valeurs distinctes.

Remarquons que l'ensemble des configurations qui sont au moins n-valuées est ouvert. Muni de ce vocabulaire et de la proposition 2.24, nous obtenons immédiatement :

2.28. Proposition. *Soit $z : [0,1] \to \mathrm{Conf}$ une courbe horizontale partant d'une configuration initiale z_0. Si z_0 est au moins 3-valuée, alors les configurations z_t ne sont jamais alignées.* □

Si la configuration initiale z_0 est bivaluée, la composante horizontale $\mathcal{A}(z_0)$ contient toujours une configuration alignée : il suffit en effet de considérer $g \cdot z_0$, où g est une transformation de Möbius qui aligne les deux points de la sphère qui sont les valeurs de z_0.

Mentionnons pour terminer ce paragraphe, un dernier invariant des courbes horizontales. Supposons que $d = 2$. Pour quatre points distincts $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{S}^1$ on définit le birapport

$$b(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

Le birapport étant préservé par l'action du groupe de Möbius sur $\mathbb{S}^1$ on obtient évidemment :

2.29. Proposition. *Soit z_0 une configuration initiale au moins 4-valuée et soit z_t une courbe horizontale partant de z_0. Si $z_0(s_1), z_0(s_2), z_0(s_3)$ et $z_0(s_4)$ sont tous distincts, alors le birapport $b(z_t(s_1), z_t(s_2), z_t(s_3), z_t(s_4))$ est constant.* □

Le paragraphe 5 de [Ha05] mentionne d'autres birapports et leurs liens avec les courbes horizontales.

2.5 Stabilisateurs d'une configuration et sous-variétés

Dans le but de mieux comprendre l'ensemble $\mathrm{Möb} \cdot z \subset \mathrm{Conf}$, nous fixons une configuration $z \in \mathrm{Conf}$ et considérons, comme dans la preuve du théorème principal, l'application

$$\beta : \mathrm{Möb} \longrightarrow \mathrm{Conf},$$

envoyant g sur $g \cdot z$. L'image de β est bien entendu l'ensemble qui nous intéresse. Soit $\mathrm{Möb}_z$ le stabilisateur de z, il s'agit d'un sous-groupe fermé. Rappelons un résultat classique concernant les actions différentiables de groupes de Lie sur des variétés.

2.30. Proposition. *Soit G un groupe de Lie agissant de manière lisse sur une variété lisse M. Soient $x_0 \in M$ et G_{x_0} son stabilisateur. Soit encore $\alpha : G \to M$ l'application $g \mapsto g \cdot x_0$. Alors, α passe au quotient et $\bar{\alpha} : G/G_{x_0} \to M$ est une immersion injective. Si G est compact, $\bar{\alpha}$ est un plongement.* □

Il s'ensuit que si le stabilisateur $\mathrm{Möb}_z$ est trivial, $\beta : \mathrm{Möb} \to \mathrm{Conf}$ est une immersion injective. Nous cherchons dans un premier temps une condition sur z qui

nous garantissent que Möb_z soit trivial. Nous montrons ensuite que dans certains cas, bien que Möb ne soit pas compact, l'application $\overline{\beta} : \text{Möb}/\text{Möb}_z \to \text{Conf}$ est un plongement.

Lorsque la configuration z est alignée, le groupe Möb_z n'est pas trivial. Il contient en effet le flot hyperbolique Γ_t^v où $v \neq 0$ est un vecteur de la droite sur laquelle est alignée z. En conjuguant par une transformation de Möbius qui aligne deux points de la sphère, on remarque que le stabilisateur d'une configuration bivaluée contient également un flot hyperbolique Γ_t^v et n'est donc pas trivial. Cependant, si $d = 2$ et en supposant que z est au moins 3-valuée, on obtient $\text{Möb}_z = \{\text{id}\}$, puisqu'une transformation de Möbius de $\mathbb{S}^1$ qui fixe trois points distincts est égale à l'identité.

2.31. Définition. On dit qu'une configuration z est ***super-générique*** si l'une des deux conditions ci-dessous est remplie :

(1) $d = 2$ et z est au moins 3-valuée ;

(2) $d \geq 3$ et z engendre une $(d-2)$-sphère dans $\mathbb{S}^{d-1}$.

Intuitivement, on peut penser à une configuration super-générique comme une configuration qui « prend de la place dans $\mathbb{S}^{d-1}$ ». Remarquons que quand $d \geq 3$, une configuration qui engendre une $(d-2)$-sphère est au moins 3-valuée.

2.32. Lemme. *Soient $z \in \text{Conf}$ et Möb_z son stabilisateur. On a alors,*

$$\text{Möb}_z = \{\text{id}\} \textit{ si, et seulement si, } z \textit{ est super-générique.}$$

Démonstration. Le cas $d = 2$ a été traité ci-dessus. Supposons donc $d \geq 3$. Nous montrons d'abord que si z est super-générique, son stabilisateur est trivial. Ensuite nous supposerons que z n'est pas super-générique et montrons que Möb_z contient au moins une copie de $\mathbb{S}^1$.

Identifions $\mathbb{S}^{d-1}$ avec $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$ via la projection stéréographique qui envoie $z(0)$ sur ∞ et $-z(0)$ sur 0. Rappelons que les transformations de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^{d-1}$ qui préservent l'orientation et qui envoient ∞ sur lui-même sont des similitudes affines de la forme

$$x \longmapsto rAx + b \tag{2.16}$$

où $r > 0$, $b \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $A \in \text{SO}(d-1)$. Comme $z(0) = \infty$, dire que la configuration z est super-générique est équivalent à ce que l'image $z([0, L]) \setminus \{\infty\}$ engendre un $(d-2)$-plan affine de $\mathbb{R}^{d-1}$. Désignons ce plan par Π. Modulo une similitude affine on peut supposer que $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} \mid x_{d-1} = 0\}$ et que les éléments de z qui engendrent Π sont

$$\begin{array}{rcl} z(s_1) & = & e_1 \\ & \vdots & \\ z(s_{d-2}) & = & e_{d-2} \\ z(s_{d-1}) & = & 0 \end{array}$$

où $s_i \in [0, L]$. Il s'ensuit que le seul élément de la forme (2.16) qui envoie $z(s_i)$ sur lui-même est l'élément neutre.

On se donne à présent une configuration z qui n'est pas super-générique. On peut supposer que z engendre un $(d-3)$-plan affine que nous désignons à nouveau par Π.

Comme avant, on suppose que $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} \mid x_{d-2} = 0 \text{ et } x_{d-1} = 0\}$. Les éléments de Möb qui fixent la base $\{e_1, \ldots, e_{d-3}\}$ du plan Π sont de la forme $x \mapsto Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \end{pmatrix}$$

et le bloc $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est un élément de $\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{S}^1$. Il s'ensuit que $\text{Möb}_z \simeq \mathbb{S}^1$. □

Le résultat suivant n'est pas utilisé par la suite. Nous avons néanmoins trouvé intéressant de l'inclure en conclusion à ce paragraphe. La preuve utilise des notions qui seront introduites au paragraphe 3.1. Par la proposition 2.30 et le lemme 2.32, on sait que si z est super-générique alors $\beta : \text{Möb} \to \text{Conf}$ est une immersion injective. La proposition 2.33 ci-dessous affirme que β est un plongement.

2.33. Proposition. *Soit z_0 une configuration au moins 3-valuée. L'application $\bar{\beta} : \text{Möb}/\text{Möb}_{z_0} \to \text{Conf}$ envoyant la classe $g\text{Möb}_{z_0}$ sur $g \cdot z_0$ est un plongement.*

Démonstration. Munissons le sous-ensemble $\bar{\beta}(\text{Möb}/\text{Möb}_{z_0}) = \text{Möb} \cdot z_0 = \beta(\text{Möb})$ de la topologie induite par celle de Conf. Pour montrer que $\bar{\beta}$ est un plongement, il suffit de montrer que $\beta : \text{Möb} \to \beta(\text{Möb})$ est une application fermée. Soient $F \subset \text{Möb}$ un fermé et $F' = \beta(F)$. On se donne une suite $\{z_n\}$ dans F' qui converge vers une configuration $z = g \cdot z_0 \in \beta(\text{Möb})$. Considérons une suite $\{g_n\}$ dans F telle que $z_n = g_n \cdot z_0$. On a alors deux possibilités exclusives : soit la suite $\{g_n\}$ possède au moins un point d'accumulation, soit elle n'en possède pas. Comme F est fermé et que β est continue, si la suite possède un point d'accumulation, alors $\lim_{n\to\infty} g_n = g \in F$ et $z = g \cdot z_0 \in F'$ et on a terminé.

Pour conclure la preuve, nous allons montrer que la deuxième possibilité ne peut pas arriver. Supposons par l'absurde que la suite $\{g_n\}$ ne possède pas de point d'accumulation. Elle sort donc de tout compact de Möb. Par le lemme 3.1, nous savons que la suite $\{z_n = g_n \cdot z_0\}$, converge point par point vers une application de $[0, L]$ dans $\mathbb{S}^{d-1}$ qui prend au plus deux valeurs. Par hypothèse, z_0 est au moins 3-valuée et il en est de même de la limite $z = g \cdot z_0 \in \beta(\text{Möb})$. Contradiction. □

Chapitre 3

Charmer les serpents en pratique

En conséquence du théorème principal, la proposition 2.23 affirme que les courbes horizontales sont de la forme $t \mapsto g(t) \cdot z_0$. Nous utilisons ce fait pour dériver une équation différentielle dans le groupe de Möbius dont les solutions sont les relevés horizontaux d'une courbe $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$. Nous étudions ensuite l'existence globale de la solution. Le dernier paragraphe porte sur le relèvement de courbes partant de configurations alignées.

3.1 Suites divergentes dans le groupe de Möbius

Les suites divergentes du groupe de Möbius ont déjà été utilisées dans la preuve de la proposition 2.33. Elles seront également utiles dans l'étude de l'existence globale des relèvements au paragraphe 3.3.

Si M est une variété non-compacte, on dit qu'une suite $\{x_n\}$ dans M ***diverge*** si, pour tout compact $K \subset M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \notin K$. De même, on dit qu'une courbe continue $\gamma : I \to M$, où I est un intervalle ouvert, diverge s'il existe une suite divergente $\{x_n\}$ où $x_n = \gamma(t_n)$ et $t_n \in I$.

Afin d'étudier les suites qui divergent, nous avons besoin du modèle géométrique du groupe de Möbius suivant. Une description analogue est donnée dans [Be83]. Désignons par $\text{Möb}(B^d)$ le groupe des transformations de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^d$ qui préservent l'orientation et la boule unité $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < 1\}$. Rappelons que $\text{Möb}(B^d) \simeq \text{Möb}(d-1)$. Soit $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie $\mathfrak{möb}(d-1)$ engendré par $\{C_1, \ldots, C_d\}$. Rappelons encore que tout élément $g \in \text{Möb}(d-1)$ peut s'écrire comme $g = \exp(v)A$, où $v \in \mathcal{H}$ et $A \in \text{SO}(d)$. En identifiant $\mathcal{H}$ avec $\mathbb{R}^d$, nous obtenons un homéomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d \times \text{SO}(d) &\xrightarrow{\Psi} \text{Möb}(d-1) \\ (v, A) &\longmapsto \exp(v)A. \end{aligned}$$

Écrivons les éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ en coordonnées polaires $v = rp$, où $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et $p \in \mathbb{S}^{d-1}$. Comme $\text{SO}(d)$ et $\mathbb{S}^{d-1}$ sont compacts, une suite $\{(r_n p_n, A_n)\}$ dans

$\mathbb{R}^d \times \mathrm{SO}(d)$ qui diverge possède donc une sous-suite telle que

$$\begin{aligned} A_n &\longrightarrow A \in \mathrm{SO}(d), \\ p_n &\longrightarrow p \in \mathbb{S}^{d-1}, \\ r_n &\longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons au comportement de telles suites quand elles agissent sur l'espace de configurations Conf.

3.1. Lemme. *Soit $\{g_n\}$ une suite divergente dans le groupe de Möbius et soit $z_0 \in$ Conf. Il existe alors une sous-suite (que l'on désigne à nouveau par $\{g_n\}$) telle que la suite $\{g_n \cdot z_0\}$ dans* Conf *converge point par point vers une application $[0, L] \to \mathbb{S}^{d-1}$ prenant les valeurs $\pm Ap$.*

Démonstration. On écrit $g_n = \exp(r_n p_n) A_n$ avec $A_n \to A \in \mathbb{S}^{d-1}$, $p_n \to p \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $r_n \to \infty$. Soit $\Gamma_{r_n}^{p_n} = \exp(r_n p_n)$. Pour tout $p \in \mathbb{S}^{d-1}$ et tout nombre réel $\delta > 0$ considérons le voisinage ouvert $V_\delta(p) = B_\delta(p) \cap \mathbb{S}^{d-1}$, où $B_\delta(p) \subset \mathbb{R}^d$ est la boule ouverte de centre p et de rayon δ. Par définition des éléments Γ_r^p, on sait que pour tout $\delta > 0$, il existe $R_\delta > 0$ tel que pour tout $r > R_\delta$, on ait l'inclusion

$$\Gamma_r^p(\mathbb{S}^{d-1} \setminus V_\delta(-p)) \subset V_\delta(p).$$

Remarquons que R_δ est indépendant de p.

Par un changement de coordonnées isométrique dans $\mathbb{R}^d$, on peut supposer que $Ap = (1, 0, \ldots, 0)$. Si $\delta > 0$, on désigne par $U_\delta^\pm$ les calottes ouvertes de $\mathbb{S}^{d-1}$ suivantes :

$$U_\delta^- = \{q \in \mathbb{S}^{d-1} \mid q_1 < -1 + \delta\}, \quad U_\delta^+ = \{q \in \mathbb{S}^{d-1} \mid q_1 > 1 - \delta\}. \tag{3.1}$$

Remarquons que $V_\delta(-Ap) \subset U_\delta^-$ et que pour tout $q \in V_\delta(-Ap)$, le voisinage $V_\delta(q)$ est inclus dans la calotte U_δ^-. En utilisant le fait que la suite $\{A_n p_n\}$ converge vers $Ap \in \mathbb{S}^{d-1}$, on obtient alors que pour tout $\delta > 0$, il existe N_δ tel que pour tout $n > N_\delta$ on ait

$$\Gamma_{r_n}^{p_n}(\mathbb{S}^{d-1} \setminus U_\delta^-) \subset \Gamma_{r_n}^{p_n}(\mathbb{S}^{d-1} \setminus V_\delta(-p_n)) \subset V_\delta(p_n) \subset U_\delta^+.$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient alors

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z_0(s)) = \begin{cases} -Ap & \text{si } z_0(s) = -p \\ Ap & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

3.2. Remarque. Remarquons que la convergence dans le lemme 3.1 n'est pas toujours uniforme en s. L'application limite n'est donc pas nécessairement un élément de Conf. Cependant, si la configuration initiale z_0 ne passe pas par le point $-p \in \mathbb{S}^{d-1}$, alors $\{g_n \cdot z_0\}$ converge uniformément vers la configuration constante $z(s) = Ap$.

3.2 L'équation différentielle dans le groupe de Möbius

3.3. Définition. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ une courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Un ***relevé horizontal de*** γ est une courbe horizontale $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathrm{Conf}$ telle que $(f \circ \hat{\gamma})(t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Parmi tous les relevés $\hat{\gamma}(t) \in \mathrm{Conf}$ de $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$, un relevé horizontal est celui qui minimise infinitésimalement l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\|\frac{d}{dt}\hat{\gamma}(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\int_0^L \|\frac{d}{dt}\hat{\gamma}(t)(s)\|^2 ds$; c'est une conséquence immédiate de $T_z\mathrm{Conf} = \Delta(z) \oplus \ker T_z f$.

Nous commençons par étudier l'existence de relevés horizontaux. Fixons d'abord quelques notations. Dans tout ce qui suit, $z_0 \in \mathrm{Conf}$ désignera une configuration initiale non-alignée et $\mathcal{W} \subset \mathrm{Conf}$ un voisinage de z_0 ne contenant que des configurations non-alignées. Les configurations alignées seront traitées au paragraphe 3.4. Par la propositions 1.16, la restriction $f|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \to f(\mathcal{W})$ est une submersion (en particulier $f(\mathcal{W})$ est ouvert) et la distribution Δ restreinte à $\mathcal{W}$ est de rang constant égal à d. Nous regarderons celle-ci comme un sous-fibré du fibré tangent $T\mathcal{W}$ au-dessus de $\mathcal{W}$. Les champs de vecteurs ξ_i, pour $i = 1, \ldots, d$, donnent une trivialisation du fibré Δ au-dessus de $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \Delta \\ (z, \lambda) &\longmapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \xi_i(z). \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathcal{W}$, la restriction de $T_z f$ au sous-espace $\Delta(z)$ est un isomorphisme. En considérant la base $\{\xi_1(z), \ldots, \xi_d(z)\}$ de $\Delta(z)$ et la base canonique de $\mathbb{R}^d$, cet isomorphisme est déterminé par la matrice $M(z) \in \mathrm{GL}(d)$ du lemme 1.12. Par abus, nous confondons l'application $T_z f|_{\Delta(z)}$ avec sa matrice $M(z)$. Comme f est lisse, la correspondance $z \mapsto M(z)$ l'est aussi, ainsi que $z \mapsto M^{-1}(z)$. Cette application nous permet alors de relever un champ de vecteurs Y sur $f(\mathcal{W})$ en un champ de vecteurs $\hat{Y}$ sur $\mathcal{W}$ par

$$\hat{Y}(z) = M^{-1}(z)(Y(f(z))).$$

Ce champ de vecteurs a la propriété d'être l'unique champ de vecteurs sur $\mathcal{W}$ qui appartient à la distribution Δ et se projette sur Y par Tf. Les trajectoires de $\hat{Y}$ sont donc horizontales. Soient $\hat{\gamma}$ une trajectoire de $\hat{Y}$ par un point $z_0 \in \mathcal{W}$ et γ une trajectoire de Y par $x_0 = f(z_0)$. Si les deux trajectoires sont définies sur un même intervalle de temps $[0,1]$, alors $\hat{\gamma}$ est un relevé horizontal de γ. De plus, par l'unicité des trajectoires des champs de vecteurs, $\hat{\gamma}$ est l'unique relevé horizontal de γ défini sur $[0,1]$. Ceci nous mène au résultat ci-dessous.

3.4. Lemme. *Soient $\gamma : [0,1] \to f(\mathcal{W})$ une courbe $\mathcal{C}^1$ et $z_0 \in f^{-1}(\gamma(0))$. Il existe alors une courbe $\mathcal{C}^1$ $\hat{\gamma} : [0,\varepsilon[\to \mathrm{Conf}$, où $0 < \varepsilon < 1$, telle que $\hat{\gamma}$ soit l'unique relevé horizontal de γ défini sur l'intervalle $[0,\varepsilon[$.*

Démonstration. On considère le champ de vecteurs qui dépend du temps $Y^t \in \mathrm{Vec}(\mathcal{W})$ défini par

$$Y^t(z) = M^{-1}(z)\dot{\gamma}(t) \in \Delta(z)$$

pour $t \in [0,1]$. Ce champ est $\mathcal{C}^\infty$ en z et continue en t et on peut ainsi appliquer le théorème d'existence et unicité des trajectoires. Soit $\hat{\gamma}$ l'unique trajectoire de ce champ passant par z_0 en $t = 0$. Cette trajectoire horizontale est définie au moins sur un intervalle $[0, \varepsilon[$. Sa projection par f est γ. □

Faisons une remarque concernant ce résultat. Il se peut que les trajectoires de Y^t existent sur tout l'intervalle $[0,1]$. Dans ce cas, on a un « vrai » relevé horizontal de γ.

3.5. Proposition. *Soient $z_0 \in$ Conf une configuration initiale non-alignée telle que $f(z_0)$ est une valeur régulière et $\mathcal{U}$ un voisinage de $f(z_0)$ formé de valeurs régulières. Supposons que z_0 prenne un nombre fini de valeurs. Alors, toute courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$, $\gamma(0) = f(z_0)$, admet un relèvement horizontal $\hat{\gamma} : [0,1] \to$ Conf.*

Démonstration. Il s'agit du même résultat que [Ha05, Lemme 6.1]. On identifie z_0 à un point du produit $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ et on regarde Y^t comme un champ de vecteurs sur $(\mathbb{S}^{d-1})^N$. Cette dernière variété étant compacte, les trajectoires de Y^t existent pour tout $t \in [0,1]$. □

Dans le cas général $\mathcal{W}$ n'est pas compact, les trajectoires de Y^t n'existent donc pas forcément pour tout $t \in [0,1]$. Nous allons utiliser l'action du groupe de Möbius pour améliorer ce résultat en garantissant dans certains cas l'existence sur tout $[0,1]$. La proposition 2.23 affirme que $\hat{\gamma}(t)$ est de la forme $t \mapsto g(t) \cdot z_0$, où $g(t) \in$ Möb et $g(0) = \mathrm{id}$. La première question qu'il semble naturel de se poser est :

Quelle(s) condition(s) faut-il mettre sur $g(t) \in$ Möb pour que la courbe $g(t) \cdot z_0 \in$ Conf soit horizontale ?

Désignons par β : Möb $\to$ Conf l'application envoyant g sur $g \cdot z_0$ et par $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{möb}$ engendré par $\{C_1, \ldots, C_d\}$. Nous regarderons $\mathcal{H}$ comme une distribution de rang d sur Möb via la correspondance

$$g \longmapsto \mathcal{H}_g = T_{\mathrm{id}}\mathcal{R}_g(\mathcal{H}),$$

où $\mathcal{R}_g$ désigne la translation à droite par g. Le résultat ci-dessous répond à la question précédente.

3.6. Lemme. *Soit $z_0 \in$ Conf une configuration initiale. Soit $t \mapsto g(t) \in$ Möb une courbe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = \mathrm{id}$. Si $\dot{g}(t) \in \mathcal{H}_{g(t)}$, alors $z : t \mapsto z_t = g(t) \cdot z_0$ est une courbe horizontale dans* Conf.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\dot{z}_t \in \Delta(z_t)$ pour tout t. L'hypothèse sur $\dot{g}(t)$ nous dit que $\dot{g}(t) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \overline{C}_i(g(t))$, où les λ_i sont des nombres réels qui dépendent de $g(t)$ et $\overline{C}_i$ est le champ invariant à droite correspondant à C_i. Dans la preuve de 2.19, nous avons montré que le champ $\overline{C}_i$ était β-relié à ξ_i, pour $i = 1, \ldots, d$. Il

s'ensuit que

$$\begin{aligned}\dot{z}_t &= T_{g(t)}\beta(\dot{g}(t)) = T_{g(t)}\beta(\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\overline{C}_i(g(t)))\\ &= \sum_{i=1}^{d}\lambda_i\xi_i(z_t) \in \Delta(z_t).\end{aligned}$$

□

3.7. Remarque. Si nous supposons en plus dans le lemme 3.6 que la configuration initiale est super-générique (voir définition 2.23), alors la condition $\dot{g}(t) \in \mathcal{H}_{g(t)}$ est équivalente (et non seulement suffisante) au fait que la courbe $z : t \mapsto g(t) \cdot z_0$ soit horizontale. Ceci vient du fait que l'application tangente $T_{g(t)}\beta$ est alors injective et donc le seul vecteur qui s'envoie sur $\xi_i(z_t)$ est $\overline{C}_i(g(t))$. Si z_0 n'est pas super-générique, on peut choisir une courbe $g(t)$ dans le stabilisateur Möb_{z_0} de z_0 telle que $\dot{g}(t) \notin \mathcal{H}_{g(t)}$. Son image par β est une courbe constante, en particulier horizontale.

Le lemme 3.6 permet de construire facilement des exemples de courbes horizontales. Il suffit en effet de prendre $g(t) = \exp(tC_v) = \Gamma_t^v$ pour $v \in \mathbb{R}^d$. On a $\dot{g}(t) = T_{\text{id}}\mathcal{R}_{g(t)}C_v \in \mathcal{H}_{g(t)}$. Les courbes de ce type seront utiles pour la description d'un algorithme numérique pour relever des chemins que nous décrirons au paragraphe 5.2. Remarquons en passant que ces courbes existent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le comportement de $\Gamma_t^v \cdot z_0$ quand $t \to \infty$ est un cas particulier du lemme 3.1.

3.8. Proposition. *Soient $z_0 \in \text{Conf}$ et $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Si $z_0(s) \neq -v$ pour tout $s \in [0, L]$, alors $\Gamma_t^v \cdot z_0$ converge, pour $t \to \infty$, vers la configuration constante $z(s) = v$.* □

3.9. Exemple. Soit $z_0 \in \text{Conf}(1)$ une configuration initiale ***symétrique***, c'est-à-dire telle que $z_0(s) = \overline{z_0(s-L)}$. On a

$$\begin{aligned}f(z_0) &= \int_0^L z_0(s)ds = \int_0^L z_0(L-s)ds\\ &= \int_0^L \overline{z_0(s)}ds = \overline{f(z_0)}.\end{aligned}$$

L'extrémité du serpent $f(z_0)$ est donc réelle. Considérons le flot hyperbolique Γ_t^1. Comme $\Gamma_t^1(\bar{p}) = \overline{\Gamma_t^1(p)}$ pour tout $p \in \mathbb{S}^1$, alors la courbe horizontale $t \mapsto \Gamma_t^1 \cdot z_0$ reste sur l'axe réel pour tout t.

Nous cherchons une condition supplémentaire à imposer à la courbe $g(t)$ afin d'être certain que $g(t) \cdot z_0$ soit horizontale et que $f(g(t) \cdot z_0) = \gamma(t)$, pour une courbe $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$ donnée. Pour cela, considérons l'application $F : \text{Möb} \to \mathbb{R}^d$,

$$F(g) = (f \circ \beta)(g) = f(g \cdot z_0). \tag{3.2}$$

Soient le voisinage de l'identité $\mathcal{V} = \beta^{-1}(\mathcal{W}) \subset \text{Möb}$ et $\mathcal{U} = F(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^d$. L'application $F|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est alors une submersion et $\mathcal{U}$ est donc un voisinage ouvert de x_0.

Pour ne pas compliquer les notations, nous écrirons F à la place de $F|_{\mathcal{V}}$. Pour tout $g \in \mathcal{V}$, l'application tangente T_gF restreinte au sous-espace $\mathcal{H}_g$ se décompose en

$$\mathcal{H}_g \xrightarrow{T_g\beta} \Delta(g \cdot z_0) \xrightarrow{T_{g\cdot z_0}f} \mathbb{R}^d.$$

Ces applications sont des isomorphismes et dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$ de g. Dans la base $\{\overline{C}_1(g), \ldots, \overline{C}_d(g)\}$ de $\mathcal{H}_g$ et $\xi_1(g \cdot z_0), \ldots, \xi_d(g \cdot z_0)$ de $\Delta(g \cdot z_0)$, la première application s'écrit comme la matrice identité. Il s'ensuit que $T_gF : \mathcal{H}_g \to \mathbb{R}^d$ s'écrit tout simplement comme

$$\lambda \longmapsto M(g \cdot z_0)\lambda. \tag{3.3}$$

Ici aussi, nous faisons l'abus de confondre l'application $T_gF|_{\mathcal{H}_g}$ avec la matrice $M(z)$. Comme pour le lemme 3.4, on remonte un champ de vecteurs X sur $\mathcal{U}$ en un champ de vecteurs $\hat{X}$ sur $\mathcal{V}$ par $\hat{X}(g) = M^{-1}(g\cdot z_0)X(F(g))$, pour tout $g \in \mathcal{V}$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ une courbe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0 = f(z_0)$. Celle-ci permet de construire un champ de vecteurs X^t sur $\mathcal{V}$ défini par

$$X^t(g) = M^{-1}(g \cdot z_0)\dot{\gamma}(t). \tag{3.4}$$

En décomposant les éléments de $\mathcal{H}_g$ dans la base $\{\overline{C}_1(g), \ldots, \overline{C}_d(g)\}$, le champ de vecteurs X^t s'écrit explicitement

$$X^t(g) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(g,t)\overline{C}_i(g),$$

où les $\lambda_i(g,t)$ sont les composantes du vecteur $M^{-1}(g \cdot z_0)\dot{\gamma}(t)$. Le résultat suivant est immédiat ; il est néanmoins très important.

3.10. Proposition. *Si $g : [0,1] \to$ Möb est solution de l'équation différentielle*

$$\dot{g}(t) = X^t(g(t)), \qquad g(0) = \mathrm{id}, \tag{3.5}$$

alors $g(t) \cdot z_0$ est l'unique relevé horizontal de $\gamma(t)$. □

Nous avons supposé que la solution de l'équation différentielle (3.5) existait pour $t \in [0,1]$. Ce qui n'est a priori pas toujours vrai, puisque Möb n'est pas compact. Pour l'instant, nous n'avons rien gagné par rapport au lemme 3.4 : nous avons seulement transféré le problème de la variété Conf au groupe de Möbius qui, évidemment, est de dimension finie. L'équation différentielle (3.5) dépend de la condition initiale z_0 ainsi que de la courbe γ. Dans le paragraphe suivant, nous donnons des exemples de couples (z_0, γ) pour lesquels la solution de (3.5) existe pour tout $t \in [0,1]$.

Nous supposerons dorénavant que la configuration initiale z_0 est au moins 3-valuée. Ceci garantit que le champ de vecteurs (3.4) est défini sur tout Möb. De plus, le cas où la configuration est bivaluée et non-alignée est inclus dans la proposition 3.5 et le cas où z_0 est alignée sera traité au paragraphe 3.4. Il n'y a donc pas de perte de généralité à supposer z_0 au moins 3-valuée.

3.3 Sédentarité

Désignons par μ la mesure de Lebesgue sur $[0, L]$. Soit $z \in \mathrm{Conf}$. La ***sédentarité*** $\mathrm{sed}(z) \in [0, L]$ de z est le nombre réel défini par

$$\mathrm{sed}(z) = \max_{p \in \mathbb{S}^{d-1}} \mu(z^{-1}(p)).$$

Ce maximum existe puisque l'ensemble $\{p \in \mathbb{S}^{d-1} \mid \mu(z^{-1}(p)) \geq r\}$ est fini pour tout $r > 0$. Si $g \in \text{Möb}$, on a $\mathrm{sed}(g \cdot z) = \mathrm{sed}(z)$. Par le théorème principal, $\mathrm{sed}(z) = \mathrm{sed}(z')$ si z et z' sont dans la même composante connexe par courbes horizontales.

La sédentarité d'une configuration z_0 est l'outil principal pour obtenir dans de nombreux cas un voisinage $\mathcal{U}$ de $f(z_0)$ tel que toute courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{U}$ partant de $f(z_0)$ admette un relèvement horizontal dans Conf partant de z_0 pour tout $t \in [0, 1]$. Nous traiterons dans la proposition 3.11 le cas particulier où $\|f(z_0)\| < L - 2\,\mathrm{sed}(z_0)$; observons que cela implique que $\mathrm{sed}(z_0) < L/2$. Le théorème de relèvement 3.12 est une conséquence immédiate de ce cas particulier. Le cas général sera traité dans la proposition 3.14 plus loin.

3.11. Proposition. *Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration au moins 3-valuée telle que $\|f(z_0)\| < L - 2\,\mathrm{sed}(z_0)$. Soit $B_{L-2\,\mathrm{sed}(z_0)}(0)$ la boule centrée en 0 et de rayon $L - 2\,\mathrm{sed}(z_0)$. Alors, pour toute courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [0, 1] \to B_{L-2\,\mathrm{sed}(z_0)}(0)$ avec $\gamma(0) = f(z_0)$, il existe un unique relèvement horizontal $\hat{\gamma} : [0, 1] \to \mathrm{Conf}$ de γ avec $\hat{\gamma}(0) = z_0$.*

Démonstration. On peut supposer que le chemin à relever γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Sinon, on partitionne $[0, 1]$ en sous-intervalles sur lesquels γ est $\mathcal{C}^1$ et on utilise que la sédentarité d'une configuration est constante sur une courbe horizontale.

Puisque z_0 est au moins 3-valuée, le champ de vecteurs (3.4) est défini sur tout Möb. Soit $g(t)$ l'unique trajectoire partant de $\mathrm{id} \in \text{Möb}$. On définit alors $\hat{\gamma}(t) = g(t) \cdot z_0$. Il s'agit de montrer que $g(t)$ existe pour tout $t \in [0, 1]$. Supposons, par l'absurde que ce ne soit pas le cas. La théorie des équations différentielles nous dit qu'il existe alors $0 < \varepsilon < 1$ tel que $g(t)$ existe pour $t \in [0, \varepsilon[$ et sort de tout compact lorsque $t \to \varepsilon$. Il existe donc une suite divergente dans le groupe de Möbius $\{g_n\}$ où $g_n = g(t_n) \in \text{Möb}$ et $t_n \in [0, \varepsilon[$. On suit à présent le début de la preuve du lemme 3.1. Comme $\{g_n\}$ diverge, on en extrait une sous-suite que l'on écrit $g_n = \Gamma_{r_n}^{p_n} A_n$ avec $A_n \to A \in \mathrm{SO}(d)$, $p_n \to p \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $r_n \to \infty$. Via un changement de coordonnées isométrique dans $\mathbb{R}^d$, on peut supposer que $Ap = (1, 0, \ldots, 0)$. Posons $\nu = \mu(z_0^{-1}(p))$. La théorie de la mesure nous dit que si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, où les A_n sont des boréliens et $A_n \supset A_{n+1}$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(z_0^{-1}(A_n)) = \mu(z_0^{-1}(A))$. Il s'ensuit que si $\lambda > 0$, il existe un voisinage V_λ de $-Ap$ tel que $\mu(z_0^{-1}(V_\lambda)) < \nu + \lambda$. On choisit $\delta > 0$ tel que $\delta < \lambda$ et $U_\delta^- \subset V_\lambda$, où $U_\delta^\pm$ sont les calottes définies par (3.1). Par la preuve du lemme 3.1, il existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_{r_n}^{p_n}(\mathbb{S}^{d-1} \setminus U_\delta^-) \subset U_\delta^+$ lorsque $n > N_\delta$. La fonction $s \mapsto g_n(z_0(s))$ étant continue par morceaux, l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue coïncident. La première composante $f(g_n \cdot z_0)_1$ de $f(g_n \cdot z_0)$ est alors donnée par :

$$f(g_n \cdot z_0)_1 = \int_0^L g_n(z_0(s))_1 \, ds = B_+ + B_- \,,$$

avec

$$B_+ = \int_{z_0^{-1}(\mathbb{S}^{d-1}\setminus U_\delta^-)} (g_n \cdot z_0)_1 \, d\mu \quad \text{et} \quad B_- = \int_{z_0^{-1}(U_\delta^-)} (g_n \cdot z_0)_1 \, d\mu.$$

Or,

$$B_+ \geq (L - \mu(z_0^{-1}(U_\delta^-)))(1-\delta) \geq (L - \nu - \lambda)(1-\delta)$$

et

$$B_- \geq -\mu(z_0^{-1}(U_\delta^-)) \geq -(\nu + \lambda).$$

On a donc

$$f(g_n \cdot z_0)_1 \geq L - 2\nu - R(\delta, \lambda) \geq L - 2\,\mathrm{sed}(z_0) - R(\delta, \lambda), \tag{3.6}$$

avec

$$R(\delta, \lambda) = 2\lambda + \delta(L - \nu) - \delta\lambda \leq 2\lambda + \delta L \leq (2 + L)\lambda. \tag{3.7}$$

Comme $\lambda > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, cela contredit la condition $f(g_n \cdot z_0) \subset \gamma([0,1])$, puisque $\gamma([0,1])$ est compact et contenu dans la boule $B_{L-2\,\mathrm{sed}(z_0)}(0)$. □

Une configuration z est dite ***nomade*** si $\mathrm{sed}(z) = 0$. Remarquons qu'une configuration nomade est au moins 3-valuée (elle prend d'ailleurs une infinité de valeurs). Le théorème de relèvement 3.12 ci-dessous est alors une conséquence immédiate de la proposition 3.11.

3.12. Théorème de relèvement. *Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration nomade. Soit $B_L(0)$ la boule ouverte centrée en 0 et de rayon L. Alors, pour toute courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [0,1] \to B_L(0)$ avec $\gamma(0) = f(z_0)$, il existe un unique relèvement horizontal $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathrm{Conf}$ de γ avec $\hat{\gamma}(0) = z_0$.* □

Le résultat suivant est une autre conséquence intéressante de la proposition 3.11.

3.13. Corollaire. *Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration nomade. L'application $F : \mathrm{Möb} \to B_L(0)$, envoyant g sur $f(g \cdot z_0)$ est une submersion surjective propre.*

Démonstration. Comme z_0 est nomade, $g \cdot z_0$ est un point régulier de f pour tout $g \in \mathrm{Möb}$ et donc F est une submersion. La surjectivité découle du fait qu'on peut relever toutes les courbes $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $B_L(0)$. Par un argument semblable à celui de la preuve de 3.11, on montre le caractère propre de F. □

Pour obtenir un énoncé plus général que la proposition 3.11, il convient d'introduire des « sédentarités supérieures ». Pour $k \in \widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on définit $\mathrm{sed}_k(z)$ par récurrence sur k par

- $\mathrm{sed}_0(z) = \mathrm{sed}(z)$;
- $\mathrm{sed}_k(z) = \max\{\mu(z^{-1}(p)) \mid p \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ et } \mu(z^{-1}(p)) < \mathrm{sed}_{k-1}(z)\}$;
- $\mathrm{sed}_\infty(z) = 0$.

On définit la ***k-ème sphère de sédentarité*** $\Sigma_k(z)$ de z par

$$\Sigma_k(z) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = |L - 2\,\mathrm{sed}_k(z)|\}. \tag{3.8}$$

Soit encore $\Sigma(z) = \bigcup_{k \in \widehat{\mathbb{N}}} \Sigma_k(z)$.

3.14. Proposition. *Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration au moins 3-valuée telle que $f(z_0) \notin \Sigma(z_0)$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant $f(z_0)$ tel que $\mathcal{U} \cap \Sigma(z_0) = \emptyset$. Alors, pour toute courbe continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ avec $\gamma(0) = f(z_0)$, il existe un unique relèvement horizontal $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathrm{Conf}$ de γ avec $\hat{\gamma}(0) = z_0$.*

Démonstration. On procède comme pour la preuve de la proposition 3.11, jusqu'à la première inégalité de (3.6) :

$$f(g_n \cdot z_0)_1 \geq L - 2\nu - R(\delta, \lambda), \tag{3.9}$$

pour $n > N_\delta$, avec, comme dans (3.7) :

$$R(\delta, \lambda) \leq (2 + L)\lambda.$$

Pour $n > N_\delta$, on a aussi

$$B_+ \leq L - \mu(z_0^{-1}(U_\delta^-)) \leq L - \nu$$

et

$$B_- \leq \mu(z_0^{-1}(U_\delta^-))(-1 + \delta) \leq \nu\delta - \nu.$$

On a donc

$$f(g_n \cdot z_0)_1 \leq L - 2\,\nu + \nu\delta \leq L - 2\,\nu + \nu\lambda. \tag{3.10}$$

Soit $k \in \widehat{\mathbb{N}}$ tel que $\nu = \mathrm{sed}_k(z_0)$. Si $k > 0$, on a $L - 2\,\mathrm{sed}_k(z_0) > 0$ (seule la sédentarité $\mathrm{sed}_0(z_0)$ peut éventuellement être strictement plus grande que $L/2$ puisque $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{sed}_k(z_0) \leq L$). Le nombre $L - 2\,\mathrm{sed}_k(z_0)$ est donc le rayon de la sphère $\Sigma_k(z_0)$. Comme λ peut être arbitrairement petit, les inégalités (3.9) et (3.10) sont en contradiction avec la condition $f(g_n \cdot z_0) \subset \gamma([0,1]) \subset \mathcal{U}$, puisque $\gamma([0,1])$ est compact et que $\mathcal{U} \cap \Sigma_k(z_0) = \emptyset$. Cet argument fonctionne aussi si $k = 0$ lorsque $\mathrm{sed}_0(z_0) < L/2$. Enfin, lorsque $k = 0$ et $\mathrm{sed}_0(z_0) > L/2$, les deux membres des inégalités (3.9) et (3.10) sont négatifs mais la conclusion reste la même. □

3.15. Remarque. Si z_0 ne prend qu'on nombre fini de valeurs, l'ensemble $\Sigma(z_0)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs critiques de $f : \mathrm{Conf} \to \mathbb{R}^d$. La proposition 3.14 est donc plus forte que la proposition 3.5.

3.16. Exemple. Nous illustrons dans cet exemple le problème qu'il peut y avoir à l'existence d'un relevé horizontal défini pour tout $t \in [0,1]$ quand la courbe $\gamma(t)$ ne satisfait pas l'hypothèse $\gamma(t) \cap \Sigma(z) \neq \emptyset$. Considérons l'espace des configurations $\mathrm{Conf}(1)$ sur $\mathbb{S}^1$ pour $L = 4$ et nous supposons que les configurations sont continues sur $[0,4]$. Soit la configuration $z_0(s) = e^{iq(s)}$, où

$$q(s) = \begin{cases} \pi/4 & s \in [0,1[\\ \alpha(s) & s \in [1,1.5[\\ \pi & s \in [1.5,2.5[\\ \beta(s) & s \in [2.5,3[\\ 7\pi/4 & s \in [3,4]\,. \end{cases}$$

La fonction $\alpha(s)$ est linéaire et vaut $\pi/4$ quand $s = 1$ et π quand $s = 1.5$; $\beta(s)$ est définie de manière analogue. On a $\mathrm{sed}_0(z_0) = 1$ et $\mathrm{sed}_k(z_0) = 0$ pour $k \geq 1$. Il s'ensuit que $\Sigma(z_0)$ est le cercle centré à l'origine de rayon 2.

La configuration z_0 étant symétrique (voir l'exemple 3.9), l'extrémité $f(z_0)$ est sur l'axe réel. En utilisant la proposition 3.8, on observe que, pour $t \to \infty$, $\Gamma_t^1 \cdot z_0$ converge point par point vers l'application $z : [0, 4] \to \mathbb{S}^1$,

$$z(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s \in [1.5, 2.5[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et l'extrémité du serpent $f(\Gamma_t^1 \cdot z_0)$ tend vers 2. Toujours dans l'exemple 3.9, on a vu que $f(\Gamma_t^1 \cdot z_0)$ restait sur l'axe réel pour tout t. Supposons que l'on désire relever la courbe $\gamma(t) = f(z_0) + t$. Cette courbe reste aussi sur l'axe réel et il existe donc une fonction $\theta(t) \in \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = f(\Gamma_{\theta(t)}^1 \cdot z_0)$. On doit avoir $\theta(t) \to \infty$ pour $t \to 2$. On ne peut donc pas relever la courbe $\gamma(t)$ pour des $t \geq 2$. Cet exemple est illustré à la figure 3.1.

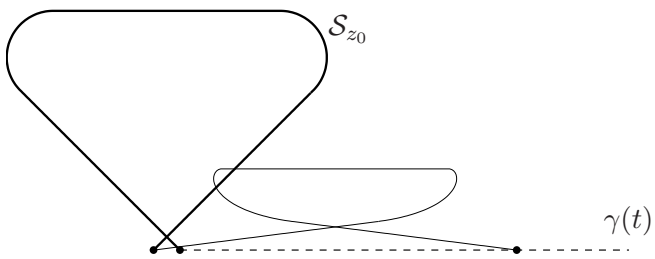


FIG. 3.1 – Une courbe que l'on ne peut pas relever entièrement.

Nous renvoyons le lecteur au paragraphe 5.1 pour plus d'exemples de relèvement de courbes.

3.4 Près d'une configuration alignée – la condition de Hairer

Le but de ce paragraphe est de présenter le phénomène suivant découvert par E. Hairer (à l'aide de calculs de développements de Taylor) :

Soient $z(t), z'(t) \in \mathrm{Conf}(1)$ deux courbes horizontales partant d'une même configuration alignée $z(0) = z'(0)$. Alors, les courbes $f(z(t))$ et $f(z'(t))$ dans $\mathbb{R}^2$ ont même cercle osculateur en $t = 0$.

Plus généralement et précisément, soit $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration alignée. Il existe donc $p \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $z_0([0, L]) \subset \{\pm p\}$. Soit $z(t) \in \mathrm{Conf}$ une courbe horizontale définie au voisinage de 0, telle que $z(0) = z_0$. On suppose que le vecteur vitesse $v \in \mathbb{R}^d$ en $t = 0$ de la courbe $t \mapsto f(z(t))$ est non-nul. Nous savons, par la

remarque 1.17, que v est orthogonal à la droite $\mathbb{R}\,p$. Le 2-plan vectoriel Π contenant p et v est orienté par la base (p, v). La projection orthogonale $f_\Pi(z(t))$ de $f(z(t))$ sur Π a donc une courbure $\kappa(t)$ avec signe.

Soit L_+ la somme des longueurs des intervalles sur lesquels $z_0(s) = p$ et L_- la somme des longueurs de ceux sur lesquels $z_0(s) = -p$. On a $L_+ + L_- = L$ et $|L_+ - L_-| = \|f(z_0)\|$.

3.17. Proposition. *La courbure de $t \mapsto f_\Pi(z(t))$ en $t = 0$ est donnée par,*

$$\kappa(0) = \frac{L_+ - L_-}{L^2}\,.$$

Comme le vecteur vitesse v est orthogonal à la droite $\mathbb{R}\,p$, le centre du cercle osculateur à $f_\Pi(z(t))$, en $t = 0$, se trouve sur $\mathbb{R}\,p$. Le signe de $\kappa(0)$ indique que la concavité de la courbe $f_\Pi(z(t))$ en $t = 0$ se trouve du côté de l'origine. Le rayon du cercle osculateur est $\frac{L^2}{|L_+ - L_-|} = \frac{L^2}{\|f(z_0)\|}$. On voit que ce cercle osculateur ne dépend que de z_0.

Démonstration. Commençons par le cas particulier où $z(t) = \Gamma_t^w \cdot z_0$ pour un flot purement hyperbolique Γ_t^w. Pour souligner la dépendance de w dans κ, on écrira κ^w. On peut supposer que $\|w\| = 1$, car $\kappa^{\lambda w}(0) = \kappa^w(0)$ si $\lambda > 0$. On suppose aussi que $w \notin \mathbb{R}\,p$, sinon on aurait $\Gamma_t^w \cdot z_0 = z_0$ pour tout t et donc $v = \frac{d}{dt} f(\Gamma_t^w \cdot z_0)|_{t=0} = 0$, ce qui contredit nos hypothèses du début du paragraphe. Les vecteurs p et w engendrent alors Π et déterminent sur ce plan la même orientation que p et v.

Identifions $\mathbb{C}$ et Π par une isométrie $\mathbb{R}$-linéaire préservant l'orientation, envoyant 1 sur p ; la partie imaginaire de w sera alors positive et on a $z_0(s) = \pm 1$. Les formules (2.14) et (2.15) donnent, pour $z_0(s) = 1$:

$$\dot\Gamma_0^w(1) = \frac{w - \bar w}{2} \quad \text{et} \quad \ddot\Gamma_0^w(1) = \frac{\bar w^2 - 1}{2}$$

et pour $z_0(s) = -1$:

$$\dot\Gamma_0^w(-1) = \frac{w - \bar w}{2} \quad \text{et} \quad \ddot\Gamma_0^w(-1) = \frac{1 - \bar w^2}{2}\,.$$

L'expression de $\gamma(t) = f(\Gamma_t^w \cdot z_0)$ prend la forme

$$\gamma(t) = L_+\,\Gamma_t^w(1) + L_-\,\Gamma_t^w(-1),$$

ce qui implique

$$\dot\gamma(0) = L\frac{w - \bar w}{2} \tag{3.11}$$

et

$$\ddot\gamma(0) = \frac{1}{2}(L_+ - L_-)(\bar w^2 - 1).$$

La courbure $\kappa^w(0)$ de $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ en $t = 0$ est donnée par les formules classiques :

$$\kappa^w(0) = \frac{\dot x(0)\ddot y(0) - \ddot x(0)\dot y(0)}{|\dot\gamma(0)|^3} = \frac{\mathrm{Im}(\ddot\gamma(0)\overline{\dot\gamma(0)})}{|\dot\gamma(0)|^3}\,. \tag{3.12}$$

Observons que

$$\ddot{\gamma}(0)\overline{\dot{\gamma}(0)} = \frac{L}{4}(L_+ - L_-)(\bar{w}^2 - 1)(\bar{w} - w) = \frac{L}{4}(L_+ - L_-)(\bar{w}^3 - 2\bar{w} + w).$$

Or,

$$(\bar{w}^3 - 2\bar{w} + w) - (\overline{\bar{w}^3 - 2\bar{w} + w}) = (\bar{w} - w)^3.$$

Notre identification de $\mathbb{C}$ avec Π implique que $w - \bar{w} = \lambda i$ avec $\lambda > 0$ et donc $(\bar{w} - w)^3 = -\lambda^3 i^3 = \lambda^3 i$. On a donc $\mathrm{Im}(\ddot{\gamma}(0)\,\overline{\dot{\gamma}(0)}) > 0$, d'où

$$\mathrm{Im}(\ddot{\gamma}(0)\,\overline{\dot{\gamma}(0)}) = L(L_+ - L_-)\frac{|w - \bar{w}|^3}{8}\,. \tag{3.13}$$

En remplaçant (3.11) et (3.13) dans (3.12), on obtient

$$\kappa^w(0) = \frac{L_+ - L_-}{L^2}\,. \tag{3.14}$$

Tournons-nous maintenant vers le cas général d'une courbe horizontale $z(t)$. Par un changement orthogonal de coordonnées, on peut supposer que Π s'identifie à $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d$ en préservant l'orientation et de manière que $p = (1, 0, \ldots, 0)$. Désignons à nouveau par $\gamma(t)$ la courbe $f(z(t))$. On a

$$\dot{\gamma}(t) = M(z(t))\dot{z}(t),$$

où $M(z(t)) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est la matrice définie au lemme 1.12. Comme $z(t)$ est horizontale, on regarde $\dot{z}(t)$ comme une courbe dans $\mathbb{R}^d$. Soient $w = \dot{z}(0)$ et Γ_t^w le flot hyperbolique correspondant. La courbe $z(t)$ a, en $t = 0$, un contact d'ordre 1 avec la courbe $\Gamma_t^w \cdot z_0$. Il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}M(z(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}M(\Gamma_t^w \cdot z_0)|_{t=0}\,.$$

Posons $\dot{M}(0) = \frac{d}{dt}M(z(t))|_{t=0}$. Si $h = (h_1, \ldots, h_d)$ et $k = (k_1, \ldots, k_d)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on note $h \times k$ le nombre réel $h \times k = h_1 k_2 - h_2 k_1$. On a

$$\kappa(0) = \underbrace{\frac{\dot{\gamma}(0) \times \dot{M}(0)\dot{z}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|^3}}_{\kappa^w(0)} + \underbrace{\frac{\dot{\gamma}(0) \times M(z_0)\ddot{z}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|^3}}_{B}\,. \tag{3.15}$$

Comme $M(z_0)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, L, \ldots, L)$, le numérateur de B est de la forme $(0, \dot{\gamma}_2(0)) \times (0, L\ddot{z}_2(0)) = 0$. Les formules (3.15) et (3.14) impliquent alors la proposition 3.17. □

La proposition ci-dessous dit que la condition de Hairer sur la courbure est, dans le plan, nécessaire et suffisante pour l'existence d'un relèvement horizontal. Pour économiser les notations, on se met dans le cas d'une configuration initiale alignée $z_0(s) \in \{\pm 1\}$ et on suppose que la courbe $\gamma(t)$ à suivre satisfasse $\dot{\gamma}(0) = \lambda i$, avec $\lambda > 0$. Le cas général peut se ramener à celui-ci par une rotation. Notons

$$I_+ = \{s \in [0, L] \mid z_0(s) = 1\} \quad \text{et} \quad I_- = \{s \in [0, L] \mid z_0(s) = -1\}.$$

En permutant au besoin les sous-intervalles de I_+ et I_-, on supposera que I_+ et I_- sont connexes. La partition pour laquelle les configurations sont continues est de la forme $0 < L_+ < L$. Les valeurs critiques sont donc sur les cercles centrés à l'origine de rayon L et $|L_+ - L_-|$.

3.18. Proposition. *Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}(1)$ une configuration alignée telle que $z_0(s) \in \{\pm 1\}$. Soit $\gamma : [0,\varepsilon] \to \mathbb{C}$ une courbe $\mathcal{C}^2$ telle que $\gamma(0) = f(z_0)$ et $\dot\gamma(0) = \lambda i$, avec $\lambda > 0$. On suppose que $|L_+ - L_-| < |\gamma(t)| < L$ et $\mathrm{Im}(\gamma(t)) \geq 0$ lorsque $t > 0$. Alors, γ admet un relèvement horizontal $z : [0,\varepsilon] \to \mathrm{Conf}$ partant de z_0 si, et seulement si, $\kappa(0) = \frac{L_+ - L_-}{L^2}$.*

Démonstration. Vu la proposition 3.17, il suffit de montrer que le condition sur $\kappa(0)$ entraîne que γ admet un relèvement horizontal. La géométrie élémentaire implique que pour $t \in [0,\varepsilon]$, il existe un unique couple $(a(t), b(t)) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ avec

(a) $\mathrm{Im}(a(t)) \geq 0$ et $\mathrm{Im}(b(t)) \geq 0$;

(b) $\gamma(t) = L_+ a(t) + L_- b(t)$.

Affirmation : *l'application $t \mapsto (a(t), b(t))$ est de classe $\mathcal{C}^2$.*

La preuve de cette affirmation sera donnée en fin de démonstration. On peut donc définir une courbe $z : [0,\varepsilon] \to \mathrm{Conf}$ par

$$z(t)(s) = \begin{cases} a(t) & \text{si } s \in I_+ \\ b(t) & \text{si } s \in I_- \end{cases} \tag{3.16}$$

telle que $f(z(t)) = \gamma(t)$. Par hypothèse, $\gamma(t)$ reste dans les valeurs régulières de f pour $t > 0$. Pour tout $0 < t_0 < \varepsilon$, la courbe $\gamma|_{[t_0,\varepsilon]}$ se relève donc horizontalement en une courbe du type (3.16) partant de $z(t_0)$. Par unicité de $(a(t), b(t))$, $z(t)$ est donc horizontal lorsque $t > 0$. Il reste à montrer que $z(t)$ est aussi horizontal lorsque $t = 0$.

Remarquons que $\dot b(0) = -\dot a(0)$ et posons $\dot a(t) = \alpha(t) i a(t)$ et $\dot b(t) = -\beta(t) i b(t)$, ce qui définit $\alpha, \beta : [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$. On a alors :

$$\dot\gamma(t) = L_+ \alpha(t) i a - L_- \beta(t) i b.$$

Au temps $t = 0$, cela devient :

$$\dot\gamma(0) = (\alpha(0) L_+ + \beta(0) L_-) i. \tag{3.17}$$

Calculons la dérivée seconde :

$$\ddot\gamma(t) = L_+ \dot\alpha(t) i a(t) - L_+ \alpha^2(t) a - L_- \dot\beta(t) i b - L_- \beta^2(t) b.$$

En utilisant les formules $ib \times b = ia \times a = -1$ et $ia \times b = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\dot\gamma(0) \times \ddot\gamma(0) = \\ &\qquad L_+^2 \alpha^3(0) + L_+ L_- \alpha^2(0)\beta(0) - L_+ L_- \alpha(0)\beta^2(0) - L_-^2 \beta^3(0). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Les formules (3.17) et (3.18) donnent :

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{\dot\gamma(0) \times \ddot\gamma(0)}{|\dot\gamma(0)|^3} \\ &= \frac{L_+^2 \alpha^3(0) + L_+ L_- \alpha^2(0)\beta(0) - L_+ L_- \alpha(0)\beta^2(0) - L_-^2 \beta^3(0)}{(\alpha(0) L_+ + \beta(0) L_-)^3}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

L'horizontalité de $z(t)$ en $t = 0$ est équivalente à $\alpha(0) = \beta(0)$. Par la formule (3.19), on a bien, si $\alpha(0) = \beta(0)$,

$$\kappa(0) = \frac{\alpha^3(0)(L_+^2 - L_-^2)}{\alpha^3(0)(L_+ + L_-)^3} = \frac{L_+ - L_-}{(L_+ + L_-)^2}\,.$$

Observons que $\beta(0) \neq 0$, sinon, la formule (3.19) donnerait $\kappa(0) = 1/L_+$. De même, $\alpha(0) \neq 0$, sinon, la formule (3.19) donnerait $\kappa(0) = 1/L_-$. Quitte à changer ε et reparamétrer γ, on peut donc supposer que $\beta(t) = 1$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$. On aura $\alpha(t) > 0$ au voisinage de $t = 0$ par la condition (a). L'équation (3.19) devient alors

$$\kappa(0) = \frac{L_+^2\alpha^3(0) + L_+L_-\alpha^2(0) - L_+L_-\alpha(0) - L_-^2}{(\alpha(0)L_+ + L_-)^3}\,.$$

Considérons la fonction rationnelle

$$F : \alpha \mapsto \frac{L_+^2\alpha^3 + L_+L_-\alpha^2 - L_+L_-\alpha - L_-^2}{(L_+\alpha + L_-)^3}\,.$$

Sa dérivée vaut

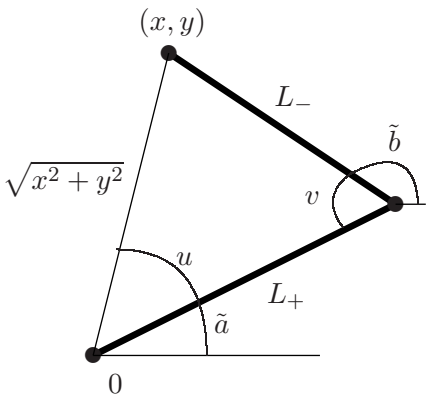
$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{2L_+L_-(\alpha + 1)}{(L_+\alpha + L_-)^3}\,.$$

On aura donc $\frac{dF}{d\alpha} > 0$, puique $\alpha > 0$. L'égalité $\kappa(0) = (L_+ - L_-)/L^2$ a donc lieu si et seulement si $\alpha(0) = 1$, ce qui montre que $z(t)$ est horizontal pour tout $t \in [0, \varepsilon]$.

Preuve de l'affirmation : On considère l'équation reliant $z = (a, b) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ à $f(z) = x + iy$:

$$x + iy = L_+a + L_-b.$$

Posons $a = e^{i\tilde{a}}$ et $b = e^{i\tilde{b}}$, avec $\tilde{a}(0) = 0$ et $\tilde{b}(0) = \pi$. Le serpent polygonal se présente de la façon suivante :



Considérons tout d'abord le cas où $L_+ \neq L_-$. Dans ce cas, (a, b) dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de (x, y). En effet, le théorème du cosinus donne

$$x^2 + y^2 = L_+^2 + L_-^2 + 2L_+L_- \cos v \tag{3.20}$$

et

$$L_-^2 = x^2 + y^2 + L_+^2 + 2L_+\sqrt{x^2 + y^2}\cos u. \tag{3.21}$$

D'autre part, on a

$$\tilde{a} + u = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.22}$$

et

$$\tilde{b} + v = \tilde{a} + \pi. \tag{3.23}$$

Comme $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |L_+ - L_-| > 0$, les formules (3.20) à (3.23) montrent que (x, y) détermine (a, b) de manière C^∞.

Lorsque $L_- = L_+$, le triangle de côtés L_-, L_+ et $\sqrt{x^2 + y^2}$ est isocèle et l'équation (3.21) peut être remplacée par

$$v = \pi - 2u.$$

Il reste le problème de l'équation (3.22). Comme $\dot{\gamma}(0) = \lambda i$ et $\kappa(0) = 0$, on a

$$\gamma(t) = \lambda i t + o(t^2).$$

Comme γ est $\mathcal{C}^2$, la fonction $o(t^2)$ l'est également. On en déduit que

$$\tilde{a} = \arcsin \left(\frac{\lambda\, t}{2L_+} + o(t^2) \right)$$

où $o(t^2)$ une fonction $\mathcal{C}^2$ de t. Les fonctions $\tilde{a}(t)$ et $\tilde{b}(t)$ sont donc de classe $\mathcal{C}^2$. $\square$

Chapitre 4

La continuité de l'algorithme

Jusqu'ici, nous avons regardé des applications $z : [0, L] \to \mathbb{S}^{d-1}$ continues sauf sur un nombre fini de points et avons supposé que ces points étaient toujours les mêmes. Les serpents $\mathcal{S}_z$ dans $\mathbb{R}^d$ correspondant sont des courbes continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; les points de discontinuité de z correspondent aux points où le serpent n'est pas différentiable. Nous nous permettons dans ce chapitre de changer les points de discontinuité et regarderons ainsi toutes les applications continues par morceaux de $[0, L]$ dans $\mathbb{S}^{d-1}$. L'espace de telles applications est encore un espace métrique, mais ne possède plus une structure de variété banachique lisse. Nous permettons également à L de varier. L'un des buts de ce chapitre est de comprendre comment se comporte l'approximation d'un serpent par un bras articulé au niveau du relèvement de courbes. Plus précisément et plus généralement, voici le problème que nous étudions.

Soit $\mathcal{P}$ une partition de $[0, L]$ et soit $\mathrm{Conf}_{\mathcal{P}}^{L}$ l'espace de configurations associé. Soit $\mathcal{S}_z : [0, L] \to \mathbb{R}^d$ le serpent correspondant à une configuration $z \in \mathrm{Conf}_{\mathcal{P}}^{L}$ et soit $x = f(z) = \mathcal{S}_z(L)$ son extrémité. Désignons par I l'intervalle fermé $[0, 1]$ et soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe $\mathcal{C}^1$ qui admet un relèvement horizontal $z(t) = g(t) \cdot z_0$ sur tout I. On considère la même situation avec une partition $\mathcal{P}'$ d'un autre intervalle $[0, L']$: soient $z' \in \mathrm{Conf}_{\mathcal{P}'}^{L'}$ une configuration, $\mathcal{S}_{z'}$ le serpent correspondant et une courbe $\mathcal{C}^1$ $\gamma'(t)$, $t \in [0, 1]$, $\gamma'(0) = x'$, que l'on relève en $g'(t) \cdot z'$, avec $g'(t) \in$ Möb. Bien que les configurations z et z' sont dans des espaces différents, les courbes $\mathcal{S}_z(s)$ et $\mathcal{S}_{z'}(s)$ ainsi que $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ sont toutes des courbes dans $\mathbb{R}^d$. La question que nous nous posons est la suivante :

Si les courbes $\mathcal{S}_z(s)$ et $\mathcal{S}_{z'}(s)$ sont proches l'une de l'autre (dans un sens à préciser) et qu'il en est de même de $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$, qu'en est-il de $g(t)$ et $g'(t)$ dans le groupe de Möbius ?

4.1 Généralisation de l'espace des configurations

Pour tout nombre réel $L > 0$, désignons par C_L l'ensemble des applications continues par morceaux de $[0, L]$ dans $\mathbb{S}^{d-1}$. Nous munissons C_L de la métrique $d(z, w) = \sup_{s \in [0,L]} d(z(s), w(s))$, avec $d(z(s), w(s)) = \|z(s) - w(s)\|$. Dans la suite, nous rencontrerons divers espaces métriques et nous désignerons toujours la distance

entre les points par $d(\cdot,\cdot)$. Le contexte évitera les confusions. Pour tout $z \in \mathrm{C}_L$, nous définissons $\hat{z} \in \mathrm{C}_1$ par $\hat{z}(s) = z(Ls)$. Il s'agit d'une reparamétrisation linéaire de la courbe z. Inversement, si $z \in \mathrm{C}_1$ et $L > 0$, on définit $\check{z} \in \mathrm{C}_L$ par $\check{z}(s) = z(s/L)$.

4.1. Définition. L'***espace des configurations généralisé*** est le produit $\mathrm{GC} = \mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{C}_1$. Nous munissons GC de la métrique

$$d((L_1, u_1), (L_2, u_2)) = |L_1 - L_2| + d(u_1, u_2).$$

4.2. Lemme. *Pour tout $L > 0$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_L &\xrightarrow{i_L} \mathrm{GC} \\ z &\longmapsto (L, \hat{z}) \end{aligned}$$

est un plongement isométrique.

Démonstration. Le lemme découle du fait que la reparamétrisation $z \mapsto \hat{z}$ est une isométrie de C_L sur C_1. En effet,

$$\sup_{s\in[0,L]} d(z(s), w(s)) = \sup_{s\in[0,1]} d(z(Ls), w(Ls)).$$

□

Pour tout $L > 0$, on peut ainsi identifier C_L à un sous-ensemble de GC. Soit $p_L : \{L\} \times \mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_L$ envoyant (L, u) sur $\check{u}$. La composition $p_L \circ i_L : \mathrm{C}_L \to \mathrm{C}_L$ donne l'identité. On identifiera souvent $z = (L, u) \in \mathrm{GC}$, avec $p_L(z) \in \mathrm{C}_L$. Autrement dit, on regardera les éléments $z = (L, u)$ comme des applications de $[0, L]$ dans $\mathbb{S}^{d-1}$. Les éléments de GC seront également appelés des ***configurations***. Pour $z = (L, u) \in \mathrm{GC}$, soit $\mathcal{P}$ la partition la plus grossière[1] telle que z est continue par morceaux pour $\mathcal{P}$. On désigne par Conf_z la variété banachique lisse $\mathrm{Conf}^L_{\mathcal{P}}$. On dira que Conf_z est l'espace des configurations correspondant à z. Nous avons les inclusions $\mathrm{Conf}_z \subset \mathrm{C}_L \subset \mathrm{GC}$.

On étend la notion de « serpent » à l'espace des configurations généralisé : pour tout $z = (L, u) \in \mathrm{GC}$, le serpent correspondant à z est la courbe $\mathcal{S}_z : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{S}_z(s) = L \int_0^s u(\tau) d\tau.$$

Remarquons que le serpent $\mathcal{S}_z$ n'est plus paramétré par la longueur d'arc ; la norme de $\dot{\mathcal{S}}_z(s)$ est cependant constante. Son extrémité est l'application continue $f : \mathrm{GC} \to \mathbb{R}^d$, $f(z) = \mathcal{S}_z(1)$.

Le groupe de Möbius agit continûment sur C_L par $(g \cdot u)(s) = g(u(s))$ ainsi que sur GC par $g \cdot (L, u) = (L, g \cdot u)$. Cette action préserve l'intervalle $[0, L]$ ainsi que la partition pour laquelle u est continue. Autrement dit, l'orbite de z dans GC est la même que celle dans C_L et Conf_z.

Soit I l'intervalle fermé $[0, 1]$ et soit $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des chemins $\mathcal{C}^2$ de I vers $\mathbb{R}^d$. On munit cet espace de la norme $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire

$$\|\gamma\| = \sup_{t\in I}\{\|\gamma(t)\|\} + \sup_{t\in I}\{\|\dot{\gamma}(t)\|\} + \sup_{t\in I}\{\|\ddot{\gamma}(t)\|\}$$

[1] C'est-à-dire, si $\mathcal{P}'$ est une autre partition pour laquelle z est continue par morceaux, alors $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

4.3. Définition. ***L'espace des paramètres*** Par est l'ensemble des couples $(z, \gamma) \in \mathrm{GC} \times \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^d)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $f(z) = \gamma(0)$;

(2) z est au moins 3-valuée ;

(3) $\gamma(t) \cap \Sigma(z) = \emptyset$, où $\Sigma(z)$ est l'ensemble des sphères de sédentarité défini en (3.8).

Les éléments de Par seront désignés par $p = (z, \gamma)$ et seront appelés des ***paramètres***. Nous munissons Par de la métrique $d(p_1, p_2) = d(z_1, z_2) + d(\gamma_1, \gamma_2)$.

La deuxième condition assure $g \cdot z$ n'est jamais alignée et donc que le champ de vecteurs (3.4) est défini sur tout le groupe de Möbius. La troisième condition assure que le relèvement existe pour tout $t \in I$ (voir la proposition 3.14).

Pourquoi le terme « paramètre » ? L'équation différentielle (3.5) est la clef pour construire les relèvements horizontaux. En posant celle-ci, nous nous sommes donnés une configuration initiale z ainsi qu'une courbe γ. Nous nous intéressons à présent à faire varier le couple (z, γ). Celui-ci devient un paramètre de l'équation différentielle. Soit

$$\begin{aligned} X : \mathrm{Möb} \times I \times \mathrm{Par} &\longrightarrow T\mathrm{Möb} \\ (g, t, p) &\longmapsto X_p^t(g), \end{aligned}$$

où $X_p^t(g) = M^{-1}(g \cdot z)\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{H}_g \subset T_g\mathrm{Möb}$ (voir l'équation (3.4)). Il s'agit d'un champ de vecteurs sur le groupe de Möbius dépendant du temps et d'un paramètre. L'équation (3.5) s'écrit alors

$$\dot{g}(t) = X_p^t(g(t)), \qquad g(0) = \mathrm{id}, \tag{4.1}$$

Pour un paramètre p fixé, il existe une unique solution $g_p(t)$ de cette équation pour tout $t \in [0, 1]$. Le théorème de continuité 4.5 nous dit comment varie la solution en fonction de p. Pour cela, nous avons besoin d'un résultat sur les solutions d'équations différentielles dépendant d'un paramètre (voir par exemple [Di78, 10.7.1]).

4.4. Proposition. *Soient E un espace de Banach et U un ouvert de E. Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Soit P un espace métrique. On se donne une application $f : U \times I \times P \to E$, envoyant (x, t, p) sur $f(x, t, p)$ qui satisfait aux hypothèses suivantes :*

(1) f est continue ;

(2) pour tout $p \in P$ fixé, l'application $f_p : U \times I \to E$ envoyant $(x, t) \mapsto f(x, t, p)$ est continûment différentiable ;

(3) pour tout $(t, p) \in I \times P$ fixé, on considère l'application $f_p^t : U \to E$, $x \mapsto f(x, t, p)$; la dérivée de cette application $D_x f_p^t : E \to E$ est un élément de $\mathcal{L}(E, E)$. On demande que l'application $U \times I \times P \to \mathcal{L}(E, E)$, $(x, t, p) \mapsto D_x f_p^t$ soit continue.

Alors, pour tout $(x_0, 0, p_0) \in U \times I \times P \to E$, il existe un intervalle $J =]-\varepsilon, \varepsilon[\subset I$ et une boule ouverte $B = B_\delta(p_0) \subset P$ tels que pour tout $p \in B$, il existe une unique solution de l'équation $\dot{x}(t) = f(x(t), t, p)$, $x(0) = 0$ définie sur J. On la désigne par x_p. De plus, la correspondance $(t, p) \mapsto x_p(t)$ de $J \times B$ dans U est continue et bornée.

Soit $\{p_n\}$ une suite dans P convergeant vers $p \in P$ (la limite p joue le rôle du point p_0 dans la proposition ci-dessus). La proposition 4.4 affirme que pour des n assez grands (tels que $p_n \in B$), les solutions $x_{p_n}(t)$ sont définies sur un même intervalle J et, de plus, la suite de solutions $\{x_{p_n}(t)\}$ converge point par point vers la solution $x_p(t)$.

En se plaçant dans une carte, on constate que ce résultat reste valable si l'équation différentielle est sur une variété lisse.

4.5. Théorème de continuité. *Soit $\{p_n\}$ une suite dans* Par *convergeant vers un paramètre $p \in$* Par. *Soit $\{g_n(t)\}$ la suite de courbes dans* Möb *telle que $g_n(t)$ est la solution de* (4.1) *correspondant à p_n. Soit $g(t)$ la solution correspondant à p. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t)$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que le champ de vecteurs $X : \text{Möb} \times I \times \text{Par} \to T\text{Möb}$ satisfait aux hypothèses de la proposition 4.4. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de id dans le groupe de Möbius. On regardera $\mathcal{V}$ comme une carte près de l'identité, autrement dit, comme un ouvert de $\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$. Le fibré tangent TMöb est trivial et nous savons que X prend ses valeurs dans la distribution $\mathcal{H} \simeq \text{Möb} \times \mathbb{R}^d$. On peut ainsi écrire l'application X comme :

$$X : \mathcal{V} \times I \times \text{Par} \to \mathbb{R}^d,$$

où $X_p^t(g) = M^{-1}(g \cdot z)\dot{\gamma}(t)$. La continuité de X vient du fait qu'elle est composition de fonctions continues. Pour un paramètre p fixé, l'application $(g,t) \mapsto X_p^t(g)$ est évidement $\mathcal{C}^1$: elle est lisse par rapport g (composition d'applications lisses) et $\mathcal{C}^1$ par rapport à t (nous avons supposé γ de classe $\mathcal{C}^2$). Soit $(t,p) \in I \times \text{Par}$ et on considère la dérivée par rapport à g,

$$T_g X_p^t : \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

Il s'agit de vérifier que la correspondance $(g,t,p) \mapsto T_g X_p^t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}, \mathbb{R}^d)$ est continue. Pour cela on décompose X_p^t :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\beta_z} & \text{Conf} & \xrightarrow{M} & \text{GL}(d) & \xrightarrow{\text{inv}} & \text{GL}(d) & \xrightarrow{\text{eval}_{\dot{\gamma}(t)}} & \mathbb{R}^d \\ g & \longmapsto & g \cdot z & \longmapsto & M(g \cdot z) & \longmapsto & M^{-1}(g \cdot z) & \longmapsto & M^{-1}(g \cdot z)\dot{\gamma}(t). \end{array}$$

Soit $\phi_z = M \circ \beta_z$. La règle de dérivation en chaîne donne

$$\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \xrightarrow{T_g\phi_z} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \xrightarrow{T_{M(g\cdot z)}\text{inv}} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{eval}_{\dot{\gamma}(t)}} \mathbb{R}^d.$$

Par composition, il suffit de montrer que les trois correspondances ci-dessous sont continues :

(1) $(g,z) \mapsto T_g\phi_z \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$;

(2) $(g,z) \mapsto T_{M(g\cdot z)}\text{inv} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$;

(3) $(g,\gamma,t) \mapsto \text{eval}_{\dot{\gamma}(t)} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \mathbb{R}^d)$.

Les deux dernières sont évidentes ; regardons donc la première. La dérivée de M : $\text{Conf} \to \text{GL}(d)$ donne

$$T_z M(h) = -\left(\int_0^L z_i(s)h_j(s) + z_j(s)h_i(s)ds\right)_{i,j=1,\dots,d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),$$

où $z \in \mathrm{Conf}$ et $h \in T_z\mathrm{Conf}$. On munit $\mathfrak{möb} \simeq \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$ de la base $\{C_k, [C_l, C_m] \mid k, l, m = 1, \ldots, d \text{ et } l < m\}$. Comme les champs C_k et ξ_k sont β-reliés, on a

$$T_g\phi_z(C_k) = -\Big(\int_0^L g(z(s))_i \xi_k(g(z(s)))_j + g(z(s))_j \xi_k(g(z(s)))_i ds\Big)_{i,j=1,\ldots,d}$$

et

$$T_g\phi_z([C_l, C_m]) = \Big(\int_0^L g(z(s))_i [\xi_l, \xi_m](g(z(s)))_j + g(z(s))_j [\xi_l, \xi_m](g(z(s)))_i ds\Big)_{i,j=1,\ldots,d}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que si $\{(g_n, z_n)\}$ est une suite dans $\mathcal{V} \times \mathrm{GC}$ qui converge vers $(g, z) \in \mathcal{V} \times \mathrm{GC}$, alors $T_{g_n}\phi_{z_n}(C_k)$ converge vers $T_g\phi_z(C_k)$ dans $\mathbb{R}^d$ (et la même chose pour $[C_l, C_m]$) ; nous omettons les détails. □

4.2 Approximation par des bras articulés

Dans ce paragraphe, nous utilisons le théorème de continuité 4.5 pour comprendre l'approximation d'un serpent par un bras articulé. Au lieu de travailler dans l'espace de configurations, il sera il sera plus commode de travailler directement avec les serpents $\mathcal{S}$. Nous désignons donc par GS l'ensemble des applications continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\mathcal{S} : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ telles que :

(1) $\mathcal{S}(0) = 0$;

(2) il existe un nombre réel $L_{\mathcal{S}} > 0$ tel que $\|\dot{\mathcal{S}}(s)\| = L_{\mathcal{S}}$ pour tout s où la dérivée $\dot{\mathcal{S}}(s)$ existe.

Pour tout $\mathcal{S} \in \mathrm{GS}$, il existe une partition $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = 1$ tel que $\mathcal{S}|_{[s_{i-1}, s_i]} : [s_{i-1}, s_i] \to \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On prolonge la définition de $\dot{\mathcal{S}}(t)$ aux points $s_1, \ldots, s_{N-1}$ en posant $\dot{\mathcal{S}}(s_i) = \dot{\mathcal{S}}|_{[s_i, s_{i+1}]}(s_i)$. La fonction $t \mapsto \dot{\mathcal{S}}(t)$ est alors continue par morceaux. Le résultat ci-dessous, nous dit que GS est « l'ensemble de tous les serpents ».

4.6. Lemme. *La correspondance $z \mapsto \mathcal{S}_z$ est une bijection de* GC *vers* GS.

Démonstration. Pour avoir un inverse, on définit $\theta : \mathrm{GS} \to \mathrm{GC}$ comme suit : pour tout $\mathcal{S} \in \mathrm{GS}$, on pose $\theta_{\mathcal{S}} = (L_{\mathcal{S}}, \hat{\theta}_{\mathcal{S}})$ où $\hat{\theta}_{\mathcal{S}} : [0, 1] \to \mathbb{S}^{d-1}$ est donné par $\hat{\theta}_{\mathcal{S}}(t) = \frac{\dot{\mathcal{S}}(t)}{L_{\mathcal{S}}}$. Le couple $(L_{\mathcal{S}}, \hat{\theta}_{\mathcal{S}})$ est bien dans GC et on vérifie facilement que $\mathcal{S} \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathrm{GS}}$ et que $\theta \circ \mathcal{S} = \mathrm{id}_{\mathrm{GC}}$. □

Cette bijection nous permet de transférer la métrique de GC sur GS. Pour tout $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathrm{GS}$, on définit

$$\begin{aligned} d(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) &= d(\theta_{\mathcal{S}_1}, \theta_{\mathcal{S}_2}) \\ &= |L_{\mathcal{S}_1} - L_{\mathcal{S}_2}| + \sup_{s \in [0,1]} \|\hat{\theta}_{\mathcal{S}_1}(s) - \hat{\theta}_{\mathcal{S}_2}(s)\| \\ &= |L_{\mathcal{S}_1} - L_{\mathcal{S}_2}| + \sup_{s \in [0,1]} \|\frac{\dot{\mathcal{S}}_1(s)}{L_{\mathcal{S}_1}} - \frac{\dot{\mathcal{S}}_2(s)}{L_{\mathcal{S}_2}}\|. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{S} \in \mathrm{GS}$ un serpent de longueur L que nous supposons $\mathcal{C}^1$ sur tout $[0,1]$. On se donne $N+1$ points $s_i = \frac{i}{N}, i = 0, \ldots, N$, de l'intervalle $[0,1]$ ainsi que les points $x_i = \mathcal{S}(s_i)$ dans $\mathbb{R}^d$ correspondant. On considère encore les N vecteurs $v_i = x_i - x_{i-1}$. Ceci nous mène à définir l'application affine par morceaux $\mathcal{S}_N : [0,1] \to \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{S}_N(s) = \begin{cases} Nsv_1 & s \in [0, \frac{1}{N}[\\ \quad\vdots & \\ x_{i-1} + (Ns - (i-1))v_i & s \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}[\\ \quad\vdots & \\ x_{N-1} + (Ns - (N-1))v_N & s \in [\frac{N-1}{N}, 1]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Il s'agit du serpent polygonal passant par les points x_i pour $i = 0, \ldots, N$. L'application $\mathcal{S}_N$ est un élément de l'espace GS ; sa longueur est $L_N = \|v_1\| + \ldots + \|v_N\|$. Si N est assez grand, on peut supposer que $v_i \neq 0$. On regarde ces applications comme une suite $\{\mathcal{S}_N\}$ dans GS. Les vecteurs v_i définissent l'élément $w = (w_1, \ldots, w_N) \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$, où $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$. On peut ainsi voir $\mathcal{S}_N$ comme le bras articulé de type $(\|v_1\|, \ldots, \|v_N\|)$ correspondant à la configuration w.

La suite de bras articulés $\{\mathcal{S}_N\}$ converge vers le serpent $\mathcal{S}$. En effet, la distance entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_N$ est

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_N) = |L - L_N| + \max_{i=1,\ldots,N} \sup_{s \in [s_{i-1}, s_i]} \Big\| \frac{\dot{\mathcal{S}}(s)}{L} - \frac{v_i}{\|v_i\|} \Big\|.$$

Le serpent $\mathcal{S}$ étant rectifiable, on peut rendre $|L - L_N|$ arbitrairement petit pour N suffisamment grand. Pour le deuxième terme, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} &\Big\| \frac{\dot{\mathcal{S}}(s)}{L} - \frac{\dot{\mathcal{S}}(s_{i-1})}{L} + \frac{\dot{\mathcal{S}}(s_{i-1})}{L} - \frac{\mathcal{S}(s_i) - \mathcal{S}(s_{i-1})}{\|v_i\|} \Big\| \\ &\qquad \leq \Big\| \frac{\dot{\mathcal{S}}(s)}{L} - \frac{\dot{\mathcal{S}}(s_{i-1})}{L} \Big\| + \Big\| \frac{\dot{\mathcal{S}}(s_{i-1})}{L} - \frac{\mathcal{S}(s_i) - \mathcal{S}(s_{i-1})}{\|v_i\|} \Big\|. \end{aligned}$$

Comme $\dot{\mathcal{S}}$ est uniformément continue sur $[s_{i-1}, s_i]$, $\|\dot{\mathcal{S}}(s) - \dot{\mathcal{S}}(s_{i-1})\|$ peut être rendu arbitrairement petit indépendamment de s. Par définition de la dérivée de $\mathcal{S}$ au point s_{i-1}, le terme $\|\frac{\dot{\mathcal{S}}(s_{i-1})}{L} - \frac{\mathcal{S}(s_i) - \mathcal{S}(s_{i-1})}{\|v_i\|}\|$ peut également l'être. En utilisant l'isométrie entre GC est GS, il s'ensuit que la suite $\{z_N = \theta_{\mathcal{S}_N}\}$ converge vers $z = \theta_{\mathcal{S}}$ dans GC.

Par définition de $\mathcal{S}_N$, on a $\mathcal{S}_N(1) = \mathcal{S}(1)$, autrement dit, $f(z_N) = f(z) = x \in \mathbb{R}^d$. On se donne alors une courbe $\mathcal{C}^2$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ à relever horizontalement. On demande que les couples $p_N = (z_N, \gamma)$ (ainsi que (z, γ)) soient dans l'espace de paramètres Par pour tout N. Ceci nous garantit que les relevés horizontaux des couples $(z_N, \gamma))$ (ainsi que $(z, \gamma))$ existent sur tout $[0,1]$. Comme la suite $\{z_N\}$ converge vers z dans GC, la suite de paramètres $\{(z_N, \gamma)\}$ converge évidemment vers (z, γ). Le théorème de continuité 4.5 assure que les relevés horizontaux dans le groupe de Möbius $g_N(t)$ des bras articulés z_N convergent vers le relevé $g(t)$ de z. Ceci répond à la question posée au début du chapitre.

4.7. Remarque. Ce procédé d'approximation est utile pour des simulations numériques. En effet, dans les deux méthodes numériques (résolution numérique de

l'équation différentielle ou l'algorithme 5.9, voir 5.2) nous avons souvent besoin de calculer la matrice

$$M(z) = \begin{pmatrix} L & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_0^L z_1(s)z_1(s)ds & \cdots & \int_0^L z_1(s)z_d(s)ds \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^L z_1(s)z_d(s)ds & \cdots & \int_0^L z_d(s)z_d(s)ds \end{pmatrix}.$$

Le calcul du terme $\int_0^L z_i(s)z_j(s)ds$ nécessite l'utilisation d'une méthode de quadrature. Celle-ci va d'une part augmenter l'erreur de notre procédé et d'autre part être coûteuse en temps. En approchant le serpent par un bras articulé, le calcul de celui-ci se réduit à une somme de N termes (voir la formule (1.8)).

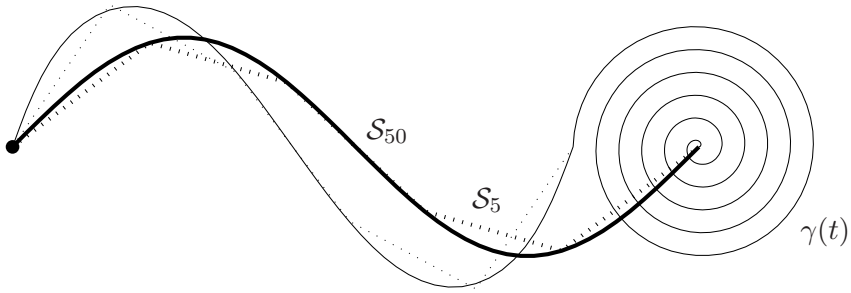


Fig. 4.1 – Approximation d'un serpent par un bras articulé.

4.8. Exemple. Pour terminer de chapitre, nous illustrons par un exemple l'approximation d'un serpent par un bras articulé. On considère la courbe $\mathcal{S} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par la formule

$$\mathcal{S}(s) = (s, \sin(s)).$$

Modulo une reparamétrisation, on s'arrange pour que $\mathcal{S}$ soit paramétré à vitesse constante sur l'intervalle $[0, 1]$; il s'agit donc d'un élément de GS. Soit $\mathcal{S}_N$, le serpent polygonal défini en (4.2). Nous avons fait suivre à ces serpents la spirale d'équation

$$\gamma(t) = (x_0, y_0) + \frac{1}{30}(t\cos(t), t\sin(t)), \tag{4.3}$$

où $(x_0, y_0) = \mathcal{S}(2\pi) = (2\pi, 0)$ et $t \in [0, 11\pi]$. Pour ce faire, nous avons résolu numériquement l'équation différentielle (4.1) dans le groupe de Möbius Möb(1) (voir le paragraphe 5.1 pour plus de détails). La figure 4.1 illustre le serpent $\mathcal{S}_{50}$ et $\mathcal{S}_5$, ainsi que les serpents correspondant après avoir suivi la spirale (4.3).

Afin de mieux comprendre ce qui se passe dans le groupe de Möbius, désignons par $g_N(t)$, $t \in [0, 11\pi]$, la solution dans Möb(1) pour le serpent $\mathcal{S}_N$. Nous voulons dessiner les courbes $t \mapsto g_N(t)$ pour différentes valeurs de N. Pour ce faire, nous utilisons le modèle Möb(1) $\simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ décrit au début au paragraphe 3.1. On écrit donc $g_N(t) = (v_N(t), e^{iq_N(t)})$ avec $v_N(t) \in \mathbb{R}^2$ et $q_N(t) \in \mathbb{R}$. Ainsi la figure 4.2 montre la courbe $t \mapsto v_N(t)$ pour $N = 5, 7, 50$ et la figure 4.3 la fonction $t \mapsto q_N(t)$. Nous

avons en réalité fait l'expérience avec de nombreuses valeurs de N. Pour des valeurs de N supérieures à 50, on ne distingue plus de différences entre les courbes. On a dans ce sens « une convergence rapide ». Ce phénomène a été constaté expérimentalement dans d'autres cas ; nous n'avons cependant pas d'explication théorique.

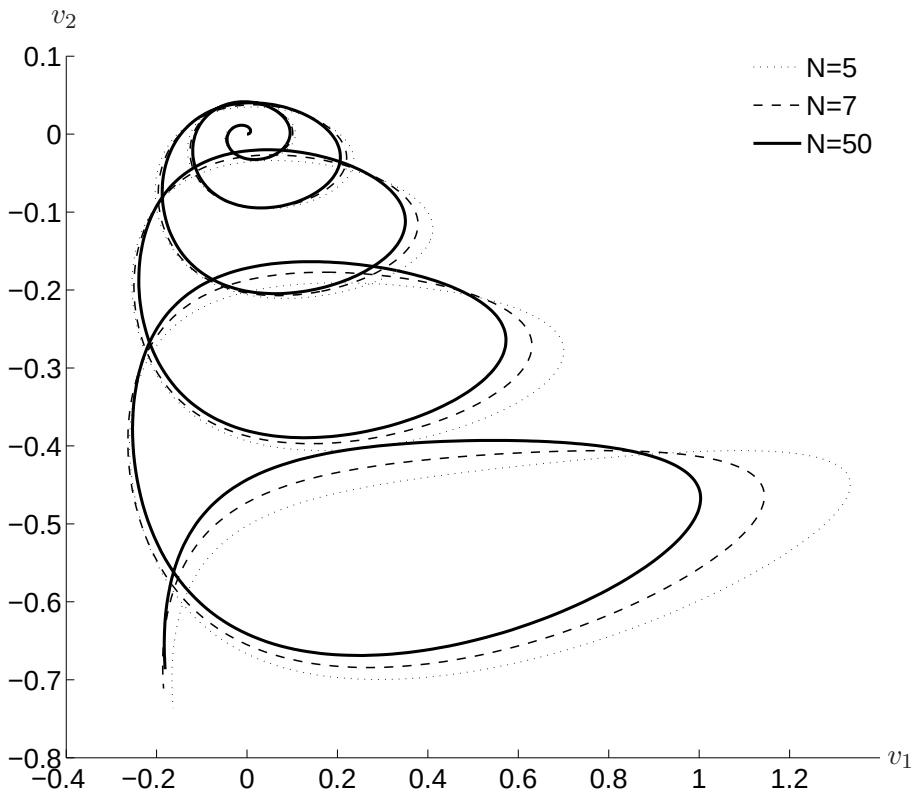


FIG. 4.2 – Continuité de la solution : $t \mapsto v_N(t)$.

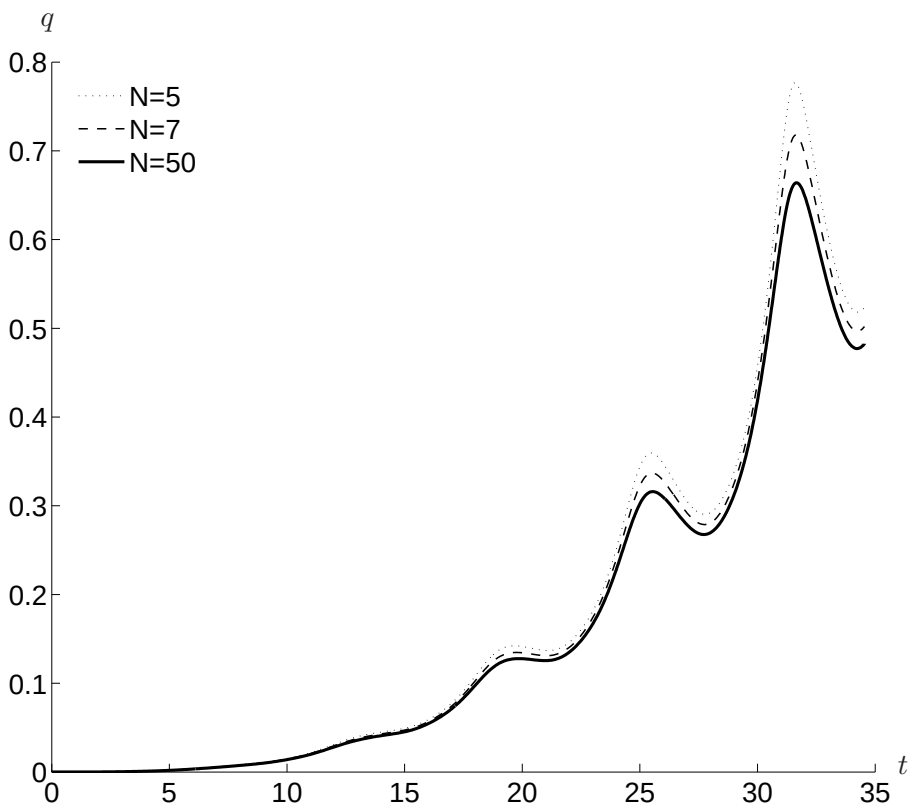


FIG. 4.3 – Continuité de la solution : $t \mapsto q_N(t)$.

Chapitre 5

Quelques expériences de charmeurs de serpents

Ce dernier chapitre comprend un certain nombre d'expériences numériques que nous avons faites. Le premier paragraphe illustre des exemples en dimension deux et trois. Le paragraphe suivant présente une méthode numérique pour résoudre l'algorithme du charmeur de serpents sans passer par l'intégration numérique d'une équation différentielle.

5.1 Quelques exemples

Le but de ce paragraphe est d'illustrer les résultats des chapitres précédents par des expériences numériques. Nous commençons en dimension deux.

Dimension deux

Fixons-nous une partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[0, L]$. L'espace de configurations est alors $\mathrm{Conf}(1) = \{z : [0, L] \to \mathbb{S}^1 \mid z \text{ est continue par morceaux pour } \mathcal{P}\}$. Dans l'exemple 2.10, nous avons rappelé que le groupe $\mathrm{Möb}(1)$ est isomorphe à $\mathrm{PSU}(1,1) = \mathrm{SU}(1,1)/\{\pm\mathrm{id}\}$ où

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

et son algèbre de Lie $\mathfrak{psu}(1,1) = \mathfrak{su}(1,1)$ consiste en les matrices

$$\begin{pmatrix} iu & b \\ \bar{b} & -iu \end{pmatrix},$$

où $u \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$. D'un point de vue géométrique, $\mathrm{SU}(1,1)$ est un revêtement à deux feuillets au-dessus de $\mathrm{PSU}(1,1)$. Leurs algèbres de Lie sont les mêmes et on peut ainsi considérer la distribution $\mathcal{H}$ également sur $\mathrm{SU}(1,1)$. L'équation différentielle (3.5) a lieu aussi dans $\mathrm{SU}(1,1)$. Dans ce qui suit, nous travaillerons donc dans le groupe de matrices $\mathrm{SU}(1,1)$ au lieu du quotient $\mathrm{PSU}(1,1)$.

Nous regardons $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la base $e_1 = 1$ et $e_2 = i$. Toujours dans l'exemple 2.10, nous avons mentionné que les deux éléments de $\mathfrak{su}(1,1)$ qui engendrent la distribution $\mathcal{H}$ sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On s'interesse dans ce qui suit à expliciter le lemme 3.6 ainsi que l'équation différentielle (3.5) en dimension deux. Rappelons qu'une équation différentielle ordinaire dans un groupe de matrices G s'écrit comme $\dot{g} = A(g,t)g$ où $A(g,t) \in \mathfrak{g}$.

5.1. Lemme. *Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}(1)$, une configuration initiale fixée. Soit $t \mapsto g(t)$ une courbe dans $\mathrm{SU}(1,1)$ satisfaisant l'équation différentielle*

$$\dot{g} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda/2 \\ \bar{\lambda}/2 & 0 \end{pmatrix} g, \quad g(0) = \mathrm{id} \tag{5.1}$$

où $\lambda = \lambda(g,t) = \lambda_1(g,t) + i\lambda_2(g,t)$. Alors, la courbe $t \mapsto g(t) \cdot z_0$ dans Conf est horizontale.

Démonstration. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda/2 \\ \bar{\lambda}/2 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1(g,t)C_1 + \lambda_2(g,t)C_i \in \mathfrak{su}(1,1).$$

Il s'agit donc d'un cas particulier du lemme 3.6. □

Si λ est constant, on peut expliciter la solution

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & t\lambda/2 \\ t\bar{\lambda}/2 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_t^\lambda \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\frac{1}{2}|\lambda|t) & \sinh(\frac{1}{2}|\lambda|t)\frac{\lambda}{|\lambda|} \\ \sinh(\frac{1}{2}|\lambda|t)\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} & \cosh(\frac{1}{2}|\lambda|t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous illustrons ci-dessous quelques exemples de serpents planaires suivant différents flots.

5.2. Exemple. Soit $L = \frac{6}{5}$ et considérons des configurations continues sur tout $[0, L]$. On se donne la configuration initiale $z_0(s) = e^{iq(s)}$ avec

$$q(s) = \frac{13}{10}\sin(\frac{\pi}{L}s).$$

On se propose de faire suivre au serpent $\mathcal{S}_{z_0}$ le flot Γ_t^λ, dans les trois cas

$$(i)\ \lambda_1 = 1, \qquad (ii)\ \lambda_2 = i, \qquad (iii)\ \lambda_3 = -1 - i.$$

Désignons par $\mathcal{S}_t^k$ la déformation du serpent $\mathcal{S}_{z_0}$ selon le flot $\Gamma_t^{\lambda_k}$ et soit $\gamma_k(t) = f(\Gamma_t^{\lambda_k} \cdot z_0) = \mathcal{S}_t^k(L)$, pour $k = 1,2,3$. Pour $k = 1,2$, la configuration initiale z_0 ne prend jamais la valeur λ_k. Ainsi, par la proposition 3.8, nous savons que la configuration $\Gamma_t^{\lambda_k} \cdot z_0$ converge, pour $t \to \infty$, vers la configuration constante $z(s) = \lambda_k$. Le

serpent $\mathcal{S}_t^k$ va donc s'aligner sur la droite vectorielle par λ_k et l'extrémité converge vers $L\lambda_k$. Pour λ_3, la configuration $\Gamma_t^{\lambda_3} \cdot z_0$ converge, point par point, vers une application de $[0, L]$ dans $\mathbb{S}^1$ prenant les deux valeurs $\pm\lambda_3$. Celle-ci ne fait pas partie de $\mathrm{Conf}(1)$, puisque nous avons supposé que l'ensemble $\mathcal{P}$ des discontinuités était réduit à $\{0, L\}$. Le serpent $\mathcal{S}_t^3$ s'aligne tout de même sur la droite vectorielle par λ_3 et, la sédentarité de z_0 étant nulle, l'extrémité converge vers $L\lambda_3$. La figure 5.1 illustre cet exemple. Nous y avons dessiné les trois serpents limites, $\mathcal{S}_\infty^k$, ainsi que trois serpents intermédiaires, $\mathcal{S}_{t_0}^k$, pour $t_0 = 1.2245$.

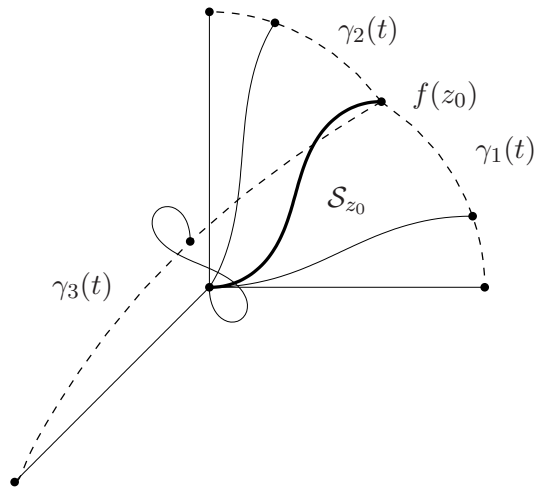


Fig. 5.1 – Un serpent suivant trois flots.

5.3. Exemple. Nous illustrons dans cet exemple un phénomène propre aux configurations bivaluées que nous avons mentionné suite à la proposition 2.28 : les configurations bivaluées contiennent toujours des configurations alignées dans leur composante connexe par Δ-courbes. Supposons $d = 2$ et soit z_0 la configuration alignée,

$$z(s) = \begin{cases} 1 & s \in [0, 2[\\ -1 & s \in [2, 3]. \end{cases}$$

Considérons la famille $z_t = \Gamma_t^i \cdot z_0$, pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Les configurations z_t, pour $t \neq 0$ sont bivaluées mais non-alignées. Elles contiennent cependant la configuration alignée z_0 dans leur composante connexe par Δ-courbes. Cet exemple est illustré à la figure 5.2 ; on désigne par $x_{\pm 1/2}$ le nombre complexe $f(\Gamma_{\pm 1/2}^i \cdot z_0)$.

Passons au problème du relèvement de courbes. Soient z_0 une configuration initiale au moins 3-valuée et $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une courbe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(t) \cap \Sigma(z_0) = \emptyset$ pour tout $t \in [0, 1]$ (voir paragraphe 3.3). Par la proposition 3.14 la courbe $\gamma(t)$ admet un relèvement sur tout $[0, 1]$ et l'équation différentielle (3.5) en dimension deux donne

$$\dot{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda(g, t)/2 \\ \bar{\lambda}(g, t)/2 & 0 \end{pmatrix} g(t),$$

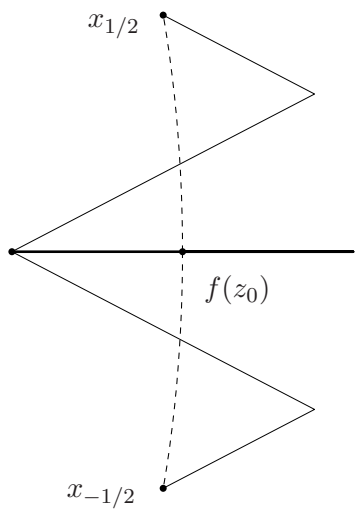


FIG. 5.2 – Serpent polygonal passant par une configuration alignée.

où $\lambda(g,t) = \lambda_1(g,t) + i\lambda_2(g,t)$ est donné par

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1}(g(t)\cdot z_0) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix}.$$

En écrivant $z_t = g(t)\cdot z_0 = z_{t,1} + iz_{t,2}$ et en utilisant $z_{t,1}^2 + z_{t,2}^2 = 1$ on a

$$M(z_t) = \begin{pmatrix} \int_0^L z_{t,2}^2(s)ds & -\int_0^L z_{t,1}(s)z_{t,2}(s)ds \\ -\int_0^L z_{t,1}(s)z_{t,2}(s)ds & \int_0^L z_{t,1}^2(s)ds \end{pmatrix}.$$

Écrivons $g(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \bar{b}(t) & \bar{a}(t) \end{pmatrix}$. On obtient alors le système de deux équations différentielles (complexes) ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{1}{2}\lambda(g(t),t)\bar{b}(t) \\ \dot{b}(t) &= \frac{1}{2}\lambda(g(t),t)\bar{a}(t) \\ a(0) &= 1, b(0) = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

satisfaisant la contrainte algébrique $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$. Il y a peu d'espoir de pouvoir écrire explicitement une solution de ce système. Pour la résolution numérique, nous pouvons utiliser des méthodes géométriques (voir [HLW02]).

En nous basant sur diverses considérations géométriques, nous avons élaboré une autre méthode que nous présenterons au paragraphe 5.2.

5.4. EXEMPLE. Cet exemple illustre le serpent $\mathcal{S}_0 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$s \mapsto \big(1 + \cos(\pi - s), \sin(\pi - s)\big),$$

suivant le cercle paramétré $\gamma : t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t))$, pour $t \in [0, 2\pi]$. La figure 5.3 montre le serpent $\mathcal{S}_t$ pour diverses valeurs de t. Cet exemple est intéressant pour deux raisons. Premièrement, on observe que $\mathcal{S}_t$ ne se déplace pas selon une rotation. En effet, si l'on déplace $\mathcal{S}_0$ selon une rotation, on suit effectivement γ, mais la courbe dans Conf correspondante n'est pas horizontale. Deuxièmement, le serpent final, $\mathcal{S}_{2\pi}$ ne retrouve pas dans la même configuration que $\mathcal{S}_0$. L'holonomie de la configuration z_0 correspondant au serpent initial $\mathcal{S}_0$ n'est donc pas triviale. Ce phénomène d'holonomie a été étudié dans certains cas dans [Paragraphes 6 et 7][Ha05] et fera l'objet d'un travail ultérieur [HR].

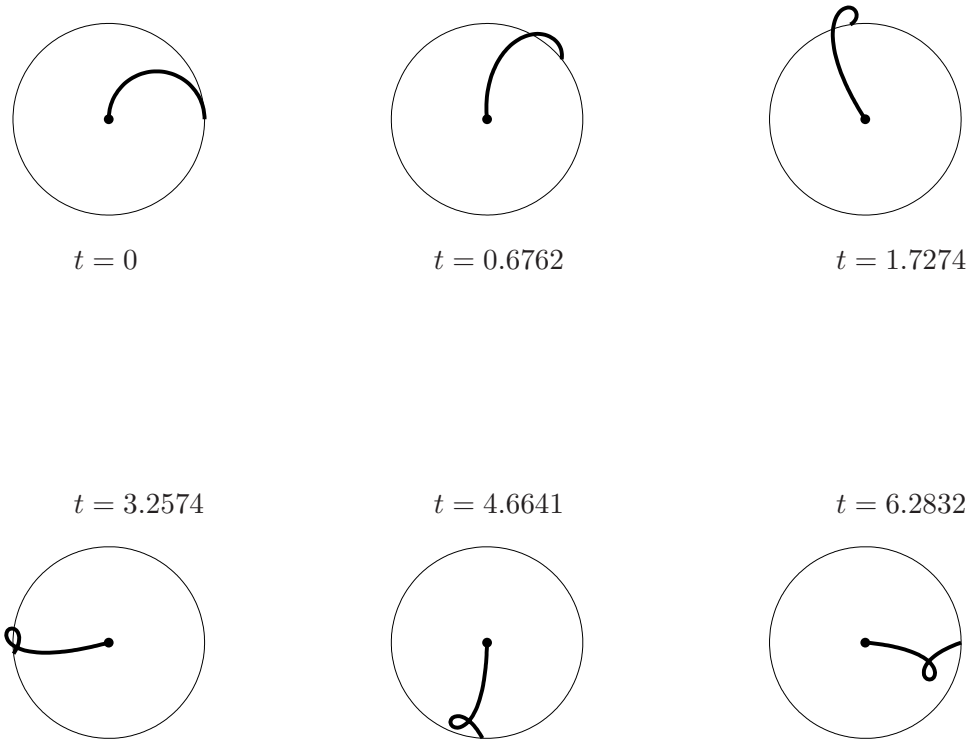


Fig. 5.3 – Serpent suivant un cercle.

Dimension trois

Étudions à présent les serpents dans l'espace à trois dimension $\mathrm{Conf}(2) = \{z : [0, L] \to \mathbb{S}^2 \mid z$ est continue par morceaux pour $\mathcal{P}\}$, $\mathcal{P}$ est une partition fixée de l'intervalle $[0, L]$. Comme au paragraphe précédent, nous nous intéressons au lemme 3.6 ainsi que l'équation différentielle (3.5) en dimension trois. Pour les serpents dans l'espace à trois dimensions, l'action du groupe de Möbius sur la sphère $\mathbb{S}^2$ n'est plus aussi simple, du moins au niveau des formules. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\pi : \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{R}}^2 \simeq \widehat{\mathbb{C}}$ la projection stéréographique envoyant e_3 sur l'infini

et $-e_3$ sur 0. Les transformations de Möbius de $\widehat{\mathbb{C}}$ préservant l'orientation s'écrivent comme

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. Le groupe de telles transformations est alors isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm\mathrm{id}\}$. Comme au paragraphe précédent, nous travaillons dans le groupe de matrice $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ au lieu du quotient $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. L'inclusion de Möb(1) dans Möb(2) se voit dans l'inclusion de $\mathrm{SU}(1,1)$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. L'action de $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{S}^2$ est alors donnée par la composition

$$\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\pi} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{A} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbb{S}^2.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{psl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ est formée des matrices complexes de trace nulle. Nous la regardons comme un espace vectoriel de dimension réelle 6 engendrée par les éléments suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & E_2 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & E_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme avant, cherchons à déterminer les éléments de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ qui engendrent la distribution $\mathcal{H}$.

5.5. Lemme. *Les éléments C_1, C_2 et C_3 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ qui engendrent la distribution $\mathcal{H}$ sont*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que les flots correspondant sont

$$\begin{aligned} \Gamma_t^1 &= \begin{pmatrix} \cosh(t/2) & \sinh(t/2) \\ \sinh(t/2) & \cosh(t/2) \end{pmatrix}, \\ \Gamma_t^2 &= \begin{pmatrix} \cosh(t/2) & i\sinh(t/2) \\ -i\sinh(t/2) & \cosh(t/2) \end{pmatrix}, \\ \Gamma_t^3 &= \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour cela, on utilise la définition de Γ_t^v (voir formule (2.7)) dans les trois cas $v = e_1$, e_2 et e_3. Nous omettons les détails. Remarquons que le cas Γ_t^3 est évident : comme nous avons identifié $\mathbb{S}^2$ à $\widehat{\mathbb{C}}$ par la projection stéréographique envoyant e_3 sur ∞, il ne reste que le terme ρ_{e^t} dans la formule (2.7) qui s'écrit naturellement comme $\left(\begin{smallmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{smallmatrix}\right)$. □

Pour les serpents dans l'espace à trois dimensions, le lemme 5.1 prend la forme ci-dessous ; il s'agit à nouveau d'un cas particulier du lemme 3.6.

5.6. Lemme. *Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}(2)$, une configuration initiale fixée. Soit $t \mapsto g(t)$ une courbe dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ satisfaisant l'équation différentielle*

$$\dot{g} = \begin{pmatrix} \mu/2 & \lambda/2 \\ \bar{\lambda}/2 & -\mu/2 \end{pmatrix} g, \quad g(0) = \mathrm{id} \tag{5.3}$$

où $\lambda = \lambda(g,t) = \lambda_1(g,t) + i\lambda_2(g,t)$ et $\mu = \mu(g,t) \in \mathbb{R}$. Alors, la courbe $t \mapsto g(t) \cdot z_0$ dans $\mathrm{Conf}(2)$ est horizontale. □

Désignons par $v \in \mathcal{H}$ le vecteur $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \mu C_3$. Le cas où v est constant est à nouveau facile à résoudre :

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp \begin{pmatrix} t\mu/2 & t\lambda/2 \\ t\bar{\lambda}/2 & t\mu/2 \end{pmatrix} = \Gamma_t^v \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\frac{1}{2}\|v\|t) + \frac{\mu}{\|v\|}\sinh(\frac{1}{2}\|v\|t) & \sinh(\frac{1}{2}\|v\|t)\frac{\lambda}{\|v\|} \\ \sinh(\frac{1}{2}\|v\|t)\frac{\bar{\lambda}}{\|v\|} & \cosh(\frac{1}{2}\|v\|t) - \frac{\mu}{\|v\|}\sinh(\frac{1}{2}\|v\|t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.2 La méthode des flots hyperboliques

Au paragraphe 3.2 on a vu un moyen de relever dans Conf des courbes $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$. Le problème se ramène à la résolution de l'équation différentielle (3.5) dans le groupe de Möbius. Ensuite, au paragraphe 5.1, on a explicité cette équation en dimension deux et trois. En utilisant des méthodes numériques qui préservent la structure géométrique du groupe de Lie Möb (voir [HLW02]), on peut résoudre numériquement cette équation. On présente à présent une autre méthode numérique pour faire suivre à un serpent initial une courbe $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$ donnée. Il ne s'agit pas d'un véritable relevé de $\gamma(t)$, mais d'une approximation de celui-ci par des courbes qui sont des trajectoires de flots purement hyperboliques.

Soit $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration non-alignée. Pour tout $v \in \mathcal{H} \subset \mathfrak{möb}$, nous considérons la courbe $t \mapsto f(\Gamma_t^v \cdot z_0)$. Le vecteur vitesse en $t = 0$ est $\frac{d}{dt} f(\Gamma_t^v \cdot z_0)|_{t=0} = M(z_0)v$ (voir (3.3)). Réciproquement, étant donné $w \in \mathbb{R}^d$, comme z_0 est non-alignée, la matrice $M(z_0)$ est inversible et on peut considérer $v = M(z_0)^{-1}w \in \mathcal{H}$. Le vecteur vitesse en $t = 0$ de la courbe $f(\Gamma_t^v \cdot z_0) \in \mathbb{R}^d$ est évidemment w. Autrement dit, pour tout $w \in \mathbb{R}^d$, on a une formule explicite pour une courbe horizontale $t \mapsto z_t \in \mathrm{Conf}$ telle que $\frac{d}{dt} f(z_t)|_{t=0} = w$.

Bien qu'elle soit triviale, cette dernière constatation est cruciale pour l'établissement de notre algorithme. Fixons dans un premier temps quelques notations. Supposons z_0 au moins 3-valuée et soit $x_0 = f(z_0)$. Soit $F : \mathrm{Möb} \to \mathbb{R}^d$, $g \mapsto f(g \cdot z_0)$. Comme z_0 est au moins 3-valuée, F est une submersion. On se donne un voisinage $\mathcal{U}$ de $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mathcal{U} \subset F(\mathrm{Möb})$ et soit $\mathcal{V} = F^{-1}(\mathcal{U})$; il s'agit d'un voisinage de l'identité dans Möb. Soit encore $y \in \mathcal{U}$ différent de x_0. Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (c'est-à-dire tel que $B_\varepsilon(y) \subset \mathcal{U}$ et $x_0 \notin B_\varepsilon(y)$), posons $\mathcal{V}_\varepsilon = \mathcal{V} \setminus F^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subset \mathrm{Möb}$. Pour tout $g \in \mathcal{V}_\varepsilon$, on considère les éléments suivants :

$$\begin{aligned} z_g &= g \cdot z_0 \in \mathrm{Conf}, & x_g &= f(z_g) \in \mathcal{U} \setminus B_\varepsilon(y), \\ w_g &= y - x_g \in \mathbb{R}^d, & v_g &= M^{-1}(z_g)w_g \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Muni de ces notations, on construit la courbe $\gamma_g(t) = f(\Gamma_t^{v_g} \cdot z_g) \in \mathbb{R}^d$. Cette courbe passe par x_g en $t = 0$ et $\dot{\gamma}_g(0) = w_g$. Le développement en série de Taylor à l'ordre

1 donne alors

$$\gamma_g(t) = x_g + w_g t + \mathcal{O}(t^2).$$

Il existe un nombre réel $\delta_{\varepsilon,g} > 0$ tel que

(1) $\gamma_g(t) \in \mathcal{U}$ pour tout $t \in [0, \delta_{\varepsilon,g}]$;

(2) la fonction $t \mapsto \|y - \gamma_g(t)\|$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \delta_{\varepsilon,g}]$. En particulier, $\frac{\|y-\gamma_g(\delta_{\varepsilon,g})\|}{\|y-x_g\|} < 1$.

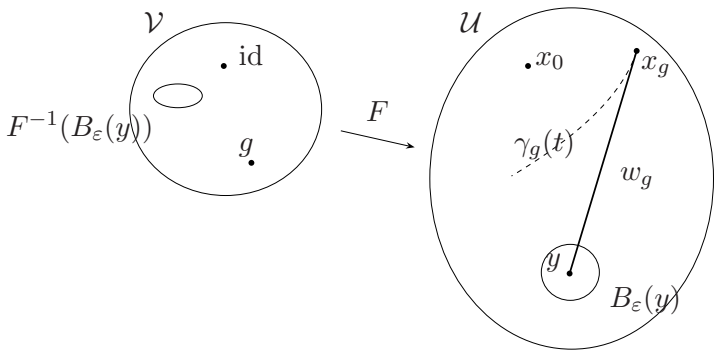


FIG. 5.4 – Éléments utiles à l'algorithme.

La figure 5.4 illustre les éléments définis ci-dessus. Nous définissons une classe particulière de voisinages de x_0.

5.7. DÉFINITION. Soient z_0 une configuration au moins 3-valuée et $x_0 = f(z_0)$. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de x_0 tel que $\mathcal{U} \subset F(\text{Möb})$. On dit que $\mathcal{U}$ est ***accessible***, si pour tout $y \in \mathcal{U}$ différent de x_0 et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut choisir le même $\delta_{\varepsilon,g}$ pour tout $g \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Autrement dit, il existe des nombres réels $0 < \delta_\varepsilon$ et $0 < \alpha_\varepsilon < 1$ tels que

$$\begin{aligned} &\gamma_g(t) \in \mathcal{U} \text{ pour tout } t \in [0, \delta_\varepsilon], \\ &\tfrac{\|y-\gamma_g(\delta_\varepsilon)\|}{\|y-x_g\|} \leq \alpha_\varepsilon < 1, \end{aligned} \tag{5.4}$$

et ceci pour tout $g \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Par simplicité, on écrira δ et α à la place de δ_ε et α_ε.

5.8. PROPOSITION. *Soient $z_0 \in \text{Conf}$ une configuration au moins 3-valuée et $x_0 = f(z_0)$. Supposons que $\mathcal{U}$ soit un voisinage accessible de x_0. Soient $y \in \mathcal{U}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors $g = \Gamma_t^{v_n} \cdots \Gamma_t^{v_0} \in \text{Möb}$ tel que $\|y - f(g \cdot z_0)\| < \varepsilon$.*

Démonstration. L'idée de la preuve est de considérer des courbes $\gamma_g(t)$ décrites ci-dessus pour s'approcher de y.

Soient $w_0 = y - x_0$ et $v_0 = M^{-1}(z_0)w_0$. On considère la courbe $\gamma_0(t) = f(\Gamma_t^{v_0} \cdot z_0)$. Donnons-nous $0 < \delta$ et $0 < \alpha < 1$ satisfaisant (5.4). On a $\gamma_0(\delta) \in \mathcal{U}$ et $\frac{\|y-\gamma_0(\delta)\|}{\|y-x_0\|} \leq \alpha$. Soit $g_0 = \Gamma_\delta^{v_0}$. Si $\|y - f(g_0 \cdot z_0)\| < \varepsilon$, on a terminé. Sinon, on recommence l'operation

en posant $z_1 = g_0 \cdot z_0$, $x_1 = f(g_0 \cdot z_0)$, $w_1 = y - x_1$ et $v_1 = M^{-1}(z_1)w_1$. On considère la courbe $\gamma_1(t) = f(\Gamma_t^{v_1} \cdot z_1)$. On a

$$\frac{\|y - \gamma_1(\delta)\|}{\|y - x_0\|} = \frac{\|y - \gamma_1(\delta)\|}{\|y - x_1\|} \cdot \frac{\|y - x_1\|}{\|y - x_0\|} \leq \alpha^2.$$

On obtient ainsi une suite

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & f(z_0) \\ x_1 & = & f(\Gamma_\delta^{v_0} \cdot z_0) \\ & \vdots & \\ x_n & = & f(\Gamma_\delta^{v_{n-1}} \cdots \Gamma_\delta^{v_0} \cdot z_0), \end{array}$$

telle que

$$\|y - x_n\| \leq \alpha^n \|y - x_0\|.$$

Comme $\alpha < 1$, pour n assez grand, on a $\alpha^n \|y - x_0\| < \varepsilon$. □

Les figures 5.5 et 5.6 illustrent le procédé décrit dans la preuve de la proposition 5.8. Muni de cette dernière proposition, nous décrivons à présent la méthode des flots hyperboliques.

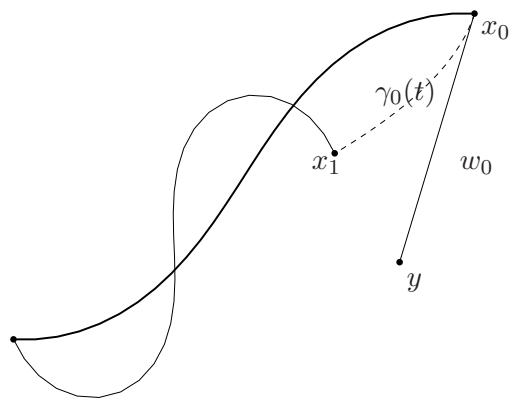


FIG. 5.5 – Première étape.

5.9. LA MÉTHODE DES FLOTS HYPERBOLIQUES. Soient $z_0 \in \mathrm{Conf}$ une configuration au moins 3-valuée et $x_0 = f(z_0)$. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage accessible de x_0. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ une courbe continue telle que $\gamma(0) = x_0$. Soient N nombres réels $0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ et soient $y_i = \gamma(t_i)$, $i = 1, \ldots, N$, les points le long de γ correspondants. On se donne une tolerance $\varepsilon > 0$.

(1) On commence par appliquer la proposition 5.8 dans le cas $y = y_1$. Ceci nous donne une configuration $z_1 = g \cdot z_0$ et un point $x_1 = f(z_1)$ tel que $\|y - x_1\| < \varepsilon$.

(2) On recommence l'opération en partant de z_1 et en essayant d'atteindre y_2. L'algorithme se termine quand on est au point x_N tel que $\|y_N - x_N\| < \varepsilon$.

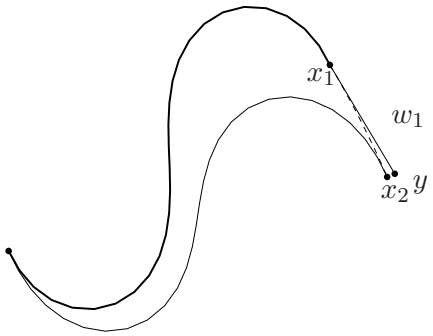


FIG. 5.6 – Deuxième étape.

Discussion

Il convient à présent de discuter certains points relatifs à la proposition 5.8 et au procédé 5.9.

(1) La première question qu'il semble naturelle de se poser est :

Quand le voisinage $\mathcal{U}$ est-il accessible ?

Supposons que $\mathcal{U}$ soit fermé (et donc compact). Dans ce cas, $\mathcal{V}$ est également fermé, ainsi que $\mathcal{V}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour être certain de l'existence d'un $\delta_{\varepsilon,g}$ tel que $\gamma_g(t) \in \mathcal{U}$ sur $[0, \delta_{\varepsilon,g}]$ pour des éléments g dans le bord de $\mathcal{V}_\varepsilon$, on supposera $\mathcal{U}$ convexe. Si $\mathcal{V}$ est compact (et donc $\mathcal{V}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$), on le recouvre par des ouverts pour lesquels un même $\delta_{\varepsilon,g}$ est valable. En extrayant un sous-recouvrement fini, on choisit δ_ε comme étant le minimum. Si $\mathcal{V} = F^{-1}(\mathcal{U})$ est compact, alors $\mathcal{U}$ est accessible. Nous avons ainsi répondu à la première question. Ceci nous mène alors à une deuxième question :

Quand $\mathcal{V}$ est-il compact ?

Supposons que la configuration initiale z_0 soit nomade. Le corollaire 3.13 affirme alors que F est une application propre. Il s'ensuit que le voisinage de l'identité $\mathcal{V}$ est compact. La proposition ci-dessous résume ce qui précède :

5.10. PROPOSITION. *Soient z_0 une configuration nomade et $x_0 = f(z_0)$. Si $\mathcal{U}$ est un voisinage compact de x_0 contenu dans la boule ouverte $B_L(0)$, alors $\mathcal{U}$ est accessible.* □

Plus généralement, si z_0 n'est pas nomade, on utilise les sphères de sédentarité (voir (3.8)). On montre par un argument similaire que si $\mathcal{U}$ est un voisinage de x_0 tel que $\overline{\mathcal{U}} \cap \Sigma(z_0) = \emptyset$, alors il est accessible.

(2) En pratique, afin d'accélérer l'algorithme, nous n'avons pas pris le même δ à chaque étape. Nous avons essayé de choisir un δ « optimal ». Pour cela, pour tout $g \in \mathcal{V}_\varepsilon$, considérons la fonction $d_g(t) = \|y - \gamma_g(t)\|^2$. On sait que cette

fonction est strictement décroissante sur un intervalle $[0, \delta_g]$. L'idée est donc de minimiser $d_g(t)$. En dérivant, on obtient $\dot{d}_g(t) = -2\langle y - \gamma_g(t), \dot{\gamma}_g(t)\rangle$. On a ainsi choisi δ_g comme solution de l'équation $-2\langle y - \gamma_g(t), \dot{\gamma}_g(t)\rangle = 0$.

(3) La méthode des flots hyperboliques ne donne pas un veritable relevé de γ. Elle permet de déplacer le serpent initial $\mathcal{S}_{z_0}$ le long de γ en garantissant d'être arbitrairement proche d'un nombre fini de points. Cependant, il se peut que la courbe dans $\mathbb{R}^d$ que l'on obtienne ne soit pas une bonne approximation de γ.

(4) Cette méthode a l'avantage de ne pas utiliser de méthodes numériques pour la résolution d'équations différentielles. De plus, si $\gamma(t)$ est définie pour des temps très grands, et que la tolérance ε est petite, on est certain de rester à distance ε tout le long de γ. Dans le futur, une comparaison plus approfondies (temps de travail, étude de l'erreur...) entre la méthode présentée ici et les méthodes classiques dans les groupes de Lie [HLW02] serait intéressante.

(5) Bien que la courbe obtenue par ce procédé ne soit qu'une approximation de la solution exacte, on est certain qu'elle est horizontale (car elle est une composition de flots). Ceci n'est a priori pas le cas si l'on résout l'équation différentielle dans le groupe de Möbius à l'aide de méthodes numériques.

Bibliographie

[AMR88] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, Second edition, Springer, New York, 1988.

[Be83] A. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[BR92] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ch39] W.-L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann. **117**, 98–105, 1939.

[Di78] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse, Tome 1*, 3e éd., Gautier-Villars, Paris, 1979.

[Ee58] J. Eells, *On the geometry of function spaces*, International symposium on algebraic topology, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 303–308, 1958.

[Eh51] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie (Espaces Fibrés), Bruxelles, 29–55, 1951.

[HLW02] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric numerical integration*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Ha91] J.-C. Hausmann, *Sur la topologie des bras articulés*, Algebraic topology Poznań 1989, Lecture Notes in Math. 1474, Springer, Berlin, 146–159, 1991.

[Ha05] J.-C. Hausmann, *Contrôle des bras articulés et transformations de Möbius*, Enseignement Math. (2) **51**, 87–115, 2005.

[HR] J.-C. Hausmann, E. Rodriguez, *Holonomy orbits for the snake charmer algorithm*, Préprint, Université de Genève.

[He01] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, American Mathematical Society, Providence, 2001.

[Ju97] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[La99] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Mon02] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[Ra94] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Su73] H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180**, 171–188, 1973.

Epilogue

Le matin. Tout est à faire. Tout est à construire.
Je ferme les yeux. Quelques années ont passé.

Chacun cherche une pierre pour bâtir une cathédrale.
Cathédrale de notre connaissance.
Cathédrale atemporelle.
Une pierre parmi tant d'autres, invisible ou essentielle,
    une question de point de vue.

Marcher, errer, les sentiers sont à tracer,
    puis à parcourir.
Horizons multiples,
une direction à choisir,
l'arbitraire ou le destin,
    peu importe.

Le soleil donne de l'espoir et le vent du courage.
Ensemble nous tissons le savoir de demain.

Le soir vient. Tout semble achevé.
J'éteins la lumière, le sommeil m'emporte, un sourire
caresse mon visage. J'attends le matin pour construire à nouveau.
Notre quête est sans fin.

Des générations futures nous ont précédés, d'autres suivront...

Considérons les Anciens, les Grecs, les Indiens, les musulmans qui m'ont précédé, ils ont écrit abondamment dans toutes ces disciplines. Si je répète ce qu'ils ont dit, mon travail est superflu ; si je les contredis, comme je suis constamment tenté de le faire, d'autres viendront après moi pour me contredire. Que restera-t-il demain des écrits des savants ? Seulement le mal qu'ils ont dit de ceux qui les ont précédés. On se souvient de ce qu'ils ont détruit dans la théorie des autres, mais ce qu'ils échafaudent eux-mêmes sera immanquablement détruit, ridiculisé même par ceux qui viendront après. Telle est la loi de la science ; la poésie ne connaît pas pareille loi, elle ne nie jamais ce qui l'a précédée et n'est jamais niée par ce qui la suit, elle traverse les siècles en toute quiétude. C'est pour cela que j'écris mes robaïyat. *Sais-tu ce qui me fascine dans les sciences ? C'est que j'y trouve la poésie suprême : avec les mathématiques, le grisant vertige des nombres ; avec l'astronomie, l'énigmatique murmure de l'univers. Mais, de grâce, qu'on ne me parle pas de vérité !*

Le personnage d'Omar Khayyam dans
Samarcande d'Amin Maalouf