Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de "Recherche & stratégies" en 10H

Favier, Stéphane; Chanudet, Maud

LES DEMARCHES ET MODES DE RAISONNEMENT EN JEU DANS LES PROBLEMES DE « RECHERCHE & STRATEGIES » EN 10H[1]

Stéphane Favier, Maud Chanudet

Université de Genève, DiMaGe

Nous nous intéressons dans cet article aux problèmes proposés dans le chapitre « Recherche et Stratégies » des Moyens d'enseignement Romands[2] (MER) de 10H et aux connaissances des élèves qui sont en jeu et peuvent être développées à travers la résolution de ces problèmes[3]. Partant du constat que les documents qui accompagnent ce chapitre sont assez flous, notamment du fait qu'ils mettent sur le même plan des éléments de natures différentes, nous souhaitons proposer une manière plus opérationnelle de considérer les problèmes proposés, en vue notamment de permettre aux enseignants de construire un enseignement associé. Cela nous amène à étudier la démarche ou le mode de raisonnement en jeu lors de la résolution de ces problèmes comme un moyen de déterminer leur potentiel didactique (Georget, 2009) c'est-à-dire ce que les élèves sont susceptibles d'apprendre lorsqu'ils cherchent ces problèmes. Notons, à la suite de Georget, que ce potentiel didactique est dépendant du problème (c'est l'objet de cet article) mais également des élèves et de l'enseignant. Ainsi, après avoir caractérisé les démarches et modes de raisonnement possiblement travaillés à ce degré, nous identifions ceux en jeu dans les problèmes du chapitre « Recherche et Stratégies » en 10H. Enfin, nous précisons en quoi cette manière de considérer les problèmes nous semble pertinente dans une perspective d'enseignement.

LES STRATÉGIES DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

La résolution de problèmes occupe une place centrale dans le domaine Mathématiques et sciences de la nature (MSN) du Plan d'études romand (PER), à la fois comme moyen de développer les connaissances mathématiques des élèves, mais aussi comme un objet d'apprentissage pour elle-même. Cette deuxième finalité est notamment au cœur du chapitre « Recherche et Stratégies » des MER. Le document des ressources didactiques consacrée à la résolution de problèmes précise en effet que ce chapitre « a pour objectif de développer chez les élèves les compétences et stratégies de résolution de problèmes, en tout temps et hors du contexte thématique d'une séquence d'enseignement. » (CIIP, 2012, p. 2). Mais qu'entend-on par « stratégie » ?

L'aide-mémoire considère qu'il s'agit d'un « processus qui permet d'élaborer la procédure de résolution d'un problème ». Diverses « stratégies » sont alors présentées, sous forme de liste et sans que des précisions théoriques n'éclairent les choix retenus, à savoir le chaînage avant/arrière ; le tâtonnement réfléchi ; la démarche scientifique (ou démarche d'investigation) ; l'étude systématique des cas ; l'analogie et la modélisation. Ces « stratégies » ne nous semblent cependant pas être de même nature. Nous y revenons ci-après.

Les visées prioritaires du domaine MSN mettent de plus en avant l'apprentissage et la mobilisation de démarches et de raisonnements propres aux mathématiques lors de la résolution de problèmes. Demonty et Fagnant caractérisent par ailleurs la résolution de problèmes vue comme objet d'enseignement comme

---

[1] L'année de 10H correspond à des élèves de 13-14 ans.

[2] Les MER constituent le manuel officiel et institutionnel au niveau de la scolarité obligatoire en Suisse romande.

[3] Précisons que cette problématique s'inscrit dans le cadre d'un projet plus large financé par le Fonds National Suisse qui s'intitule: «La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes » Subside n° 100019_173105/1.

ayant pour finalité de « développer l'apprentissage de démarches et de processus de résolution de problèmes. » (2012, p. 1752). Houdement (2009) souligne elle aussi que les « problèmes pour chercher » proposés à l'école primaire peuvent amener les élèves à développer des apprentissages liés aux manières de valider et de raisonner en mathématiques. Ainsi, considérer les démarches et les modes de raisonnement, c'est-à-dire des formes particulières de raisonnement mathématique[4], comme objectif d'apprentissage en résolution de problèmes est pertinent, aussi bien du point de vue de la recherche que des prescriptions institutionnelles (PER).

Cela nous amène à nous demander, dans les « stratégies » retenues, lesquelles relèvent de modes de raisonnements mathématiques, de démarches ? Sont-elles toutes de cette nature ? Et de manière plus large : quels sont les démarches et les modes de raisonnement propres aux mathématiques c'est-à-dire en existe-t-il d'autres qui ne relèvent pas de ces « stratégies » ? Comment peut-on catégoriser plus finement les « stratégies » mises en avant ?

Nous précisons dans une première partie les démarches et les modes de raisonnements qui nous semblent pouvoir faire l'objet d'apprentissages chez les élèves au niveau du secondaire I. Nous revenons ensuite sur les problèmes proposés dans le chapitre « Recherche et Stratégies » des MER de 10H pour voir lesquels y sont en jeu.

Nous avons choisi de nous intéresser au degré 10H car à Genève, en plus de son utilisation dans le cours ordinaire, le chapitre « Recherche et Stratégies » sert de support (en complément d'une réserve d'activités) à un cours ciblant exclusivement le développement des compétences des élèves en résolution de problèmes (appelé cours de « Démarches Mathématiques et Scientifiques »), ce qui lui donne une importance certaine.

Les démarches et raisonnements mathématiques

Nous avons mené une étude[5] de la littérature relative au raisonnement mathématique qui peut être travaillé à l'école primaire ou au secondaire I. Nous retenons le point de vue de Jeannotte (2015) qui considère le raisonnement mathématique en prenant en compte un double point de vue ; celui de la structure du raisonnement, c'est-à-dire de la nature et de l'articulation des pas de raisonnement ; et celui des processus en jeu considérant ainsi la finalité, le but qui guide les actions de la personne qui raisonne et la chronologie de ces actions.

Nous utilisons le terme de modes de raisonnement pour parler de formes spécifiques de raisonnements mathématiques liées à sa structure, et le terme de démarches quand il est nécessaire de prendre en compte les processus en jeu.

La dimension structurelle amène notamment à distinguer les raisonnements inductifs des raisonnements déductifs. Un pas de raisonnement déductif est ainsi caractérisé par des données à partir desquelles une règle va permettre d'obtenir une affirmation dont on aura, de plus, l'assurance qu'elle est correcte dès lors que la règle et les données utilisées sont vraies. Nous en proposons une schématisation (Fig. 1) dans laquelle l'encadrement met en exergue l'élément obtenu grâce à ce pas de raisonnement :

[4] Nous revenons dans la partie suivante sur l'objet « modes de raisonnement » et sur ses racines communes et sa distinction avec ce que nous appelons démarches.

[5] Cette étude fait l'objet d'un autre article en cours d'écriture.

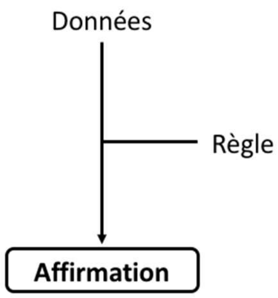


Fig. 1 : Modèle d'un pas de raisonnement déductif

Différents types de raisonnements déductifs, caractérisés par des articulations spécifiques de pas déductifs ou par la nature de la règle convoquée, peuvent être travaillés avec les élèves au secondaire I :

- Le **raisonnement par implication logique** est un raisonnement déductif dont la règle est seulement liée aux notions de logique (par exemple la règle du tiers exclus).
- Le **raisonnement hypothético-déductif** est un raisonnement déductif dont la règle est en lien avec des savoirs mathématiques au sens de savoirs savants dans la transposition didactique (Chevallard, 1985), c'est-à-dire des objets d'enseignement identifiés dans les programmes et travaillés explicitement avec les élèves.
- Le **raisonnement par exhaustivité des cas** (dit aussi par exhaustion de cas) qui consiste de manière générale à tester l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles du problème (Battie, 2003, p. 48).
- Le **raisonnement par disjonction de cas** qui consiste à ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. Pour cela, on partitionne les éléments de l'ensemble considéré (en nombre a priori infini) et on traite séparément chacun des cas (Battie, 2003).

Le raisonnement inductif intervient dès lors que l'on cherche à inférer une règle à partir des données et de régularités observées (notées affirmation dans le schéma de la Figure 2). La Fig. 2 schématise un tel pas de raisonnement. Là encore, l'encadrement met en évidence l'élément obtenu par ce type de raisonnement.

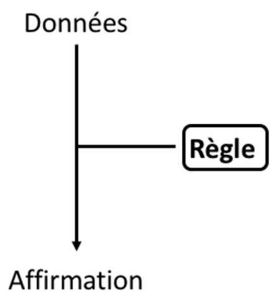


Fig. 2 : Modèle d'un pas de raisonnement inductif

Pólya (1957) caractérise l'induction comme « une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leur combinaison » (p. 110). Le raisonnement inductif est en jeu dans des démarches de type expérimental, sans pour autant suffire à les caractériser.

Pour les raisonnements inductifs, il semble alors utile de prendre en compte l'aspect processuel du raisonnement que Jeannotte (2015) distingue en deux catégories : les processus de recherche de similitudes et de différences, comme généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer et classifier ; et les processus de recherche de validation. Ces différents processus peuvent de plus prendre appui sur un processus d'exemplification.

Considérer l'aspect processuel du raisonnement permet ainsi de caractériser deux autres types de démarches importantes en mathématiques :

- la **démarche expérimentale** qui articule des phases d'expérimentations (faire des expériences, en observer les résultats et en inférer des conclusions), avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuve (Gardes, 2013), et qui amène donc à mobiliser principalement les processus d'exemplification, d'identification d'une régularité, de conjecture, et de généralisation.
- la **démarche d'ajustements d'essais successifs** qui consiste à « rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents » (CIIP, 2019) pour laquelle il s'agit de mettre en œuvre des processus d'exemplification, de comparaison de l'écart entre le résultat obtenu et celui attendu afin d'ajuster ses essais pour s'en approcher.

Soulignons une différence significative entre ces deux démarches au niveau de la fonction des *essais*. Dans une démarche d'ajustements d'essais successifs, les essais réalisés sont potentiellement des solutions du problème (Favier, 2018) tandis que dans le cas de la démarche expérimentale, l'expérience permet un enrichissement du milieu et ainsi de favoriser le repérage des régularités afin d'émettre une conjecture.

Il nous semble donc que parmi les « stratégies » retenues dans l'aide-mémoire, le tâtonnement réfléchi (démarche d'ajustements d'essais successifs), la démarche scientifique (démarche expérimentale) et l'étude systématique des cas (raisonnement par exhaustivité des cas) relèvent de modes de raisonnements et de démarches mathématiques spécifiques.

L'élément « analogie » est défini dans l'aide-mémoire comme : « Se souvenir d'un problème que l'on a déjà fait et qui ressemble à celui qu'on est en train de résoudre. Ainsi, on peut s'en inspirer afin d'élaborer une solution. » (CIIP, 2019, p. 138) Nous retrouvons la question, qui a valeur d'heuristique, proposée par Pólya (1989) : « connaissez-vous un problème qui s'y rattache ? » ou encore les éléments « exploiting analogies » et « exploiting related problems » qui sont considérés également comme des heuristiques par Schoenfeld (1985). De même, les « chainage avant » et « chainage arrière » qui semblent être les traductions de « working forward from the data » et « working backward » sont aussi classées comme des heuristiques (Schoenfeld, 1985) c'est-à-dire « des règles générales pour réussir à résoudre les problèmes, des suggestions qui aident à mieux comprendre un problème ou à progresser vers sa solution »[6] (notre traduction, p. 23). Ainsi, ces trois éléments, de par leur nature heuristique, peuvent intervenir durant la résolution de problèmes, en complément des démarches et modes de raisonnement.

Concernant la modélisation, Houdement (2009) rajoute ce processus à la liste des apprentissages possibles associés aux problèmes de type « problèmes pour chercher ». Elle avance l'idée de choisir des problèmes selon « leur potentialité de création de modèles non encore rencontrés dans l'enseignement » (p. 47). Ceci montre selon nous que la modélisation est lui aussi un élément qui, s'il peut intervenir au cours de la résolution du problème indépendamment de la démarche ou du mode de raisonnement mathématique, est d'une nature encore différente. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les potentialités didactiques en lien avec cette question de la modélisation à l'article de Burgermeister et Dorier (2013).

Cette classification plus fine des différentes « stratégies » proposées nous semble nécessaire pour permettre aux enseignants de mieux cibler leurs interventions auprès des élèves, mais aussi pour identifier plus finement les apprentissages que l'on peut ainsi chercher à développer chez les élèves par la confrontation à des problèmes bien choisis. En ce sens, les autres raisonnements mis en avant précédemment (par implication logique, hypothético-déductif et par disjonction de cas) sont, selon nous, aussi susceptibles de faire l'objet d'un travail avec les élèves.

[6] Notre traduction de « rules of thumb for successful problem solving, general suggestions that help an individual to understand a problem better or to make progress toward its solution » (p. 23).

Dans cette perspective d'enseignement/apprentissage, nous précisons dans la suite de l'article, quelques points méthodologiques avant de dresser un tableau synthétique qui présente le potentiel didactique de l'ensemble des problèmes proposés dans le chapitre « Recherche et Stratégies » des MER de 10H, en termes de démarches et modes de raisonnements en jeu.

Une analyse du potentiel didactique des problèmes de « Recherche et Stratégies » des MER de 10H en termes de démarches et de modes de raisonnement

Méthodologie

Pour parvenir aux résultats présentés dans le tableau (voir Fig. 3), nous avons résolu chaque problème (livre et fichier de l'élève) du chapitre « Recherche et Stratégies » des MER de 10H en nous plaçant du point de vue de l'élève c'est-à-dire avec les connaissances dont ils disposent (et non du point de vue d'un enseignant par exemple). Ensuite, nous avons cherché à identifier le ou les démarches et modes de raisonnement principaux, c'est-à-dire qui nous paraissent le ou les plus prégnants dans cette résolution. Cela ne signifie donc pas que du point de vue mathématique ces démarches et modes de raisonnement identifiés et retenus sont les seuls en jeu, mais nous estimons qu'ils sont suffisamment importants pour être mis en évidence du point de vue didactique ; donc que ces problèmes présentent un intérêt pour travailler telle démarche ou tel mode de raisonnement retenu. Cette identification du potentiel didactique est illustrée pour quatre problèmes en annexe.

Dans certains problèmes, il est possible que plusieurs démarches ou modes de raisonnement interviennent de manière conjointe. Dans ce cas, nous considérons que la démarche ou mode de raisonnement premier (abrégé DMR1 dans la 2^{e} colonne du tableau) est celui qui correspond à la structure globale du raisonnement tandis que la démarche ou mode de raisonnement second (abrégé DMR2 dans la 3^{e} colonne du tableau) intervient de manière plus locale.

Dans la plupart des problèmes, la démarche ou le mode de raisonnement que les élèves vont a priori mobiliser ne dépend pas de ce qui aura été travaillé pendant l'année et donc pas du moment où le problème va être proposé. Mais ce n'est pas toujours le cas comme l'illustre le problème RS14 intitulé « la suite d'Olivia » pour lequel, les élèves peuvent acquérir au cours de l'année des outils plus performants pour les résoudre. En effet, les élèves peuvent mettre en œuvre une démarche d'ajustements d'essais successifs dès le début de l'année mais aussi mobiliser un raisonnement hypothético-déductif après avoir abordé l'algèbre. Il est donc important, pour certains problèmes, de prendre en compte le moment où on va le proposer pour anticiper ce que les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre. Pour notre analyse, nous avons fait le choix de nous situer en début d'année, c'est-à-dire avant que, dans la plupart des classes, les notions relatives à l'algèbre ne soient travaillées.

Résultats

Nous présentons dans la figure 3 un tableau synthétisant la ou les démarches et modes de raisonnement que nous retenons donc qui nous semblent être un enjeu intéressant en termes d'apprentissage pour chacun des problèmes.

	DMR1	DMR2
RS1	Exhaustivité des cas	Implication logique
RS2	Démarche Expérimentale	
RS3	Implication logique	
RS4	Hypothético-déductif	
RS5	Implication logique	
RS6	Implication logique	
RS7	Implication logique	
RS8	Exhaustivité des cas	
RS9	Essais-ajustements	
RS10	Exhaustivité des cas	Implication logique
RS11	Implication logique	
RS12	Exhaustivité des cas	Implication logique
RS13	Essais-ajustements	
RS14	Essais-ajustements	
RS15	Démarche Expérimentale	Exhaustivité des cas
RS16	Démarche Expérimentale	Exhaustivité des cas
RS17	Démarche Expérimentale	Exhaustivité des cas
RS18	Hypothético-déductif	
RS19	Hypothético-déductif	
RS20	Démarche Expérimentale	Exhaustivité des cas
RS21	Essais-ajustements	
RS22	Exhaustivité des cas	Implication logique
RS23	Exhaustivité des cas	
RS24	Exhaustivité des cas	
RS25	Démarche Expérimentale	
RS26	Hypothético-déductif	
RS27	Hypothético-déductif	
RS28	Hypothético-déductif	
RS29	Hypothético-déductif	
RS30	Implication logique	Exhaustivité des cas

Fig. 3 : Synthèse des démarches et modes de raisonnement retenus pour chaque problème du chapitre « Recherche & Stratégies » des MER de 10H

Nous mettons ci-dessous en lumière des éléments saillants qui ressortent de cette analyse.

Il apparait que lorsque des problèmes se ressemblent d'un point de vue global (forme de la question, domaine mathématique en jeu, forme de l'énoncé, etc.), la manière de les résoudre est semblable. Par exemple, les problèmes qui prennent la forme de jeux (RS15, RS16, RS17 et RS20) amènent tous à mobiliser une démarche expérimentale et un raisonnement par exhaustivité des cas. En effet, bien que les choix concernant la mise en œuvre de ces jeux en classe varient d'un enseignant à l'autre, on peut imaginer que de manière générale les élèves vont être tout d'abord invités à jouer quelques parties. Le fait que la question posée porte sur la stratégie gagnante invite à organiser de manière systématique les essais effectués, et donc à raisonner par exhaustivité des cas, dans le but de conjecturer des positions ou des configurations gagnantes. Les élèves peuvent alors prouver ces conjectures en raisonnant là encore par exhaustivité des cas.

De même, les problèmes qui sont formulés dans le cadre géométrique (RS4, RS18, RS19, RS27, RS28 et RS29) amènent tous à mobiliser un raisonnement hypothético-déductif, à l'appui de propriétés, formules d'aires et de périmètres de polygones ou de cercles/disques. Un seul autre problème (RS26) impliquant un raisonnement hypothético-déductif s'appuie sur des propriétés différentes, en l'occurrence relatives aux fractions.

Il nous semble intéressant de discuter des effets que cette ressemblance entre la forme du problème et le type de démarche ou raisonnement en jeu peut engendrer. Elle peut certes permettre de travailler sur des problèmes proches afin de permettre aux élèves de réinvestir les démarches et raisonnements déjà rencontrés. Mais il nous semble aussi que cela risque d'induire des effets de contrat didactique. En effet, on peut imaginer qu'après plusieurs problèmes se ressemblant, le contexte ou plus généralement la forme similaire du nouveau problème peut amener les élèves à recourir presque de facto au type de démarche ou raisonnement déjà utilisé, et ainsi limiter leur prise d'initiative et leur réflexion quant au choix de la démarche à adopter.

A l'inverse, le raisonnement par implication logique est mobilisé différemment dans plusieurs problèmes de ce chapitre. Il permet, et est suffisant, pour en résoudre certains (RS3, RS5, RS6, RS7 et RS11), dont ceux pour lesquels le recours à un logigramme est efficient (RS5, RS6, RS7 et RS11). D'autres problèmes nécessitent de l'articuler à un raisonnement par exhaustivité des cas (RS1, RS10, RS12, RS22 et RS30). Ainsi, les problèmes tels que RS3, RS5 et RS10 sont en apparence très proches bien qu'ils ne se résolvent pas de la même manière. En particulier l'utilisation d'un logigramme n'est pertinente que pour le deuxième. Réciproquement, RS12 et RS30 sont différents sur la forme bien qu'ils mobilisent les mêmes modes de raisonnement.

Ces subtilités, qui ne sont pas perceptibles sans une analyse fine des démarches et des raisonnements en jeu, nous paraissent importantes dans une perspective d'enseignement. En effet, l'aide apportée aux élèves en cours de recherche mais aussi les éléments qui peuvent être mis en avant à l'issue de la recherche vont être différents d'un problème à l'autre (l'organisation pour un problème mobilisant un raisonnement par exhaustivité des cas, le choix des essais et leur articulation avec la conjecture émise dans le cas d'une démarche expérimentale ou encore le choix et la validité de la règle utilisée au vue des données lors d'un raisonnement hypothético-déductif par exemple).

De plus, nous avons vu que les quatre jeux proposés dans ce chapitre amènent à mobiliser une démarche expérimentale. Seuls deux autres problèmes, RS2 et RS25, invitent à recourir à une telle démarche, avec une conjecture quasi immédiate concernant RS2. En l'état, la ressource ne propose donc pas de problème véritablement consistant quant aux conjectures à élaborer. Or la formulation de conjectures est centrale dans la démarche expérimentale qui est elle-même souvent considérée comme l'enjeu d'apprentissage principal de la résolution de problèmes (par exemple dans le cadre du problème ouvert (Arsac et al., 1991) ou des problèmes pour chercher (Charnay et al., 2005)).

Enfin, il apparait que les problèmes menant à conduire un raisonnement hypothético-déductif et qui sont fortement axés sur des notions mathématiques au programme de 10H (aires et périmètres de triangles, carré, rectangle et cercle) sont semblables à certains de ceux présents dans les chapitres associés. L'enjeu est, pour les élèves résolvant ces problèmes, de choisir et de mobiliser correctement les propriétés mathématiques pertinentes. On peut dès lors se demander si ces problèmes n'auraient pas davantage leur place au sein des chapitres thématiques associés. D'autres problèmes s'appuient certes sur des notions mathématiques (comme c'est le cas des puissances dans RS2) sans en faire pour autant un objet d'étude mais davantage un contexte pour entrainer à la résolution de problèmes (en l'occurrence la démarche expérimentale).

Conclusion

Nous avons cherché dans cet article à proposer une piste pour analyser les problèmes des chapitres « Recherche & Stratégies » par le prisme de leur potentiel didactique (Georget, 2009). Cela nous semble permettre de compléter les documents accompagnant cette ressource. Il semble en effet que les ressources proposées actuellement aux enseignants autour de ce chapitre centré sur la résolution de problèmes rendent difficiles à la fois le choix des problèmes, leur articulation, l'identification des apprentissages qui peuvent être visés et donc les éléments qui peuvent être institutionnalisés à l'issue de la recherche de tels problèmes.

Nous avons vu que les « stratégies » mises en avant comme enjeu de ces problèmes correspondent soit à des démarches ou modes de raisonnement soit à des heuristiques c'est-à-dire à des éléments qui ne sont pas de même nature. Il semble important que l'enseignant soit au clair avec cette distinction en particulier en vue des régulations qu'il peut apporter au cours du travail des élèves. On peut en effet raisonnablement penser que proposer aux élèves de recourir à des heuristiques n'aura pas les mêmes effets sur leur activité mathématique que les orienter sur le mode de raisonnement ou la démarche à employer pour résoudre le problème.

Le tableau synthétique proposé (Fig. 3) a pour but d'identifier a priori le potentiel didactique en termes de démarches et de modes de raisonnement en jeu lors de la résolution de ces problèmes puisque les « stratégies » en jeu ne sont la plupart du temps pas précisées dans les ressources didactiques associées (correction ou document d'accompagnement pour l'enseignant).

Enfin, les problèmes sont actuellement proposés de manière non organisée, ou sans que les critères d'organisation ne soient explicités. Cette manière d'analyser les problèmes en termes de démarches et modes de raisonnement nous paraît être un outil pour l'enseignant quant au choix et à l'articulation des problèmes sur le long terme.

Cela nous semble de plus transférable aux problèmes des chapitres « Recherche & Stratégies » pour les autres degrés et de manière plus générale pour tous les problèmes lorsqu'ils sont proposés pour travailler la résolution de problèmes pour elle-même.

Nous sommes toutefois conscients que malgré une clarification quant à la nature des apprentissages associés, l'institutionnalisation reste une question vive sur ce sujet.

Bibliographie

Arsac, G., Germain, G. & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de doctorat. Université Paris 7 Diderot.

Burgermeister, P.-F. & Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x*, *91*, 5-24.

Charnay, R., Dossat, L., Fromentin, J., Houdement, C., Pigot, N., Matulik, N. & Planchette, P. (2005). Les problèmes pour chercher. In *Documents d'accompagnement des programmes—Mathématiques* (p. 7-14). MEN, Sceren - Cndp édition.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin. (2012). *La résolution de problèmes. Ressources didactiques. Mathématiques 9-10-11*. LEP.

CIIP (2019). *Aide-mémoire*. LEP.

Demonty, I. & Fagnant, A. (2012). Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique ? In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21 e siècle – Actes du colloque EMF2012 (SPE3)* (pp. 1752-1760).

Favier, S. (2018). Zoom sur la stratégie « ajustements d'essais successifs » au travers de l'activité Des points partout (1H-2H). *RMé*, *230*, 15-22.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse d doctorat. Université Claude Bernard - Lyon I.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 31-59.

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire*. Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal.

Pólya, G. (1957). *Comment poser et résoudre un problème (Traduit de : How to solve it)* (Dunod).

Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème (Traduit de : How to solve it)*. J. Gabay.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.

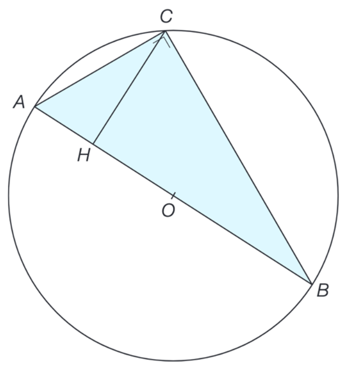
Annexe

Dans cette annexe, nous souhaitons proposer quelques exemples permettant d'illustrer la classification des différents problèmes. Nous présentons ainsi pour quatre d'entre eux, extraits du chapitre « Recherche et Stratégies » des MER de 10H, les grandes lignes (plus ou moins détaillées selon les problèmes) d'une résolution mathématique du point de vue des élèves. À partir de cette résolution, nous dégageons le potentiel didactique en termes de démarches et de modes de raisonnement. Nous rappelons toutefois que ce potentiel didactique ne dépend pas seulement du problème mais aussi des élèves et de l'enseignant.

Probleme RS18 « Quel perimetre ? »

Calcule le périmètre du cercle de centre *O*, sachant que *AB* est un diamètre de ce cercle.

AC = 6 cm, *BC* = 8 cm et la hauteur *CH* du triangle mesure 4,8 cm.

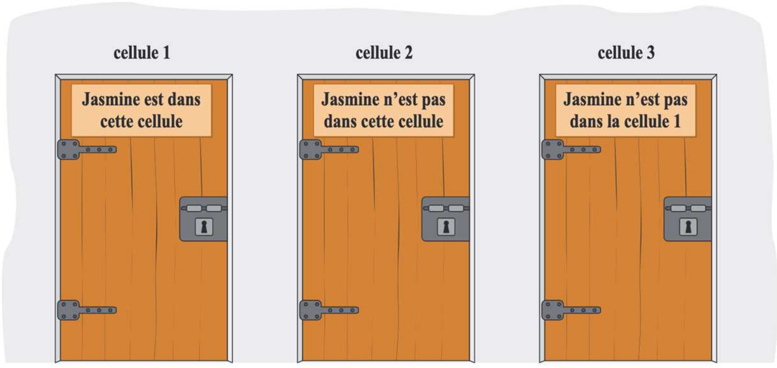


L'objet de ce problème consiste en calculer le périmètre d'un cercle. Pour cela, il faut déterminer son diamètre (ou son rayon) et appliquer la formule correspondante. Les élèves peuvent calculer le diamètre en ayant recours au théorème de Pythagore ou à l'égalité des formules d'aire du triangle rectangle ABC inscrit. Dans ce cas, il s'agit d'un raisonnement déductif dont la règle est en lien avec des savoirs mathématiques (Théorème de Pythagore ou formule d'aire du triangle) ce que nous nommons raisonnement hypothético-déductif.

PROBLEME RS12 « LE RAPT DE JASMINE »

Le terrible Jafar a enlevé la princesse Jasmine et la retient prisonnière dans une des trois cellules de son palais.

Aladin, accouru pour libérer Jasmine, se trouve devant les trois portes des cellules, portant chacune une indication, dont une seule dit la vérité.



Aladin sait qu'il ne pourra ouvrir qu'une seule cellule avant que les gardes arrivent.

Quelle porte va-t-il ouvrir ?

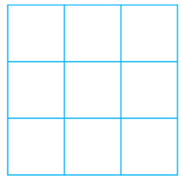
Pour être sûr de la porte qu'Aladin devra choisir, il y a trois cas à étudier : chacun correspondant au fait que l'indication inscrite sur la porte est la seule à dire la vérité.

- Étude du 1er cas : l'indication de la cellule 1 dit vrai c'est-à-dire que l'affirmation « Jasmine est dans cette cellule » est vraie donc Jasmine se trouverait dans la cellule 1. Dans ce cas, d'après les données de l'énoncé, les deux autres indications doivent être fausses et en particulier celle de la cellule 2 « Jasmine n'est pas dans cette cellule ». Or comme Jasmine n'est effectivement pas dans cette cellule 2, cette indication est vraie. Ceci vient contredire les données du problème et nous permet d'en conclure que ce ne peut pas être l'indication de la cellule 1 qui dit vrai.
- Étude du 2e cas : l'indication de la cellule 2 dit vrai c'est-à-dire que l'affirmation « Jasmine n'est pas dans cette cellule » est vraie donc Jasmine se trouverait soit dans la cellule 1, soit dans la cellule 3. Les indications portées par les deux autres portes doivent donc être fausses. Ainsi, pour la cellule 1 « Jasmine est dans cette cellule » amène à déduire que Jasmine se trouverait alors dans la cellule 3. Pour la cellule 3, « Jasmine n'est pas dans la cellule 1 » étant faux permet de déduire que Jasmine se trouverait dans cette cellule 1. Ces deux dernières déductions rentrent en contradiction ce qui permet de conclure que l'indication portée par la cellule 2 ne peut pas être celle qui dit vrai.
- Étude du 3e cas : l'indication portée par la cellule 3 dit vrai c'est-à-dire que l'affirmation « Jasmine n'est pas dans la cellule 1 » est vraie. Nous en déduisons donc que Jasmine peut être dans la cellule 2 ou la cellule 3 et que les indications des deux autres cellules doivent être fausses. La cellule 1 indique « Jasmine est dans cette cellule », ce qui est effectivement faux car la cellule 3 dit vrai. La cellule 2 « Jasmine n'est pas dans cette cellule » doit être fausse également ce qui amène à conclure que Jasmine se trouve dans cette cellule 2.

Le raisonnement se structure sur les différents cas à étudier c'est-à-dire en mettant en œuvre un raisonnement par exhaustivité des cas. L'étude de chacun de ces cas repose sur un raisonnement déductif dont les règles sont en lien avec les notions de logique que nous appelons par implication logique. L'étude des 2e et 3e cas (et possiblement du 1er) requiert également un parcours exhaustif des autres portes sans lequel il n'est pas possible de conclure de manière certaine. Ce problème est donc intéressant pour travailler ces deux modes de raisonnement : exhaustivité des cas et implication logique.

PROBLEME RS9 « 36 CHANDELLES »

Place tous les diviseurs de 36 dans les cases, de telle sorte que les produits des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soient égaux.



La première étape de ce problème consiste à déterminer les neuf nombres à placer dans les cases c'est-à-dire les différents diviseurs de 36. Ensuite, nous pensons que les élèves vont faire des essais c'est-à-dire qu'après avoir rempli le carré avec les neuf nombres trouvés précédemment, ils vont calculer les produits des diagonales, lignes et colonnes. Ils peuvent ensuite se livrer à des ajustements c'est-à-dire d'autres essais qui tiennent compte des résultats des produits calculés précédemment. Pour réaliser ces ajustements, les élèves vont certainement effectuer quelques déductions qui sont (ou devraient être) inhérentes à cette démarche d'ajustements. Différentes idées (comme par exemple : déterminer le résultat du produit cible, placer le 6 dans la case centrale, …) peuvent émerger, venir réduire le champ des possibles et donc simplifier voire diminuer de manière importante le nombre d'essais nécessaires pour parvenir à une solution.

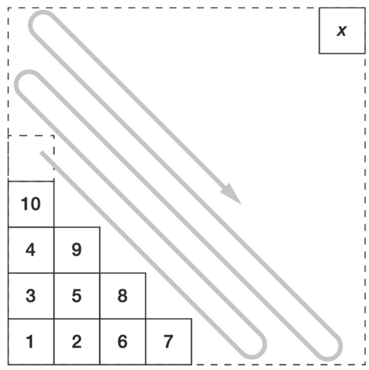
Nous avons bien conscience que cette proposition de résolution ne recouvre pas toute la contingence que peut provoquer un tel problème. Ceci étant, nous retenons que, du point de vue didactique, ce problème nous semble intéressant pour travailler la démarche d'ajustements d'essais successifs.

PROBLEME RS25 « EN HAUT A DROITE »

Pascal dessine de grands carrés, qu'il divise ensuite en carrés plus petits. Il écrit alors les entiers successifs dans chaque petit carré dessiné, comme l'indique la figure ci-contre.

Parmi les trois valeurs proposées, quelle est celle que le nombre x ne pourra pas prendre ?

a) 256 **b)** 128 **c)** 81



La manière dont ce problème est posé, et en particulier le fait de devoir compléter le carré en suivant la procédure indiquée nous semble ne pas inviter les élèves à faire directement le lien entre le nombre représenté par x et le nombre total de cases du carré. De plus, les nombres proposés dans l'énoncé (256 ; 128 et 81) semblent suffisamment grands pour dissuader les élèves de se lancer dans le remplissage du carré. Nous pensons que les élèves vont plutôt remplir des carrés plus petits (c'est-à-dire compléter un carré de 2 par 2, 3 par 3, 4 par 4, …). Ces différents carrés peuvent permettre de repérer une régularité : le nombre représenté par x sur ces petits carrés complétés correspond à un carré parfait. Ce constat peut être généralisé et/ou prouvé facilement (puisqu'il s'agit du nombre total de cases d'un carré). Grâce à cette « courte » démarche expérimentale, le problème se réduit alors à identifier quel nombre n'est pas un carré parfait parmi les trois proposés dans l'énoncé.

Ce problème nous parait intéressant puisqu'il peut amener les élèves à réaliser des essais sur des carrés plus petits (qui n'ont pas vocation à être solution du problème mais) qui permettent d'enrichir le milieu de façon à trouver que le nombre représenté par x est forcément un carré parfait. Du point de vue didactique, nous retenons donc la démarche expérimentale comme potentiel de ce problème.