



Thèse

2015

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

Investissements de savoirs et interactions de connaissances dans un
centre de formation professionnelle et sociale : une contribution à l'étude
des mathématiques dans le contexte de la formation professionnelle
spécialisée

Favre Berthet, Jean Michel

How to cite

FAVRE BERTHET, Jean Michel. Investissements de savoirs et interactions de connaissances dans un centre de formation professionnelle et sociale : une contribution à l'étude des mathématiques dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée. Doctoral Thesis, 2015. doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:76939

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:76939>

Publication DOI: [10.13097/archive-ouverte/unige:76939](https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:76939)



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

**FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION**

Section des Sciences de l'Education

Sous la direction de François CONNE & Jean-Luc DORIER

INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS ET INTERACTIONS DE CONNAISSANCES DANS UN CENTRE DE FORMATION PROFESSIONNELLE ET SOCIALE

Une contribution à l'étude des mathématiques et de leur fonctionnement
dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée

THESE

Présentée à la
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Education

par

Jean-Michel FAVRE

de

Villars-sous-Yens

Thèse No 593

GENEVE

Octobre 2015

93-304-376

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
SECTION DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

**Investissements de savoirs et interactions de connaissances
dans un centre de formation professionnelle et sociale**

Une contribution à l'étude des mathématiques et de leur fonctionnement
dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée

Jean-Michel FAVRE

COMPOSITION DU JURY DE THESE

François CONNE, directeur de thèse, Université de Genève

Jean-Luc DORIER, directeur de thèse, Université de Genève

Isabelle BLOCH, Université de Bordeaux

Jacinthe GIROUX, Université du Québec à Montréal

Jean-Paul MOULIN, CFPS du Château de Seedorf à Noréaz (FR)

Greta PELGRIMS, Université de Genève

DÉDICACE...

Je dédie cette thèse aux élèves de l'enseignement spécialisé et aux apprenties de la formation professionnelle spécialisée avec lesquels j'ai eu la belle opportunité de faire des mathématiques tout au long de ce quart de siècle.

A celles et ceux que j'ai sans doute passablement brusqués, à mes débuts, où fort de ma position de sachant, je ne comprenais pas bien qu'ils ne comprennent pas ce que je tentais maladroitement de leur faire comprendre ; comme à tous les autres que, fort de ma posture d'ignorant qu'ils m'ont progressivement aidé à construire, j'ai pu initier à cet univers et faire ressentir le plaisir, même fugace, que l'on pouvait prendre à en explorer certains détours.

La didactique des mathématiques m'a fourni des repères pour réaliser cette construction et je me réjouis aujourd'hui que cette thèse puisse, en retour, lui apporter une forme de contribution.

...ET REMERCIEMENTS À...

François Conne qui est l'initiateur de ce parcours, le maître à penser et l'inlassable relanceur.

Jacinthe Giroux qui en est une interlocutrice toute privilégiée.

Mes amis du groupe ddmes, compagnons de route fidèles, qui m'ont aidé à transformer mes représentations des mathématiques et m'ont ouvert sur ce qu'il était possible d'en faire et d'en faire faire dans le contexte de l'enseignement spécialisé.

J'aimerais également mentionner le nom de quelques didacticiens - ce sont en fait surtout des didacticiennes - que j'ai pour certains perdu de vue, mais qui ont accompagné mon entrée dans ce champ scientifique et contribué à ce que je m'y réalise : Gisèle Lemoyne, bien sûr, Maria-Luisa Schubauer Leoni et Jean Brun durant mes années d'études à l'Université de Genève, Isabelle Bloch et Marie-Hélène Salin.

Outre les didacticiens, il y a les professionnels de l'éducation que j'ai rencontrés à des étapes-clés de ce long parcours, et tout spécialement : Jean-Claude Calpini qui m'a initié à l'observation, Claude Lavanchy qui m'a accueilli, en tant qu'étudiant, puis comme formateur, dans la formation des enseignants spécialisés, Anne Ansermet qui m'a aidé à y faire ma place et Jean-Paul Moulin, collègue et directeur, qui m'a ouvert les portes du CFPS du Château de Seedorf et de la formation professionnelle spécialisée.

Un remerciement particulier à Jean-Luc Dorier qui a rendu possible l'élaboration de cette thèse dans des conditions un peu particulières et m'a permis de rencontrer et d'échanger avec un didacticien de la formation professionnelle de langue allemande, Hansruedi Kaiser.

Des remerciements aussi à mes collègues enseignants de Seedorf qui, fort de leur créativité et de leur engagement sans cesse renouvelés, ont fait que l'espace et le temps que je suis parvenu à m'arroger pour échafauder ce travail de thèse ont pu y être entièrement consacrés.

Des remerciements enfin à ma femme Christine et à mes filles Chloé et Manon, pour leur indéfectible soutien durant ces trois années au cours desquelles je n'ai eu que bien peu de disponibilités en pensées et en actes à leur offrir.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	13
Apports de la didactique des mathématiques pour un enseignant spécialisé.....	13
Apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement spécialisé	15
Apports de l'enseignement spécialisé à la didactique des mathématiques	18
Une thèse en didactique des mathématiques dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée	20
Construction de la thèse	21
 1^{ÈRE} PARTIE : APPRÉHENDER, DE L'INTERNE, LES MATHÉMATIQUES ET LEUR FONCTIONNEMENT DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPÉCIALISÉE	
 CHAPITRE 1 : PROLÉGOMÈNES	25
INTRODUCTION	25
LA FORMATION DES APPRENTIES AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF	25
Le département professionnel du CFPS du Château de Seedorf	26
Le département socialisation du CFPS du Château de Seedorf	27
Le département enseignement du CFPS du Château de Seedorf	27
Les différentes étapes de la formation des apprenties au CFPS	28
PREMIÈRES QUESTIONS, PREMIÈRES RÉFLEXIONS.....	30
PREMIERS ÉCHANGES, PREMIÈRES NARRATIONS	32
Narration (1 ^{ère} partie)	33
Narration (2 ^{ème} partie)	35
Narration (3 ^{ème} partie)	36
PAS APRÈS PAS VERS UN PROJET DE THÈSE	38
Une démarche opportuniste résolument inductive... ..	39
partant d'un point de vue interne offrant des facilités, mais nécessitant des précautions... ..	40
dans un contexte professionnel spécialisé réclamant un cadrage spécifique	41
 CHAPITRE 2 : CADRE THÉORIQUE (1^{ÈRE} PARTIE)	43
INTRODUCTION	43
SOCLE THÉORIQUE	43
Le niveau de l'institution	44
Le niveau des investissements de savoirs	45
Le niveau des interactions de connaissances	46

PROPOSITIONS CONCEPTUELLES AU NIVEAU DE L'INSTITUTION	47
Formes des savoirs	47
Déterminations des savoirs	49
Enjeux des savoirs et types d'interactions	50
Evolution des savoirs durant la formation	52
PROPOSITIONS CONCEPTUELLES AU NIVEAU DES INVESTISSEMENTS DE SAVOIR	53
Déterminations des savoirs	54
Contextualisations des savoirs	54
Algorithmisations des savoirs	57
PROPOSITIONS CONCEPTUELLES AU NIVEAU DES INTERACTIONS DE CONNAISSANCES	60
Type de contrat relatif aux interactions	60
Interprétation des productions et des erreurs issues des interactions	62
Dynamique des interactions	66
CHAPITRE 3 : CADRE THÉORIQUE (2^{ÈME} PARTIE)	69
INTRODUCTION	69
LE PROJET DE ROUCHE SUITE AUX RÉFORMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE LA FIN DU 20 ^{ÈME} SIÈCLE	70
Les implications de la réforme des mathématiques modernes et de la contre-réforme qui en a suivi sur l'enseignement de la proportionnalité	71
Reconstruire les nombres à partir des grandeurs	73
LE PROJET DE ROUCHE DÉCRIT AU TRAVERS DE TROIS OUVRAGES VISANT À RECONSTRUIRE LES NOMBRES À PARTIR DES GRANDEURS	73
Trois ouvrages pour aller à la rencontre de l'enseignement	73
« Le sens de la mesure. » (Rouche, 1992)	74
« Pourquoi ont-ils inventé les fractions ? » (Rouche, 1998)	76
« Nombres, grandeurs, proportions. Du quotidien aux mathématiques. » (Rouche, 2006) ..	78
LE PROJET DE ROUCHE : ASPECTS CRITIQUES ET ESSAI DE SCHÉMATISATIONS	81
Le projet de Rouche : aspects critiques	81
Élaborer des constructions "sur mesure" et les faire fonctionner comme des schémas	85
ANNEXE AU CHAPITRE 3 : DEUX CONSTRUCTIONS POUR APPRÉHENDER LA COMPLEXITÉ DES INTERACTIONS DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPÉCIALISÉE	89
Construction n°1 : grandeurs, mesures de grandeurs et nombres décimaux	89

Construction n°2 : grandeurs, rapports de grandeurs, proportions et proportionnalité	96
CHAPITRE 4 : DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL	107
INTRODUCTION	107
LA NARRATION COMME INSTRUMENT DE RECHERCHE	107
Origines de la narration dans le groupe d'élèves	107
Fondements théoriques de la narration	110
UN DISPOSITIF COMPOSÉ DE CINQ INVESTIGATIONS SUCCESSIVES	116
Les savoirs mathématiques en jeu durant la formation des apprenties au CFPS du Château de Seedorf (chapitre 5)	116
Le soutien apporté à une apprentie employée de cuisine AFP, en vue de ses cours professionnels et de la passation de ses examens de fin d'apprentissage (chapitre 6)	117
Les épreuves de mathématiques soumises aux stagiaires avant et en vue de leur entrée en formation au CFPS du château de Seedorf (chapitre 7)	119
Les cours de mathématiques donnés à un groupe d'apprenties employées de cuisine AFP dans l'enseignement des branches professionnelles au CFPS du Château de Seedorf (chapitre 8)	123
Le soutien apporté à une apprentie praticienne en intendance, à sa demande, pour faire des progrès en mathématiques (chapitre 9)	125
Limites relatives à la configuration du dispositif expérimental	127
 2ÈME PARTIE : RESTITUER, À L'EXTERNE, LES MATHÉMATIQUES ET LEUR FONCTIONNEMENT DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPÉCIALISÉE	
 CHAPITRE 5 : LES SAVOIRS MATHÉMATIQUES EN JEU DURANT LA FORMATION DES APPRENTIES AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF	131
INTRODUCTION	131
LES MATHÉMATIQUES DANS LE DÉPARTEMENT ENSEIGNEMENT DU CFPS	131
Les savoirs mathématiques en jeu durant le stage préalable à l'entrée en formation	131
Les savoirs mathématiques en jeu durant la 1 ^{ère} année de formation	133
Les savoirs mathématiques en jeu durant les 2 ^{ème} et 3 ^{ème} années de formation	135
LES MATHÉMATIQUES DANS LE DÉPARTEMENT PROFESSIONNEL DU CFPS ...	140
Les mathématiques en jeu durant le stage préalable et la 1 ^{ère} année de formation	140
Les mathématiques en jeu durant les 2 ^{ème} et 3 ^{ème} années de formation	141
SYNTHÈSE DES ANALYSES	149
 CHAPITRE 6 : LE SOUTIEN APORTE A CA, APPRENTIE EMPLOYÉE DE CUISINE AFP, EN VUE DE SES COURS PROFESSIONNELS ET DE LA PASSATION DE SES EXAMENS DE FIN D'APPRENTISSAGE	153

INTRODUCTION	153
INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS	153
Les déterminations des savoirs en jeu dans les interactions	153
Les contextualisations de savoirs supports aux interactions	155
Les algorithmisations de savoirs en jeu dans les interactions	160
INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : LA SÉANCE AVEC CA DU 5 JANVIER 2010	162
Narration (1 ^{ère} partie)	162
Narration (2 ^{ème} partie)	164
Narration (3 ^{ème} partie)	166
Narration (4 ^{ème} partie)	167
Narration (5 ^{ème} partie)	168
Narration (6 ^{ème} partie)	170
INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : LES PRODUCTIONS DE CA LORS DES SÉANCES DES 12 ET 19 JANVIER, 2 FÉVRIER ET 4 MAI 2010	170
Les exercices de complément de fiches d'inventaires (CFI)	170
Les exercices de calcul de poids (CP)	172
Les exercices de transformation de quantités d'ingrédients d'une recette (TQIR)	175
Les exercices de calcul de coûts (CC)	180
SYNTHÈSE DES ANALYSES	183
CHAPITRE 7 : LES ÉPREUVES DE MATHÉMATIQUES SOUMISES AUX STAGIAIRES AVANT ET EN VUE DE LEUR ENTRÉE EN FORMATION AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF	187
INTRODUCTION	187
LES ÉPREUVES DE NUMÉRATION	187
Exercice n°1 : lecture de nombres écrits en chiffres	187
Exercice n°2 : transcription en chiffres de nombres écrits en mots	189
Exercice n°3 : dénombrement d'un réseau rectangulaire de cases	192
Exercice n°4 : comptage et décomptage par n	194
Exercice n°5 : ordre des nombres dans N et dans D	195
LES ÉPREUVES CONCERNANT LES OPÉRATIONS.....	197
Exercice n°1 : opérations dans N à l'oral	197
Exercice n°2 : opérations dans N à l'écrit (1)	199
Exercice n°3 : opérations dans N et D à l'oral	201
Exercice n°4 : opérations dans N à l'écrit (2)	203

LES ÉPREUVES DE PROBLÈMES NUMÉRIQUES	206
Exercice n°1 : problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (1)	206
Exercice n°2 : problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (2)	208
LES ÉPREUVES DE MESURES	211
Exercice n°1 : mesures décimales de longueurs, d'angles et d'aires dans un triangle	211
Exercice n°2 : rapports entre unités de mesures d'un même domaine de grandeurs	214
Exercice n°3 : conversions de mesures	217
SYNTHÈSE ET DISCUSSION CONCERNANT LES RÉSULTATS DES ÉPREUVES	220
CHAPITRE 8 : LES COURS DE MATHÉMATIQUES DONNÉS À UN GROUPE D'APPRENTIES EMPLOYÉES DE CUISINE AFP DANS L'ENSEIGNEMENT DES BRANCHES PROFESSIONNELLES AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF	229
INTRODUCTION	229
INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS	229
Les déterminations des savoirs et des interactions	229
Les contextualisations de savoirs supports aux interactions et les algorithmisations de savoirs qui leur correspondent	235
INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : TRANSFORMER LES QUANTITÉS D'INGRÉDIENTS D'UNE RECETTE	249
Transformer les quantités d'ingrédients d'une recette : les procédés employés par les apprenties lors des séances de cours de septembre à décembre 2011	249
Transformer les quantités d'ingrédients d'une recette : l'analyse d'une séance consacrée à l'enseignement de la règle de trois	258
Résoudre des exercices TQIR avec la règle de trois : le parcours de trois apprenties durant l'année 2011-2012	265
INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : ÉTABLIR DES CONVERSIONS DE MESURES DE POIDS	272
Établir des conversions de mesures de poids : les procédés employés par les apprenties lors des séances de cours des 3 et 17 novembre 2011	272
Établir des conversions de mesures de poids : l'analyse d'une séance consacrée à l'enseignement d'un tableau de conversion fondé sur le rapport kilo-grammes	278
Établir des conversions de mesures de poids : les procédés employés par les apprenties lors de l'épreuve d'évaluation des séances des 26 janvier et 2 février 2012	286
SYNTHÈSE DES ANALYSES	292
CHAPITRE 9 : LE SOUTIEN APPORTE À EL, APPRENTIE PRATICIENNE EN INTENDANCE AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF, POUR FAIRE DES PROGRÈS EN MATHÉMATIQUES	297
INTRODUCTION	297

NARRATION DES DIX SÉANCES DE SOUTIEN AVEC EL	297
1 ^{ère} séance avec El (05.12.2012) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette par l'usage direct du rapport interne	297
2 ^{ème} séance avec El (12.12.2012) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide de la règle de trois	299
3 ^{ème} séance (16.01.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité	300
4 ^{ème} séance (23.01.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité, puis du produit en croix	303
5 ^{ème} séance (06.02.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité, puis du produit en croix	307
Les fiches de devoirs complétées par El (06.02-27.01.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide de divers procédés	308
6 ^{ème} séance (27.03.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité, puis du produit en croix	313
7 ^{ème} séance (10.04.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide du produit en croix	316
8 ^{ème} séance (17.04.2013) : contrôler des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide du produit en croix	318
9 ^{ème} séance (24.04.2013) : enseigner le produit en croix pour effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette	320
10 ^{ème} séance (01.05.2013) : éprouver la fonctionnalité du produit en croix dans de nouveaux domaines d'expérience	322
SYNTHÈSE DES ANALYSES	324
CONCLUSION	327
INSTITUTION	327
La précarité des mathématiques dans la Fps	327
La disparité des mathématiques dans la Fps	328
L'immobilité des mathématiques dans la Fps	328
Faire avec et faire sans les mathématiques dans la Fps	329
INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS	329
Des exercices scolaires plutôt que des problèmes de cuisine	329
Des algorithmes pour résoudre des exercices : une impasse didactique	330
Des relations numériques pour résoudre des exercices	331
Des algorithmes pour se substituer aux relations numériques	331
L'éviction des nombres décimaux	332
L'inévitable retour des nombres décimaux	332

INTERACTIONS DE CONNAISSANCES	333
Ignorance en amont de l'interaction	333
Ignorance au cours de l'interaction	334
Ignorance en aval de l'interaction	334
Adoption d'une posture et recours au jeu	335
NARRATION	336
Narration pour le pilote	337
Narration pour le chercheur	337
PERSPECTIVES	338
Perspectives pour la Fps	338
Perspectives pour l'Es	339
Perspectives pour la ddm	340
ÉPILOGUE	343
BIBLIOGRAPHIE	345
TABLE DES ILLUSTRATIONS	357
LEXIQUE DES PRINCIPAUX SIGLES UTILISÉS DANS LA THÈSE	361
ANNEXES	363

INTRODUCTION

A l'origine de la thèse, on trouve l'improbable rencontre entre deux mondes avec, d'un côté, le champ théorique de la *didactique des mathématiques* (ddm) qui s'est développé en France, depuis les années 1970, à partir de l'échec de la vaste réforme des mathématiques modernes et que Brousseau (1994) définit de la manière suivante :

La didactique des mathématiques se place dans le cadre des sciences cognitives comme la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques utiles au fonctionnement des institutions humaines. (p.52)

D'un autre côté, on a le terrain de l'*enseignement spécialisé* (Es) qui, dans le canton de Vaud, a constitué une entité officiellement reconnue à la création, en 1971, du Service de l'enseignement spécialisé (SES) qui a été rattaché au Département de la prévoyance sociale et des assurances (Ogay, 2010). Regroupant à ses débuts les classes des institutions spécialisées privées du canton, l'Es s'est sensiblement étoffé depuis, absorbant progressivement d'autres classes d'enseignement spécialisé intégrées dans des établissements de l'enseignement ordinaire (Eo) et placées sous la responsabilité conjointe des directeurs d'établissement et de l'actuel Service de l'enseignement spécialisé et de l'appui à la formation (SESAP). Sous l'appellation Es, il faudra donc considérer ici et tout au long de la thèse, l'ensemble des classes¹ rassemblant : « des enfants et adolescents qui, en raison d'une maladie ou d'un handicap mental, psychique, physique, sensoriel ou instrumental, ne peuvent suivre tout ou partie de l'enseignement ordinaire » (ibid., p.238).

De cette rencontre est né un groupe, le *groupe ddmes*² (Favre, 2004b), que nous avons fondé avec François Conne à Lausanne en 1998 et qui s'est donné pour tâche : « d'étudier des questions de didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé » (p.129). Il s'agissait de rassembler des enseignants spécialisés, des formateurs et des chercheurs dans l'idée d'établir un "milieu pour la recherche" en ddm dans l'Es, au sein duquel des modalités de recherche différenciées ont été développées, alliant des investigations individuelles que chaque membre pouvait réaliser sur son lieu de travail à des recherches collectives de plus longue haleine qui, sous la responsabilité des chercheurs, ont pris pour cadre expérimental privilégié l'Institution Pré-de-Vert³ à Rolle.

La thèse est d'ailleurs à considérer comme un produit des travaux du groupe ddmes, à qui elle emprunte une part des méthodes de travail qu'elle va chercher à développer dans un troisième monde, celui de la *formation professionnelle spécialisée* (Fps).

Avant d'y accéder, on commencera toutefois par examiner les apports mutuels que sont susceptibles d'entretenir l'un l'autre, le monde de la ddm et celui de l'Es, en évoquant tout d'abord ce que la ddm a pu m'apporter, à titre personnel, en tant qu'enseignant spécialisé⁴, puis en présentant les travaux de ddm qui constituent un apport pour l'Es et ceux, pour lesquels, c'est en contrepartie le contexte de l'Es qui s'offre comme un apport à la ddm.

Apports de la didactique des mathématiques pour un enseignant spécialisé

En tant qu'enseignant spécialisé, ma première rencontre avec la ddm a eu lieu dans les cours que François Conne dispensait, il y a vingt-cinq ans, au Séminaire Cantonal de l'Enseignement

¹ Dans cette perspective, échappent donc à l'Es, toutes les classes de l'Eo qui intègrent ou incluent, à temps partiel ou à temps plein, un ou plusieurs élèves relevant du contexte de l'Es.

² Le groupe ddmes (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé) fait partie de la SSRDM (Société suisse de recherche en didactique des mathématiques) : <http://www.ssrmd.ch>. Il est subventionné par l'AVOP (Association vaudoise des organismes privés pour personnes en difficulté) : <http://www.avop.ch>.

³ On trouvera de plus amples informations concernant l'Institution Pré-de-Vert sur son site : <http://www.pre-de-vert.ch>.

⁴ D'autres développements concernant les apports de la ddm pour un enseignant spécialisé sont proposés dans l'article : « Le mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant » (Favre, 1999).

Spécialisé (SCES)⁵ à Lausanne, puis, dans le prolongement de ceux-ci, à l'occasion du mémoire que j'y ai réalisé au sujet de l'enseignement de la multiplication dans une classe d'un centre thérapeutique de jour (Favre, 1992, 1994). Le défi majeur de ce mémoire a été de concevoir et de réaliser, en m'appuyant sur la *théorie des champs conceptuels* (TCC) de Vergnaud (1991), un enseignement autour d'un savoir, la multiplication, qui ne tienne pas trop compte de ce que les élèves ne savaient pas (sinon, il est vraisemblable que le choix de la multiplication se serait avéré trop ambitieux). Il m'a en outre invité à dépasser une conception par trop réductrice de la multiplication, comme simple addition itérée, et à développer un enseignement qui s'ancrait sur la base des savoirs manifestés par les élèves.

Avec la TCC, j'avais trouvé en son temps un cadre théorique approprié pour le faire. L'idée qu'une *situation*⁶ ne pouvait pas être analysée à l'aide d'un seul concept et qu'un concept ne pouvait pas non plus prendre sa signification dans un seul type de situations m'avait en effet conduit à effectuer une analyse conceptuelle des activités que je comptais soumettre aux élèves et surtout à procéder à une diversification des situations qui ne soit pas seulement une diversification de surface, mais qui tienne compte de divers aspects du concept à enseigner. Les deux autres idées importantes de la TCC qui m'avaient guidé dans ce mémoire étaient celle de *schème*⁷, et plus particulièrement d'*invariant opératoire*, et celle de *représentation langagière* ou *symbolique* qui m'ont aidé à procéder à une analyse des productions des élèves pour y repérer des savoirs. Ainsi, par exemple, la production écrite :

$$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$$

proposée par une élève de la classe, en réponse au calcul du prix de cinq stylos coûtant chacun CHF 3.- pièce, pouvait être envisagée comme la mise en évidence d'un invariant (5 +) relatif à toute situation du même type - la distinction du nombre de stylos et du prix de chaque stylo dont la multiplication rend compte - au sein d'une représentation symbolique qui en garantissait le caractère opératoire, soit de contrôler le nombre de 3 à itérer, alors même qu'elle était incorrecte d'un point de vue strictement mathématique.

A cette époque, je ne connaissais pas bien encore les idées d'*erreur* et surtout d'*erreurs systématiques* développées par Brun, Conne & al. (1989, 1993, 1994a, 1994b), ni celles d'*obstacles ontogénétiques, didactiques* et *épistémologiques* de Brousseau (1983) qui viendront utilement par la suite compléter l'approche développée par Vergnaud pour interpréter les productions des élèves. Il n'est pas vain de souligner ici combien ces idées développées en ddm représentaient un apport sensible pour l'enseignant spécialisé que j'étais alors. En demeure d'interagir au quotidien avec des élèves régulièrement "en panne de réussite" face aux tâches que je leur soumettais, elles m'offraient la possibilité d'identifier des savoirs dans leurs productions incorrectes, pour chercher ensuite à les enrôler dans l'échange didactique (Conne, Favre & Giroux, 2006).

Quelques années plus tard, au cours de mes études à l'Université de Genève, j'ai rencontré la *théorie des situations didactiques* (TSD) de Brousseau (1998), à l'occasion des cours de ddm donnés par Jean Brun. L'idée d'un *système (didactique)* et celle d'un *contrat (didactique)* (Brousseau, 1986, 1990), envisagé comme un processus de recherche incertain régissant ce système, m'ont permis d'apporter un éclairage nouveau sur les interactions qui me liaient avec les élèves et le savoir mathématique dans le contexte particulier de l'Es. Les *paradoxes* liés à cette recherche de contrat, tout comme les *effets* (Topaze, Jourdain,...) qui en découlent, permettaient cette fois-ci non pas seulement d'interpréter les productions des élèves, mais bien la situation d'enseignement dans son ensemble : lorsque, par exemple, l'enseignant, aux prises avec

⁵ C'est ainsi que l'on désignait, dans les années 90, l'institut qui formait les enseignants spécialisés dans le canton de Vaud.

⁶ Le terme *situation* est à prendre ici au sens réduit de "tâche" et non pas dans l'acception plus large que Guy Brousseau lui a donnée dans le cadre de la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998).

⁷ L'idée de schème a été empruntée à Piaget pour être développée par Vergnaud dans le cadre de la TCC (Brun, 1996).

un élève qui ne réussit pas, simplifie les tâches qu'il lui soumet ou quand un élève, par son aptitude à repérer les indices laissés par l'enseignant, cherche à éviter les problèmes qui lui sont posés ou encore quand le savoir mathématique, enjeu prétendument déclaré des interactions, s'évanouit dans l'échange, etc.

Les apports de la TSD ne s'arrêtaient cependant pas là. La perspective d'un savoir mathématique qui émerge progressivement pour l'élève, au travers de *situations a-didactiques d'action, de formulation et de validation* invitait au dépassement seul de l'action, parfois considérée (à tort) comme un aboutissement en soi de l'enseignement. A cela venaient s'ajouter deux autres idées fortes permettant de contrecarrer la propension à vouloir doter l'élève, quand il ne parvient pas à s'approprier le savoir en jeu, de suites ordonnées d'actions à réaliser au sein de techniques toutes faites : soit l'idée d'un *processus de dévolution* qui tend à installer, à l'intention de l'élève, un espace de choix et de décisions face à un problème et celle d'un *processus d'institutionnalisation* qui vient ponctuer et non se substituer à l'apprentissage. Enfin, la constitution d'un *milieu* doté de rétroactions contribuait à aménager cet espace de décisions, afin de limiter les velléités d'intrusion que l'enseignant pouvait, sciemment ou pas, nourrir à son égard, quand la réussite aux tâches proposées ne s'était pas manifestée.

Durant mes études à Genève, j'ai également été amené à approcher certains aspects de la *théorie anthropologique du didactique* (TAD) de Chevallard (1985, 1992) durant les cours de Maria-Luisa Schubauer Leoni. L'intérêt que j'y ai principalement trouvé résidait dans l'idée d'*institution* qui tendait à considérer tout système didactique comme lié à d'autres systèmes dont il est dépendant. Il s'agissait dès lors d'envisager l'enseignement qui y était conduit à l'interne d'un système, comme celui, par exemple, d'un centre thérapeutique de jour, non pas seulement comme le produit de ses acteurs, mais également comme celui des *contraintes* qui le déterminent. C'est d'ailleurs principalement ces idées d'institution et de contraintes qui m'ont ensuite amené, à l'occasion de mon mémoire de fin d'études universitaires, à réaliser un travail de comparaison entre l'enseignement de la multiplication donné conjointement dans le système Eo et dans le système Es⁸, lequel a mis en évidence comment et en quoi, dans le système Es, l'enseignement pouvait être en partie "modélé" par les contraintes de l'échec et du temps (Favre, 1997, 2004a).

Apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement spécialisé

Si l'on considère les choses d'un point de vue plus général, on peut commencer par dire que, pour la recherche en ddm, les questions liées à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques dans l'Es restent marginales⁹. Avec Giroux (2013), on peut néanmoins rappeler que c'est : « à partir de l'étude de cas d'élèves en échec électif en mathématiques qu'a émergé le concept de contrat didactique » (p.62). Or, c'est bien cette idée fondamentale - plus précisément celle de processus de recherche d'un contrat - qui, en permettant de porter un regard systémique sur les difficultés d'apprentissage, les plaçant au cœur de la situation didactique (Brousseau, 1981a, 1981b), a engagé la ddm à y rechercher ce qui pouvait empêcher l'entrée de certains élèves dans les apprentissages.

Mettre en cause l'élève, uniquement l'élève, me paraît une attitude analogue (aussi vaine) que celle qui chercherait à expliquer pourquoi l'eau fuit d'un seau percé en analysant les différences de qualité entre l'eau qui est sortie et celle qui est restée, comme si les raisons de la fuite résidaient dans des qualités propres à l'eau. (Brousseau, 1980a, p.181)

⁸ La thèse de Maréchal (2010 ; 2012) qui propose un travail similaire à propos de l'addition et des structures additives a également été conduite pour une bonne part dans le cadre de la TAD de Chevallard.

⁹ La preuve en a encore été donnée récemment avec la disparition du groupe de travail « Enseignement des mathématiques auprès des publics spécifiques ou dans des contextes particuliers » du prochain congrès EMF (Espace Mathématique Francophone) en 2015.

A ma connaissance, c'est Lemoyne qui, en 1990, inaugure au Québec les premiers travaux de ddm dans le domaine de *l'orthopédagogie*, arguant que les outils théoriques développés par les didacticiens des mathématiques devaient participer à la création de situations favorisant l'implication des élèves de l'Es et leur engagement dans une véritable démarche de construction des savoirs. Elle invitait ainsi les élèves et les enseignants à : « vaincre leurs peurs réciproques de ne pas avoir de réponse appropriée aux difficultés qu'ils rencontrent » (Lemoyne, 1990, p.98), afin que les premiers puissent être à même d'investir les tâches qui leur étaient soumises et que le second consente à leur en octroyer la possibilité.

Treize ans après, c'est encore Lemoyne (Lemoyne & Lessard, 2003) qui parlera d'enseignants en "difficulté d'enseignement" dans le contexte de l'Es, précisant que les difficultés d'enseignement apparaissent quand : « les dispositifs qu'il (l'enseignant) croyait "pertinents" montrent leur inefficacité à produire des savoirs institutionnellement reconnus chez les élèves » (p.30). On assiste dès lors à une reconnaissance explicite des difficultés de l'enseignant à accomplir son enseignement, lorsque l'apprentissage des élèves ne s'opère pas. L'élève n'est en conséquence plus seul face à ses difficultés, mais il s'y trouve rejoint par l'enseignant qui, dans le contexte de l'Es, voit son mandat singulièrement se compliquer.

Cette situation délicate de l'Es - regroupant des élèves et des enseignants conjointement en difficulté (bien que ce ne soient pas les mêmes) - a suscité diverses études en ddm. Une décennie plus tard, Giroux (op.cit.) recense et distingue deux grandes catégories¹⁰ de travaux de ddm réalisés dans le cadre de l'Es : les uns portant : « sur l'étude du fonctionnement des interactions didactiques et plus particulièrement sur l'identification de phénomènes didactiques propres à cette institution » (p.63) ; alors que les autres : « visent la mise à l'épreuve de situations éprouvées en classe ordinaire dans le cadre de dynamiques propres aux classes de l'adaptation scolaire » (p.63).

Partant du savoir, la perspective systémique promue par les premiers travaux de ddm dans l'Es ont permis de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes, envisagés comme spécifiques¹¹ à l'enseignement des mathématiques dans ce contexte. On peut citer :

- le *traitement public d'éléments privés* du rapport des élèves aux objets de savoir, quand l'enseignant est conduit à enseigner aux élèves les gestes de l'action qu'il attend leur voir réaliser, ce qui tend à placer cette action hors de son contrôle mathématique (Mercier, 1995);
- le phénomène de *reconduction dans l'ignorance* (Conne, 1999) qui, en l'absence d'une réussite attendue et quelque peu stabilisée de la part des élèves, opère une forme de fuite en arrière dans l'enseignement des savoirs, dans la perspective de favoriser la construction de prérequis non encore acquis ;
- *l'économie et l'algorithmisation des savoirs* (Giroux & René de Cotret, 2001) qui tendent à réduire les facettes du savoir en jeu, au profit d'un enseignement avant tout technique, dépendant des représentations que l'enseignant spécialisé nourrit vis-à-vis des savoirs qu'il projette d'enseigner ;
- le *surinvestissement du traitement des erreurs* (Cange & Favre, 2003) qui, en s'attachant à chaque erreur produite par les élèves, et leur demandant de les identifier, les expliquer, les justifier et les corriger, détourne l'enseignement de son projet initial et provoque des formes d'évanouissement de sens ;

¹⁰ A ces deux grandes catégories, j'aimerais encore ajouter une étude ponctuelle et originale réalisée par Jovenet (1998) au sujet de la conceptualisation de la symétrie orthogonale auprès d'élèves myopathes.

¹¹ La question de la spécificité des phénomènes identifiés dans l'Es fait régulièrement l'objet de controverses dans le milieu des didacticiens. F. Conne en a discuté à plusieurs reprises (1999, 2000, 2003, 2004), invitant à considérer avec beaucoup de prudence les rapports qu'entretiennent l'Es et l'Eo l'un envers l'autre.

- le *surinvestissement de certains objets de savoir* (Conne, 2003) qui découle de l'absence de programme dans certains contextes de l'Es qui fait que certains savoirs sont surinvestis au détriment des autres, en fonction des conceptions que l'enseignant entretient à l'égard des mathématiques en général et de leur présumée utilité¹² ;
- le *frein de la progression du temps didactique* (Favre, 2004a) qui, en raison de la prégnance de l'échec potentiel des élèves aux tâches qui leur sont soumises, fait qu'il leur est difficile d'être reconnus "sachant" par l'enseignant ;
- la *surcharge de la mémoire didactique* qui provient du maintien dans l'échange de l'ensemble des éléments qui ont contribué à l'émergence du savoir considéré, le processus d'institutionnalisation ne parvenant pas à ce que s'opère le tri entre ce qui devra être oublié de ce qui devra être retenu (Cherel, 2005) ;
- la *cécité didactique* des situations d'enseignement qui fait état de la disparition des conditions nécessaires à la transmission des savoirs et l'enrôlement des élèves dans une pratique mathématique socialement et culturellement définie (Roiné, 2009).

L'identification de tels phénomènes conduit ainsi à dépasser la vision réductrice qui attribue à l'élève la seule responsabilité de ses difficultés d'apprentissage : elle constitue de fait un premier apport de la ddm à l'Es.

Giroux (op.cit.) fait toutefois justement remarquer que la description de ces phénomènes peut avoir insidieusement tendance, par effet de balancier, à faire porter le poids de la responsabilité des difficultés sur le manque de compétences professionnelles des enseignants. Fort heureusement, la seconde catégorie¹³ de travaux de ddm menés dans le cadre de l'Es (Perrin-Glorian, 1993 ; Bloch & Salin, 2004 ; Salin, 2007 ; Bloch, 2008, 2013) montre que ce serait aller vite en besogne que de l'affirmer, puisque ceux-ci ont précisément mis en évidence les difficultés que l'on rencontre à mettre en œuvre, dans le cadre de l'Es, des situations éprouvées dans l'Eo. Or, ces difficultés ne concernent ni seulement les élèves, ni seulement l'enseignant, puisque c'est l'ensemble de dynamique de l'interaction qui s'en trouve affectée, ce que Conne (2003) proposera de décrire, on le verra plus avant, en termes de *pertes* et de *prises de contrôles*.

Ainsi, Bloch & Salin (2004) évoquent-elles des difficultés dans la dévolution (compréhension de la consigne, difficultés pour les élèves à se représenter la tâche, difficultés pour l'enseignant à effectuer des relances adaptées), dans la conduite des situations (non-maîtrise des savoirs antérieurs, validation approximative des résultats vue comme suffisante), dans la décontextualisation (difficultés du passage de l'action à la formulation, difficultés dans la formalisation où les situations qui l'ont précédées ne jouent plus, pour les élèves comme pour le maître, leur rôle de référence) ou dans la différenciation (les enseignants ne pouvant "suivre" les conduites de chaque élève). Elles disent aussi que les élèves appellent souvent à changer d'activité et qu'il est donc difficile de travailler dans la durée ; qu'ils sont : « dans la demande de savoirs définitifs : on veut "avoir fait" les décimaux, la proportionnalité... et méconnaissent qu'en mathématiques, le sens est provisoire et qu'il y a toujours un sens à venir » (p.175).

De son côté, Giroux précise que : « l'analyse a priori des rapports élèves-milieu est beaucoup plus difficile à mener (dans l'Es que dans l'Eo¹⁴), parce que l'imprévisible est plus fréquent dans les milieux d'adaptation scolaire du fait de la difficulté à prévoir les connaissances avec lesquelles les élèves vont interpréter le problème soumis » (op.cit., p.67). Elle fait également mention de décalages très importants dans les interprétations mathématiques des enseignants et

¹² Dans l'Eo, la question de la référence à l'utilité dans l'enseignement des mathématiques a fait l'objet d'un mémoire de DEA en ddm (Monod, 2004).

¹³ On relèvera ici que les travaux de cette deuxième catégorie n'ont pas eu lieu dans un contexte d'enseignement spécialisé tel que celui-ci a été défini au début de l'introduction, mais dans un contexte proche qui relève en France de l' AIS (Adaptation et Intégration Scolaire) : les classes de SEGPA (Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté).

¹⁴ C'est moi qui précise.

des élèves à propos de l'enjeu de savoir d'une situation qui contribuent au désinvestissement cognitif et mathématique de certains élèves.

Ces trois auteures insistent en conséquence sur la nécessité de conduire des recherches dans l'Es pour appréhender ces difficultés. On trouve ainsi des propositions originales tant chez Bloch et Salin, que chez Giroux, propositions qui peuvent être considérées comme un second apport de la ddm à l'Es¹⁵. Les premières envisagent notamment le *retournement de situations* par l'usage d'ostensifs adaptés qui lui serviront de levier pour favoriser le processus de décontextualisation, ainsi que le recours à une méthodologie empruntée à Esmenjaud-Genestoux (2000) pour examiner et contrôler le *partage des responsabilités* au sein de l'interaction entre l'enseignant et les élèves (cf. les propos de Lemoyne, consignés plus haut). Alors que Giroux (op.cit.) définit deux grandes catégories de *repères* pour conduire et développer des situations dans le contexte de l'Es : il s'agit d'une part : « d'élargir le caractère d'utilité des connaissances (au sens de Conne, 1992) chez les élèves » (p.77), en étayant le processus de dévolution, en diversifiant les supports et les situations et en arrimant le processus d'institutionnalisation sur des environnements didactiques mathématisés ; et d'autre part : « de maintenir des enjeux mathématiques forts pour soutenir l'interaction élèves-milieu et leur engagement cognitif » (p.78), en allégeant le milieu de ce qui est susceptible de distraire les élèves, en le dotant de rétroactions rapides et explicites à leurs yeux et en considérant les enjeux de savoirs imprévus rencontrés par les élèves pour les enrôler dans l'échange didactique.

Apports l'enseignement spécialisé à la didactique des mathématiques

Au lieu d'utiliser la ddm pour explorer le terrain de l'Es, il est également possible d'envisager la perspective inverse, c'est-à-dire de considérer les difficultés d'enseignement et d'apprentissage que l'on rencontre dans ce contexte, comme autant d'opportunités offertes aux chercheurs en ddm pour interroger les théories qu'ils élaborent. C'est ce que suggérait déjà en 1993, le titre de l'imposante étude réalisée par Perrin Glorian dans des classes "faibles", à savoir que l'enseignement des mathématiques qui y avait cours soulevait d'importantes questions didactiques. De fait, les difficultés qu'elle avait rencontrées pour institutionnaliser des connaissances au terme d'une suite de séquences d'enseignement dans ce contexte venaient questionner d'un point de vue général le rôle et surtout la place de l'institutionnalisation dans le déroulement de l'enseignement des mathématiques¹⁶ :

Ceci nous amène à considérer aussi l'institutionnalisation comme un processus qui se déroule tout au long de l'enseignement, un moteur dans l'avancement du contrat didactique et non comme une phase en fin de processus où le maître fait son cours. L'institutionnalisation commence pour nous dès le tout début de la dévolution puisqu'il faut déjà que le maître donne à l'élève, s'il ne l'a pas, le projet d'acquérir ces connaissances, d'où l'imbrication des processus de dévolution et d'institutionnalisation qui sont, dans une certaine mesure, contemporains. (Perrin-Glorian, 1993, pp.82-83)

Dans le même ordre d'idées, les difficultés rencontrées par Salin (2007) dans le contexte des Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté (SEGPA) pour asseoir une situation a-didactique sur des connaissances construites antérieurement et pour favoriser sa dévolution invitent à s'interroger sur la possibilité d'inclure les connaissances préalables des élèves dans un milieu didactique donné, d'y choisir des éléments qui jouent effectivement le rôle de rétroactions ou encore de s'assurer que les connaissances développées par les élèves soient bel et bien celles qui étaient prévues dans la situation didactique. Elles viennent également questionner la place et

¹⁵ Précisons à ce titre qu'il ne s'agit pas d'un apport en termes d'innovation, mais bien en vue d'accroître la compréhension de ce qui se passe dans les interactions et d'où se développent les phénomènes préalablement identifiés. Les auteures insistent sur le fait de devoir éprouver leurs propositions à la contingence de l'Es.

¹⁶ Un questionnement qui a été développé par Rouchier (1991) dans sa thèse.

le rôle de l'enseignant dans le processus de dévolution qui, sous certaines conditions, est invité, contrairement à ce qui a souvent lieu dans les conditions de l'Eo, à y prendre une part active :

Dans le modèle des situations a-didactiques, il est sous-entendu que c'est l'élève lui-même qui modifie ses décisions pour s'adapter à la situation objective et que c'est aussi de manière autonome qu'il se situe dans la situation d'apprentissage. Nous faisons l'hypothèse que ces conditions sont trop drastiques¹⁷ et que le professeur doit intervenir dans la situation de référence, si aucun élève ne fait de proposition adéquate, en "montrant" ce qui est à faire. (ibid., p.205)

Ce sont également des difficultés rencontrées dans le contexte de l'Es qui ont mené Giroux (2008) à développer l'idée de *conduite atypique* révélant les rencontres inattendues que certains élèves réalisent, dans l'interaction, avec des éléments de savoir. Définies selon trois critères - se présenter en nombre marginal / ne pas correspondre aux consignes et contraintes de la situation / engager de la part de l'élève des connaissances liées à un enjeu mathématiques de la situation effective -, ces conduites échappent à l'analyse a priori d'une situation. Elles rappellent irrémédiablement au chercheur que : « si chaque situation cible un savoir particulier, elle ne peut par ailleurs l'isoler et faire l'économie de coordinations de connaissances et savoirs » (op.cit., p.79). De fait, elles tendent à révéler le fond mathématique effectif sur lesquels se nouent, à propos d'une situation donnée, les interactions qui s'engagent entre l'enseignant et les élèves. Giroux propose alors que l'enseignement en Es sache :

se faire opportuniste pour prendre en compte ce qui se joue en situation effective entre l'élève et le milieu et capturer des enjeux sensibles, bien que non prévus, qui favorisent la coordination des connaissances en situation (ibid., p.79)

Si les propos qui précèdent donnent trois exemples de ce que le terrain de l'Es est susceptible d'apporter à la ddm, c'est bien aussi et surtout dans cette perspective qu'au sein du groupe ddmes, nous travaillons. Nous l'avons notamment présentée et défendue en 2003 au Séminaire national de ddm de Paris, lors d'un exposé collectif très explicitement intitulé : « L'enseignement spécialisé, un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence » (Conne & al., 2004). A cette occasion, nous avons pris l'exemple du concept de *milieu didactique* pour montrer comment le terrain de l'Es nous conduisait à nous en emparer selon une signification sensiblement différente à celle qui lui était donnée dans le cadre de la TDS (Brousseau, 1998) où il est attendu que :

Pour que les interactions avec le milieu soient productrices de connaissances nouvelles dans un processus d'adaptation, il faut que l'élève puisse engager les connaissances dont il dispose pour contrôler le milieu. (Salin, 2002, p.114)

Devant les difficultés que nous pouvions rencontrer à instaurer des interactions élève-milieu un tant soit peu consistantes, nous avons en effet pris le parti, au sein du groupe, d'y engager dans un premier temps nos propres connaissances. Nous avons ainsi choisi un milieu particulier¹⁸ pour le faire et avons défini un certain nombre de tâches pour en conduire l'exploration. Très vite, nous nous sommes rendu compte que celle-ci produisait de l'inattendu, révélant des savoirs et des relations entre savoirs dont nous n'avions a priori pas supposé l'existence. La perspective envisagée dans la TSD s'était donc inversée : au lieu de partir d'un savoir pour constituer un milieu susceptible de le représenter, nous partions d'un milieu afin de dénicher les savoirs dont ce milieu se constituait.

Dès lors, nous avons décidé de poursuivre l'exploration amorcée avec des élèves de l'Es dans le cadre d'entretiens que nous menions en duo. L'idée était de les amener à interagir avec le milieu

¹⁷ Dans les classes des SEGPA, sous-entendu.

¹⁸ Il s'agissait d'une activité de géométrie tirée des moyens d'enseignement romands, intitulée « Puzzle » (Chastellain & Jaquet, 2001a, pp.181-183).

en question, selon les tâches que nous nous étions définies pour le faire au préalable, pour apprécier dans quelle mesure ils étaient amenés à faire des découvertes semblables aux nôtres et que, possiblement, ils nous amènent à en établir de nouvelles. Nous pensions en effet que les élèves de l'Es, peut-être plus que les autres, ne s'en laisseraient pas compter par le milieu. Ainsi leurs hésitations, leurs étonnements et leurs erreurs nous donneraient des informations sur ce milieu, c'est-à-dire qu'ils contribueraient à nous enseigner du milieu, plutôt que ce soit le milieu qui soit censé leur faire apprendre ; le premier n'excluant pas l'autre évidemment, mais en sachant que c'est l'interprétation qui en serait faite qui changerait¹⁹. Nous rejoignons en fait ici l'idée de *conduite atypique* proposée par Giroux (op.cit.), lorsqu'elle tend à utiliser ces conduites comme vecteurs d'appréhension et d'interprétation du milieu.

Ce travail d'exploration a eu comme autre conséquence de nous amener à mettre au point un mode d'interactions original avec les élèves de l'Es que nous avons dénommé *jeu de tâches* (Favre, 2008). Il reprenait notre démarche en déterminant, vis-à-vis d'un milieu particulier, un certain nombre de tâches qu'il s'agirait ensuite de jouer, comme il est possible de le faire avec les cartes d'un jeu, dans l'interaction avec les élèves, en fonction de son évolution. D'usage très souple, s'appuyant sur les *effets de surprise* (Conne, 2004b) plutôt que sur la gradation des réussites, ce mode de faire s'est avéré très approprié à la conduite de situations dans le contexte de l'Es et nous l'avons beaucoup utilisé depuis lors que ce soit dans l'Es (Auckenthaler, 2004 ; Conne, 2007, 2008 ; Favre, 2009, 2012b, 2013) ou dans l'Eo (Del Notaro, 2011, 2013 ; Del Notaro & Floris, 2005, 2011). En ce sens, il peut être considéré comme un autre apport à l'Es et à l'Eo de la confrontation ddm-Es.

Une thèse en didactique des mathématiques dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée

La perspective de réaliser une thèse en ddm dans le contexte de la Fps provient d'une bifurcation importante dans mon parcours professionnel. En 2009 en effet, après plus d'une vingtaine d'années passées dans le contexte de l'Es et la formation des enseignants spécialisés, j'ai troqué ma fonction de professeur-formateur à la Haute école pédagogique de Lausanne (HEPL) contre celle de responsable pédagogique au Centre de formation professionnelle et sociale (CFPS) du Château de Seedorf à Noréaz, dans le canton de Fribourg. L'occasion était belle en effet de partir à la rencontre des mathématiques à l'œuvre au sein d'un monde dont j'ignorais à peu près tout, soit celui qui jouxte l'Es dans son aval, et dans lequel les élèves qui en sortent, au terme de leurs années d'école obligatoire, ont de bonnes chances d'aboutir.

A mon arrivée au CFPS, il n'était pourtant nullement question d'y faire une thèse. Ce n'est que très progressivement (comme on pourra bien le comprendre au chapitre 1), à la suite des premières investigations que j'y ai accomplies à destination du groupe ddmes, que ce vaste projet a fait jour. Considérant les enrichissements que les travaux ayant pris la ddm comme paradigme théorique de référence et l'Es comme espace d'exploration expérimental avaient pu mutuellement s'apporter, il était raisonnable de penser qu'on pouvait attendre beaucoup d'une mise en connexion de la ddm avec le terrain de la Fps. Ce d'autant que ce dernier s'apparentait vierge de toute étude en ddm, puisque, si des travaux antérieurs en ddm (Bessot & al., 1993 ; Bessot & Eberhard, 1995) ou plus actuels (comme ceux²⁰ présentés et discutés lors du congrès EMF 2012) avaient bel et bien pris pour cadre le contexte de la formation professionnelle, aucun chercheur en ddm ne s'était à ce jour aventuré à explorer celui de la Fps.

¹⁹ L'intérêt d'une telle manière de procéder résidait aussi dans la possibilité offerte de se laisser distraire de l'aspect réussite, non-réussite des tâches, sachant que les conduites - adéquates ou non-adéquates - des élèves ne seraient pas attribuées à leurs performances, mais interprétées en référence au milieu, comme des produits du milieu.

²⁰ Les textes des participants au groupe de travail 5 intitulé : « Enseignement et apprentissage des mathématiques : interactions avec les autres disciplines scolaires et les pratiques professionnelles » se trouvent dans les actes du congrès (Dorier & Coutat, 2012).

Il y avait donc tout à découvrir des mathématiques dans ce contexte, l'élaboration d'une thèse relevant de surcroît d'un enjeu manifeste pour les trois mondes - l'Es, la Fps et la ddm - qu'elle allait contribuer à réunir. En ce qui concerne l'Es tout d'abord, il serait certainement possible d'envisager (voire d'ajuster) l'enseignement des mathématiques que l'on y donne, en fonction des mathématiques effectives que l'on pratique dans la Fps et non pas seulement au vu des représentations que l'on s'en fait, sachant que cet enseignement, plus on approche du terme de la scolarité, est souvent considéré comme propédeutique à l'entrée dans la formation professionnelle. Pour la Fps ensuite, l'approche systémique de la ddm, fondée sur l'examen des savoirs, devrait permettre d'éclairer, de façon originale, les pratiques des mathématiques que l'on y rencontre, en soulevant des questions, en identifiant des phénomènes, voire en esquisant des ouvertures. Pour la ddm enfin, il serait possible d'éprouver la pertinence des concepts théoriques utilisés pour procéder au repérage et à l'analyse des mathématiques dans la Fps et d'appréhender, pour mieux le comprendre, le fonctionnement des savoirs au cœur des interactions.

Construction de la thèse

La thèse est construite en deux parties distinctes. La première partie vise à montrer comment je m'y suis pris, de la position interne de responsable pédagogique du centre qui était la mienne, pour appréhender les mathématiques dans la Fps et caractériser leur fonctionnement. Cette partie comprend quatre chapitres.

- Le chapitre 1 présente le CFPS du Château de Seedorf et la formation globale qui est dispensée aux apprenties²¹. Il soulève quelques premières questions relatives aux mathématiques à l'œuvre dans ce contexte, en s'appuyant notamment sur la narration d'une interaction avec des apprenties, et met en évidence les spécificités de la démarche accomplie.
- Les chapitres 2 et 3 forment le cadre théorique à partir duquel les analyses de la partie expérimentale ont été produites. Le chapitre 2 détermine les trois niveaux d'investigation qui ont été examinés et définit les outils conceptuels extraits du champ de la ddm qui s'y rapportent, précisant à chaque fois l'utilisation spécifique qui en a été faite dans la thèse. En complément, le chapitre 3 vise à circonscrire, à partir des travaux de Rouché (1992, 1998, 2006), le champ des savoirs mathématiques qui ont été l'enjeu des interactions, par l'élaboration de deux constructions notionnelles dont il est également précisé l'usage.
- Le chapitre 4 décrit le dispositif expérimental conçu pour récolter les données. Il commence par qualifier, d'un point de vue théorique, le principal outil de recherche - la narration - auquel il a été fait recours pour conserver la trace des interactions menées avec les apprenties. Il présente ensuite, d'un point de vue méthodologique, les cinq investigations produites de 2009 à 2013 au CFPS, qui ont permis de réaliser cette récolte de données.

La seconde partie vise à rendre compte des mathématiques que l'on rencontre et que l'on pratique dans la Fps et de la compréhension qui a pu en être établie. Elle se compose de cinq nouveaux chapitres qui correspondent chacun à une investigation spécifique.

- Le chapitre 5 examine les mathématiques que l'on trouve dans les documents qui président à la formation des apprenties au CFPS.
- Les chapitres 6, tout comme les chapitres 8 et 9, s'intéressent aux *investissements de savoirs* et aux *interactions de connaissances* (Conne, 2003) qui sont advenus lors des cours de mathématiques donnés aux apprenties sous la forme d'un soutien individuel (aux chapitres 6 et 9) et en collectif dans l'enseignement des branches professionnelles (au chapitre 8).

²¹ Tout au long des chapitres, c'est le féminin du substantif qui sera employé, étant donné que le CFPS, à quelques rares exceptions, n'accueille que des apprenties en formation.

- Le chapitre 7 propose quant à lui une analyse détaillée des résultats relatifs aux épreuves de mathématiques qui, chaque année au CFPS, sont soumises aux stagiaires avant leur entrée en formation.

Une conclusion ponctue enfin l'ensemble du travail mené, mettant en exergue les principaux résultats obtenus concernant l'étude des mathématiques et de leur fonctionnement dans la Fps, discutant de l'instrument de recherche - la narration - utilisé pour collecter et rendre compte des interactions et déclinant les perspectives ouvertes à l'encontre de la Fps, l'Es et la ddm.

1^{ÈRE} PARTIE

APPRÉHENDER, DE L'INTERNE, LES MATHÉMATIQUES ET LEUR FONCTIONNEMENT DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPÉCIALISÉE

CHAPITRE 1 PROLÉGOMÈNES

INTRODUCTION

La première partie du chapitre présente le CFPS du Château de Seedorf et définit l'idée de *formation globale* donnée aux apprenties qui sous-tend l'organisation du centre dans son ensemble. Elle décrit les trois principaux lieux dans lesquels cette formation se réalise, en précisant les fonctions et les responsabilités des personnes qui, dans chacun des lieux, y participent. Les différentes étapes de la formation y sont également présentées de façon à apporter une vision globale de son déroulement temporel. Les deuxième et troisième parties du chapitre rendent compte des premières questions au sujet des mathématiques et de leur fonctionnement que je me suis posées à mon arrivée au CFPS et font part des échanges que j'ai entretenus avec les apprenties et avec mes nouveaux collègues, afin d'y apporter quelques premières éléments de réponse. La narration d'une interaction avec des apprenties augure déjà la manière de récolter et d'interpréter des données à laquelle il sera fait recours dans la partie expérimentale de la thèse. La quatrième partie du chapitre relate comment, progressivement, l'idée de réaliser une thèse en ddm dans le contexte de la Fps a fait jour. Elle met en évidence les spécificités de la démarche engagée, liées au fait que c'est d'une position interne, soit celle de responsable pédagogique du CFPS, que celle-ci a été conçue et réalisée.

LA FORMATION DES APPRENTIES AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF

Le CFPS du Château de Seedorf est un centre de formation professionnelle spécialisé qui accueille environ nonante apprenties provenant de toute la Suisse Romande. Ces apprenties qui, pour des raisons diverses²², ne peuvent suivre une formation professionnelle ordinaire dans l'économie de marché, bénéficient de mesures de l'Assurance Invalidité²³(AI).

La mission du CFPS à l'égard des apprenties est de contribuer à la réussite de leur formation et d'œuvrer à son terme à leur insertion professionnelle dans le marché du travail.

Le CFPS s'attache toutefois à proposer une formation qui dépasse les seuls aspects professionnels. Il œuvre en effet à une *formation globale* des apprenties, c'est-à-dire à une formation qui leur permette non seulement d'apprendre un métier, mais qui participe conjointement à l'évolution de leurs compétences personnelles et sociales, susceptibles de favoriser une insertion sociétale (et non seulement professionnelle) ultérieure adéquate²⁴. La formation globale des apprenties au CFPS se déroule essentiellement dans trois lieux

²² A ce propos, Moulin (2015) précise que :

L'une des caractéristiques communes mais évidemment à des degrés divers, à nombre de jeunes filles placées à Seedorf est une expérience de vie souvent chaotique tant sur les plans personnels et familiaux que scolaires. Ainsi sur le plan personnel, elles n'ont pu, bien souvent, bénéficier d'un environnement sécurisant et d'un parcours de vie qui auraient dû leur permettre de se construire une identité équilibrée.

[...] Sur le plan scolaire, les expériences d'apprentissage ont souvent été synonymes d'échec. [...] Nous constatons ainsi, chez nombre de ces jeunes apprenties, ce que les spécialistes de l'apprentissage appellent l'impuissance apprise, convaincues qu'elles sont de leur nullité et de leur incapacité à réussir un apprentissage. (p.14)

²³ En tant qu'organe financeur de la formation, les Offices de l'Assurance Invalidité (OAI) des différents cantons romands constituent les uniques "pourvoyeurs" des apprenties vis-à-vis du centre, dans la mesure où ce sont eux qui détiennent, en toute exclusivité, le mandat d'envoyer ou non des personnes en formation au CFPS. Conformément à la Loi fédérale sur l'assurance-invalidité (LAI) du 19 juin 1959 (état au 1^{er} janvier 2014), les critères qui définissent l'invalidité sont publics : « La notion d'invalidité comprend trois éléments : un élément médical, soit une atteinte à la santé physique ou mentale ; un élément économique, soit, pour les jeunes, une limitation de leurs capacités d'apprentissage et donc un risque de voir leur capacité de gain diminuée à moyen et long terme ; un élément causal, soit un rapport de causalité entre l'atteinte à la santé et la diminution de la capacité de gain » (Imperiale & Lepori, 2013). En revanche, ceux qui participent à l'orientation d'un jeune dans un centre spécialisé restent de l'appréciation privée de l'OAI.

²⁴ C'est d'ici que provient le "s" qui ponctue l'abréviation CFPS, lequel signifie "social" et non pas "spécialisé".

distincts²⁵ qui constituent, dans la structure d'ensemble du centre, des départements : le *département professionnel*, le *département socialisation* et le *département enseignement*.

Le département professionnel du CFPS du Château de Seedorf

Le département professionnel est constitué de sept secteurs dans lesquels les apprenties peuvent accomplir une formation : la blanchisserie, le commerce de détail, la confection, la cuisine, l'intendance, l'horticulture et la restauration. Chaque secteur est géré par des maîtres socio-professionnels (MSP) qui, dans leur majorité, sont des personnes au bénéfice d'une première formation et qui ont acquis une expérience dans leur métier de base, puis qui ont suivi une formation seconde dans le domaine social, ce qui les accrédite de ce double statut de maître "professionnel et social".

Au CFPS, ce sont les MSP qui ont charge d'accompagner les apprenties dans l'appropriation de leur futur métier. A cet effet, chaque secteur professionnel est conçu à la fois comme un lieu de formation et de production. Ainsi la blanchisserie lave et repasse l'ensemble du linge qui est utilisé dans le cadre professionnel du centre, mais propose également ses services à l'intention d'une clientèle privée. La confection répare des tissus et apporte des retouches aux habits employés par le personnel et les apprenties du centre, mais conçoit aussi des objets, des vêtements et des costumes qui sont vendus à l'interne, comme à l'externe du centre. La cuisine prépare chaque jour les repas de midi des apprenties, alors que l'intendance en assure le service, s'occupant également de l'agencement et du nettoyage des locaux du CFPS. Un centre conférences et de séminaires pouvant accueillir des groupes en formation, des groupes de rencontres, des forums et des expositions offre aussi la possibilité à ces deux secteurs d'interagir avec une clientèle privée. L'horticulture fournit des légumes à la cuisine du centre, mais produit également des plants, des fleurs et effectue des coupes et des livraisons de bois pour des clients extérieurs. La formation en restauration se réalise dans un restaurant, sis à une trentaine de kilomètres de Seedorf et entièrement géré par le CFPS ; il constitue également un lieu de stage pour les apprenties en cuisine et en intendance. La formation du commerce de détail enfin se déroule dans trois succursales d'une importante société de la grande distribution en Suisse.

Cette dialectique formation-production délègue aux maîtres socio-professionnels une double responsabilité au sein de leur secteur, à savoir la gestion de ce dernier comme celui d'une petite entreprise et la formation des apprenties qui se voit ainsi enrôlée dans son développement. Elle vise ainsi à créer des conditions de formation duale²⁶ qui s'apparentent à celles qui ont lieu dans l'économie de marché et ce, en complémentarité avec les stages que les apprenties ont l'occasion d'y réaliser tout au long de leur apprentissage.

²⁵ D'autres services participent au fonctionnement du CFPS comme le service d'admission-orientation-placement, le service de soutien psychologique et d'animation, le service administratif et le service technique. Ils ne sont pas décrits ici dans les détails, afin de ne pas surcharger les propos, mais le lecteur intéressé pourra trouver des informations les concernant sur le site du CFPS du château de Seedorf : <http://www.cfps-seedorf.ch>.

²⁶ En Suisse, la formation professionnelle initiale des apprentis peut s'accomplir selon deux modalités distinctes :

- en *entreprise* (ou en *dual*), où les apprentis signent un contrat d'apprentissage avec un employeur et sont directement intégrés dans le monde du travail. Durant leur formation, ils reçoivent un salaire et ont au minimum cinq semaines de vacances. Un à deux jours par semaine, ils suivent des cours dans une école professionnelle, où ils apprennent les bases théoriques de leur futur métier et améliorent leur culture générale.
- en *école des métiers*, où les jeunes en formation restent dans un cadre scolaire. Ils suivent des cours pratiques et théoriques à l'école et font des stages en entreprise. Ils ne touchent pas de salaire, mais ont des vacances scolaires. Ces écoles ne forment pas à tous les métiers. (Antille & al., 2011, p.5)

La formation professionnelle au CFPS s'apparente à la première modalité, même si chaque secteur professionnel n'est pas soumis aux mêmes contraintes financières qu'une entreprise, étant donné que le CFPS, dans son ensemble, est financé par l'AI. Les apprenties y reçoivent également un salaire sous la forme de primes d'encouragement versées par le centre avant l'âge de dix-huit ans, puis sous la forme d'indemnités journalières, versées directement par l'AI, une fois qu'elles ont atteint leur majorité ; elles bénéficient en outre de sept semaines de vacances au lieu des cinq statutaires.

Le département socialisation du CFPS du Château de Seedorf

Le département socialisation du CFPS se scinde en deux entités distinctes, comprenant le secteur "éducation sociale" et le secteur "formation sociale" qui sont tous deux gérés par des éducateurs. L'action de l'ensemble du département participe à la construction de l'identité personnelle et sociale des apprenties, c'est-à-dire à leur intégration sociale et leur épanouissement personnel.

Le secteur éducation sociale concerne tout ce qui touche à la vie en internat des apprenties, laquelle se déroule en principe dans des pavillons à l'interne du CFPS en première et deuxième année de formation et dans deux maisons à proximité du centre ou dans des appartements en ville de Fribourg en troisième, voire en quatrième année²⁷. Les éducateurs du secteur éducation sociale interviennent essentiellement auprès des apprenties en dehors des heures de travail, et donc principalement en soirée. Ils les accompagnent dans la gestion de leur quotidien, ce qui couvre un ensemble de choses très variées, partant de la préparation d'un repas ou du nettoyage d'une chambre, passant par la réalisation d'un projet comme la préparation de l'examen pour décrocher son permis de conduire et allant jusqu'à la recherche d'un appartement ou la rédaction d'une demande de curatelle en fin de formation. Ils apportent aux apprenties un soutien personnalisé à l'occasion des situations difficiles qu'elles rencontrent, par le biais de moments d'écoute et d'échanges individuels ou en groupes, voire à leur mise en perspective dans le cadre d'activités artistiques. Ils œuvrent à leur intégration dans la vie communautaire au sein du centre par l'élaboration et le respect de règles de vie commune. Ce sont également les éducateurs du secteur éducation sociale qui sont chargés du travail en réseau avec les familles et/ou avec les répondants légaux des apprenties.

Le secteur formation sociale propose en journée²⁸ aux apprenties des activités dans trois domaines spécifiques. Le premier domaine, intitulé "adolescence-prévention-intégration", se décline en cinq champs qui caractérisent cette période particulière de la vie des apprenties : "découvertes et rencontres, ancrage et identité, prévention et santé, féminité et intimité, habilités sociales". En dernière année de formation, les éducateurs de ce domaine invitent les apprenties à l'élaboration et la réalisation d'un projet, qui prend généralement la forme d'un voyage, et qui vise à donner corps au travail entrepris au travers des cinq champs considérés. Le deuxième domaine, appelé "éducation nutritionnelle", mène une réflexion générale autour de l'alimentation, par le biais de la confection, avec les apprenties, de recettes et de repas équilibrés. Il profite pour le faire de l'assez incroyable diversité - vingt-huit pays représentés en juin 2014 - des origines culturelles des apprenties. Le troisième domaine enfin, dénommé "éducation physique et sportive", invite les apprenties à explorer diverses activités sportives, afin qu'elles soient en mesure d'éprouver celles où elles se sentent le plus à l'aise et puissent y prendre du plaisir. Il s'inscrit de la sorte comme un complément du point de vue corporel aux activités menées dans le cadre de l'éducation nutritionnelle.

Le département enseignement du CFPS du Château de Seedorf

Le département enseignement du CFPS est le plus petit des trois départements qui concourent à la formation globale des apprenties. Il est géré et animé par des enseignants spécialisés. Il

²⁷ L'idée sous-jacente est de constituer une progression signifiante de l'évolution personnelle et sociale des apprenties lui accordant de plus en plus de responsabilités et d'autonomie. Notons également que quelques apprenties vivant à proximité du centre bénéficient d'une mesure d'externat.

²⁸ Ces activités s'intègrent dans l'horaire des apprenties et diminuent d'autant le temps qu'elles passent dans leur secteur professionnel. La situation peut apparaître paradoxale pour des apprenties considérées comme en difficulté d'apprentissage et qui, a priori, devraient avoir besoin de plus de temps dans le secteur pour se former tout aussi bien que les autres. Elle se justifie toutefois, dans le cadre du CFPS, par la volonté de leur apporter une formation globale. On retrouve des situations similaires dans bon nombre d'institutions de l'Es où le temps d'enseignement se trouve réduit vis-à-vis de celui qui a cours dans l'Eo. Pour une étude approfondie de ces questions temporelles dans l'Es, on pourra se reporter à Favre (1997, 2004a).

participe, à raison de quatre heures de cours hebdomadaires, à la formation en culture générale des apprenties de première année (qui est une année d'orientation et d'initiation au travail préparant l'entrée d'apprentissage, voir plus avant). A partir de la deuxième année d'apprentissage, les enseignants spécialisés dispensent également quatre heures de cours de culture de générale par semaine à toutes les apprenties qui ne rejoignent pas une école professionnelle pour y suivre leurs cours. Ils proposent également un soutien sous forme d'appui individualisé ou en petits groupes à celles qui en manifestent le besoin.

Le département enseignement s'attelle aussi, dès la deuxième année de formation, dans le cadre de cours spécifiques donnés à raison de deux heures chaque semaine, au développement de stratégies d'apprentissage, susceptibles d'aider les apprenties à s'approprier les contenus de formation de façon efficace. Les enseignants spécialisés s'appuient pour le faire, en fonction de la formation spécifique qui est la leur, sur des méthodes d'apprentissage apparentées au courant d'*éducation cognitive* (Büchel, 1995 ; Coulet, 2003).

Les différentes étapes de la formation des apprenties au CFPS

Le tout premier pas du parcours de formation d'une apprentie au CFPS prend la forme d'une visite qui lui a été octroyée par l'OAI de son canton de résidence. Elle lui permet, avec le concours des répondants légaux qui l'accompagnent, de se faire une première idée générale du CFPS et de son fonctionnement. Dans la plupart des cas, cette visite débouche sur l'organisation d'un stage préalable, d'une durée de deux semaines, qui a généralement lieu durant l'année qui précède l'entrée en formation²⁹. Le stage est l'occasion, pour la future apprentie comme pour les professionnels du centre, d'apprécier dans quelle mesure le CFPS constitue un projet de formation approprié pour elle, la décision formelle d'entrée revenant, dans tous les cas de figure, à l'OAI mandataire.

Au CFPS, la première année de formation est une année d'orientation et de préparation à l'entrée en apprentissage qui se déroule en deux temps : la phase d'orientation qui vise à définir, parmi les sept secteurs professionnels à choix, celui qui paraît le plus adéquat en regard des souhaits et des talents de l'apprentie et des disponibilités, en termes de places, de chaque secteur professionnel ; et la phase d'initiation au travail qui tend à doter chaque apprentie des habiletés propres à favoriser son entrée en apprentissage. Elle permet également de déterminer le type de formation que l'apprentie sera en mesure de suivre, en tenant compte de ses compétences professionnelles et scolaires et de la spécificité des métiers considérés. A l'exception du secteur de la blanchisserie, il est en effet possible, pour chaque métier considéré, d'accomplir trois types de formations distinctes. La plus courue, parmi celles qui sont suivies par les apprenties au CFPS, est une formation professionnelle d'une durée de deux ans qui débouche à son terme sur l'obtention d'une attestation fédérale de formation professionnelle (AFP). Cette formation, qui s'adresse, en principe, à des jeunes "ayant des aptitudes essentiellement pratiques" (SEFRI, 2014), a été mise en place, dans bon nombre de professions³⁰, depuis l'entrée en vigueur, le 1^{er} janvier 2004, de la nouvelle loi fédérale sur la formation professionnelle (LFPr). Elle vient se substituer à l'ancienne formation élémentaire (FE) qui reste encore en cours au CFPS, jusqu'en juillet 2015, dans les secteurs de la blanchisserie et de la confection, pour cinq apprenties qui la terminent.

Le deuxième type de formation qu'il est possible d'entreprendre au CFPS est une formation professionnelle d'une durée de trois ans qui débouche sur l'obtention d'un certificat fédéral de

²⁹ Cela signifie que durant la quasi-totalité de l'année scolaire (de septembre à juin), des groupes de trois à quatre stagiaires fréquentent le CFPS pour une durée de deux semaines, en vue d'y être engagées l'année suivante.

³⁰ La blanchisserie fait exception, les acteurs de la branche ayant renoncé à créer une formation de ce type. Le CFPS l'a donc remplacée par la mise sur pied d'une formation pratique, d'une durée de deux ans, sanctionnée à son terme par la délivrance d'une attestation de l'Association suisse des entreprises d'entretien des textiles (ASET).

capacité (CFC). En raison des exigences élevées de la formation CFC, tant du point de vue des compétences pratiques, que de celui des cours professionnels, celle-ci ne concerne qu'une petite minorité d'apprenties du CFPS : une à deux apprenties au maximum par secteur (six au total, en juin 2015). Enfin, un troisième type de formation est proposé aux apprenties qui, pour des raisons essentiellement scolaires, ne peuvent effectuer de formation de types AFP ou CFC. Il s'agit d'une formation pratique, d'une durée d'une année, renouvelable une fois³¹, ponctuée par une attestation de formation pratique (AFPra), délivrée par le CFPS. Leur nombre peut varier sensiblement d'une année à l'autre dans un secteur particulier.

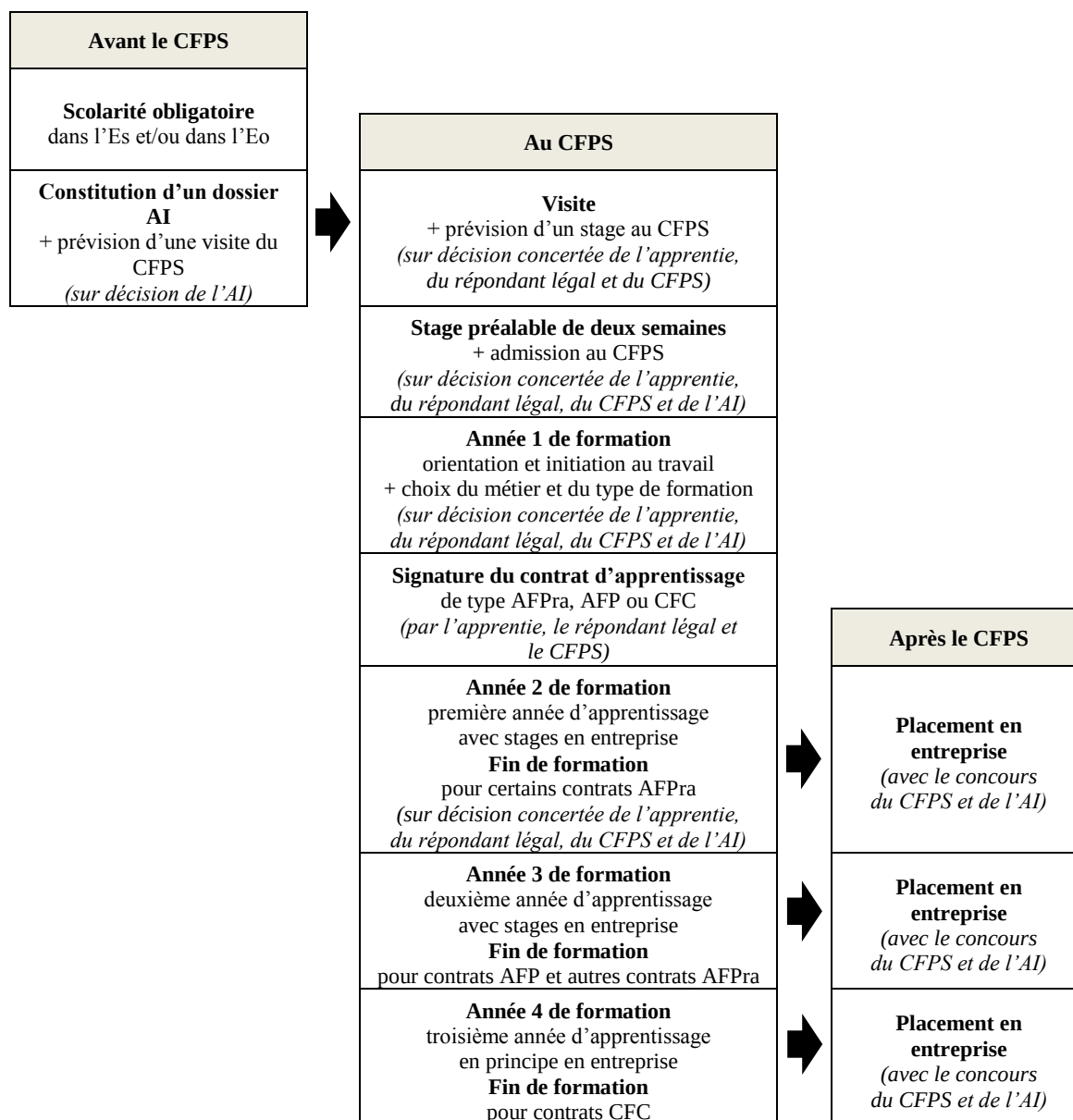


Figure n°1 - Les différentes étapes de la formation des apprenties au CFPS

La figure n°1 présente une synthèse des principales étapes de la formation d'une apprentie au CFPS³². Il montre le rôle décisionnel important joué par l'AI tout au long de ce cursus. On

³¹ La décision dépend également de l'OAI du canton de résidence de l'apprentie. Elle est prise, en principe, sur la base d'une appréciation de ses perspectives de progression lors de cette année supplémentaire, susceptibles d'augmenter ses chances d'insertion dans le marché du travail.

³² Le tableau ne fait en revanche pas mention des interruptions de formation qui peuvent se produire, parfois déjà dans l'année 1 de formation, sur décision de l'apprentie qui renonce à poursuivre son parcours au CFPS ou sur décision de l'AI

remarque également que le parcours de chaque apprentie est en tout point pareil jusqu'à la fin de la première année de formation qui se ponctue par la signature du contrat d'apprentissage. Ce parcours varie par contre sensiblement par la suite selon le type de formation entreprise, tant du point de vue de ses contenus que de sa durée : un à deux ans pour une formation AFPr, deux ans pour une formation AFP et trois ans pour une formation CFC.

PREMIÈRES QUESTIONS, PREMIÈRES RÉFLEXIONS

C'est dans la continuité des réflexions que j'avais menées jusqu'ici au sujet de l'enseignement des mathématiques dans le contexte de l'Es, que je suis arrivé au CFPS du Château de Seedorf fort d'une curiosité aiguisée par les observations et les expériences qu'il allait être possible d'y réaliser, me considérant comme très chanceux de découvrir cet univers que peu d'acteurs de l'Es, à l'exception des élèves bien sûr, ont l'occasion d'explorer en profondeur depuis l'intérieur. Imaginant qu'il existait tout à la fois des continuités et des ruptures entre le contexte de l'Es et celui la Fps, concernant les pratiques des mathématiques qui y avaient cours, je me posais alors beaucoup de questions à ce sujet.

Du point de vue des savoirs tout d'abord, je me demandais dans quelle mesure ceux qui étaient enseignés dans l'Es qui, au fur et à mesure que la perspective d'un retour dans l'Eo s'éloigne, le sont de plus en plus en fonction des présumés besoins ultérieurs des élèves, l'étaient "vraiment" dans la Fps. Et si c'était le cas, se limitait-on à un simple réexamen de ces savoirs pour les enrôler dans des situations nouvelles ou bien enseignait-on de nouveaux savoirs, différents de ceux qui avaient cours dans l'Es ? Et si oui, pour traiter quelles situations ? Quelles implications pouvaient bien produire sur les savoirs en jeu, le fait que l'on se trouvait maintenant hors de la scolarité obligatoire et qu'il n'était dès lors plus possible d'évoquer un "après en mathématiques" pour en légitimer l'enseignement ?

Du point de vue de l'enseignement ensuite, je me demandais comment l'on pouvait s'y prendre pour enseigner les mathématiques dans la Fps, dans des conditions différentes à celles de l'Es ? Les dispositifs d'enseignement et les manières de faire allaient-ils se révéler tout à fait autres ? Allait-on assister à des phénomènes semblables à ceux qui avaient pu être identifiés dans l'Es ou en découvrirait-on au contraire des spécifiques à la Fps ? Les difficultés d'enseignement seraient-elles du même ordre ou contraire spécifiques à la Fps ? Saurait-on prendre appui sur le fait de se retrouver désormais hors de l'école pour mieux y faire face ?

Du point de vue de l'apprentissage enfin, je me demandais comment les apprenties pouvaient s'y prendre pour faire fonctionner les savoirs qui leur avaient été enseignés dans l'Es, dans les situations nouvelles que la Fps allait leur faire rencontrer ? Arrivaient-elles à mieux le faire lorsqu'elles se retrouvaient dans les secteurs professionnels que dans les cours ? Parvenaient-elles à s'approprier de nouveaux savoirs ? Quelles conséquences en découlaient sur leur formation et l'appropriation de leur métier quand ce n'était pas le cas ?

Or, contrairement à ce à quoi je pouvais m'attendre, il n'a pas été aussi facile que je le pensais d'apporter des éléments de réponses quelque peu substantiels à cet ensemble de questions. A mon arrivée au CFPS en effet, et tout au long des premiers mois où je m'y suis installé, la chose qui m'a assurément le plus étonné, c'est que, comparativement à l'importance qui leur était généralement accordée dans le cadre de l'école obligatoire (Es et Eo compris), des mathématiques, je n'en percevais pas beaucoup. Absentes des programmes de cours de culture

qui, par exemple au vu d'une progression insuffisante, décide de l'arrêter. De telles situations ne sont pas courantes, et le CFPS œuvre dans la mesure de ses possibles pour les éviter, mais elles adviennent cependant chaque année.

de générale que j'avais la responsabilité de donner aux apprenties³³, c'est principalement durant mes échanges avec mes nouveaux collègues, ainsi qu'en consultant des documents élaborés par mon prédécesseur et par les enseignants du centre que j'ai commencé à en collecter quelques traces.

Au fur et à mesure de mes découvertes des différents lieux du CFPS où l'on disait faire appel à des mathématiques, c'est leur caractère diffus - je dirais presque insaisissable - qui m'est apparu. Il était en effet difficile, du point de vue qui était le mien, d'identifier les mathématiques qui avaient effectivement cours au CFPS et, plus encore, de caractériser les pratiques qui s'y engageaient de façon effective. Il y avait bien quelques programmes de formation, détaillant certaines notions mathématiques à enseigner aux apprenties et précisant leur agencement tout au long de leur apprentissage, mais j'ai appris que certains d'entre eux avaient été abandonnés, une année après leur première mise en œuvre. Il y avait également de nombreux classeurs remplis d'activités à faire faire aux apprenties et même une salle entière au sous-sol du château remplie d'instruments de mesure de toutes sortes, mais elle n'était plus en service.

Il était tout autant difficile aussi d'appréhender les situations à composante mathématique que les apprenties pouvaient être amenées à rencontrer dans leur pratique professionnelle ou dans leur quotidien ou si et comment ces situations étaient utilisées pour leur faire apprendre des mathématiques. Il était par exemple bien malaisé de savoir si les apprenties employées de cuisine avaient des occasions effectives de réaliser des calculs de quantité d'aliments ou d'établir le prix d'un repas dans leur secteur professionnel, d'envisager comment elles pouvaient bien s'y prendre pour le faire, d'identifier les savoirs mathématiques qu'elles étaient conduites à utiliser à cette occasion, de déterminer les éventuels détours qui pouvaient leur permettre de s'en passer, etc. En outre, je ne savais pas non plus dans quelle mesure les collègues qui œuvraient à la formation des apprenties, qu'ils soient maître socio-professionnels, éducateurs ou enseignants, faisaient ou non appel aux mathématiques pour piloter les situations de formation qu'ils organisaient à leur intention³⁴.

Les seuls éléments récurrents qui semblaient se dégager des discussions que j'entretenais avec mes nouveaux collègues et qui revenaient dans la plupart de nos conversations, c'est que les mathématiques dont il était question au CFPS étaient des mathématiques qui devaient servir à réaliser quelque chose de particulier. Ainsi, il était utile, par exemple, de savoir additionner et soustraire pour rendre de la monnaie à la clientèle du centre ou de savoir multiplier et diviser pour transformer les quantités d'ingrédients d'une recette de cuisine. Il était utile aussi de savoir mesurer une longueur pour raccourcir un pantalon, ou connaître les unités de temps pour lire un horaire, etc. Les mathématiques avaient donc tendance à apparaître quand une tâche du quotidien professionnel (ou social) nécessitait d'y faire recours, mais elles semblaient tout autant disparaître dès lors qu'une autre tâche n'y faisait pas explicitement référence.

Et le plus ennuyeux dans tout cela, c'est que ces mathématiques qui devaient en principe permettre de "faire", ne le permettaient pas vraiment, au vu de ce que les apprenties, dans la majorité des cas, ne les maîtrisaient pas ou tout au moins pas suffisamment. On parlait donc essentiellement de mathématiques par défaut, dans le sens où elles s'avéraient, auprès des apprenties, bien incapables de remplir la fonction utilitaire qui leur était attribuée.

³³ Au cours de ma première année au CFPS, le poste de responsable pédagogique que j'occupais comprenait dix heures d'enseignement effectif, dont huit heures de culture générale et deux heures de soutien.

³⁴ Il faut reconnaître ici que la fonction de responsable pédagogique que j'avais revêtue à mon arrivée au CFPS ne facilitait pas les choses, m'assignant dans la position de celui qui sait ce qui doit ou qui devrait se faire, plutôt que dans celle de celui qui pose et se pose de multiples questions pour chercher progressivement à mieux comprendre comment tout cela fonctionne.

Tout ceci tendait alors à renforcer considérablement leur caractère diffus au sein du CFPS : qu'allait-on faire désormais de ces savoirs non-acquis - qui auraient déjà dû être acquis, mais qui ne l'étaient pas - pour servir des tâches professionnelles qui nécessitaient leur emploi ? Allait-on les enseigner une nouvelle fois, et si oui, de quelle manière, sachant que les tentatives précédentes pour le faire avaient déjà échoué ? Allait-on trouver des astuces qui permettraient de les esquiver ou recourir à des outils technologiques qui permettraient de s'en passer pour affronter des tâches dans lesquelles ces savoirs étaient en principe requis ? Allait-on plus simplement y renoncer et prendre en charge les aspects mathématiques de ces tâches en lieu et en place des apprenties ?

PREMIERS ÉCHANGES, PREMIÈRES NARRATIONS

Après m'être adressé à divers collègues pour chercher à en connaître un peu plus sur les mathématiques et leur fonctionnement au CFPS, c'est vers les apprenties que je me suis tourné, et plus particulièrement vers celles que je rencontrais chaque semaine dans le cadre des cours de culture générale³⁵.

Une des choses qui m'a beaucoup frappé en entamant ces cours, était le rapport nouveau que les apprenties entretenaient vis-à-vis de la classe. Ce rapport se transformait en effet considérablement dans le contexte du CFPS, en ce sens que la classe n'était plus désormais le lieu d'occupation prioritaire des "élèves", vu que c'était le travail dans les secteurs professionnels et le nouveau statut d'apprentie qu'il leur octroyait, qui mobilisait la plupart de leur temps, de leur énergie, voire de leur motivation. La "chose scolaire" était en quelque sorte reléguée au second plan³⁶ et investie de façon très diverse.

Certaines apprenties arrivaient ainsi en classe avec un besoin manifeste de s'y reposer et d'opérer une coupure avec une réalité professionnelle parfois épuisante (au point de s'y endormir!). D'autres s'y rendaient avec l'idée d'y passer un moment différent et de s'y laisser conduire au gré des choix et des propositions d'activités de l'enseignant. D'autres encore projetaient sur la classe des attentes quelque peu démesurées, imaginant qu'il leur serait possible de "rattraper" et de s'emparer des savoirs qu'elles n'étaient pas parvenues à s'approprier jusqu'ici³⁷. Il s'agissait également d'apprendre à composer avec les absences répétées de certaines d'entre elles qui participaient à une forme de discontinuité de l'enseignement et en constituaient, comme dans certains contextes de l'Es (Favre, 2004), une contrainte majeure.

Pour l'enseignant spécialisé que j'étais soudain redevenu, il n'était donc pas simple de trouver des terrains capables de mobiliser leur attention. Ce d'autant que si la classe n'était plus le lieu prioritaire des apprentissages, les enjeux relationnels qui s'y jouaient restaient considérables : accepter ou refuser d'entrer dans une tâche ; montrer ou dissimuler ses capacités et ses lacunes; dominer ou se laisser dominer par l'autre, etc. constituaient effectivement pour les apprenties autant de dilemmes renouvelés sans cesse, et dont, pour certaines, il était difficile de se départir. Au sein de la classe, certaines apprenties restaient ainsi très en retrait de l'échange, d'autres étaient toujours sur le qui-vive, alors que d'autres encore recherchaient le conflit, prenaient la parole de manière intempestive, jouaient avec les règles, testaient les limites.

³⁵ Les cours de culture générale s'adressaient, à raison de quatre heures hebdomadaires, à deux groupes d'apprenties âgées de seize à vingt-et-un ans.

³⁶ Au lieu d'être en classe chaque jour de la semaine, comme c'était le cas durant leurs années d'école obligatoire, les apprenties n'y venaient tout au plus que dix heures par semaine : quatre pour les cours de branches professionnelles, quatre pour les cours de culture générale et deux pour les cours d'éducation cognitive.

³⁷ La demande affichée par certaines de pouvoir y faire des mathématiques se voyant en principe repoussée par le fait que le programme n'en comportait pas !

Et c'est dans ce contexte particulier, à défaut d'un mandat institutionnel clairement établi pour le faire, que, lorsqu'une opportunité le permettait, je me suis mis à nouer quelques premiers échanges autour des mathématiques avec des apprenties. Ceux-ci ont donné naissance à des *narrations*³⁸ qui ont été porteuses de quelques ébauches de problématisations.

La narration qui suit rapporte un exemple de ces premiers échanges. Elle est fractionnée en trois parties. Chaque partie comprend le compte-rendu (en italique) de ce qui s'est effectivement passé avec les apprenties, quelques commentaires qui en réalisent une analyse sommaire et les éléments de problématisation qui en découlent³⁹.

Narration (1^{ère} partie)

Compte-rendu.

Cela se passe un mardi en fin de matinée. Les apprenties de la classe sont à la salle informatique pour faire une petite activité de recherche documentaire sur Wikipédia. Je suis en passe de les rejoindre, quand Na, l'une d'elles, redescend les escaliers, me dit que Ma lui a pris sa place habituelle, qu'il ne reste plus que cinq minutes avant qu'elle ne doive partir (elle est de service en cuisine pour le repas de midi) et que, par conséquent, cela ne sert plus à rien de se mettre à la tâche. J'hésite un peu entre lui dire de remonter avec moi à la salle informatique ou à la laisser partir, mais finalement, anticipant qu'elle n'aura pas vraiment le temps de se mettre en activité, j'opte pour la seconde solution et lui dis : "Ok, allez-y !".

Empruntant le chemin de la classe pour aller y déposer ses feuilles de travail, Na se retourne alors et me lance : "Alors, comme ça, vous me fichez à la porte". Piqué au vif par le propos de Na, et plutôt amusé à la fois, je lui enjambe le pas en répliquant : "Ah non, loin de moi l'idée de vouloir vous mettre à la porte ; d'ailleurs, vu qu'il ne reste que cinq minutes, on a tout juste le temps de faire un petit exercice de maths". Je profite de l'occasion pour tenter le coup ; d'une part, parce que, dans ma position d'enseignant de culture générale, je n'ai pas vraiment le mandat d'enseigner les mathématiques et, d'autre part, parce que Na m'a déjà dit à plusieurs reprises qu'elle détestait cette matière - elle s'affiche volontiers(!) comme "nulle en maths" - et qu'elle ne voulait en aucun cas en faire avec moi. Cependant, comme les autres apprenties de la classe ne sont pas présentes, je me dis que le contexte peut être favorable.

Piquée à son tour, Na me répond assez étonnamment par l'affirmative, sauf, ajoute-t-elle, "s'il y a des divisions", parce qu'elle ne sait pas les faire. Je lui tends donc une calculette pour "le cas où il y aurait des calculs qu'elle ne saurait pas faire", un objet qu'elle accepte non sans avoir un brin protesté, disant qu'ainsi, c'est un peu "triché"...

J'enchaîne en rédigeant un énoncé au tableau. Il s'agit d'un exercice très classique (ce n'est pas seulement un manque d'inspiration, mais surtout parce que je sais que c'est ce type d'exercices qu'elle rencontre en priorité dans le cadre des cours professionnels), qui peut se résoudre à l'aide de la fameuse "règle de trois", que je "contextualise" autour d'une recette de fondue (ça, ce n'est pas de l'inspiration, mais de l'expérience, car mangée la veille) :

<i>Pour faire une fondue, il faut 800 grammes de fromage pour 4 personnes...</i>

A peine ai-je terminé d'écrire cette première phrase que Na propose 1200 comme réponse à l'exercice. Je lui suggère toutefois d'attendre un peu et me laisser terminer l'écriture de l'énoncé avant de proposer une solution. Je poursuis en écrivant :

³⁸ La narration est un concept emprunté aux travaux du groupe ddmes (Cange, 2012) qui fait l'objet d'un long développement théorique plus avant dans le chapitre 4.

³⁹ Cette narration a déjà fait l'objet d'une présentation et donné lieu à la rédaction d'un article (Favre, 2012a) dans le cadre du congrès EMF 2012.

Combien de fromage faudra-t-il acheter pour 12 personnes ?

Au terme de l'écriture, je lis l'énoncé à l'intention de Na, tout en lui donnant une feuille de papier pour qu'elle puisse noter ce dont elle a besoin pour résoudre l'exercice. Na réfléchit un bon moment avant de saisir la calculatrice, d'y réaliser un calcul et de donner 9600 comme réponse (elle n'a pas utilisé la feuille de papier). Je note le résultat qu'elle a donné sur le tableau, tout en lui demandant de préciser : "9600 quoi?". Na répond d'abord "kilos", avant de rectifier par "grammes".

Commentaires.

1° Un premier point à relever concerne la façon dont s'entame et se noue l'interaction : je profite d'un moment à la dérobée pour engager un échange autour d'un exercice de proportionnalité et Na, de manière très surprenante, y concède, alors même qu'elle était sur le point de quitter les lieux ; c'est peut-être parce que ses autres collègues de classe ne sont pas là et que leur regard ne va pas trop peser sur les difficultés qui risquent de se manifester, mais peut-être aussi parce que l'échange sera forcément bref, pouvant être interrompu à tout instant.

2° Un deuxième point concerne le résultat de 1200 que Na suggère avant même d'avoir entendu la fin de l'énoncé de l'exercice. S'il est probable que Na a combiné les nombres 800 et 4 pour obtenir 1200, ce qui frappe avant tout, c'est l'immédiateté de la réponse, comme si la seule lecture de deux nombres dans le cadre de la résolution d'un exercice en mathématiques impliquait un calcul et une réponse immédiats. Ce phénomène n'est pas nouveau, je l'ai déjà observé à de nombreuses reprises dans l'Es, mais ce qui est intéressant ici, c'est de le voir reproduit de façon si soudaine, dans un contexte où l'enjeu didactique semble peu important.

3° Le troisième point est intrinsèquement lié au précédent. Il concerne le deuxième résultat donné par Na, soit 9600, résultat de 800 par 12. On assiste à nouveau à une combinaison de deux nombres figurant dans l'énoncé, mais avec l'utilisation d'une autre opération - la multiplication - qui est l'opération adéquate pour lier les quantités en jeu dans l'exercice, et qui apparaît grâce au support technique de la calculatrice.

4° Enfin, un quatrième point concerne la correction de l'unité "gramme" à la place de l'unité "kilo" qui est effectuée par Na. Cette correction peut en effet témoigner d'une prise de conscience du fait que le nombre 9600 obtenu ne peut signifier un nombre de kilos de fromage adéquat pour réaliser une fondue pour douze personnes. On assisterait dans ce cas à l'activation d'un savoir issu de la pratique de la cuisine qui vient invalider le résultat d'un calcul produit à l'occasion de la résolution d'un exercice rencontré hors de ce contexte.

Problématisation.

Sachant que l'interaction directe, selon les canons habituels du travail en classe, aboutissent fréquemment à des retraits sous forme de désinvestissement ou de non-investissement des tâches proposées, quelles conditions ou quelles contraintes sont susceptibles de favoriser l'engagement effectif des apprenties dans une démarche de résolution de problèmes ?

La résolution d'exercices présentés sous la forme d'un énoncé écrit, sans rétroaction directe de la part du milieu aboutit à l'immédiateté d'une réponse donnée en combinant les nombres figurant dans la donnée. Comment dès lors surseoir à cette immédiateté et accompagner les apprenties à la prise en compte de l'ensemble de l'énoncé et de la question posée ? Est-il pertinent de vouloir tenter de le réaliser dans ce cadre ou est-il au contraire plus adéquat de vouloir le réaliser sur d'autres supports, dans d'autres contextes ?

Quel rôle peut jouer la calculatrice (même si son usage est ici considéré comme "triché" par l'apprentie) dans la dévolution d'un problème et comment celle-ci peut-elle être en mesure de

constituer un étayage favorisant l'apparition de certains procédés dont la résolution technique n'est pas maîtrisée par les apprenties ?

Quelles fonctions peuvent jouer, dans le contexte de la classe, les savoirs acquis par les apprenties dans leur contexte professionnel ? Est-il possible d'en tirer parti d'un point de vue didactique pour aider les apprenties à concevoir, contrôler et réguler leurs procédés de résolution⁴⁰ ?

Narration (2^{ème} partie)

Compte-rendu.

Je dis à Na que ce genre d'exercices peut efficacement se résoudre à l'aide d'un tableau (en ajoutant que les enseignants qu'elle a rencontrés durant sa scolarité le lui ont sans doute déjà montré) que je me mets à dessiner juste au-dessous de l'énoncé. J'inscris ensuite les données de l'exercice dans le tableau, tout en ajoutant d'autres nombres et en précisant que la première réponse à trouver (la quantité de fromage pour douze personnes) n'est peut-être pas la plus simple à découvrir.

<i>p</i>	4	12	2	1	10	1257	3
<i>gr.</i>	800						

Je demande alors à Na si elle saurait trouver la quantité de fromage nécessaire à la réalisation d'une fondue pour deux personnes, ce à quoi elle répond 600 ("parce qu'il faut enlever 200", ai-je cru l'entendre murmurer ?) que je note dans le tableau. Je poursuis en lui demandant la quantité de fromage à acheter pour une personne, ce à quoi elle répond 200, que je note également dans le tableau. Je tente alors de lui demander la quantité nécessaire pour dix personnes, mais Na répond qu'elle ne sait pas. J'essaie encore pour trois personnes, mais Na ne veut plus rien dire, prétextant (à raison, car il est temps) qu'elle doit partir.

<i>p</i>	4	12	2	1	10	1257	3
<i>gr.</i>	800		600	200			

En l'accompagnant un bout de chemin le long du couloir qui mène à la sortie, je lui dis que j'ai bien envie de proposer ce même exercice aux autres apprenties du groupe l'après-midi. Na ne répond rien, mais me lance au moment de se quitter : "Vous voyez, je vous avais bien dit que j'étais nulle en maths".

Commentaires.

1° On observe tout d'abord que le recours à un tableau pour figurer les données de l'exercice ne constitue pas, pour Na, une aide à la résolution, tout au moins pas de manière explicite. Les relations numériques multiplicatives qui lient horizontalement le 4 et le 12 ou verticalement le 4 et le 800 ne sont pas prises en compte pour lui permettre d'engager un nouveau procédé de résolution.

2° En revanche, on voit que la transformation de l'exercice - chercher la quantité de fromage pour deux personnes - induit quelque chose de nouveau : soustraire 200 au 800 de l'énoncé. La diminution du nombre de personnes est donc traduite par une quantité de fromage à enlever, ce qui peut être à nouveau considéré comme un savoir lié à la pratique de cuisine. Difficile pourtant de savoir d'où vient le nombre 200 employé par Na et qu'elle reprend ensuite comme réponse à la quantité de fromage à prévoir pour une personne. A-t-elle tiré parti du rapport entre les nombres 4 et 800 qui figurent dans le tableau ? Propose-t-elle

⁴⁰ Sachant que la question inverse, liée à la fonctionnalité des savoirs appris en classe dans le cadre de la pratique professionnelle, est certainement tout autant délicate.

d'enlever 200 parce qu'il y a deux personnes en moins ou parce qu'il n'y a plus que deux personnes en jeu ? Recourt-elle à un autre savoir issu de la pratique de cuisine qui veut que l'on compte 200 grammes de fromage par personne pour préparer une fondue ?

3° On remarque enfin que les deux nouvelles transformations de l'exercice - chercher la quantité de fromage pour dix, puis pour trois personnes - provoque la rupture de l'échange. Celui-ci n'avait sans doute que trop duré (on était allé bien au-delà des cinq minutes initiales qui avaient été convenues) et il était temps pour Na d'y mettre un terme. On observe cependant que le passage par l'unité ne sert ici à Na ni pour produire une itération du 200 (à dix ou à trois reprises), ni pour extraire la relation multiplicative qui lie le 1 au 10 ou le 1 au 3. En outre, la rupture de l'échange empêche de considérer avec Na le fait qui aurait pu lui apparaître surprenant, voulant que, selon les résultats produits, la somme des quantités de fromage pour deux et pour une personne soit un peu bizarrement égale à la quantité de fromage pour quatre personnes.

Problématisation.

Le recours à un tableau ne favorise pas le repérage des relations multiplicatives qui existent entre les données. Le passage par l'unité non plus. Quelles conditions faut-il dès lors réunir pour que le tableau et/ou le passage par l'unité, souvent cités comme facilitateurs de la résolution de problèmes de proportionnalité, deviennent des instruments effectifs au service de l'apprentie ? Plus généralement, on peut également se demander l'impact que les connaissances numériques de l'apprentie, c'est-à-dire les relations numériques qu'elle a pu (ou n'a pas pu) établir antérieurement entre les nombres qui sont en jeu dans le problème, exercent sur sa capacité à imaginer des procédés de résolution adéquats.

La transformation du problème - chercher la quantité de fromage pour deux personnes - semble coïncider avec un réel investissement cognitif de l'apprentie. Celui-ci se traduit par le recours à une soustraction, plutôt qu'à un partage par la moitié. Quel jeu sur les variables serait susceptible de favoriser l'utilisation d'un procédé de partage ? Est-il nécessaire de recourir à d'autres types d'exercices (et si oui lesquels?) pour être en mesure de le faire ?

On ne sait trop comment les savoirs acquis dans la pratique professionnelle interviennent dans la résolution du problème. Il semble bien que le fait de réduire les quantités au cas où le nombre de personnes diminue est bien présent. En revanche, on ne sait trop d'où vient l'idée du 200 g de fromage par personne et on ne parvient pas non plus à déterminer le rôle, tantôt facilitateur, tantôt "distracteur" que peuvent jouer ces savoirs dans le cadre de la résolution d'un problème. On peut d'ailleurs raisonnablement penser qu'un procédé et/ou une solution incorrect/e produit/e dans le cadre de la résolution d'un exercice est parfois susceptible d'être validé en cuisine : retirer 200 g de fromage au 800 g prévus pour quatre personnes et préparer une fondue avec 600 g de fromage pour deux gros mangeurs pourrait certainement s'y avérer adéquat.

Narration (3^{ème} partie)

Compte-rendu.

L'après-midi, j'annonce aux apprenties que, contrairement à l'habitude, la leçon va débiter par la résolution d'un exercice de maths (j'ai laissé l'énoncé au tableau, mais effacé le tableau de proportionnalité et les réponses de Na). Je lis l'énoncé, distribue à chacune un papier, leur demande d'essayer de le résoudre, puis de noter leur résultat, sans le montrer, sur le morceau de papier. Na est présente, mais elle prend une autre feuille et se met à dessiner. Ma demande à pouvoir se rendre aux toilettes et les quatre autres apprenties se mettent à la tâche.

Je dois alors préciser que je n'ai pas pu récolter les papiers de chacune d'entre elles au terme de la leçon, mais je sais que Bi n'a rien écrit et il me semble me souvenir que Ni et Ca ont chacune tenté de multiplier par écrit 800 par 12. Seule Lu, de son côté, a soigné ses écrits. Elle a d'ailleurs insisté à plusieurs reprises pour me montrer ce qu'elle avait fait. Quant à Ma, j'ai retrouvé l'inscription 199 d'un côté de son papier et 9000-2k de l'autre.

	800	4
200	800	200
<u>12</u>		
400	2 k400g	
<u>2000</u>	Il faut 2400g de fromage pour 12 p	
2400	1P = 200g	
	12P = 2400g	

Une fois que les apprenties ont terminé leur calcul, et sans leur demander de communiquer les réponses qu'elles ont trouvées, je repars avec le dessin d'un tableau. J'indique que la quantité de fromage à trouver dans l'exercice (pour douze personnes) n'est peut-être pas la plus simple. Je réalise à côté le dessin d'une assiette contenant un monticule de fromage avec l'inscription 800 grammes juste au-dessous, en précisant que l'on peut plus facilement trouver la quantité de fromage qu'il s'agit d'acheter pour deux personnes.

p	4	12	2	1	10	8	427
gr.	800						

Lu trouve immédiatement la bonne réponse : elle a en effet compris qu'il suffit de multiplier chaque nombre de la première ligne par 200 pour obtenir son "correspondant" dans le tableau. Ni propose 400 grammes en ayant vraisemblablement procédé à un partage par deux, tandis que Ca, Bi et Ma disent ne pas savoir. Je prends note de la réponse de Ni et poursuis avec la quantité de fromage à acheter pour une personne ; et là, c'est Ma qui intervient en disant : "100 grammes", tout en expliquant que : "avec 100 grammes cela suffit pour une personne, si on n'a pas trop faim". Bi est d'accord avec 100 grammes, alors que Ni et Lu penchent plutôt pour 200 grammes. Ca dit ne pas savoir, tandis que Na dessine toujours.

Après avoir relevé au tableau les deux réponses que je considère concurrentes, j'invite les apprenties à trancher. Lu prend la parole et explique qu'il suffit de multiplier à chaque fois par 200 le nombre de la première ligne du tableau pour obtenir le correspondant de la seconde ligne. Elle montre ainsi comment passer de 10 à 2000, de 8 à 1600 et même, après avoir effectué le calcul par écrit, de 427 à 85400. A la fin des explications de Lu, je remarque pourtant que si, de mon côté, j'y ai été particulièrement attentif, les cinq autres apprenties présentes ont en revanche toutes "décroché" et que je me retrouve dans l'impossibilité manifeste de les "ramener à la tâche". Le moment de maths que j'ai voulu soutirer aux activités habituelles du mardi après-midi s'en trouve ainsi irrémédiablement terminé.

Commentaires.

1° On assiste premièrement à une nouvelle illustration de la fragilité de l'échange, mais en situation de groupe, cette fois-ci. Na n'y entre à aucun moment (de manière explicite s'entend, impossible bien sûr de savoir ce qu'elle prend ou ne prend pas des interactions lorsqu'elle dessine). Ma part aux toilettes au moment de se mettre à la tâche, puis écrit sur son papier des nombres - 199, 9000, 2k - difficiles à interpréter et qu'elle ne parviendra pas non plus à

expliquer. Bi n'écrit rien et ne dit quasiment rien non plus. Ca pose un seul calcul, puis dit ensuite qu'elle ne sait pas. Finalement, seules Ni qui propose un calcul, puis une réponse pour le cas de la quantité à prévoir pour deux personnes et surtout Lu, qui sait déjà (!) comment résoudre l'entier de l'exercice, acceptent d'entrer dans l'échange de manière directe. Cette dernière prend d'ailleurs soin non seulement de faire, mais également de signifier en détails comment elle s'y est prise pour le faire. Et c'est elle qui occupera finalement tout l'espace de dialogue ponctuant l'échange, avec comme conséquence le désinvestissement général de l'ensemble des autres apprenties présentes dans la classe.

2° Deuxièmement, on remarque que les deux propositions de Ni et de Ca sont les mêmes que celle de Na en fin de matinée, soit : $800 \times 12 = 9600$. La multiplication apparaît donc à nouveau, incidemment ou à propos (difficile de trancher), favorisée par le support de la calculatrice. On voit en outre que le dessin d'une assiette semble permettre à Ni d'engager une procédure de partage par la moitié, alors que celui-ci est ignoré par Lu qui a privilégié la recherche de la quantité par l'unité, une façon de faire qui lui permettra ensuite, de façon systématique, de trouver l'ensemble des résultats figurant dans le tableau.

3° Troisièmement, de façon on ne peut plus explicite, on assiste de la bouche de Ma à l'apparition d'un nouveau savoir issu de la pratique de cuisine, lorsqu'elle avance que : "100 grammes, cela suffit pour une personne, si elle n'a pas trop faim."

Problématisation.

La question de la conduite de l'échange par l'enseignant en situation collective est délicate, aussi bien quand celui-ci est déserté ou au contraire sur-occupé par une apprentie. Comment peut-on dès lors chercher à dynamiser l'échange et faire en sorte qu'il soit possible pour chacune d'y trouver une place, sa place, sans que celle-ci ne soit trop exposée, mais permette néanmoins de s'approprier tout ou partie des enjeux des savoirs qui s'y trouvent engagés ?

Si le recours au dessin semble avoir permis à une apprentie d'imaginer une procédure de résolution (le partage par la moitié), le recours au tableau, quant à lui, n'apparaît à nouveau pas comme un facilitateur : soit l'apprentie (comme Lu) sait auparavant comment s'y prendre pour résoudre le problème et le tableau peut dès lors favoriser le développement d'une certaine systématique ; soit l'apprentie ne sait pas et le tableau ne permet pas d'extraire les relations numériques susceptibles de permettre un traitement adéquat du problème. La question de savoir comment faire d'un tableau de proportionnalité, un instrument au service de la résolution d'un problème est donc à nouveau posée.

Enfin, on assiste, au sein de l'échange, à l'apparition d'un savoir provenant de la pratique professionnelle, lequel s'avère tout à fait pertinent en cuisine, mais qui se trouve invalidé (pas du point de l'apprentie qui le propose s'entend) dans le cas de la résolution de l'exercice. La question de devoir trancher pour déterminer quel est le résultat adéquat entre 100 et 200 grammes de fromage perd ainsi tout son sens, puisqu'elle réfère à deux univers distincts qui permettent l'un comme l'autre de valider l'un des deux résultats⁴¹.

PAS APRÈS PAS VERS UN PROJET DE THÈSE

C'est à partir de cet ensemble de questions, issues pour une part des travaux que j'avais menés antérieurement dans l'Es, et pour une autre part de la réalité nouvelle de la Fps à laquelle je

⁴¹ On se trouve peut-être ici, même si le rapprochement est quelque peu aventureux, dans une situation proche de celle qui prévaut en géométrie, quand les arguments des élèves réfèrent pour certains à leur perception de l'espace sensible, tandis que d'autres se fondent sur l'espace géométrique et les propriétés des figures (Berthelot & Salin, 1992). Impossible, par exemple, de considérer le carré et le rectangle autrement que comme deux formes distinctes dans le premier, alors que l'on pourra/devra définir le carré comme un rectangle particulier dans le second.

me retrouvais confronté que je me suis mis à échafauder ce que, dans le groupe ddmes, nous avons pris pour habitude d'appeler des *investigations*⁴² *exploratoires* et que nous définissons comme suit :

Les "investigations" exploratoires regroupent quant à elles des activités expérimentales de portée bien moins lourde à assumer que des recherches. Bien qu'elles ne nécessitent pas autant de précautions, et peuvent être entreprises individuellement, il s'agit pourtant d'un enjeu majeur de ce projet. Le groupe s'attachera donc tout particulièrement à susciter et à favoriser de tels travaux. Il est en effet essentiel que tout participant au groupe profite d'un espace expérimental qui soit le pendant, dans son lieu de travail, du groupe de recherche. [...] D'ailleurs, toute recherche repose elle-même sur un large fond d'investigations (plus ou moins ponctuelles) qui se trouvera enrichi de toutes les observations (plus ou moins fortuites) et de toutes les "mises au point" annexes qu'elle aura occasionnées. (Favre, 2004b, pp.129-130).

Or, comme on le verra plus avant au chapitre 4, ce sont précisément des investigations exploratoires, réalisées successivement durant les quatre premières années que j'ai passées au CFPS, qui se fondront ensuite en un projet de recherche à part entière, pour constituer l'intégralité de la partie expérimentale de la thèse.

Une démarche opportuniste résolument inductive...

Il faut bien comprendre en effet que je ne suis pas arrivé au CFPS avec le projet d'y faire une thèse et ce n'est que très progressivement que ce dernier a vu le jour. Cela signifie que je n'ai pas élaboré a priori de dispositif expérimental pour appréhender les mathématiques que l'on y rencontre et que l'on y pratique. En fait, comme je l'ai déjà relaté ci-dessus, j'ai d'abord cherché à glaner des informations, essentiellement en discutant avec mes nouveaux collègues, en consultant les documents consacrés aux mathématiques que j'y découvrais et en profitant des occasions qui m'étaient offertes, dans le cadre de mon travail, pour nouer des interactions avec les apprenties. C'est à ce titre que je qualifierais ma démarche d'*opportuniste*⁴³, puisqu'elle s'est constituée à partir des circonstances que mon rôle de responsable pédagogique m'a permis de rencontrer, au travers des activités qui faisaient partie intégrante de mon cahier des charges de responsable pédagogique. Les premières observations et analyses que j'ai pu en faire, venant alimenter les suivantes, qui à leur tour permettaient de reconsidérer les premières sous de nouveaux angles.

Cette démarche doit donc être considérée comme résolument *inductive* (Anadón & Guillemette, 2012) où le questionnement de la réalité : « se structure à partir des découvertes successives qui sont faites pendant le processus de recherche, c'est-à-dire pendant sa réalisation » (p.28). Elle viendra ensuite se coordonner avec une approche *abductive* (Peirce, 2002) qui vise à combiner les faits empiriques avec les cadres théoriques de références⁴⁴ :

L'utilisation de l'induction analytique et de l'abduction permet d'actualiser le travail de la recherche qualitative tout en ayant recours aux connaissances existant dans le

⁴² Sous la plume d'Alexandre Demidoff, un article du journal *Le Temps* des 17-18 mars 2012, intitulé : « Jean-Jacques le barbare » (http://www.letemps.ch/Page/Uuid/02e1d45c-6f93-11e1-bb68-b27ca7576cf9/Jean-Jacques_le_barbare) attribue la création du terme "investigation" à J.-J. Rousseau :

Dès son premier discours, on lui reproche de malmenager la langue. Pour nous, ces violations passent inaperçues. Un académicien, qui était aussi chirurgien, lui reproche par exemple d'avoir fabriqué un néologisme en utilisant le mot "investigation". Rousseau répond : « J'ai rendu service à la langue en essayant d'y introduire un terme doux et harmonieux, dont le sens est déjà connu et qui n'a point de synonyme en français. C'est je crois toutes les conditions qu'on exige pour autoriser cette liberté salutaire ».

⁴³ J'emprunte l'expression à Giroux (2007, 2008) qui l'utilise pour qualifier la position de l'enseignant/expérimentateur aux prises avec des conduites atypiques dans le contexte de l'Es

⁴⁴ Soit ceux de la ddm, dans le cas particulier.

domaine auquel l'objet d'étude appartient. [...] la posture abductive est prioritairement - au sens chronologique comme au sens propre - une ouverture attentive à la découverte de nouvelles compréhensions des phénomènes et non une attention à de nouvelles données (ou à de nouveaux phénomènes) qui confirment le potentiel explicatif des théories existantes. (ibid., p.34)

...partant d'un point de vue interne offrant des facilités, mais nécessitant des précautions...

Le fait que je me retrouve à l'interne du CFPS, engagé comme responsable d'un département et plus généralement comme responsable pédagogique du centre, offrait quelques facilités en regard de la position d'un chercheur externe qui serait venu y implanter un dispositif et j'avais d'ailleurs bien l'intention de les exploiter. En contact direct avec les personnes en charge de la formation, il m'offrait la possibilité d'échanger autant que je voulais avec ceux qui étaient devenus mes collègues sur les mathématiques auxquelles ils avaient recours auprès des apprenties, effectuer quelques visites et réaliser quelques observations sur leur lieu de travail. Il me permettait également d'accéder aux documents - plans de formation, moyens d'enseignement - concernant les mathématiques enseignées dans le cadre du centre. Il me donnait aussi et surtout l'occasion, sans tracasserie administrative aucune, d'échanger et d'interagir directement avec les apprenties.

Mon statut de responsable pédagogique m'installait néanmoins dans une position particulière auprès de l'ensemble des collaborateurs du CFPS et des apprenties, me désignant comme un "sachant" en matière de pédagogie, alors que celle que j'allais investir dans le cadre de la thèse était bien celle d'un "ignorant" en matière de didactique dans la Fps, dont j'avais tout à découvrir. Le contraste entre ces deux positions antagonistes⁴⁵ allait donc demander des précautions sans doute aussi importantes que celles qui participent, dans un dispositif plus classique, à l'établissement d'un contrat de recherche. A ce titre, j'ai de suite considéré qu'il me faudrait renoncer à aller - dans le cadre de la thèse s'entend, car je l'ai fait par ailleurs, dans celui de mon travail de responsable - observer des séquences d'enseignement des mathématiques données par mes collègues sur leur lieu de travail respectif. Le risque que le rapport que nous entretenions, de par nos fonctions respectives au sein du CFPS, ne vienne par trop influencer sur les interactions de connaissances que je serais en mesure d'observer me paraissait trop important que ce soit en termes d'attentes de reconnaissance et de validation du travail qu'ils accomplissaient auprès des apprenties et sur les (bonnes) manières dont ils s'y prenaient pour le faire ou en termes de demandes qu'ils étaient susceptibles de m'adresser après coup, partant des analyses que je pourrais en réaliser, pour les faire évoluer de façon probante. En référant une nouvelle fois aux méthodes de travail que nous utilisons dans le cadre du groupe ddmes (Favre, 2004b), où c'est le chercheur qui interagit directement avec les élèves auprès desquels il réalise des expérimentations, j'ai donc choisi de faire en sorte que toutes les données concernant des interactions effectives avec des apprenties qui prendraient pour objet des mathématiques proviendraient, en toute exclusivité, de celles que je serais personnellement en mesure de nouer avec elles.

Si cette prise de position de principe m'obligeait à devoir renoncer à bon nombre de possibilités d'observations pouvant contribuer au développement de la thèse, elle me dégageait en revanche de toute forme d'intrusion sur et dans le lieu de travail de mes collègues et m'assurait de pouvoir échafauder un dispositif sur des bases saines où les positions de responsable et de chercheur n'entreraient pas en concurrence, voire en conflit. Elle nécessitait aussi que je parvienne à m'aménager, dans le quotidien du CFPS, des espaces

⁴⁵ Montrer que la tenue, par une même personne, de ces deux positions à l'interne d'une institution, est à la fois compatible et porteuse à l'élaboration d'une thèse en constitue d'ailleurs un enjeu manifeste.

et des temps pour engager des activités mathématiques avec les apprenties ou, selon les cas, je serai conduit, comme on s'en rendra compte par la suite, à endosser des rôles différents. Ceci n'a pas toujours été simple à réaliser, soit parce que je n'avais, dans le cadre de ma fonction, pas de classe "sous la main", soit au contraire, parce que, dans la classe où j'officialiais, je n'avais pas y enseigner les mathématiques. Et c'est à ce titre que j'ai eu tout à la fois besoin de profiter des opportunités qui m'ont été offertes, que d'en créer de mon propre chef.

... dans un contexte professionnel spécialisé réclamant un cadrage spécifique

Il s'agissait enfin de tenir compte du fait que je me retrouvais dans un contexte particulier où la classe n'était plus le lieu principal des apprentissages. Les mathématiques qui s'y pratiquaient n'y étaient donc pas a priori identifiables dans un lieu déterminé, selon un programme officiel clairement établi, et avec des moyens imposés pour le faire, comme cela peut-être le cas dans le cadre de l'Eo (enseignement primaire et secondaire confondus) en Suisse Romande (Conne, 2004a). Il ne serait donc pas vraiment possible, comme l'a fait par exemple Maréchal (2010) dans sa thèse, d'y déterminer des *organisations mathématiques* et des *organisations didactiques* (Chevallard, 1999) aisément identifiables qui servent de cadres à l'enseignement. Par ailleurs, les apprenties avec lesquelles j'étais amené à interagir, étaient âgées de seize ans et plus, ce qui signifiait qu'elles avaient déjà tout un passé d'élève derrière elles et que "déclarées en difficulté d'apprentissage"⁴⁶, la question de l'échec y avait certainement occupé une place importante et singulière (Favre, 2004a). Mes premières interactions (voir l'exemple ci-dessus) ont ainsi montré toute la fragilité des échanges, didactiques, qu'il est possible d'entretenir avec elles et la question de l'investissement qu'elles seraient à même de manifester - laquelle est une question qui passe pour transparente dans beaucoup d'études en ddm - dans l'enseignement qui leur serait proposé, allait assurément y prendre une place importante⁴⁷.

Ces conditions spécifiques, qui sont celles que l'on retrouve également dans bon nombre d'institutions Es, nécessitaient de recourir à un cadre théorique spécifique. Comme on pourra le découvrir en détails dans le chapitre 2, ce dernier repose sur un socle théorique élaboré par Conne (2003) dans le contexte de l'Es, auquel viendront se greffer d'autres concepts, empruntés à diverses théories de la ddm, qu'il s'agira d'éprouver dans le contexte de la Fps ; il sera complété au chapitre 3 par de longs développements constitués à partir des travaux de Ruche (1992, 1998, 2006) pour caractériser les mathématiques qui seront ensuite l'objet des interactions avec les apprenties.

En forme de conclusion à ces propos concernant la spécificité de la démarche engagée, on peut citer Ruche (1988) qui, dans un texte au titre éloquent : « L'apprentissage des mathématiques est-il un objet de recherche sérieux ? », affirme que :

Pour faire une recherche sur des apprentissages amples⁴⁸, il faut y être mêlé. Ils sont [...] touffus, d'apparence inextricable, sans frontière définie. Pour y découper un objet de recherche cohérent, il faut les connaître intimement, et même intuitivement, les voir dans toutes leurs composantes, essayer de ne pas passer par inadvertance à côté d'un fait statistiquement rare, mais épistémologiquement significatif.

[...] D'où la nécessité "d'en être".

⁴⁶ C'est ainsi qu'on les désigne sur le site du CFPS, même si, pour ma part, je préfère parler de "difficultés diverses", sachant que ce n'est pas parce qu'une élève ou une apprentie évolue dans un contexte spécialisé que l'on peut en déduire de facto qu'elle est en difficulté d'apprentissage, en mathématiques, par exemple (Conne, 1999).

⁴⁷ C'est à ce titre que, dans le travail que nous menons avec les élèves de l'Es au sein du groupe ddmes, l'enjeu premier de toute interaction est que celle-ci puisse... durer.

⁴⁸ Un *apprentissage ample* correspond chez Ruche à un apprentissage se déroulant sur un temps et sur un volume de matière conséquents.

[...] Paradoxalement, il faut aussi "ne pas en être", c'est-à-dire se distancier de la réalité qu'on étudie, seule façon d'échapper d'une part aux perceptions myopes et jugements routiniers, et d'autre part à la complaisance du novateur pour l'enseignement qu'il a lui-même instauré. (p.36)

Excepté le fait qu'il n'y aurait rien de véritablement novateur dans les interactions que j'envisageais de nouer avec les apprenties, ces propos décrivent fort bien la position que j'ai adoptée tout au long du travail qui a été mené.

CHAPITRE 2 CADRE THÉORIQUE (1^{ÈRE} PARTIE)

INTRODUCTION

La première partie du cadre théorique vise à articuler les divers concepts qui ont été empruntés à la ddm pour appréhender les mathématiques en cours au CFPS du Château de Seedorf et leur fonctionnement au sein des interactions. Elle est basée sur un socle qui lui sert de fondement et à partir duquel viendront s'arrimer les principaux concepts qui ont été spécifiquement choisis pour le faire. Ces concepts relèvent de plusieurs champs théoriques de la ddm dont ils ont été extraits. Leur présentation veillera donc à chaque fois à rappeler d'où ils proviennent, à décrire ce qu'ils sont et à préciser l'usage qui en sera fait dans la thèse. Cet usage sera d'ordre *pragmatique*, tel que nous l'envisageons au sein du groupe ddmes (Conne & al., 2004) :

Nous trouvons dans les théories de référence des propositions : par exemple, issue de la théorie des situations didactiques et des recherches associées, tout ce qui concerne la notion de *milieu*. Nous nous demandons ce que nous pourrions en faire ; deux directions s'offrent à nous :

- soit nous demander ce que ces éléments théoriques expliquent de ce que nous connaissons déjà, ou de ce que nous pouvons observer par ailleurs ;
- soit nous demander ce que nous pourrions produire de nouveau en nous appropriant ces notions.

Si nous choisissons la première voie, nous tenterons de circonscrire un domaine de réalité dans le cadre de la théorie ; si, en revanche, nous choisissons la seconde voie, nous tenterons au contraire d'ouvrir cette théorie à la production de quelque chose de neuf. [...] Une telle ouverture nous met dans une position que je pourrais qualifier d'heuristique, pour laquelle des bribes de théories, en parties originales, soutiennent nos inférences et nos décisions expérimentales. (p.84)

Il s'agit donc de considérer chaque concept comme une proposition, puis d'examiner le rôle qu'il est possible de lui faire jouer dans l'appréhension de la réalité dont on souhaite le voir rendre compte. Cette forme d'opérationnalisation des concepts peut tantôt se faire sans heurts, dans les cas où ils s'avèrent adéquats à cette appréhension : le concept est alors utilisé tel qu'il se trouve défini dans la théorie dont il est issu. Néanmoins, l'opérationnalisation d'un concept peut également se confronter à certaines résistances, parce qu'il n'entre pas bien en correspondance avec la part de réalité qu'il lui est donné de représenter : le concept nécessitera alors certains ajustements, voire certaines distorsions, dont il s'agira de rendre compte pour être amené, le cas échéant, à "créer du neuf".

Cette façon pragmatique d'envisager le rôle des concepts est bien résumée dans la formule de Cavaillès (1981, p.178) : « Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer ».

SOCLE THÉORIQUE

Le socle théorique est l'œuvre de Conne (2003) dans le cadre des travaux qu'il mène depuis de nombreuses années dans le cadre de l'Es. Le choix de ce socle se fonde conjointement sur sa cible - il a été construit et éprouvé au sein de diverses institutions⁴⁹ de l'Es - et sur son objet

⁴⁹ Le terme d'*institution* est à prendre ici dans son sens courant et non dans le sens bien plus général qu'il revêt dans le cadre de la TAD de Chevallard. Dans le canton de Vaud, on parle volontiers "d'établissements scolaires" dans le contexte de l'Eo, tandis qu'on parlera plutôt "d'institutions spécialisées" dans celui de l'Es.

quand il affirme vouloir comprendre : « comment les situations peuvent être à la fois supports, cadres et moteur des apprentissages qui se déroulent dans ces classes, que ceux-ci soient provoqués ou non, prévus ou au contraire fortuits » (p.84).

La démarche suivie par Conne s'inscrit comme la confrontation d'une théorie didactique majeure de la ddm - la TDS de Brousseau (1998) - au terrain de l'Es. Désireux d'étudier le développement des situations mathématiques dans le contexte de l'Es, Conne fonde en effet son approche sur le jeu *dévolution/institutionnalisation* issu de la TDS ou plus généralement sur celui du double mouvement de conversion *connaissances-savoirs* (Rouchier, 1996). En cherchant à mettre en correspondance ce processus avec les dynamiques que le développement de situations génère dans l'Es, Conne en vient à constituer un champ théorique propre, ouvrant de nouvelles pistes d'investigation. La confrontation proposée peut alors : « être qualifiée d'interprétation expérimentale d'un champ théorique. [...] La mise à l'épreuve consistant à préserver une cohérence à la théorie tout en restant pertinent au regard des données expérimentales étudiées » (op.cit., p.101).

Ce socle théorique demande de distinguer trois niveaux d'analyse. Du centre à la périphérie de l'institution, un premier niveau, que l'on peut qualifier d'interne à une situation, est celui des *interactions de connaissances*⁵⁰ que les sujets, aux prises avec une situation particulière, sont amenés à entretenir entre eux et à l'égard de la situation. Un deuxième niveau, que l'on peut qualifier d'externe à une situation, mais interne à l'institution, est celui des *investissements de savoirs* qui, dans l'institution considérée, sont réalisés par ses acteurs et déterminent les interactions de connaissances qui ont lieu dans le premier niveau. Un troisième niveau enfin est celui de l'*institution* elle-même : « caractérisée par un réseau de lieux, un collectif de personnes circulant dans ce réseau et une distribution des savoirs engendrée par cette circulation » (ibid., p.84) qui à son tour détermine les investissements de savoirs réalisés en son sein et, par voie de conséquence, les interactions de connaissances qui en découlent.

Dans la thèse, la prise en compte de ces trois niveaux présente l'avantage d'offrir un cadre suffisamment large pour appréhender les savoirs mathématiques que l'on rencontre dans une institution spécialisée considérée dans sa globalité et suffisamment fin pour décrire et analyser le fonctionnement des savoirs qui s'actualise au cœur des interactions.

Le niveau de l'institution

Le niveau de l'*institution* invite à envisager une institution spécialisée comme un *réseau de lieux, de personnes et de savoirs*. Sa prise en compte tient au fait que le fonctionnement d'une institution spécialisée diffère largement du fonctionnement d'un établissement de l'école ordinaire. Ce dernier est en effet doté d'une organisation verticale fortement hiérarchisée (degrés scolaires, cycles d'enseignement, filières, règlements dictant le passage d'un degré à un autre,...), fonctionnant à partir de classes tenues exclusivement par des enseignants, où les savoirs sont définis par des programmes, auxquels correspondent des moyens spécifiquement conçus pour les enseigner. Alors qu'une institution spécialisée se caractérise au contraire par une organisation bien moins hiérarchisée ; les élèves, considérés comme en difficulté, fréquentent des lieux divers qui ne sont pas tous des classes et se retrouvent aux prises avec des professionnels de divers horizons ; les savoirs mathématiques en jeu n'y sont pas non plus toujours définis dans des programmes, ni thématiques dans les moyens d'enseignement qui ont cours dans l'Eo (Maréchal, 2010).

Il s'agit dès lors de considérer l'institution spécialisée comme faisant partie intégrante de l'objet d'étude, parce que ce contexte institutionnel exerce des implications directes sur les interactions

⁵⁰ L'idée d'*interactions de connaissances*, qui sera présentée plus loin, a été développée par Giroux (2004) au Québec dans le contexte de l'adaptation scolaire.

didactiques qui s'y déroulent (Conne, 2000). Dans la thèse, il sera possible de le faire en décrivant tour à tour les lieux qui la constituent, les personnes qui y œuvrent et les savoirs qu'on y rencontre. L'idée de réseau vise en outre à prendre compte le fait que les personnes, comme les savoirs, sont susceptibles de circuler d'un lieu à l'autre de l'institution, mais que cette circulation n'est pas entièrement contrôlée, en dépit du fait que des lieux spécifiques sont établis pour en réguler le bon fonctionnement.

Dans ce premier niveau, les savoirs mathématiques seront plus particulièrement examinés sous cinq aspects :

- le premier aspect est celui des *formes* sous lesquelles ces savoirs se donnent à voir, c'est-à-dire que l'on va chercher à identifier les manières dont on s'y prend pour les désigner dans tel ou tel lieu de l'institution ;
- le deuxième aspect est celui des *déterminations* dont ces savoirs procèdent, c'est-à-dire que l'on va chercher à spécifier les facteurs internes et/ou externes qui font que ces savoirs sont présents dans tel ou tel lieu de l'institution ;
- le troisième aspect est celui des *enjeux* dont ces savoirs relèvent, c'est-à-dire que l'on va chercher à déterminer le rôle qu'on leur fait jouer dans tel ou tel lieu de l'institution ;
- le quatrième aspect est celui des *types d'interactions* auxquelles ces savoirs aboutissent, c'est-à-dire que l'on va chercher à caractériser les façons dont on s'y prend pour favoriser leur appropriation dans tel ou tel lieu de l'institution ;
- le cinquième aspect est celui de l'*évolution* des savoirs tout au long de la formation, c'est-à-dire que l'on va chercher à rendre compte de la succession des savoirs qui advient dans tel ou tel lieu de l'institution.

L'examen de ces cinq aspects va nécessiter le recours à plusieurs concepts théoriques qui seront extraits de la TAD de Chevallard (1992).

Le niveau des investissements des savoirs

A la différence de ce qui a lieu d'être dans les classes de l'Eo, l'étude des savoirs mathématiques au niveau de l'institution ne présage pas, dans le cadre d'une institution spécialisée, de ceux qui seront effectivement investis dans chaque lieu qui la constitue. A ce titre, Conne (2003) parle de *dynamique dans la distribution de l'investissement des savoirs dans l'institution* qui est relayée de personnes à personnes, de lieux en lieux, et se modifie au fil du temps :

tous les savoirs ne sont pas investis de la même manière, et ne le sont pas de manière constante au cours du temps ; enfin, si les contraintes écologiques pèsent fort sur cet investissement, elles ne sont qu'un facteur dans cette distribution ; inmanquablement, et pour des raisons personnelles et/ou contingentes, des accents seront mis sur certaines facettes des mathématiques scolaires au détriment d'autres, et cela variera selon les lieux, les personnes-enseignantes et les personnes-élèves. (p.91-92)

C'est ainsi que l'on pourra parler non pas seulement d'*investissements de savoirs*, mais également de *sous-investissements*, de *surinvestissements* et de *désinvestissements de savoirs*, lesquels se produisent notamment quand le processus d'enseignement/apprentissage n'aboutit pas - ce qui peut arriver fréquemment dans un contexte spécialisé - et qu'il s'agit de déterminer dans quelle mesure il est indiqué de poursuivre (surinvestissement) ou au contraire de renoncer (désinvestissement) à l'enseignement.

Par ailleurs, le fait que la distribution de l'investissement des savoirs mathématiques dans une institution spécialisée se développe d'un lieu à l'autre et concerne tout autant les "personnes-enseignantes" que les "personnes-élèves" pose deux importantes questions qui sont tout à la fois au cœur du dispositif de recherche et des analyses qui en découlent (cf. chapitre 9) : en quoi

cette distribution des investissements s'avère-t-elle ou non un obstacle à l'enseignement qui est dispensé et aux apprentissages qui en résultent ? sous quelles conditions est-il possible de tirer parti de cette distribution, que ce soit d'un point de vue didactique pour les "personnes-enseignantes" ou d'un point de vue d'apprentissage pour les "personnes-élèves" ?

Dans la thèse, le parti pris pour étudier le niveau des investissements de savoirs a consisté à "entrer" dans quatre lieux de l'institution et à y investir, auprès des apprenties, en priorité et en grande majorité, des savoirs qui leur étaient habituellement soumis, assortis à d'autres, moins coutumiers, et de nouer des interactions à leur propos. A ce niveau, les savoirs effectivement investis - c'est-à-dire ceux qui ont été les "objets" d'interactions bien réelles - seront examinés selon trois aspects :

- le premier aspect relève à nouveau des *déterminations* dont ces savoirs procèdent, c'est-à-dire que l'on va chercher à identifier les facteurs internes et/ou externes à l'institution qui concourent à ce que ces savoirs soient investis dans chacun des lieux ; les concepts théoriques extraits de la TAD de Chevallard (1992) seront reconduits pour le faire ;
- le deuxième aspect concerne les *contextualisations* dans lesquels ces savoirs sont appelés à fonctionner, c'est-à-dire que l'on va chercher à caractériser les supports qui sont prétexte à leur enseignement/apprentissage et/ou à leur usage dans chacun des lieux ; ces savoirs étant essentiellement constitués, dans le cadre des données récoltées, d'exercices additifs et multiplicatifs, c'est à la théorie des champs conceptuels (TCC) de Vergnaud (1981, 1991) qu'il sera fait appel, afin d'en déterminer la *complexité cognitive* ;
- le troisième aspect examine les *algorithmisations* dont ces savoirs relèvent en vue et en cours de leur investissement, c'est-à-dire que l'on va chercher à déterminer les formes particulières, algorithmiques⁵¹ pour la plupart, selon lesquelles ils sont proposés pour être utilisés ; ici, c'est le travail de synthèse établi par Conne (1997) à propos des *calculs assistés par un diagramme* qui fournira les outils pour le faire.

Le niveau des interactions de connaissances

Au niveau des interactions de connaissances, on va plus s'intéresser au fonctionnement des savoirs, c'est-à-dire à comment les sujets impliqués dans l'interaction s'y prennent pour en faire usage. Conne (2003) caractérise l'interaction de connaissances comme suit :

L'activité cognitive est interaction. L'individu, source de l'interaction, en est le sujet et les choses avec lesquelles il interagit en sont les objets. Les choses ne sont jamais présentes toutes seules et les objets sont inter-reliés dans et par les interactions cognitives. On peut parler de milieu pour désigner ces ensembles d'objets. Parler de milieu est donc relatif à une (des) interaction (s) cognitive (s). Dans les systèmes que je considère, je distingue deux niveaux selon que j'inclus ou non dans ces milieux un ou d'autres sujets partenaires. Il y a interaction de connaissances (et plus seulement interaction cognitive) lorsque le milieu considéré contient non seulement des objets, mais encore plus d'un sujet, et donc des interactions cognitives diverses. (p.85)

De cette perspective très générale (car susceptible de s'appliquer à toute rencontre d'un individu avec une chose), on retiendra deux éléments importants : pour un sujet, le milieu se constitue à partir des objets et des relations inter-objets qu'il y distingue, ce qui signifie que, face à un ensemble de choses identiques, les milieux diffèrent selon les sujets qui entrent en interaction avec eux ; l'*interaction de connaissances* réunit de fait toujours au moins deux sujets, autrement on parlera simplement d'*interaction cognitive*.

⁵¹ Brousseau (1986, p.) affirme que l'algorithme : « sert de modèle unique ou presque à toutes les approches culturelles de l'enseignement ». On verra plus avant combien le contexte de la Fps en offre une illustration remarquable.

D'un point de vue didactique, cela signifie tout d'abord que l'interaction de connaissances va nécessairement réunir au moins un sujet qui se trouvera en position d'enseignant avec un sujet qui se retrouvera en position d'élève, mais cela n'empêche pas toutefois, qu'à certains moments, chacun des sujets se retrouve soi-même en situation d'interaction cognitive. Cela veut dire aussi que dans l'interaction, tant le sujet-enseignant que le sujet-élève développe une activité cognitive propre ce que Conne (1998) désigne dans les termes d'*activité du couple enseignant-enseigné*. Et cela implique enfin que chaque activité cognitive est bien distincte, du fait que les milieux constitués le sont aussi.

Dans la thèse, le fonctionnement des savoirs que l'on va appréhender au niveau des interactions de connaissances se livrera essentiellement au travers des *productions* des apprenties, considérées comme le *produit de l'activité du couple enseignant-enseigné*. Ces productions appelleront un travail d'interprétation qui se déclinera à nouveau selon trois aspects :

- le premier aspect est relatif au *type de contrat* qui préside au déroulement des interactions, c'est-à-dire que l'on va chercher à caractériser les conditions particulières dans lesquelles se développent les interactions quand elles ont pour enjeu l'appropriation de savoirs anciens (ce qui est la plupart du temps le cas) ; ces contrats sont essentiellement des *contrats de reprises* définis par Brousseau (1995) dans la TDS et développés plus tard par Bloch & Salin (2004) ;
- le deuxième aspect est relatif aux *productions* (Conne, 1985) des apprenties et aux *erreurs* (Salin, 1976) qui adviennent dans le déroulement des interactions et des interprétations qu'il est possible d'en réaliser en termes de savoirs, c'est-à-dire que l'on va chercher à reconstituer les procédures qui président aux erreurs pour les interpréter ; on s'appuiera essentiellement pour le faire sur les travaux consacrés aux erreurs dans les *algorithmes de calcul* réalisés par Brun & Conne (Brun, & al., 1989 ; Brun & Conne, 1993 ; Brun, & al., 1994 ; Portugais, 1995 ; Conne, 1997 ; Brun, 1999) et sur le concept d'*obstacle* tel qu'il a été thématiqué dans la TDS par Brousseau (1983) ;
- le troisième aspect est relatif à la dynamique des interactions propres à l'activité du couple enseignant-enseigné, c'est-à-dire que l'on va chercher à comprendre comment les interactions se conduisent et se développent au détour des productions qui y apparaissent et des interprétations auxquelles elles donnent lieu ; ici, ce sont les idées de *pertes* et *prises de contrôles* développées par Conne (2003) auxquelles il sera fait recours.

PROPOSITIONS CONCEPTUELLES AU NIVEAU DE L'INSTITUTION

Au niveau de l'institution, on va donc s'intéresser tour à tour aux *formes* sous lesquelles les savoirs se donnent à voir, aux *déterminations* dont ils procèdent, aux *enjeux* dont ces savoirs relèvent et aux *types d'interactions* auxquelles ils donnent lieu, ainsi qu'à l'*évolution* dont ils font preuve tout au long de la formation des apprenties.

Formes des savoirs

Le concept auquel je vais recourir pour caractériser les formes des savoirs est celui de *praxéologie* qui, dans la TAD de Chevallard, se décline en un quadruplet composé de *tâches*, de *techniques*, de *technologies* et de *théories*. Ce concept a été principalement élaboré pour qualifier la fonction professorale et analyser les pratiques enseignantes (Chevallard, 1999). Il aspire toutefois à une portée bien plus générale dans le sens où Chevallard affirme que : « tout action humaine procède d'une praxéologie » (1997, p.38).

La constitution d'une praxéologie (ou d'une organisation praxéologique) repose sur plusieurs postulats (Bosch & Chevallard, 1999) :

Toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches relativement bien circonscrites qui se découpent dans le flux de la pratique.

[...] L'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique.

[...] Pour pouvoir exister dans une institution, une technique implique l'existence d'un discours descriptif et justificatif des tâches et techniques qu'on appelle la technologie de la technique.

[...] Toute technologie a besoin à son tour d'une justification, que l'on appelle la théorie de la technique, et qui en constitue le fondement ultime. (pp.84-86)

Les tâches représentent ainsi la base d'une praxéologie. A chacune de ces tâches est associée une technique qui permet de la réaliser. On peut envisager plusieurs techniques pour l'effectuation d'une même tâche et plusieurs tâches qui peuvent être accomplies à l'aide d'une technique identique. La technique utilisée dans la réalisation d'une tâche dépend de l'institution dans laquelle celle-ci a lieu. Dans certains cas, les tâches deviennent tellement routinières qu'il devient difficile de les distinguer de leurs techniques respectives. Dans d'autres cas, les tâches ne possèdent pas de techniques associées pour les accomplir. On parlera alors de tâches problématiques qui appellent l'élaboration de techniques nouvelles. Le binôme tâches-techniques constitue le versant pratique (praxis) ou savoir-faire d'une praxéologie.

L'existence d'une technique dans une institution donnée nécessite ensuite qu'elle soit justifiée. Elle demande donc qu'un discours soit porté à son sujet pour qu'elle soit tout à la fois compréhensible et légitime. Ce discours explicatif, qui se veut rationnel, constitue la technologie de la technique, laquelle est à son tour éclairée et validée par une théorie sur laquelle elle repose. On peut là aussi envisager plusieurs technologies pour une même technique et différentes techniques qui relèvent d'une même technologie. Il arrive également que la technique et le discours qui est porté sur elle se confondent. Le binôme technologie-théorie constitue le versant théorique (logos) ou savoir d'une praxéologie.

Selon l'étendue des tâches à partir desquelles elle se constitue et qu'elle permet en retour d'accomplir, une praxéologie pourra encore être qualifiée de ponctuelle, de locale, de régionale ou de globale. Afin de distinguer ces différents paliers, Bosch et Chevallard donnent l'exemple de l'enseignement de la proportionnalité au collège :

On pourra parler d'une organisation praxéologique *ponctuelle* autour de l'organisation de tel type de problèmes proportionnalité - organisation qui viendrait répondre à la question « comment résoudre un problème de ce type ? » -, d'une organisation *locale* autour de la résolution de différents types de problèmes de proportionnalité (c'est-à-dire du thème de la proportionnalité), enfin d'une organisation *régionale* autour par exemple de la notion de fonction numérique (qui correspond à tout un secteur des mathématiques enseignées au secondaire). (ibid., p.86)

Le concept de praxéologie tend ainsi à élargir l'idée même du savoir qui n'est habituellement considéré que selon le versant "logos" de l'organisation. Or, comme le rappellent Bosch et Chevallard : « génétiquement, ce sont fréquemment les besoins de la pratique, c'est-à-dire les besoins de techniques, qui sont à l'origine des praxéologies » (ibid., p.87), et donc des savoirs.

Usage qui en sera fait dans la thèse

Le concept de praxéologie et ses constituants seront donc utilisés pour qualifier le versant pratique des savoirs mathématiques au niveau de l'institution. C'est en effet essentiellement sous cette perspective qu'on les rencontre dans les différents lieux qui composent le CFPS du Château de Seedorf, au sein des programmes qui balisent la formation des apprenties où le

savoir exerce une *fonction de repère* (Conne, Favre, Giroux, 2006), sachant que, dans la TAD, il est possible d'envisager les cas où la praxéologie s'avère incomplète, du fait que :

elle puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée - peut être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnelle -, en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal-identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante. (Chevallard, op.cit., p.38)

Déterminations des savoirs

S'agissant ensuite des déterminations dont les savoirs mathématiques qui apparaissent au niveau de l'institution procèdent, c'est aux concepts de *système didactique* et de *système d'enseignement* tels qu'ils sont envisagés dans le cadre de la TAD (Chevallard, 1992) que je vais référer. Ces concepts ont été définis pour appréhender les conditions d'existence d'un système didactique dans une institution donnée et révéler les contraintes qui participent et déterminent le fonctionnement du système.

Dans la TAD, Chevallard définit un système didactique à l'intérieur d'une institution (I) comme un système comportant :

un ou des sujets de I qui viennent y occuper une position d'enseignant E, un ou des sujets de I qui viennent y occuper une position d'élève e, et enfin un objet appartenant à $E_I(e)$, l'ensemble des enjeux didactiques pour I^{52} . (ibid., pp. 92-93)

L'existence d'un système didactique dans une institution suppose alors qu'un certain nombre de conditions, que Chevallard qualifie d'écologiques, soient remplies. Parmi ces conditions, il en est une première qui veut qu'un système didactique n'existe généralement pas seul. Dans la plupart des cas en effet, sans forcément que les acteurs qui le composent en aient pleinement conscience, le système didactique est associé à d'autres systèmes didactiques. Ainsi, un élève de l'école primaire constituera, vis-à-vis d'un même savoir, plusieurs systèmes didactiques en association avec les personnes qui vont tour à tour prendre la position d'enseignant dans chaque système : ce sera, par exemple, avec son enseignant et ses camarades de classe, puis avec ses parents au moment des devoirs, ou tout simplement avec lui-même dans le cadre d'un système autodidacte où il occupera conjointement les positions d'enseignant et d'élève.

Une deuxième condition veut qu'aucun système didactique ne puisse vivre dans un vide institutionnel. Chevallard affirme en effet que : « derrière tout système didactique, vous trouverez un autre système qui apparaît génériquement comme l'une de ses conditions de possibilité et que je nomme système d'enseignement » (ibid., p.96).

Un système d'enseignement est composé d'une pluralité de systèmes didactiques et constitue l'environnement direct de chacun de ces systèmes. C'est lui qui en assure tout à la fois les conditions d'existence et qui en détermine, pour une part essentielle, ce qui est possible qu'il s'y réalise, alors même que les acteurs qui interagissent dans chaque système n'en ont à nouveau pas vraiment conscience : « Nous avons tendance à oublier - à refouler, pourrait-on dire - le système d'enseignement et les déterminations qu'il impose aux systèmes didactiques qui vivent en son sein » (ibid., p.100).

Un système didactique doit donc être considéré comme un système en étroite relation avec d'autres systèmes didactiques, ainsi qu'avec un système d'enseignement auquel il appartient. Il constitue de fait un système ouvert sur d'autres systèmes. Ces systèmes exercent à son encontre

⁵² Le formalisme auquel Chevallard a recours ne sera pas repris au-delà de cette citation, car il n'est pas utile aux développements qui suivent.

un certain nombre de contraintes qui le déterminent et qui viennent s'ajouter aux contraintes internes auxquelles il est déjà soumis :

Par rapport à une institution⁵³ donnée (au sein d'un univers culturel déterminé), on distinguera par méthode deux ordres de contraintes : des contraintes externes, liées au système d'interrelation des institutions ; des contraintes internes, liées au fonctionnement de l'institution (Chevallard, 1988c, p.97)

Tout comme un système didactique, un système d'enseignement est lui aussi en interrelation continue avec d'autres systèmes. A l'externe, ce sont pour une part les systèmes didactiques et les systèmes d'enseignement avec lesquels il interagit et pour une autre part l'environnement sociétal dans lequel il s'inscrit et auquel il participe, qui forment son environnement direct. Dans cet environnement figure en outre cette institution particulière, liée à tout système d'enseignement, que Chevallard a nommé "noosphère" et qui se définit : « par l'ensemble des personnes et des groupes dont la fonction est d'assurer plus généralement l'interface, la relation entre le système d'enseignement et la société globale » (Arsac, 1992, p.11). Systèmes didactiques et systèmes d'enseignement externes, noosphère et environnement sociétal exercent sur le système d'enseignement des contraintes que l'on peut qualifier d'externes.

A l'interne, ce sont les systèmes didactiques dont il se compose qui le soumettent à leur tour à des contraintes que l'on peut qualifier d'internes.

Or, selon Chevallard, ce sont bien ces diverses contraintes, internes comme externes, qui vont déterminer l'existence d'un savoir au sein d'un système donné :

Les contraintes externes et internes pesant sur l'existence et le fonctionnement des institutions didactiques (...) déterminent à la fois, pour un savoir de référence donné, quels éléments de ce savoir, et quels rapports à ces éléments, pourront vivre au sein d'une institution didactique vis-à-vis de ce savoir : un élément de savoir ne peut vivre durablement si l'on ne peut (ou l'on ne sait) faire exister un rapport à cet élément satisfaisant les différentes contraintes imposées. (op.cit., p.105)

Usage qui en sera fait dans la thèse

Afin d'identifier les déterminations dont procèdent, au niveau de l'institution, les savoirs mathématiques en jeu dans le contexte de la Fps, on considérera le CFPS comme un système d'enseignement, composé à l'interne de différents systèmes didactiques, et lié à l'externe à d'autres systèmes didactiques et d'enseignement ainsi qu'à une noosphère. On examinera plus particulièrement quels sont ces différents systèmes en interrelation avec le CFPS, puis en quoi et comment ces systèmes œuvrent à l'existence et déterminent les savoirs mathématiques qui évoluent en son sein.

Enjeux des savoirs et types d'interactions

Au niveau de l'institution, la double question de l'enjeu dont relève les savoirs mathématiques et des types d'interactions auxquels ces savoirs donnent lieu seront considérées au travers de la distinction entre *didactique familial* et *didactique scolaire* qui est également due à Chevallard (1988a) à une période où la TAD était en voie de constitution. Il s'agissait de montrer que les conditions qui président à l'enseignement et à l'apprentissage diffèrent notablement selon que l'on se trouve dans un contexte scolaire ou dans un contexte familial et que, de ce fait, les milieux socio-professionnels d'où proviennent les élèves ne les préparent pas de la même façon à leur entrée à l'école et aux diverses médiations qui y sont à l'œuvre pour favoriser l'appropriation des savoirs.

⁵³ Dans la citation, l'idée d'*institution* englobe tout à la fois celle de *système didactique* et de *système d'enseignement*.

Selon Chevallard, l'entrée d'un individu (quel qu'il soit) dans une institution (quelle qu'elle soit) implique de façon concomitante son entrée dans un contrat, soit un contrat didactique, pour une institution comme l'école. L'individu devient dans le même temps *sujet de l'institution* : « par son entrée dans l'institution et son contrat, l'individu concret est assujéti à l'ordre de l'institution ; il devient sujet de l'institution : dans le cas de l'école, un sujet didactique » (p.23).

Pour un enfant, cet accès au statut de sujet didactique est loin d'être trivial, puisqu'il va l'installer dans une position singulière, c'est-à-dire différente de celle qu'il occupe dans le cadre de sa famille. Cette nouvelle position se manifeste notamment au travers des injonctions d'un nouvel ordre auxquelles il devra désormais répondre. Si, dans la famille, en effet, les injonctions sont essentiellement de nature instrumentale, c'est-à-dire que la plupart des demandes qui lui sont adressées impliquent des actions à réaliser, il n'en va pas de même dans le cadre de l'école, où la majorité des injonctions sont de nature didactique, prenant la forme de fausses questions, destinées à vérifier ce qu'il sait : « les questions de l'enseignant relatives au savoir enseigné sont ainsi de fausses questions - et c'est même à ce fait qu'il pose de fausses questions qu'on peut l'identifier, instantanément, comme étant l'enseignant » (ibid., p. 26).

La distinction entre injonctions instrumentales et injonctions didactiques se révèle entre autres dans le fait que les premières sont substituables - l'enfant interpellé peut trouver un remplaçant pour exécuter l'action qui lui est demandée - alors que les secondes ne le sont pas : impossible de dire à un autre élève de répondre à sa place (sous peine de se voir reproché d'avoir triché) pour faire état de ce qu'il sait. Pour certains élèves, elle est grandement matière à confusions⁵⁴.

A partir de cet exemple, Chevallard tend à montrer que l'institution "famille" et l'institution "école" fonctionnant de manière différente, elles en viennent à créer des types de didactique spécifiques : le *didactique familial* pour la première et le *didactique scolaire* pour la seconde. Fondamentalement, ces deux types didactiques se distinguent au moins sous trois traits principaux⁵⁵ :

- le premier trait concerne précisément l'injonction didactique qui, dans le cadre familial, va généralement de celui qui ne sait pas à celui qui sait : il y a demande de donner le savoir -, alors qu'à l'intérieur de l'institution scolaire, c'est généralement le contraire, allant de celui qui sait vers celui qui ne sait pas : il y a demande de montrer le savoir ;
- le deuxième trait se rapporte à la durée des séquences d'enseignement/apprentissage qui, au sein de la famille, sont généralement courtes - étant prises dans l'action du quotidien - alors que leur durée moyenne dans le cadre de l'école - déterminées par un horaire commun à tous - oscille entre une à deux périodes de quarante-cinq minutes ;
- le troisième trait est lié au caractère disconnexe des séquences dans le cadre familial - elles ont lieu quand l'occasion se présente et sont répétées si le besoin s'en fait sentir - alors que dans l'institution scolaire, elles sont pensées, construites et organisées de façon linéaire, s'appuyant sur des savoirs anciens pour favoriser l'accès à des savoirs nouveaux.

⁵⁴ Chevallard donne un exemple de confusion qui peut advenir en classe entre ces deux types d'injonction quand un élève, à la demande du maître de se rendre au tableau, proteste en disant : « "M'sieur, pourquoi moi ? Qu'est-ce que je vous ai fait ?", dénonçant ainsi, en la situant comme simplement instrumentale, la signification fondatrice de l'ordre didactique, de l'injonction à laquelle il devrait se soumettre pour être un sujet respectueux de l'institution » (ibid., p.29).

⁵⁵ Chevallard affirme alors qu'au lieu de reconnaître ces traits distinctifs devant ses sujets et de les prendre en charge, l'école fait au contraire tout pour les dissimuler, empruntant même à la culture familiale certains modes de faire - tel le jeu ou les histoires que l'on raconte - qui font croire à l'enfant que c'est comme dans la famille, alors que ce n'est pas le cas. L'enjeu d'un jeu dans l'institution scolaire n'est en effet pas le même que dans l'institution familiale. Le jeu dans la famille est, en principe, un moment de détente, de plaisir partagé, alors qu'à l'école, il est un support à l'apprentissage du savoir dont il faudra pouvoir se saisir. Il est donc impératif que, s'agissant d'un jeu, l'élève sache qu'à l'école : « le jeu n'est pas l'enjeu, qu'il n'est qu'un trompe-l'œil, qu'il ne faut pas se laisser prendre au jeu, au risque de manquer les enjeux propres de l'institution didactique » (ibid., p.33).

Usage qui en sera fait dans la thèse

Pour caractériser les enjeux des savoirs mathématiques qui se révèlent au niveau de l'institution et le type d'interactions auxquels ils donnent cours dans le contexte de la Fps, il s'agira de déterminer en premier lieu si l'enjeu est bel et bien d'ordre didactique. En second lieu, on cherchera à caractériser de quel type de didactique les interactions dont ces savoirs mathématiques relèvent. La distinction "didactique familial" et "didactique scolaire" ne sera toutefois pas reprise sous ces deux appellations spécifiques, parce que celles-ci s'avèrent impropres à qualifier des interactions qui se déroulent dans le cadre d'un centre de formation professionnelle qui n'est ni familial et ni non plus scolaire. Afin de reprendre ce que ces deux appellations recouvrent, mais en les dégageant des contextes qui les ont vus naître, je leur préférerai les termes de *didactique improvisé* (en lieu et place de "didactique familial") quand l'enseignement se fait plutôt à la demande de l'enseigné - ou plus précisément quand la tâche à accomplir par l'enseigné appelle l'usage d'un savoir mathématique -, qu'il est pris sur le vif et de courte durée ; et de *didactique organisé* (en lieu et place de "didactique scolaire") quand l'enseignement se fait plutôt à l'initiative de l'enseignant - car inscrit dans un programme -, qu'il est planifié et de durée substantielle.

Evolution des savoirs durant la formation

Le dernier aspect des savoirs mathématiques qui sera considéré au niveau de l'institution concerne leur évolution tout au long de la formation des apprenties. Là, je m'appuierai sur les concepts d'*objets sensibles* et d'*objets latents* que Chevallard (1988b) a également définis à une période où la TAD était en voie d'élaboration. Il s'agissait d'une part de distinguer, dans une institution particulière, les savoirs qui font l'objet d'un enseignement explicite, de ceux qui n'en font pas, mais qui participent néanmoins au processus d'enseignement ; puis, d'autre part, de marquer la transformation des rôles endossés par un savoir dans cette institution au fur et à mesure de la progression du temps didactique.

Pour ce faire, Chevallard envisage, à l'interne d'une institution donnée, un objet de savoir enseigné, c'est-à-dire un objet pour lequel l'institution considérée nourrit un projet d'enseignement explicite. Il désigne alors par le terme d'*objet pertinent*, tous les objets qui vont concourir à l'établissement d'un rapport personnel à l'objet de savoir enseigné que l'institution pourra reconnaître idoine, c'est-à-dire conforme au rapport officiel attendu. Parmi ces objets pertinents, certains resteront entièrement ignorés de l'ordre didactique et seront qualifiés d'*objets manquants* ; tandis que d'autres seront rendus explicites aux yeux de l'institution et seront qualifiés d'*objets institutionnels*.

Au sein des objets institutionnels, il y a encore lieu de faire la part entre les objets pour lesquels l'institution établit des attributions de réussite ou d'échec, de façon à faire évoluer le rapport personnel des élèves vers le rapport officiel, de ceux pour lesquels elle ne le fait pas. Il nomme *objets sensibles*, ces objets au sujet desquels un verdict de réussite ou d'échec est attribué. En contrepartie, cela signifie qu'il existe, au sein des objets institutionnels, toute une classe d'objets qui ne sont pas considérés comme sensibles par l'institution et vis-à-vis desquels les élèves seront en quelque sorte livrés à eux-mêmes pour faire évoluer leur rapport personnel.

A titre d'exemple, Chevallard prend l'objet "exercices" que les élèves ont à accomplir en guise de devoirs à la suite d'un cours. Le contrat qui prévaut généralement vis-à-vis des exercices est qu'ils "sont à faire". L'injonction est donc purement instrumentale et c'est ainsi que vont l'entendre certains élèves : il faut les faire pour qu'ils soient derrière eux et qu'on n'en parle plus. D'autres élèves, en revanche, au cours même de la réalisation de ces exercices, vont chercher à en tirer parti, c'est-à-dire à en réaliser l'étude : déterminer, par exemple, comment on a recours à tel savoir dans tel ou tel exercice, distinguer les exercices où il est pertinent de

l'employer, de ceux où il ne l'est pas, etc. Tels sont les savoirs que pourront produire ces élèves en "faisant" leurs exercices, transformant pour leur propre compte l'injonction instrumentale du "faire" en injonction didactique. Or ces savoirs qui ne font pas partie des objets sensibles de l'institution sont pourtant des savoirs qui aideront ceux qui ont su les développer à se rapprocher du rapport officiel attendu de l'institution⁵⁶. Chevallard désigne alors par *savoir didactique* ce corps de savoirs, inégalement partagés par les élèves de la classe, qui participent à l'évolution de leur rapport personnel et concourent à l'attribution d'un rapport institutionnel adéquat.

Au fur et à mesure de la progression du temps didactique, les objets sensibles vont également rejoindre ce savoir didactique pour laisser place à l'enseignement de nouveaux savoirs. Ils sont en quelque sorte désensibilisés par l'institution et passent de la sorte du statut d'objets sensibles à celui d'*objets latents*, c'est-à-dire des objets qui ne sont plus l'enjeu direct de l'enseignement, mais qui peuvent néanmoins, à tout instant, être mobilisés, réactivés, pour participer à l'enseignement des nouveaux objets :

Les objets de savoir enseignés cessent, à plus ou moins long terme, de figurer au rang des enjeux didactiques, sont expulsés du cercle du savoir enseigné et entrent alors dans la sphère du savoir didactique. [...] On parlera à ce propos d'objets *latents*, objets déclassés de l'institution, qui sont soit des objets institutionnels n'ayant jamais été sensibles - pour lesquels le rapport officiel n'a jamais été qu'indiqué, et non évalué - soit des objets de l'institution que le passage du temps didactique a désensibilisés. (Chevallard, *ibid.*, p.35)

Relevons pour terminer que le *savoir didactique* de la TAD correspond en partie à ce que Brousseau désigne par le concept de *mémoire didactique* (Brousseau et Centeno, 1991) dans le cadre de la TDS. Une première différence tient cependant au fait que, chez Chevallard, le savoir didactique est considéré du point de vue institutionnel (ou macro-didactique), tandis que la mémoire didactique chez Brousseau concerne directement, d'un point de vue situationnel (ou micro-didactique), l'enseignant et les rappels, divers, qu'il fait de cette mémoire au cours de son enseignement ; une deuxième différence veut que chez Brousseau, la mémoire didactique ne se compose pas seulement de savoirs, vu qu'elle : « se manifeste dans le processus d'enseignement par l'utilisation d'informations et de renseignements personnalisés, contextualisés, temporalisés et non universels » (*ibid.*, p.203).

Usage qui en sera fait dans la thèse

En considérant, toujours au niveau de l'institution, les savoirs mathématiques des programmes qui jalonnent le parcours des formations des apprenties, on cherchera à montrer comment s'opère le passage des objets sensibles aux objets latents dans le cadre de la Fps. Il s'agit d'identifier d'une part les savoirs qui, d'une année à l'autre, disparaissent des programmes passant d'objets sensibles à objets latents pour constituer le savoir didactique nécessaire à l'émergence de nouveaux objets et d'autre part ceux qui y apparaissent pour former ces nouveaux objets que l'on pourra à leur tour qualifier de sensibles.

PROPOSITIONS CONCEPTUELLES AU NIVEAU DES INVESTISSEMENTS DE SAVOIR

Au niveau des investissements de savoirs, on va tout d'abord s'intéresser aux *déterminations* dont ces investissements relèvent ; ensuite, il s'agira d'examiner les *contextualisations*

⁵⁶ Toujours à propos de l'objet "exercices", Chevallard montre combien la sensibilité d'un objet dépend de l'institution où il se trouve : le fait de proposer un exercice déjà fait et corrigé de façon à pouvoir en réaliser l'étude apparaîtra manifestement comme une forme de rupture de contrat au niveau de l'enseignement secondaire, alors qu'il deviendra une pratique régulière dans certaines classes supérieures.

auxquelles ces savoirs donnent lieu en vue de leur enseignement/apprentissage d'une part et de leur utilisation en situation d'autre part. Enfin, on examinera les *algorithmisations* dont ils font l'objet en vue de leur appropriation et de leur usage.

Déterminations des savoirs

Concernant les déterminations qui prévalent aux investissements de savoirs de la Fps qui seront examinés dans la thèse, on reprendra les concepts de *système didactique* et de *système d'enseignement* extraits de la TAD (déjà décrits précédemment et donc non repris ici), en s'intéressant à nouveau aux contraintes internes et externes dont un système qu'il soit didactique ou d'enseignement fait l'objet. Il s'agira notamment de déterminer les conditions qui, dans un système particulier, font qu'un investissement de savoir s'y produise, tout comme celles qui, au contraire, l'en empêchent.

Contextualisations des savoirs

L'idée de contextualisation de savoir relève d'une deuxième fonction du savoir - après celle de fonction de repère - qui, dans l'enseignement, vise à le *contextualiser en une situation objective* (Conne, Favre, Giroux, 2006). Un savoir mathématique s'enseigne en effet toujours en lien avec une variété de situations⁵⁷ qui en constituent autant de contextualisations possibles. Investir un savoir suppose également que cet investissement se fasse en relation avec au moins une situation dans laquelle il est impliqué.

Afin de caractériser les contextualisations spécifiques dont les savoirs font l'objet lorsqu'ils sont matière à investissement, c'est au concept de *complexité cognitive*, issu de la TCC de Vergnaud (1991) que je vais recourir. Ce dernier a en effet été établi de façon à classer et hiérarchiser, d'un point de vue cognitif, les situations de références à un même savoir, et donc à en déterminer la complexité relative ; sachant que, d'un seul point de vue mathématique, ces situations pourraient être considérées d'un niveau de complexité similaire. Dans la TCC, Vergnaud propose de considérer un champ conceptuel comme un ensemble de situations.

Par exemple, pour le champ conceptuel des structures additives, l'ensemble des situations qui demandent une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations ; et pour les structures multiplicatives, l'ensemble des situations qui demandent une multiplication, une division ou une combinaison de telles opérations » (ibid., p.146).

L'importance de pouvoir considérer les situations d'un champ conceptuel donné tient d'abord au fait que les réponses d'un sujet et les processus cognitifs qui ont permis d'y aboutir sont toujours fonction des situations auxquelles il s'est et se trouve confronté. L'analyse des situations facilitera ensuite le travail d'interprétation des réponses des élèves et d'identification des procédures qui les ont produites. L'autre intérêt d'établir une classification des situations est de pouvoir en déterminer tout à la fois la diversité et la complexité en vue de fonder le choix de celles qui seront soumises aux élèves. Vergnaud insiste en effet sur le fait que : « les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures que l'on veut enseigner. » (ibid., p.150)

⁵⁷ Rappelons que le terme de *situation* est polysémique en ddm. On lui attribuera ici l'acception que lui donne Vergnaud dans la TCC : « celui-ci n'a pas ici le sens de situation didactique, mais plutôt celui de tâche, l'idée étant que toute situation complexe peut être analysée comme un combinaison de tâches dont il est important de connaître la nature et la difficulté propres » (1991, p.146). Dans son ouvrage de 1981, Vergnaud parle plutôt de "problèmes" additifs et multiplicatifs que de situations additives ou multiplicatives, le lecteur sera donc invité à considérer, dans les développements qui suivent, les trois termes - situations, problèmes et tâches - comme équivalents.

Au sujet de la diversité des situations, Vergnaud affirme qu'il est difficile d'aboutir à une catégorisation en se référant uniquement à celles que l'on peut rencontrer dans le quotidien ; d'une part, parce que le quotidien n'offre qu'un petit nombre de cas parmi l'ensemble des situations possibles et, d'autre part, parce que les situations du quotidien sont souvent immergées dans un ensemble d'informations pas ou peu pertinentes et qu'il est souvent délicat d'identifier les questions qu'elles sont susceptibles de poser. Il propose dès lors de s'intéresser aux relations de base qui peuvent exister relativement à un concept donné et de générer, partant de ces relations de base, l'ensemble des situations possibles. Ainsi, pour le champ conceptuel des structures additives, Vergnaud (ibid., p.152) distingue six relations additives de base⁵⁸ : « 1° la composition de deux mesures en une troisième ; 2° la transformation (quantifiée) d'une mesure initiale en une mesure finale ; 3° la relation (quantifiée) de comparaison entre deux mesures ; 4° la composition de deux transformations ; 5° la transformation d'une relation ; 6° la composition de deux relations » (ibid., p.152), qui, suivant le terme de la relation sur lequel porte la question, et le sens - positif, négatif - des transformations et des relations, permet de constituer l'ensemble des situations du champ considéré.

L'établissement de la *complexité cognitive* d'une situation relevant d'un champ donné dépendra des relations sur la base desquelles elle se constitue et qui en déterminent la *structure*. Mais elle résulte également de deux autres facteurs que sont les *valeurs numériques* auxquelles la situation fait appel et le *domaine d'expérience* auquel elle réfère :

Cette diversité de cas peut cependant être assez aisément hiérarchisée en considérant les trois grands facteurs de la complexité cognitive : la structure des problèmes, les valeurs numériques, et les domaines d'expérience (ibid., p.155).

Usage qui en sera fait dans la thèse

Afin de déterminer la complexité cognitive des situations relatives aux investissements de savoirs de la Fps qui seront examinés dans la thèse, c'est en priorité au champ conceptuel des structures multiplicatives que l'on va référer.

Selon Vergnaud (1981), ce champ se constitue de deux grandes formes de relations de base. La première est une relation quaternaire qui unit deux quantités d'un premier domaine de grandeurs à deux quantités d'un second domaine. Il désigne cette relation par le terme d'*isomorphisme de mesures* (p.161), dans le sens où c'est un isomorphisme qui règle les relations existant entre les deux domaines de grandeurs considérés.

Cette relation permet de générer quatre classes de problèmes élémentaires dans lesquels trois quantités sont données et où il s'agit de déterminer la quatrième (op.cit., pp.153-154) :

E	F
1	a
b	x

la multiplication

E	F
1	a
x	c

la division-quotition

E	F
1	x
b	c

la division-partition

E	F
a	b
c	x

la quatrième proportionnelle

⁵⁸ Les six relations peuvent être symbolisées de la manière suivante : 1° EEE (état-état-état) ; 2° ÉTÉ (état-transformation-état) ; 3° ECE (état-comparaison-état) ; 4° TTT (transformation-transformation-transformation) ; 5° RTR (relation-transformation-relation) ; 6° RRR (relation-relation-relation).

Dans chacune des classes, l'isomorphisme qui unit les deux domaines de grandeurs fait qu'il est possible d'opérer horizontalement ou verticalement pour résoudre le problème. Ainsi, dans la première classe de problèmes, on pourra soit multiplier horizontalement b par a , soit multiplier verticalement a par b pour déterminer la quantité manquante⁵⁹. Vergnaud montre alors que si, d'un point de vue numérique, les deux procédés sont équivalents, du fait de la commutativité de la multiplication qui veut que $a \times b = b \times a$, il n'en est pas de même d'un point de vue conceptuel, où le premier procédé est plus délicat à réaliser que le second.

- La multiplication verticale suppose en effet le simple recours à un opérateur sans dimension (que Vergnaud désigne par le terme d'*opérateur scalaire*) qui, à l'intérieur de chaque domaine, permet de transformer, par multiplication de b , respectivement 1 en b et a en x ; alors que la multiplication horizontale, en faisant passer d'un domaine de grandeurs à un autre domaine de grandeurs implique l'usage d'un *opérateur fonction* pour transformer, par multiplication de a , respectivement 1 en a et b en x .
- Dans les deuxième et troisième classes de problèmes, il s'agira de recourir à une division pour déterminer la quantité manquante, du fait que la multiplication par un décimal/rationnel de type $1/b$, c/b dans le premier cas ou de type $1/a$ ou c/a dans le second ne sont pas des opérations envisageables pour les jeunes élèves auxquels réfèrent les propos de Vergnaud. Ceci implique un niveau de complexité qui sera supérieur à la première classe, et distinct entre les deuxième et troisième classes, puisque dans le cas de la division-partition la division opérera verticalement à l'intérieur d'un même domaine de grandeurs pour transformer, par division de b , respectivement b en 1 et c en x , tandis qu'elle procédera horizontalement d'un domaine de grandeurs à un autre domaine de grandeurs dans le cas de la division-quotition pour transformer par division de a , respectivement a en 1 et b en x .
- La quatrième classe de problèmes relève d'un niveau de complexité encore supérieur dans le sens où aucune valeur unitaire n'est donnée. Il ne sera donc pas possible de passer directement par la multiplication ou la division d'un nombre figurant dans le schéma pour déterminer la valeur manquante : il s'agira donc soit de déterminer le rapport c/a pour pouvoir opérer de manière verticale, soit de déterminer le rapport b/a pour pouvoir le faire de façon horizontale, ce qui là encore accroît sensiblement le niveau de complexité du problème.

La deuxième grande forme de relation multiplicative est une relation ternaire qui, à deux quantités relatives à deux domaines de grandeurs distincts, en associe une troisième appartenant à un domaine de grandeurs différent des deux premiers. Cette seconde grande forme de relation multiplicative est intitulée *produit de mesures* par Vergnaud (op.cit., p.180), parce qu'elle repose sur une notion mathématique dénommée *produit cartésien* qui : « à deux ensembles E et F , fait correspondre un nouvel ensemble, appelé ensemble produit et noté EXF , formés de tous les couples ordonnés (e,f) d'éléments de E et de F » (Favre, 1992). Elle permet de générer deux classes de problèmes élémentaires, dans lesquels deux quantités sont données et où il s'agit de déterminer la troisième :

E	F
e	f
x	
EXF	

la multiplication

E	F
e	x
g	
EXF	

la division

⁵⁹ Le fait que l'on ait dans les deux cas recours à une multiplication explique sans doute que Vergnaud ait donné le nom de "multiplication" à l'ensemble de la classe.

Dans la première classe, le produit cartésien permet d'opérer par la multiplication de $e \times f$ pour trouver la quantité manquante, alors que, dans la seconde classe, c'est, de façon réciproque, la division de g par e qui permet de trouver la quantité manquante, ce qui implique, étant donné le recours à la division, un niveau de complexité supérieur.

Après avoir défini ces deux grandes formes de relation multiplicative, Vergnaud montre encore qu'elles peuvent se combiner au sein d'un même problème. Il désigne du terme de *problèmes complexes* (ibid., p.181), ces problèmes qui ne se réduisent pas à une, mais à plusieurs relations de base. En ce qui concerne les structures multiplicatives, il est possible d'en considérer au moins deux types, à savoir les problèmes où sont engagées plusieurs relations multiplicatives - soit des *problèmes complexes de type multiplicatif pur* - et les problèmes dans lesquels une ou plusieurs relations multiplicatives viennent se combiner à une ou plusieurs relations additives - soit des *problèmes complexes de type mixte*.

Une fois la relation ou la combinaison de relations de bases établie, il s'agira encore de considérer les deux autres facteurs constitutifs de la complexité cognitive d'une situation multiplicative. Vergnaud reste toutefois beaucoup moins disert à leur sujet. Vis-à-vis des *valeurs numériques*, il distingue simplement le cas où ces valeurs numériques sont composées de nombres entiers (positifs), de celui où elles comprennent des nombres décimaux/rationnels (positifs), arguant notamment que l'usage de : « la multiplication comme addition répétée (...) se fait beaucoup plus aisément avec des grandeurs discrètes et des nombres entiers » (ibid., p.163) ou en relevant : « la difficulté de la multiplication et de la division par un décimal, surtout par un décimal plus petit que 1 » (ibid., p.154). Tandis qu'au sujet du *domaine d'expérience* auquel la situation réfère, Vergnaud affirme seulement que : « on ne fait pas fonctionner le modèle de la proportionnalité sur l'homothétie et la masse volumique, comme on le fait fonctionner sur le prix d'objets familiers ou sur le partage égalitaire de bonbons entre des enfants » (ibid., p. 154). Dans des travaux plus récents, Houdement (1998, 2003) complète les propos de Vergnaud en précisant que la connaissance du domaine d'expérience de références d'une situation facilite généralement son traitement - et qu'elle aura dès lors tendance à en diminuer la complexité -, mais qu'elle peut parfois aussi en constituer un obstacle⁶⁰.

Algorithmisations des savoirs

Le troisième et dernier aspect qui sera considéré au niveau des investissements de savoirs procède du fait que les savoirs investis dans le cadre de la thèse sont, dans leur grande majorité, proposés aux apprenties sous la forme de procédés algorithmiques, qu'il s'agit pour elle d'apprendre à utiliser, afin de pouvoir réaliser les tâches qui leur sont soumises. Il aurait certes été possible de reprendre ici le concept de praxéologie - et notamment l'articulation techniques-technologie - issu de la TAD pour le faire, sauf que ce dernier apparaissait bien trop général pour examiner et rendre compte du fonctionnement de ces procédés de façon suffisamment précise. C'est donc au concept de *calcul assisté par un diagramme*, développé par Conne (1997), que je ferai appel. Ce dernier a été principalement établi sur la base des travaux menés sur les algorithmes de calcul des quatre opérations élémentaires. Conne indique cependant d'emblée que ces propos sont de portée bien plus générale, l'enjeu étant de : « rendre visible bien des aspects implicites des calculs assistés par un diagramme » (p.1), lesquels n'apparaissent jamais dans la forme automatisée sous laquelle ils se donnent à voir lorsqu'on les a appris et que l'on sait s'en servir.

⁶⁰ La question de l'incidence du domaine d'expérience sur la complexité cognitive d'une situation demande assurément à être approfondie, lorsqu'on sait que des investigations menées sous la direction de Conne dans l'Es auprès d'élèves infirmes moteurs cérébraux (dont les résultats n'ont pas été publiés) ont montré que le fait de n'avoir jamais joué aux billes ne les empêchait pourtant pas de traiter les problèmes de billes qu'on leur soumettait. Ce qui tend à contredire les propos de Vergnaud concernant l'importance des premières situations dans l'élaboration d'un concept.

Le Lionnais & al. (1979) définissent un algorithme comme :

une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ni ambiguïté), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données. Un algorithme ne résout donc pas seulement un problème unique mais toute une classe de problèmes ne différant que par les données mais gouvernés par les mêmes prescriptions. (p.25)

Cette définition très générale d'un algorithme n'implique nullement le recours à un diagramme pour en assurer l'exécution. Le recours à un diagramme s'observe pourtant fréquemment lorsqu'il s'agit pour un sujet d'apprendre (ou de l'enseigner) à se servir de l'algorithme et où sa principale fonction est de servir de support à l'application ordonnée des règles qui le constituent. Dans le cas d'un calcul, le diagramme se présente généralement sous la forme de :

une image schématique inachevée, qu'il s'agit de compléter en fonction de l'opération indiquée et des données inscrites. Le diagramme sert de support aux diverses opérations élémentaires à effectuer et dans ce sens présente la dynamique de l'effectuation de ce calcul. » (Conne, *ibid.*, p.3).

La différence essentielle avec le déroulement d'un calcul sans diagramme tient au fait que le répertoire symbolique auquel on fait appel se trouve considérablement enrichi. Le diagramme lui-même est en effet déjà à considérer comme le symbole du déroulement du calcul dans son entier, alors que son usage s'appuie à son tour sur toute une série de symboles.

Certains symboles y représentent l'organisation même des actions à entreprendre, d'autres, les données à traiter, et d'autres y figurent enfin comme des marques jalonnant le cheminement que le calcul représente. (Conne, *ibid.*, pp.1-2)

Le calcul assisté par un diagramme se déroule généralement en trois étapes que sont : *la pose des données* dans le diagramme, *l'exécution des actions* à y opérer et *la considération du résultat* produit par le diagramme (qui peut susciter une relecture des étapes précédentes). La dernière étape est d'ailleurs souvent omise par les élèves, étant donné que, dans le contexte scolaire, la sanction du résultat est souvent d'office attribuée à l'enseignant.

Les actions qui sont à réaliser dans l'exécution d'un calcul sont de quatre types :

- le premier type d'actions concerne *le parcours à effectuer* dans le diagramme (ce sont par exemple, l'inscription des données dans le diagramme, l'abaissement d'un chiffre, l'inscription d'un résultat partiel, etc.) ;
- le deuxième type d'actions relève *des mises en relation* qui président à l'effectuation des sous-opérations de base (ce sont par exemple la comparaison des chiffres d'une colonne dans le cas de la soustraction, ou la comparaison d'un reste avec le diviseur, dans le cas de la division) ;
- le troisième type d'actions suppose *un apprêt des données* en vue d'effectuer ou après avoir accompli ces sous-opérations (ce sont par exemple, les emprunts effectués dans la soustraction ou les retenues qui sont reportées dans celui de l'addition) ;
- enfin, le quatrième et dernier type d'actions comprend *les sous-opérations de base* à effectuer (c'est-à-dire les calculs qu'il s'agira de réaliser ou les résultats mémorisés auxquels il faudra faire appel)⁶¹.

⁶¹ En ce qui concerne les mises en relation et l'apprêt des données, Conne insiste sur le fait qu'elles ont un sens local et spécifique au calcul considéré, tandis que l'effectuation des sous-opérations de base, qui se fait hors diagramme, ont un sens plus global : il s'agit d'un répertoire qui sera utilisable dans n'importe quelle forme de calcul.

A ce titre, il est important de préciser que l'ordre des actions à effectuer dans le diagramme *n'est pas univoque*, c'est-à-dire qu'il existe plusieurs parcours possibles (tout comme il existe plusieurs types d'algorithmes pour effectuer telle ou telle opération). Ce parcours à accomplir *n'est pas* non plus *linéaire*, puisqu'il est parsemé de navettes à réaliser vers l'avant (pour aller faire un emprunt, par exemple) et de reprises à exécuter vers l'arrière (pour reprendre un résultat partiel déjà établi, par exemple).

Dans le déroulement d'un calcul assisté par un diagramme, les symboles auxquels on a recours prennent des valeurs différentes selon les fonctions qu'ils remplissent. Comme (ibid., p.11) distingue à ce titre trois fonctions : la fonction de *donnée à lire* qui attribue au symbole la valeur de fournir les données nécessaires à l'exécution du résultat ; la fonction de *curseur des actions* qui attribue au symbole la valeur d'établir les indices nécessaires à la succession des actions à opérer, tantôt en indiquant l'action suivante à effectuer (c'est le cas d'une retenue, par exemple), tantôt en indiquant que l'action précédente a bien été effectuée (c'est le cas d'un trait qui trace un chiffre pour montrer qu'il a été pris en considération) ; la fonction de *résultat à inscrire* qui attribue au symbole la valeur d'établir le résultat de l'opération. A ces différents symboles qui sont ordinairement associés au déroulement du calcul viennent s'ajouter toutes les marques que le sujet vient rajouter lui-même dans l'effectuation de son calcul et qui peuvent tour à tour marquer la trace d'une action intermédiaire, d'un repère mnésique ou d'un résultat établi⁶².

Au cours de l'effectuation d'un calcul, un même symbole peut également prendre des valeurs différentes. Ainsi un chiffre inscrit au bas d'une colonne d'un diagramme pourra être d'abord considéré selon sa valeur numérique, en tant que résultat d'une opération partielle (le chiffre 2, par exemple) ; mais du fait même de son inscription au bas de cette colonne, il revêtira également une valeur cursive, indiquant que l'opération partielle a bien été faite (le 2 étant trouvé, on peut passer à la recherche du prochain chiffre) ; alors que lors de la lecture du résultat final, il reprendra une valeur numérique, en tant qu'élément constitutif de l'intégralité du nombre produit par le calcul (le 2 sera cette fois-ci lu comme "deux", s'il est dans la position des unités, mais comme "vingt" s'il est dans la position des dizaines, ou comme "deux cents" s'il est dans la position des centaines).

Cette différence de valeurs attribuées aux symboles relative à la fonction qu'ils endossent fait que certains d'entre eux seront signifiés de façon différente : c'est le cas du zéro par exemple, qui pourra être signalé par un 0, un point, un trait ou encore par un simple espace. Mais cela fait aussi qu'un même symbole, le trait qui marque une retenue par exemple, pourra prendre des valeurs numériques différentes, 1 ou 10 selon la colonne dans laquelle il se trouve, sans que cela ne constitue un écueil à l'obtention du bon résultat⁶³.

Usage qui en sera fait dans la thèse

Toutes ces considérations relatives au calcul assisté par un diagramme permettront de caractériser les savoirs investis dans la formation professionnelle spécialisée qui seront examinés dans la thèse. Quand ceux-ci sont proposés sous la forme d'un procédé algorithmique, ils permettront notamment de distinguer les étapes du calcul, les actions à effectuer et les fonctions prises par les différents symboles qui le constituent.

⁶² Les marques ne se contentent d'ailleurs pas d'être simplement utiles à l'effectuation du calcul, puisqu'elles jouent également un rôle important dans l'échange didactique, représentant pour l'enseignant les traces de l'action effective des élèves et lui servant de fait d'indices pour y ancrer son intervention.

⁶³ Sauf, dans le cas où ces symboles, enrôlés dans l'échange didactique, viennent prendre une nouvelle fonction, soit celle de rendre compte de la compréhension du calcul et où l'enseignant pourra interpeller l'élève pour lui demander de distinguer par un symbole différent les deux significations dont il relève.

PROPOSITIONS CONCEPTUELLES AU NIVEAU DES INTERACTIONS DE CONNAISSANCES

Au niveau interactions de connaissances, on va tout d'abord s'intéresser à un type de contrat particulier - le *contrat de reprise* - dans lequel les interactions dont il sera question dans la thèse ont principalement eu lieu ; il s'agira ensuite d'envisager l'appréhension systématique des *productions* des apprenties et l'interprétation des *erreurs* en tant que produit de l'activité du couple enseignant-enseigné ; on cherchera enfin à caractériser la *dynamique des interactions*, telles qu'elles se nouent et se développent dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée.

Type de contrat relatif aux interactions

S'agissant des interactions de connaissances, le premier aspect qui sera pris en considération tient au contrat dans lesquels ces interactions se déroulent. L'idée que, dans une institution particulière, toute forme d'interactions de connaissances ait lieu relativement à un contrat qui :

détermine - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre responsable devant l'autre (Brousseau, 1986, p.51)

et que ce contrat peut être qualifié de "didactique", lorsqu'il concerne spécifiquement le savoir mathématique qui est l'enjeu de l'interaction, constitue en effet un fait connu et reconnu depuis fort longtemps en ddm. Il n'est donc pas lieu de décrire ici ce concept dans toute sa généralité, ni non plus dans son efficience à rendre compte d'un grand nombre de phénomènes didactiques. On s'en tiendra seulement à une forme particulière - car omniprésente dans les interactions qui feront ultérieurement l'objet d'une analyse - que ce contrat est susceptible de prendre et que Brousseau (1995) a désigné par le terme de *contrat de reprise*.

La définition d'une typologie de contrats didactiques est apparue dans la TSD au moment où Brousseau s'est attaché à situer l'enseignant au sein de sa théorie, le contrat de reprise constituant alors l'une de ses configurations possibles. Dans cette typologie, Brousseau commence par définir les *contrats non-didactiques* qui caractérisent les interactions où l'enseignant ne prend pas explicitement en charge l'intention d'enseigner un savoir particulier aux élèves. On trouve ensuite les *contrats faiblement didactiques* portant sur un *savoir nouveau*. Dans ce cas, l'enseignant est bel et bien porté par l'intention d'enseigner un savoir mathématique aux élèves, mais il renonce à assumer de responsabilité sur les effets que son enseignement aura à leur rencontre : c'est donc aux élèves qu'est entièrement déléguée la responsabilité d'apprendre. Puis viennent les *contrats fortement didactiques* portant sur un *savoir nouveau*. L'intention d'enseigner est à nouveau assumée par l'enseignant, mais il va cette fois-ci également endosser la responsabilité des effets que son action aura produits auprès des élèves. Enfin, un dernier type de contrats, dont fait partie le contrat de reprise, est fondé sur la *transformation de savoirs anciens*.

Selon Brousseau, les raisons qui prévalent à la transformation de savoirs anciens peuvent être diverses : il s'agit par exemple de reprendre un savoir dont l'apprentissage a échoué, de vouloir étendre son usage à de nouveaux domaines ou de le mobiliser pour l'adapter à des apprentissages nouveaux. Mais dans tous les cas, il s'agit de prendre en compte le fait que :

l'élève a développé son propre rapport au savoir ancien, qu'il lui a déjà attribué un sens, une place dans l'établissement d'autres savoirs. La reprise d'un savoir ancien appelle donc une nouvelle répartition des responsabilités entre le professeur et l'élève. Le plus souvent les raisons de la reprise ne sont pas les mêmes pour le professeur et pour les élèves. (ibid., p. 26)

Dans le cas d'un apprentissage qui a échoué, l'idée que l'élève a établi un rapport personnel au savoir ancien signifie qu'il a construit des connaissances à son égard et que la reprise qui en sera faite devra en tenir compte. C'est précisément l'idée que nous portons au sein du groupe d'études à l'encontre des élèves de l'Es pour lesquels nous affirmons que :

un échec d'apprentissage ne veut pas dire non-apprentissage. L'échec d'apprentissage se manifeste par des erreurs, des conduites inappropriées, des assimilations déformantes, des effets de sur-généralisations, des effets de contrats, etc. On ne peut pas dire que ce soit vide. Nous dirons donc qu'un non-apprentissage n'est qu'une signification qu'on veut bien donner à certaines formes d'apprentissage. De la même manière, nous ne dirons pas plus que des élèves en échec ne retiennent rien de ce qu'on leur enseigne, ni qu'ils seraient indisponibles à l'enseignement qu'on leur prodigue. (Conne, 2004a, p.83)

Dans un contrat de reprise, on ne pourra pas faire comme si les élèves n'ont rien appris en amont du savoir qui est l'enjeu de l'interaction. Il va donc inmanquablement falloir "faire avec" ces apprentissages préalables, ce qui amène Bloch et Salin (2004, p.175) à dire que : « il est éventuellement plus difficile de faire évoluer ces (fausses) connaissances que d'en enseigner de nouvelles⁶⁴. » Or, la difficulté ne vient pas uniquement de ce que l'établissement du contrat de reprise soit difficile à mettre en place dans un contexte spécialisé, mais bien aussi du fait que les connaissances qui ont été assimilées par les élèves ne sont pas clairement déterminées, ni par eux, ni par l'enseignant. On se retrouve ici face à la délicate question de la *restitution des savoirs appris* par les élèves et de leur saisie par l'enseignant, que nous avons également cherché à traiter dans le cadre du groupe d'études.

On attribuait peut-être à tort aux élèves de l'Es le fait de ne pas apprendre ou retenir ce qu'on leur enseignait, alors que tout ce dont nous pouvions attester était l'absence de réponses à la demande ou à l'injonction de savoir. Du point de vue de l'enseignant, ceci rendait des savoirs élémentaires non-disponibles dans l'échange didactique, savoirs dont on pouvait soupçonner par ailleurs qu'ils étaient bel et bien acquis. (Conne, 2004a, p.89)

N'étant pas à coup sûr disponibles, ces savoirs ne peuvent que difficilement être incorporés a priori dans le milieu à partir duquel l'enseignement sera appelé à se développer. Ils ne peuvent pas non plus être convoqués avec certitude en tant que mémoire didactique (Brousseau & Centeno, 1991) à laquelle l'enseignant pourra se référer ou s'appuyer. C'est en effet seulement en situation, au cœur effectif de l'interaction, que ces savoirs peuvent être amenés à se manifester, parfois de manière directe au fil de l'échange, parfois de façon indirecte au travers des productions des élèves et des erreurs dont elles relèvent qui permettent, le plus souvent après coup, de les inférer.

Usage qui en sera fait dans la thèse

Le contrat de reprise servira de toile de fond aux interactions de connaissances provenant de la formation professionnelle spécialisée qui seront examinés dans la thèse. Son rôle ne sera pas directement opérationnel pour analyser les interactions. Il sera néanmoins actualisé en continu pour rappeler, du côté des apprenties, la présence de connaissances relatives à un savoir donné

⁶⁴ La perspective préconisée par Bloch & Salin n'est donc plus :

de faire accéder les élèves à un savoir nouveau, par l'organisation d'une situation d'action suivie d'une situation de formulation puis de validation : les savoirs auxquels les élèves - et le professeur - ont affaire sont pour la plupart des savoirs anciens, ou du moins non entièrement nouveaux, mise à part l'algèbre. Il s'agit plutôt d'organiser une opération d'abduction par le biais d'une situation. Par abduction, nous entendons cette opération d'interprétation, définie par C.S. Peirce (Peirce 1995), comme le fait de s'apercevoir qu'un phénomène relève d'un savoir que l'on peut retrouver. Dans cette perspective d'abduction, des situations d'action seraient construites pour (re)mettre l'élève face à des manifestations - aussi variées et pertinentes que possible - du savoir déjà-là. Il s'agit en quelque sorte de jouer sur une redondance des effets de savoir, face à des élèves qui ne veulent avoir de ce même savoir qu'une conception schématique réduite à quelques algorithmes. (ibid., p.179)

- alors même que, s'agissant d'apprenties en difficulté, on a irrémédiablement tendance à n'envisager que des absences de connaissances - susceptibles, à tout moment, de survenir au sein de l'échange ; et, du côté de l'enseignant, l'incontournable position d'ignorance - alors même que, s'agissant d'un enseignant, qui plus est spécialisé, on a irrémédiablement tendance à n'envisager que la position du savoir - avec laquelle il devra immanquablement apprendre à composer (voir plus avant, le troisième aspect consacré à la "dynamique des interactions").

Interprétation des productions et des erreurs issues des interactions

L'interprétation⁶⁵ des *productions* d'élèves et de leurs *erreurs* constituera le deuxième aspect pris en compte au niveau des interactions de connaissances. Il a été exploité de façon très approfondie dans la thèse de Conne (1981), qui en a fait une méthode en soi pour appréhender les mathématiques effectives que les élèves pratiquent en classe :

J'appelle production tant les réponses des élèves que le raisonnement pour y aboutir⁶⁶. Ces productions peuvent très bien ne pas avoir de sens relativement aux mathématiques, peu importe. Dès le moment où on considère qu'il y a transposition, leur seul caractère de production, dans des conditions bien définies, face à une tâche bien identifiable, justifie qu'on s'y intéresse.

[...] Une production, marque d'un événement qui a effectivement eu lieu, n'est jamais totalement fortuite. Elle est susceptible de prendre un sens relativement à la tâche proposée : tout d'abord savoir si elle correspond à la réponse souhaitée, à une réponse attendue, se demander si elle nous éclaire sur une interprétation de la tâche à laquelle on n'avait pas pensé, déterminer finalement le champ que cette réponse recouvre (est-elle exclusive ? coexiste-t-elle avec d'autres réponses qui nous paraissent contradictoires ?) (pp.19-21)

Il s'agit de considérer toute production comme la marque d'un raisonnement, ou plus généralement d'une pensée, que l'on pourra chercher à interpréter en fonction de la tâche proposée, des conditions dans lesquelles elle a été résolue et par confrontation avec les autres réponses qui pouvaient être attendues.

L'intérêt porté en ddm aux productions des élèves, et plus particulièrement à leurs *erreurs* déborde toutefois largement de la thèse de Conne, puisqu'il participe au fondement même de ce champ⁶⁷. Flückiger (2006) rappelle en effet que Rouchier (1980, p.8), dans le tout premier numéro de la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, fait de : « l'analyse des conduites et productions des élèves au cours d'un apprentissage » l'un des six axes de recherches expérimentales qui pourront y être publiées, alors que, dans ce même numéro, on voit Brousseau (1980) définir, en référence conjointe à Piaget (1975) et à Bachelard (1938), une conception "constructiviste" de l'erreur sur laquelle va reposer la TDS dans son ensemble :

L'apprentissage est une adaptation de l'élève à une situation problème nouvelle. Les difficultés qu'il rencontre sont donc fondamentales pour provoquer cette adaptation. De plus elles peuvent être constitutives du nouveau savoir c'est-à-dire être indispensables

⁶⁵ Pour une discussion approfondie de la spécificité de l'approche didactique dans l'interprétation des productions d'élèves, on se rapportera à Giroux (à paraître, dans les actes de la 17^{ème} école d'été de ddm à Nantes).

⁶⁶ Pour définir la production, on peut associer au binôme réponse-raisonnement, l'ensemble des traces laissées par l'élève durant l'accomplissement de la tâche et dont Conne regrettera plus tard (1997) que : « dans les nombreuses études sur les calculs écrits et en particulier sur les erreurs, on ne porte pas d'attention suffisante aux notations et traces laissées par les élèves. Mon expérience montre qu'elles sont très informantes des pratiques de ce que le sujet a tenté de faire, et je conseille à tout enseignant d'apprendre à les interpréter » (p.2).

⁶⁷ On peut également citer le mémoire de Salin (1976) qui visait déjà à distinguer l'erreur de l'échec.

à sa compréhension. Ces difficultés sont celles qui portent en elles la conception antérieure de l'élève et la situation-problème choisie les a seulement révélées. (p. 51)

Les références à Bachelard et à Piaget seront d'ailleurs reprises ultérieurement par Brousseau (1983) pour montrer que :

l'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles (p. 171)

Importé dans le cadre de la TDS pour être envisagé comme la cause d'un lot d'erreurs persistantes, le concept d'*obstacle*⁶⁸ emprunté à Bachelard (op.cit.) devra alors répondre à trois conditions. La première condition veut que l'obstacle puisse être décrit non comme un manque, mais bien comme une connaissance. La deuxième condition veut que cette connaissance ait un domaine de validité et d'efficacité que l'on peut délimiter. La troisième condition veut que cet obstacle résiste et qu'il ne puisse être franchi aisément. Selon Brousseau (op.cit., pp.177-178), il est en outre possible d'envisager trois origines distinctes aux obstacles qu'un élève rencontre au cours d'un apprentissage ; la première origine est d'*ordre ontogénique*, c'est-à-dire liée aux limitations de l'élève à un moment de son développement, la deuxième est d'*ordre didactique*, c'est-à-dire liée à la manière dont l'enseignement du savoir a été mené, la troisième est d'*ordre épistémologique*, c'est-à-dire liée à la construction historique de ce savoir.

Toute erreur ne peut toutefois être considérée comme le produit d'un obstacle au sens de la TDS. D'autres travaux dans le champ de la ddm se sont penchés sur la question de l'erreur, et plus particulièrement dans le cas de l'enseignement-apprentissage des *algorithmes de calcul*. Les recherches menées à ce propos (Brun & al., 1989 ; Brun, & Conne, 1993 ; Brun & al., 1994a, 1994b ; Portugais, 1995) ont permis de faire apparaître le caractère logique et parfois systématique de certaines erreurs. Leur étude s'y déroule en trois étapes⁶⁹ :

Une première étape consiste à décrire les réponses des élèves en reconstituant les procédures qu'ils ont employées pour parvenir à ces réponses. [...]

Une seconde étape est de classer les erreurs observées : c'est-à-dire dégager des organisations communes à différentes erreurs. [...]

Lors d'une troisième étape, le but est d'interpréter l'erreur, et si possible de l'expliquer. (Brun, 1999, pp.7-8)

Il s'agit en conséquence d'envisager l'erreur comme le produit d'un processus organisé et dynamique, constitué d'adaptations successives au déroulement du calcul proposé. Ce processus peut être inféré pour être décrit dans les termes d'une procédure, c'est-à-dire en une suite d'actions successives qu'il est possible de reconstruire à partir de la production de l'élève. Il peut être également comparé à d'autres processus relevant d'erreurs différentes, mais qui présentent des formes d'organisations communes. Il peut être enfin interprété à l'aune d'une théorie spécifique qui en apportera une signification⁷⁰.

⁶⁸ Tel que défini ici, le concept d'obstacle appelle une prise en compte toute particulière dans l'enseignement pour accompagner les élèves dans le franchissement qu'il implique. La TDS, et plus particulièrement les dialectiques d'action, de formulation et de validation, s'inscrit comme une réponse à cette importante et délicate question.

⁶⁹ Les questions liées à la reproductibilité des trois étapes de cette étude pour interpréter des erreurs relatives à des tâches qui ne relèvent pas des algorithmes de calcul restent ouvertes. J'en avais déjà fait part, en son temps (Cange & Favre, 2003), vis-à-vis d'une collecte d'erreurs en provenance de l'Es. On retrouvera ces questions, plus avant, dans la seconde partie de la thèse.

⁷⁰ Pour Brun, la signification d'une erreur n'est donc pas univoque, puisqu'elle dépend de la théorie qui est utilisée pour l'interpréter.

Dans le cadre des travaux considérés, c'est au concept de schème, que Vergnaud⁷¹ a emprunté à Piaget et développé dans la TCC (1991), qu'il a notamment été fait appel pour interpréter les erreurs récoltées. Il a dès lors été possible de montrer que celles-ci ne pouvaient s'expliquer en tenant seulement compte des aspects syntaxiques - c'est-à-dire des règles à appliquer dans un certain ordre - de l'algorithme, mais bien au fait que les connaissances numériques et conceptuelles⁷² des élèves y participent également pleinement :

la plupart des erreurs révèlent moins des absences de connaissances et de règles que des organisations originales de connaissances et de règles ; celles-ci sont encore inadaptées à toutes les exigences du calcul à résoudre, mais elles peuvent être pertinentes par ailleurs, dans d'autres organisations et dans d'autres situations. (Brun & Conne, p.30)

On y parle même de formes de compromis entre connaissances acquises et règles apprises, l'élève n'étant pas forcément embarrassé pour avancer dans son calcul - ce qui lui conserve son caractère fluide - l'erreur survenant : « suite à des contraintes de l'algorithme qu'il a levées au profit de connaissances qu'il a privilégiées, ou inversement » (Brun, op.cit., p.8).

Le fait que des erreurs relèvent d'un entrelacs de règles et de connaissances tend à montrer que celles-ci jouent un rôle actif dans l'apprentissage d'un algorithme de calcul. Or, leur implication n'a pourtant rien d'une évidence, lorsqu'on sait d'une part que des travaux antérieurs (Brown & Burton, 1978 ; Brown & Van Lehn, 1980) avaient permis de constituer un modèle (repair theory) d'interprétation des erreurs de calculs qui reposait exclusivement sur l'usage que les élèves pouvaient faire des règles qui leur avaient été enseignées ; et, d'autre part, parce que le caractère automatisé de l'algorithme, tel qu'il apparaît chez ceux qui le maîtrisent, tend à masquer le fait que des connaissances numériques ou conceptuelles interviennent dans son exécution. Conne (1997) insiste en effet sur le fait qu'un élève n'est pas un automate et que pour maîtriser l'exécution d'un algorithme, il lui faudra apprendre tout à la fois à coordonner les règles à appliquer aux concepts et représentations qu'il s'est déjà constitués et à contrôler le déroulement du calcul. Cela signifie que, pour l'élève, les règles de calcul débordent largement les règles formelles de l'algorithme.

Il en va d'ailleurs de même pour l'enseignant qui ne pourra se contenter d'une simple description de ces règles, sachant que ce qu'elle va susciter chez l'élève, dépassera grandement ce qu'il se sera contenté de présenter. Il devra donc y revenir à diverses reprises, proposant des exercices qui aideront l'élève à se l'approprier et ce, à renfort d'*explications*⁷³ répétées. Conne propose alors de distinguer deux types d'explications, à savoir les explications qui sont internes au diagramme, c'est-à-dire qui relèvent de la logique de son fonctionnement propre ; on parlera d'explications relatives au *sens*⁷⁴ des règles de l'algorithme ; et les explications qui sont externes au diagramme qui visent à rapporter les règles sur des éléments externes, le plus

⁷¹ Relevons que Vergnaud (1981) a également recouru, dans une perspective psychologique, à la notion d'algorithme pour chercher à « clarifier les liens entre connaissance et action » (p.208). L'algorithme y est considéré comme une règle d'action particulière, capable de diriger avec succès la conduite d'un sujet aux prises avec un problème donné, qui vient s'intercaler au niveau de la représentation entre les connaissances et l'action. Plus avant dans le développement de la TCC, Vergnaud parlera même de "schème-algorithme" (Laborde & Vergnaud, 1994).

⁷² Les connaissances numériques sont relatives aux nombres, au système de numération décimale de position et aux relations et aux propriétés dont ils relèvent ; les connaissances conceptuelles sont relatives aux opérations élémentaires qui sont impliquées dans l'exécution de l'algorithme.

⁷³ Dans la thèse qu'il a réalisée auprès d'enseignants en formation, Portugais (1995) a montré la grande variété que ces explications pouvaient prendre pour un algorithme donné.

⁷⁴ Ainsi, par exemple, quand une règle veut que, dans une addition, on ne puisse insérer des nombres à deux chiffres dans une même colonne, et qu'il faut découpler les résultats obtenus quand cela est malgré tout le cas, cette règle ne peut être justifiée que par la logique propre du calcul en diagramme. Elle a donc un caractère local et spécifique. On sait en effet que cette interdiction qu'il y a lieu de respecter dans le cas de l'addition sera levée dans le cas de la soustraction, où il s'agira précisément de faire exister, à partir d'un emprunt ou d'une compensation, des nombres à deux chiffres dans une même colonne.

souvent matériels, en vue de les justifier ; on parlera d'explications relatives à la *signification* des règles de l'algorithme (Conne, 2012).

Les deux sortes d'explications risquent parfois de se court-circuiter du fait que :

un diagramme ne reconduit pas tous les aspects de l'action matérielle, mais par ailleurs, il produit des actions et des aspects propres à lui-même. Il n'y a donc pas seulement une réduction d'une certaine réalité aux commodités des transformations que l'on veut opérer, mais aussi création et enrichissement (op.cit., p.21)

La validation à l'externe des raisons de l'usage d'une règle à l'interne du calcul échoue effectivement quand celle-ci ne peut être justifiée que par la logique interne du diagramme ; ce qui fait que l'élève doit en fait se suffire d'une preuve par l'usage (on fait ceci, parce que cela fonctionne), la compréhension du fonctionnement de l'algorithme demeurant essentiellement basée sur la conviction qu'il sera en mesure de porter aux explications de l'enseignant.

On soulignera enfin que l'explication de l'enseignant, lorsqu'elle intervient à partir d'une difficulté rencontrée par l'élève dans l'exécution de son calcul, n'a pas seulement valeur de reprise, mais qu'elle vise également à permettre de reconsidérer les éléments qui lui permettront de renouer avec le fil de son action. Or, ces formes de *réorganisations* auxquels l'explication invite, sont généralement occultées dans l'enseignement par le fait que l'on croit à une genèse, c'est-à-dire à une construction progressive de l'apprentissage où tout commence avec les actions matérielles dont le report dans un calcul en diagramme ne serait que la "transcription fidèle et commode". Conne affirme au contraire que ce sont en fait deux pans de réalité, certes liés, mais bel et bien distincts :

L'apprentissage du calcul en colonne⁷⁵ passe par une reconstruction sur ce nouveau plan de réalité (symbolique) d'opérations proprement diagrammatiques qui, de ce point de vue sont des actions concrètes, de manipulations de symboles tout aussi construits que les objets matériels. A terme, ce plan viendra suppléer à celui des collections d'objets (matériels ou figurés). Il y a donc des règles de ces actions sur la réalité diagrammatique et leur constitution nous est révélée par les erreurs des élèves et leur caractère systématique. (ibid., p.32)

L'appropriation d'un calcul assisté par un diagramme ne passe donc pas par une genèse, mais bien par une exploration d'un système d'explications d'une part et d'un système de règles d'autre part dont la confrontation avec des situations de calculs particulières conduira progressivement (et dans le meilleur des cas) l'élève à s'approprier.

Usage qui en sera fait dans la thèse

L'interprétation des productions et des erreurs des apprenties occupera un rôle central dans les analyses qui seront accomplies pour appréhender le fonctionnement des mathématiques qui leur sont enseignées dans la Fps. Il s'agira en premier lieu, et à chaque fois que cela sera possible, de reconstituer les *procédés* - le terme sera préféré à celui de "procédure" pour souligner le fait que, dans la Fps, il vient généralement surseoir à l'usage d'une technique algorithmique qui a été préalablement enseignée - qui les ont produites. En deuxième lieu, il s'agira d'identifier les *obstacles* - quand ceux-ci correspondent au sens plein qui leur est donné dans la TDS - ou les *écueils* - quand cela n'est pas entièrement le cas - en termes de connaissances et de règles auxquelles viennent s'affronter les apprenties lorsqu'elles font usage des techniques qui leur sont enseignées. En troisième lieu, il s'agira de rendre compte, en quoi et comment les différents *exercices* qu'elles sont amenées à résoudre et les *explications* qui leur sont données pour le faire les conduisent à surmonter ces écueils et ces obstacles et à s'approprier ces techniques. En

⁷⁵ Et plus généralement l'apprentissage d'un calcul assisté par un diagramme.

quatrième lieu, il s'agira de déterminer ce que cette analyse donne à comprendre, que l'on ne savait déjà, sur le fonctionnement propre des techniques enseignées aux apprenties.

Dynamique des interactions

Le troisième et dernier aspect qui sera pris en considération au niveau des interactions de connaissances concerne la *dynamique* qu'elles sont susceptibles de prendre, en tant que produit de l'activité du couple enseignant-enseigné. Cette dynamique relève d'une troisième fonction du savoir - après celles de contextualisation et de repère - qui vise à assurer le *suivi des connaissances induites* par la situation et leur *pilotage* dans l'interaction (Conne, Favre, Giroux, 2006). Conne (2003) propose d'envisager cette dynamique en termes de *pertes* et *prises de contrôles* dans le cas particulier des interactions qui adviennent au sein d'une institution spécialisée.

Pour ce faire, il faut partir de deux postulats de base. Le premier tient au fait que tout processus d'enseignement procède de l'incertain, c'est-à-dire qu'il n'est jamais possible de contrôler entièrement a priori les formes qu'il pourra prendre, ni les chemins qu'il est susceptible d'emprunter. La position face à la contingence, dans laquelle se retrouve l'enseignant dans l'interaction, est de ce point de vue similaire à celle du chercheur : il aura certes anticipé un certain nombre de possibles, mais ses prévisions ne garantissent nullement que ce soient ces possibles qui se manifesteront effectivement au cours des échanges. Conne (1999) parle de *rapport à l'ignorance* pour désigner l'incertitude dans laquelle l'interaction place l'enseignant au regard du système didactique dont il fait partie et qui conserve à son égard une large part d'autonomie.

Ainsi, la question du rapport à l'ignorance ne concerne pas que les producteurs de connaissances nouvelles (savants, chercheurs), mais aussi ceux dont le rôle est de diffuser et de transmettre des connaissances, en particulier tout enseignant qui entend réfléchir (ou penser sa pratique). (p.58)

Dans cette perspective, l'interaction conserve toujours une part d'inattendu qui, pour l'enseignant, se caractérisera par un certain nombre de surprises (Auckenthaler, 2004 ; Conne, 2004b, 2006), constituant tantôt des opportunités et tantôt des impasses à la conduite de son enseignement.

Le second postulat veut que, dans l'interaction, l'enseignant, comme l'élève engage sa propre cognition. C'est à ce titre que Conne (1998) parle d'apprentissage du couple-enseignant-enseigné.

On considère souvent l'apprentissage comme relatif à l'activité (cognitive) de l'élève et dépassant la volonté et la conscience de ce sujet, tandis que l'enseignement concernerait une action intentionnelle, voire volontaire, qui en principe devrait être au fait d'elle-même. Schématiquement, donc, l'élève est vu comme pris à l'intérieur d'un processus qui serait, en partie, piloté par l'enseignant. Toutefois, en tant que sujet, le maître est aussi actif, lui aussi est soumis à des processus d'adaptation. (p.23)

On peut même ajouter que l'interaction engage cognitivement l'enseignant d'une double manière⁷⁶ : d'une part vis-à-vis du milieu qu'il a constitué à l'intention de l'élève pour le faire apprendre, et d'autre part relativement aux effets imprévus que l'interaction élève-milieu produit. Ces engagements entraînent donc de sa part des adaptations - ce qui, d'un point de vue psychologique, permet d'augurer que, comme l'élève, l'enseignant apprend au fur et à mesure du déroulement des interactions - lesquelles sont susceptibles de le faire dévier plus ou moins

⁷⁶ Il en va de même pour l'élève qui, dans l'interaction, est interpellé tour à tour de manière a-didactique par le milieu et de manière didactique par l'enseignant.

fortement de ses projets d'enseignement. La question qui se trouve dès lors posée est celle du contrôle que l'enseignant est susceptible d'exercer sur l'interaction pour en réaliser le pilotage.

Cette idée du contrôle sujet-situation a été longuement discutée par Conne (1992) qui propose de distinguer deux cas : le cas pour lequel le contrôle de la relation sujet-situation est du côté de la situation et où l'on dira que le sujet est *en rapport de connaissance à la situation* ; le cas où le contrôle de la relation sujet-situation est du côté du sujet et où le sujet est *en rapport de savoir à la situation*. Pour l'élève, l'enjeu de tout apprentissage est de passer, vis-à-vis d'une situation donnée, d'un régime de connaissance à un régime de savoir, c'est-à-dire d'une relation incontrôlée à une relation contrôlée de la situation :

Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient irréversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. (p.225)

S'agissant de l'enseignant et du contrôle qu'il est susceptible d'exercer sur l'interaction, la chose est en revanche plus improbable. On pourrait dire que l'enseignant est continûment en rapport de connaissances vis-à-vis de l'interaction, du fait qu'il est toujours à la merci des réactions imprévisibles des élèves, lesquelles constituent autant de questions adressées à sa propre cognition qui appellent des décisions et des actions. Ceci ne signifie pourtant pas qu'il lui est impossible d'exercer tout contrôle sur l'interaction, mais cela veut simplement dire qu'il va devoir conjuguer avec des *prises et des pertes de contrôle* (Conne, 2003) qui seront en quelques sorte constitutives de l'interaction.

Des prises de contrôle existent déjà en amont de l'interaction : elles comprennent l'ensemble des décisions relatives aux conditions de mise en œuvre de la situation que l'enseignant anticipe en vue sa réalisation. Au cours de l'interaction, des pertes de contrôle adviennent au gré des écarts entre les anticipations effectuées et les événements inattendus qui surgissent et des errements relatifs à leur prise en compte. Elles donnent lieu à des prises de contrôles visant à réduire les écarts rencontrés et à reprendre le fil du déroulement anticipé. On peut en outre considérer les interprétations des productions des élèves, la compréhension qui en sera donnée et les perspectives qu'elles ouvriront en vue d'une prochaine interaction, comme autant d'essais de prises de contrôle réalisés en aval de l'interaction, lesquels s'accompagnent, inmanquablement, d'autres pertes de contrôle comprenant toutes les incompréhensions relatives à ces interprétations et les inévitables questions qui en découlent.

En d'autres termes, on peut dire que les prises de contrôle relèvent du savoir de l'enseignant, alors que les pertes de contrôle relèvent de son ignorance. Ces dernières supposent et impliquent selon Conne (1999) une "curiosité d'ignorer" de l'enseignant (à laquelle on peut associer la "curiosité de savoir" de l'élève que l'on cherche à développer) qui se traduit par des questions du type :

Faut-il vraiment que l'élève sache cela ? Et d'ailleurs suis-je certain qu'il ne le sait pas déjà ? Comment cela peut être lorsqu'on ignore cela ? Comment va-t-il bien pouvoir s'y prendre pour le savoir ? etc., mais encore et surtout : comment vais-je bien pouvoir m'y prendre, moi, l'enseignant, pour déjouer son état, le déstabiliser afin de faire reculer le front de ses savoirs et de ses ignorances ? Toutes ces questions signent le rapport didactique à l'ignorance. (p.60)

Usage qui en sera fait dans la thèse

Dans la thèse, on cherchera à examiner les prises de contrôle que l'enseignant réalise en amont de l'interaction, puis, et surtout, les pertes et prises de contrôle qui se manifestent au cœur des interactions, afin de déterminer sur quoi elles reposent et comment il est possible d'en tirer

parti, d'un point de vue didactique, dans le cadre de la Fps. La perspective est de considérer comment l'enseignant, dans le cadre d'un contrat de reprise, enrôlé cognitivement dans une interaction de connaissances, interprétant successivement les productions des apprenties, prenant, puis perdant tour à tour le contrôle des interactions, est néanmoins en mesure d'en assurer et d'en réguler le pilotage.

CHAPITRE 3 CADRE THÉORIQUE (2^{ÈME} PARTIE)

INTRODUCTION

Partant du principe que : « toute enquête sur la connaissance et les phénomènes cognitifs ne peut se faire qu'à partir du savoir, qui sert alors de modèle de référence » (Conne, 1992, p.278), la seconde partie du cadre théorique a pour principal enjeu de constituer un savoir mathématique de référence, à partir duquel il sera possible de penser et d'analyser les interactions, réalisant ainsi la quatrième fonction du savoir - après celles de contextualisation, de repère et de pilotage - qui vise à assurer la *reconnaissance des questions mathématiques* sur le fond desquelles elles se déroulent (Conne, Favre, Giroux, 2006).

Cette seconde partie repose essentiellement sur les travaux de Rouche (1992, 1998, 2006), un auteur dont le choix se justifie pour quatre raisons au moins :

- en tout premier lieu, les propos de Rouche concernent explicitement des notions mathématiques - comme la proportionnalité ou la règle de trois, par exemple - qui sont encore des *objets sensibles* (Chevallard, 1988b) dans la Fps, alors même qu'elles peuvent avoir partiellement, voire entièrement disparu des programmes de l'Eo et ne plus faire l'objet d'un investissement significatif de la part de la noosphère et encore moins des mathématiciens ;
- en deuxième lieu, ces notions ne sont pas considérées par Rouche de façon détachée, comme des isolats, ainsi qu'elles peuvent apparaître dans certaines recherches ou certains programmes ; elles relèvent en effet de constructions qui, à l'image d'une axiomatique, conduisent les notions à s'engendrer les unes des autres, marquant ainsi les liens qu'elles entretiennent entre elles ;
- en troisième lieu, les constructions proposées par Rouche ont pour ambition de partir du *quotidien*, de la *pensée commune* et des *phénomènes*⁷⁷ qu'on y rencontre pour remonter jusqu'aux mathématiques abstraites qui en proviennent et les modélisent :

Nous sommes partis des connaissances communes des gens et des questions qui font sens pour eux, en confrontant à chaque étape les contraintes imposées par ces connaissances et celles de la construction mathématique. Nous nous sommes efforcés de n'introduire des concepts nouveaux, ou de nouvelles connotations techniques pour des concepts déjà introduits que lorsque la nécessité - ou au moins l'utilité - dans les raisonnements était visible. (1998, p.3)

la perspective paraissait donc particulièrement adaptée au contexte de la Fps où le quotidien et le travail pratique prennent précisément une place très significative, en regard de l'enseignement donné en classe ;

- en quatrième lieu enfin, le langage adopté par Rouche est un langage accessible⁷⁸, eu égard à sa volonté de se faire entendre et comprendre par un public d'adultes non-initiés aux mathématiques supérieures que sont, parmi d'autres, les enseignants du primaire.

Pour donner une vision conséquente, à défaut d'être exhaustive, des travaux de Rouche, ceux-ci sont examinés sur trois plans distincts et complémentaires. Il s'agit en premier lieu de situer le projet de Rouche à la suite des réformes de l'enseignement des mathématiques qui se sont

⁷⁷ Ces idées sont discutées plus avant dans le chapitre.

⁷⁸ Ce qui ne l'empêche pas cependant, dans son ouvrage de 1992, de proposer un cadre axiomatique qui expose formellement les constructions établies en langage ordinaire.

déroulées à la fin du 20^{ème} siècle : à ce propos, le cas de la proportionnalité⁷⁹, étudié par Comin (2002), est donné à titre d'exemple parmi beaucoup d'autres (cf. Bkouche (1996) pour le cas de la géométrie ou Ba & Dorier (2006) pour celui des vecteurs). En deuxième lieu, le projet de Rouche est décrit au travers des trois ouvrages (1992, 1998, 2006) qu'il a consacrés à reconstruire les nombres - naturels, décimaux, fractions et rationnels⁸⁰ - à partir des phénomènes du quotidien, afin d'en comprendre la logique et en déterminer les enjeux. En troisième lieu, une discussion met en évidence les apports et les limites d'un tel projet d'un point de vue didactique, pour en délimiter l'usage particulier qui en sera fait dans la thèse.

LE PROJET DE ROUCHE SUITE AUX RÉFORMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE LA FIN DU 20^{ÈME} SIÈCLE

D'un point de vue général, il faut comprendre le projet de Rouche comme étant mu par la volonté de renouer les relations existant entre les *nombres* et les *grandeurs* à la suite de la rupture dont ils auraient, selon lui, fait l'objet, à l'aube du vingtième siècle, dans la sphère des mathématiciens ; puis, quelques décennies plus tard, dans l'enseignement des mathématiques à l'école.

Son argument est qu'en mathématiques, le divorce nombres-grandeurs s'est produit dès l'instant où les secondes n'ont plus été considérées comme nécessaires à la construction axiomatique des premiers.

Ainsi donc, c'est d'abord du projet et de la difficulté de mesurer les grandeurs que les nombres (autres que naturels) sont nés à travers une longue histoire.

Mais paradoxalement, les mathématiques ont abouti au 19^{ème} siècle à proposer, des nombres rationnels d'abord et réels ensuite, une construction théorique libérée de toute considération relative aux grandeurs : ces nombres y sont étudiés en s'appuyant seulement sur la théorie des ensembles et des nombres naturels. Mais pourquoi un tel divorce, et si tardif, des grandeurs et des nombres? Et divorce consommé, qui plus est, dans le moment même où les nombres sont reconnus comme aptes à mesurer toute grandeur!

[...] Cette théorie des nombres réels à l'écart des grandeurs a répondu aux besoins des mathématiciens de la fin du 19^{ème} et du début du 20^{ème} qui avaient comme projet de clarifier les fondements de la science mathématique en la faisant découler toute entière de la théorie des ensembles qu'il est apparu. (1992, pp.18-19)

Ce divorce a ensuite été reporté pour être intégré dans l'enseignement des mathématiques à l'école à l'occasion de la vaste réforme, dite des *mathématiques modernes*, qui, en Europe occidentale, s'est déroulée à la fin des années soixante.

Dans les années soixante du 20^{ème} siècle, les promoteurs des "mathématiques modernes" ont cru qu'ils avaient trouvé "la" solution pour enseigner les mathématiques. Pour eux, l'enseignement devait s'inspirer directement de la rationalité des mathématiques structuralistes. Il fallait commencer par les ensembles et les relations, enseigner déductivement à partir d'axiomes, être rigoureux, s'appuyer sur des symboles et se méfier des figures, introduire le plus tôt possible des concepts définitifs et placer les nombres avant la géométrie. (Rouche, 2006, p.317)

⁷⁹ Le choix de la proportionnalité est relatif au fait qu'elle interviendra de façon très importante dans les exercices qui seront l'enjeu des interactions dans la seconde partie de la thèse.

⁸⁰ Les nombres irrationnels, bien qu'effleurés à quelques reprises, n'y sont pas abordés de manière directe.

L'intention de vouloir inculquer des structures mathématiques définitives chez les élèves pour éviter d'installer chez eux des connaissances mal construites (que l'on devrait démolir ensuite), s'est toutefois soldée par un échec qui s'explique notamment⁸¹ par le fait : « d'avoir mis trop tôt entre les mains des élèves des instruments trop puissants, qui ne pouvaient que rarement leur servir à résoudre des problèmes » (Rouche, 1991, p.50). Les élèves n'étant pas en mesure de percevoir la portée des savoirs mathématiques dont on souhaitait les voir s'approprier, ils en sont restés réduits à n'en considérer que quelques illustrations naïves. De plus, les savoirs mathématiques enseignés ne pouvant par ailleurs les empêcher de penser, ils s'en sont malgré tout constitués des connaissances personnelles, participant de fait au processus de *transposition didactique* à l'œuvre dans les classes (Conne, 1985).

Selon Bkouche (1996), le mouvement de réaction qui a suivi la réforme des mathématiques modernes s'est caractérisé tout à la fois par une idéologie du retour au concret visant une "déthéorisation" de l'enseignement des mathématiques et un "activisme pédagogique" centré sur l'activité de l'élève. Il a semé passablement de doutes chez les enseignants, générant une forme de désorganisation et certains dysfonctionnements dans l'enseignement auxquels le projet de Rouche vise certainement à apporter une forme de réponse.

Les implications de la réforme des mathématiques modernes et de la contre-réforme qui en a suivi sur l'enseignement de la proportionnalité

La recherche menée par Comin (2002) rend compte des implications générées par la réforme des mathématiques modernes et par la contre-réforme qui en a suivi sur l'enseignement de la proportionnalité, à partir d'une analyse conjointe de l'évolution des plans d'études durant la deuxième partie du 20^{ème} siècle et des conceptions que des élèves de seconde et des enseignants du primaire (établies par le truchement de questionnaires) nourrissent à son égard.

L'analyse des plans d'études montre qu'avant les années 70, l'enseignement de la proportionnalité se réalisait conjointement par l'étude du numérique et celle des grandeurs familières aux élèves. L'avènement de la réforme des mathématiques modernes va cependant reléguer la proportionnalité et la règle de trois au rang de paradigme de l'échec des méthodes traditionnelles d'enseignement des mathématiques. De fait, la proportionnalité, associée à l'enseignement des grandeurs, va tout simplement disparaître des plans d'études : « la réforme des mathématiques modernes a exclu des programmes les notions de grandeur, de rapport et de proportion et a réduit la linéarité à l'étude des relations numériques (ibid., p. 140) ». La notion de fonction linéaire viendra s'y substituer, les grandeurs étant alors remplacées par des nombres⁸². Le projet de vouloir faire apparaître la linéarité en tant que structure universelle agissant sur des nombres va cependant se heurter à un obstacle majeur qui se révèle dans l'analyse des réponses des élèves au questionnaire que leur a soumis Comin :

Il semble que les conceptions nées des différents apprentissages restent attachées aux situations qui les ont fait naître et qu'il faille renoncer à l'idée de "conceptions universelles" sur l'ensemble des situations qui relèvent du concept de proportionnalité. (ibid., p.143)

Ce sont donc les savoirs des élèves qui, non-affranchis des situations particulières à l'occasion desquelles ils les ont rencontrés, constituent l'obstacle à un apprentissage précoce de la linéarité opérant sur des nombres. Au terme de son étude, il amènera d'ailleurs Comin à prôner un incontournable passage par les grandeurs pour y ancrer la linéarité :

⁸¹ On trouve, entre beaucoup d'autres, des développements critiques de cette réforme chez Bkouche & al. (1991).

⁸² Il s'agit d'un mouvement semblable qui, sous l'impulsion de Jean Dieudonné, et en opposition avec Gustave Choquet (Ba & Dorier, 2006), a conduit, durant la réforme des mathématiques modernes, à réduire la géométrie à un simple chapitre de l'algèbre linéaire (Bkouche, op.cit., p.10).

Le sens qu'un élève de l'école élémentaire peut donner à ces objets est porté par des connaissances et des pratiques sur les grandeurs familières. Le recours au sens oblige à une genèse qui va des grandeurs aux nombres. L'algèbre, pour cela, ne peut être à ses débuts qu'une abstraction qui modélise l'arithmétique élémentaire. (ibid., pp. 174-175)

Dans les plans d'études qui ont été établis suite à l'échec de la réforme des mathématiques modernes, on voit la proportionnalité faire de nouvelles apparitions. Cependant, le retour au concret signalé plus haut par Bkouche ne se traduit pas par un retour aux grandeurs : ce sont encore les nombres qui constituent le "milieu matériel" de la proportionnalité et ce n'est qu'en fin de programme que des exercices relatifs aux grandeurs (pourcentages, échelles, vitesses moyennes) sont envisagés. La perspective d'avant-réforme a donc fondamentalement changé, puisque le recours aux grandeurs est essentiellement convoqué en guise d'illustration aux propriétés définies sur les nombres. Or, selon Comin, ce renversement de perspective n'aurait pas de conséquences dommageables sur l'enseignement, si la proportionnalité n'était pas restée encore très présente dans la société où elle s'avère : « nécessaire à l'intégration sociale et professionnelle : les algorithmes anciens qui lui sont attachés permettent à tout citoyen de comprendre l'usage des mathématiques élémentaires dans les tâches quotidiennes et professionnelles » (ibid., p.175).

Les enseignants du primaire se voient ainsi pris en tenaille entre deux injonctions contradictoires, à savoir celles de l'enseignement secondaire qui est orienté vers l'enseignement de l'algèbre et celle de la société qui entretient un rapport ancien, mais toujours bien vivace à la proportionnalité. Il s'ensuit une désorganisation des savoirs qui lui sont liés et plusieurs dysfonctionnements que la noosphère ne parvient pas à réguler. Ces dysfonctionnements sont bien visibles dans l'analyse des réponses que les enseignants ont données au questionnaire que leur a soumis Comin. On observe en effet que, dans l'usage des mots qui ont été employés, certaines expressions liées à l'usage de la proportionnalité - telle l'expression "grandeurs proportionnelles", par exemple - tendent à disparaître du vocabulaire des enseignants ; que certains termes - comme "proportion" et "rapport" - sont considérés à tort comme synonymes ; que les mots utilisés ne discriminent plus les différentes natures - "décimaux", "fractions", "rationnels" - ni les différentes fonctions - "rapports", "mesures" ou "opérateurs" - des nombres ; et que les vocabulaires utilisés pour la linéarité d'une part et pour la proportionnalité d'autre part s'interpénètrent et interfèrent.

S'agissant des techniques de résolution qui ont été utilisées, l'analyse révèle en outre que certaines méthodes ont entièrement disparu des pratiques des enseignants, alors qu'en contrepartie, l'usage d'un tableau de proportionnalité tend à se généraliser au point de ne plus permettre de distinguer les cas où le modèle de la proportionnalité est effectivement approprié pour traiter une situation de ceux où il ne l'est pas ; il semble également que, comme chez les élèves, les ostensifs sur lesquels reposent ces méthodes restent profondément liés aux situations qui les ont vu naître. Comin attribue l'origine ces dysfonctionnements à quatre contraintes majeures :

- la disparition de l'étude des grandeurs, des rapports et des proportions de l'enseignement secondaire ;
- la difficulté de formuler les problèmes anciens dans les problèmes nouveaux de l'algèbre ;
- l'impossibilité de rejeter la linéarité, omniprésente dans l'enseignement ;
- l'inadaptation du vocabulaire de la proportionnalité pour décrire les relations numériques. (ibid., p.172)

Ils tendent par ailleurs à montrer que les difficultés des élèves liées à la proportionnalité sont au moins autant affaire d'enseignement et de culture qu'à des problèmes d'apprentissage, au moment où l'école primaire ne possède plus le statut reconnu par la société toute entière de

propédeutique à l'entrée dans la vie active, mais qu'elle se voit de plus en plus assujettie au système secondaire où l'enseignement de la proportionnalité, en l'absence du traitement des grandeurs et des mesures, se limite à l'étude des relations numériques.

Reconstruire les nombres à partir des grandeurs

En se donnant comme projet de reconstruire les nombres à partir des grandeurs qui les ont fait naître, Rouche vise à concevoir des formes d'organisations notionnelles susceptibles de répondre aux dysfonctionnements mis en évidence par Comin dans le cas de la proportionnalité. Ce projet s'inscrit parmi d'autres - comme par exemple ceux⁸³ de Steiner en 1969, Papy en 1970 ou encore Lebesgue en 1975 - qui cherchent tous à rétablir des liens entre les nombres et les grandeurs.

La spécificité du projet de Rouche réside toutefois dans la volonté de prendre en compte dans ses organisations : « les méandres de la réalité sous-jacente aux nombres et aux grandeurs » (1992, p.20). Adoptant la perspective de Freudenthal (1983), Rouche dit en effet vouloir partir des *phénomènes*⁸⁴ familiers, rencontrés au *quotidien*, impliquant des grandeurs et des nombres.

Les phénomènes familiers, pris en ce sens, ne sont évidemment pas d'emblée mathématisés, c'est-à-dire inscrits comme propriétés postulées ou démontrées dans une théorie axiomatique. Néanmoins, ils se prêtent à une étude raisonnée, on arrive à les *organiser*, à les structurer. On les saisit non à l'aide de *concepts* construits comme en mathématiques (avec des quantificateurs et toutes sortes de précautions techniques), mais à l'aide de ce que Freudenthal appelle des *objets mentaux* (qu'il nous arrivera aussi de nommer *notions*). Les objets mentaux sont soit empruntés à la pensée commune, soit construits comme objets des mathématiques informelles. (Rouche, 1992, pp.21-22)

Ces organisations nécessitent un fil conducteur, mais celui-ci ne suit ni la genèse des notions chez les enfants, ni non plus celle qui a pu être la leur dans l'histoire de l'humanité. Elles ne s'accordent par ailleurs avec aucune perspective axiomatique préétablie et ne constituent pas non plus un plan d'enseignement. La ligne directrice globale sera de :

construire les grandeurs par étapes en n'introduisant les avatars successifs des nombres en gestation que, pour chacun, quand il était devenu impossible de s'en passer. Et cela de manière à en exhiber au mieux la nécessité, et donc la fonction. (ibid., p.25)

LE PROJET DE ROUCHE DÉCRIT AU TRAVERS DE TROIS OUVRAGES VISANT À RECONSTRUIRE LES NOMBRES À PARTIR DES GRANDEURS

Trois ouvrages pour aller à la rencontre de l'enseignement

S'ils sont explicitement destinés aux acteurs de l'enseignement des mathématiques, les trois ouvrages⁸⁵ de Rouche (1992, 1998, 2006) ne constituent pas pour autant - il s'en défend vigoureusement à chaque fois - des manuels scolaires. Il faut plutôt les comprendre comme des essais de présentation globale et informelle d'un ou de plusieurs domaines mathématiques, autrement dit des ouvrages *d'épistémologie des mathématiques élémentaires*.

⁸³ Tous les trois sont cités et leurs projets décrits par Rouche (1992, pp.19-20).

⁸⁴ L'idée de *phénomène* chez Freudenthal recouvre, selon Rouche : « toute relation, souvent familière, entre des ensembles, des formes, des grandeurs, ou des nombres et qui se présente à l'esprit comme matériau et point d'appui à la pensée mathématique » (ibid., p.21).

⁸⁵ A ces trois ouvrages, il faut en associer deux autres qui ont été rédigés sous l'égide du CREM (1995, 2002), le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Nivelles (Belgique), dont Rouche était le coordinateur. Ils en reprennent la démarche et l'essence des propos en les associant à de nombreuses et diverses activités à mener en classe.

Le point de départ est à chaque fois le même : ce sont les objets, leurs grandeurs et les questions qui se posent à leur rencontre lorsqu'on agit sur eux ; et le point d'arrivée est également pareil : ce sont les nombres naturels, décimaux, fractions et/ou rationnels, envisagés en tant que tels, détachés de tous les phénomènes qui ont contribué à les faire naître :

L'éducation mathématique élémentaire consiste à faire découvrir aux enfants une multitude de phénomènes réels qui sont les sources intuitives des mathématiques, et les mathématiques elles-mêmes qui sont autre chose, avec une autre organisation. (Rouche, 1992, p.7)

Ce qui distingue en revanche les trois ouvrages, c'est d'une part le nombre et l'étendue des champs notionnels pris en compte et d'autre part la volonté de plus en plus manifeste qui s'y révèle de se rapprocher de l'enseignement des mathématiques et des enseignants.

Supposant connues les propriétés élémentaires des nombres naturels, l'ouvrage de 1992 élabore ainsi une première construction partant des grandeurs, via les mesures, pour remonter jusqu'aux nombres rationnels positifs. Truffé de références historiques et épistémologiques et composé en deux parties - l'une rédigée en langage ordinaire, et l'autre, destinée à des mathématiciens, qui en reprend les points essentiels dans le cadre d'un exposé formel -, il s'avère de fait assez éloigné des pratiques d'enseignement.

L'ouvrage de 1998 constitue une forme de prolongement de celui de 1992 dans le domaine particulier des fractions. En s'attachant d'abord à les présenter selon trois conceptions distinctes, puis à établir les liens qu'elles entretiennent avec la proportionnalité et enfin à questionner la pertinence de devoir apprendre à calculer avec des nombres écrits sous cette forme, il se rapproche sensiblement des questions d'enseignement.

Tandis que l'ouvrage de 2006, qui reprend et transforme une partie de la construction de 1992, puis la complète avec celles des nombres naturels et des nombres relatifs, ressemble de plus en plus, au travers notamment de la catégorisation des situations qui y est faite, à un vaste projet d'enseignement des nombres à partir des grandeurs et de leurs mesures.

« Le sens de la mesure. » (Rouche, 1992)

Le premier ouvrage écrit en 1992 devait être au départ une traduction du livre de Freudenthal : « Didactical phenomenology of mathematical structures » (1983) qui explore les phénomènes familiers dans lesquels les mathématiques formelles prennent leurs racines. Rouche y a pourtant renoncé, essentiellement en raison des difficultés du texte de l'ouvrage. Il en a donc rédigé un de sa main, en collaboration avec des enseignants et des formateurs, qui se fonde sur celui de Freudenthal, mais veille à en faciliter la lisibilité.

Comparer, sommer, multiplier des grandeurs par un naturel.

Dans ce premier ouvrage, Rouche part des objets que l'on rencontre au quotidien. Il montre que ceux-ci peuvent être appréhendés de divers points de vue - selon que l'on considère leur longueur, leur poids, leur surface, leur volume, etc. - qui déterminent autant de domaines de grandeurs différents. Dans un domaine de grandeurs particulier, il est alors possible de comparer ces objets entre eux et d'établir certains rapports.

On peut aussi réaliser la sommation de deux grandeurs d'un même objet et les multiplier par un naturel (par itération). Ces diverses opérations se heurtent cependant régulièrement à des difficultés ou des ambiguïtés - quand les objets sont courbes ou qu'ils ne sont pas déplaçables, par exemple - que l'on peut parfois apprendre à surmonter - Rouche fait état de nombreux exemples - par des manœuvres concrètes spécifiques. Celles-ci reposent sur des propriétés relatives aux grandeurs - telles l'équivalence, la transitivité de l'ordre, la commutativité,

l'associativité, etc. - que l'on retrouvera par la suite dans les opérations correspondantes qui seront établies au niveau des nombres.

Fractionner des grandeurs en parts égales.

Rouche considère ensuite le fractionnement d'une grandeur en parts égales de deux manières distinctes : d'abord en coupant une grandeur en (n) parts égales et en prélevant ensuite un certain nombre (m) de parts ; puis en coupant un certain nombre (m) de grandeurs en (n) parts égales et en prélevant une part de chacune d'entre elles. Le résultat auquel on aboutit, identique dans les deux cas, est défini comme *grandeur fractionnée* de type m/nA (où m et n sont deux nombres naturels et A une grandeur). Le passage de A à m/nA relève d'un agrandissement quand $m > n$ et d'un rapetissement quand $n > m$. La comparaison, l'addition et l'enchaînement de ces grandeurs fractionnées de type m/nA entraînent l'apparition de nouveaux phénomènes reposant sur de nouvelles propriétés qui, là encore, se retrouveront dans les opérations sur les nombres.

Déterminer des opérateurs de fractionnement.

Dès lors qu'il est possible de transformer une grandeur A en une grandeur m/nA à l'aide de deux nombres naturels, Rouche envisage également l'opération inverse, où il s'agit de déterminer, à partir de A et B (avec $B = m/nA$), les nombres m et n qui permettent de transformer A en B. L'opération revient en fait à mesurer B à l'aide de A, m/n en constituant la mesure. Rouche explique que la chose est aisée lorsque l'on dispose d'une commune mesure⁸⁶, égale à C entre A et B : sachant que $A = nC$ et $B = mC$, on peut en effet remplacer C par A/n dans la seconde égalité, ce qui donne $B = m/nA$. A l'intérieur d'un même domaine de grandeurs, on peut ensuite envisager de rapporter toute grandeur à une grandeur arbitraire U qui servira à la mesurer de manière uniforme. Si $A = m/nU$, m/n sera désigné *opérateur de fractionnement* donnant la mesure de A dans l'unité U. Il deviendra alors possible de substituer ces opérateurs de fractionnement aux grandeurs pour les comparer, les additionner et les multiplier, en les dissociant des grandeurs qui leur ont donné naissance.

Définir les fractions.

Vouloir séparer l'entité m/n de la grandeur U recouvre le projet de constituer de nouveaux nombres qui devront impérativement reprendre, pour les généraliser, les propriétés relatives aux grandeurs fractionnées. Les expressions m/n forment ces nouveaux nombres que l'on appelle des *fractions*. Rouche affirme qu'en dotant ces nombres d'une inégalité (stricte) $m/n < p/q$ si $mq < np$, d'une somme $m/n + p/q = mq + np / nq$ et d'un produit $m/n \times p/q = mp/nq$, les fractions peuvent être considérées comme des *nombres rationnels positifs* au sens propre, désormais détachés de toute référence aux grandeurs.

Lier les fractions aux décimaux.

Etant parvenu aux nombres rationnels par le biais des grandeurs, Rouche établit un pont avec les *mesures décimales* dans le cadre du système décimal des poids et mesures qu'il désigne comme unifiant les rapports entre unités et sous-unités d'un même domaine de grandeurs. En s'appuyant sur le cas particulier des longueurs, il montre comment le mètre, qui en constitue l'unité arbitraire de référence, est utilisé, avec le décimètre qui vaut 1/10 de mètre, le centimètre qui vaut 1/100 de mètre, etc. pour aboutir à des expressions de type 12,75 m, ou un nombre décimal est associé à une unité pour établir la mesure d'une grandeur. La comparaison, l'addition et la multiplication des grandeurs par des nombres décimaux est rapportée à la comparaison, l'addition et la multiplication des naturels, par conversion des mesures dans une

⁸⁶ On sait depuis les Grecs dans l'Antiquité que ce n'est pas toujours le cas.

unité inférieure de façon à chasser les virgules, puis, une fois le résultat trouvé, par une nouvelle conversion dans l'unité attendue⁸⁷.

Définir la linéarité.

La notion de *linéarité* est abordée en fin d'ouvrage, en revenant au niveau des grandeurs avant toute mesure, et considérant deux ensembles d'objets pourvus d'une *relation d'équivalence*, associant chaque grandeur de l'un, à une et une seule grandeur de l'autre. La linéarité apparaît alors quand, lors du passage d'un ensemble à l'autre, la somme de deux grandeurs correspondantes est toujours égale :

La notion de grandeur se bâtit au départ sur deux structures très simples : une équivalence et une somme. La linéarité n'est autre chose que le respect de ces deux structures dans le passage d'un ensemble d'objets (puis de grandeurs) à un autre. (ibid., p.217)

La notion de vitesse constante liée à une distance (mesurée en km) et une durée (mesurée en heures) est prise comme exemple de linéarité. Rouche précise à ce titre que ce n'est qu'à un niveau plus abstrait que la linéarité pourra être enfin envisagée entre deux ensembles de nombres⁸⁸.

« Pourquoi ont-ils inventé les fractions ? » (Rouche, 1998)

Ce deuxième ouvrage, datant de 1998, a été rédigé dans la perspective d'expliquer les fractions à travers : « les nombreux phénomènes qu'elles servent à exprimer, à commencer par les fractionnements de grandeurs, les manipulations de grandeurs fractionnées, les rapports, les proportions, les mesures » (ibid., p.1). Les fractions y sont "reconstruites" suivant trois conceptions distinctes.

Les fractions-opérateurs.

La première conception part du fractionnement de divers objets du quotidien que l'on cherche à couper en parts égales. Ces fractionnements supposent des manipulations diverses et des degrés de difficultés tout aussi divers, selon les objets considérés. Rouche fait remarquer que dans le cas d'un objet continu, l'opération "couper en n parts égales" est toujours possible (quand cela ne l'est plus physiquement, on peut prolonger l'idée mentalement), alors qu'elle ne l'est pas dans celui du partage d'un ensemble fini d'objets identiques. Pour constituer une fraction, il faut associer l'opération "couper en n parts égales" à une autre opération qui est "prélever m de ces parts". La composée de ces deux opérations peut en effet être exprimée par une fraction m/n . La fraction ainsi constituée est dite *fraction-opérateur*, dans le sens où elle "agit" sur la grandeur (on retrouve ici l'idée de grandeur fractionnée de l'ouvrage de 1992). Cette fraction-opérateur peut également s'établir à partir de trois opérations distinctes que sont "multiplier une grandeur par m", "partager le résultat en n parts égales" et "prélever une de ces parts". La composée de ces trois opérations donne en effet la même fraction m/n .

Les fractions-rapports.

La deuxième conception part à nouveau des objets du quotidien, dont il s'agit cette fois-ci de considérer certains rapports. Ces rapports peuvent être perçus entre deux objets distincts, entre deux éléments d'un même objet, entre un tout et une partie de ce tout ou encore entre les deux

⁸⁷ La transformation d'une écriture fractionnaire en une écriture décimale et sa réciproque sont aussi détaillées.

⁸⁸ Profitant de l'occasion pour décrier un enseignement qui introduit les applications linéaires entre deux domaines de nombres et qui laisse aux physiciens ce qui a trait aux grandeurs :

Un tel ordre d'engendrement commandé par la seule logique relève de mathématiques "décantées". Il ne rend compte de la genèse des concepts ni dans l'histoire de l'humanité, ni dans celle de chaque être humain en particulier. (ibid., p.219)

parties d'un tout. Rouche montre alors comment un rapport liant les grandeurs de deux objets A et B (ou parties d'objets A et B) peut être chiffré à l'aide de deux nombres naturels. L'algorithme d'Euclide constitue tout d'abord le moyen d'en retrouver la commune mesure (quand cela est possible). Une fois cette commune mesure U établie, on saura que $A = mU$ et que $B = nU$, ce qui permettra d'affirmer que A est à B comme m est à n. Il est cependant aussi possible d'exprimer ce rapport à l'aide d'une fraction, en déclarant que $B = n/mA$ ou que $A = m/nB$. La fraction considérée sous cet angle est différente de la fraction-opérateur, puisqu'elle n'agit pas sur une grandeur, mais signifie le rapport qui existe entre deux grandeurs. C'est pourquoi, Rouche la désigne par le terme de *fraction-rapport*.

Les fractions-mesures.

La troisième conception envisagée par Rouche concerne la fraction qui permet de mesurer une grandeur : il s'agit de la *fraction-mesure*. Il reprend pour ce faire l'opération fondatrice de l'algorithme d'Euclide, qui est de reporter un certain nombre de fois une grandeur A dans une grandeur B. Lorsque cette grandeur A va exactement, c'est-à-dire un nombre (n) entier de fois, dans B, on dira que ce nombre entier de fois mesure B ou que $B = nA$. Quand la grandeur A ne va pas un nombre entier de fois dans B, on cherchera à mesurer B à l'aide d'une unité plus petite qui pourra être une fraction A/m de A. Il suffira alors de déterminer le nombre (n) de fois qu'il est possible de reporter de A/m dans B pour en établir la mesure, autrement dit que $B = n/mA$. Rouche montre comment le système décimal des poids et mesures a développé cette perspective, en recourant de façon systématique à des fractions décimales de A, permettant de mesurer facilement des grandeurs à l'aide de couples nombre-unité tels 1,24 m, 2,3 kg ou 1,85 l qui évitent le recours aux fractions-mesures. Selon lui, l'efficacité du système⁸⁹ est telle qu'il s'avère inapproprié d'apprendre à mesurer avec des fractions dans les pays où il est en vigueur.

La proportionnalité.

A la suite de la distinction entre ces trois conceptions, Rouche introduit la *proportionnalité*⁹⁰ à partir des proportions, c'est-à-dire sur la base : « des phénomènes que l'on observe lorsque des rapports sont égaux » (ibid., p. 79). Il convoque la situation de deux tan grams, reproduits à l'échelle m/n, qui déterminent deux domaines de grandeurs identiques, mesurées à l'aide d'unités identiques (des longueurs, mesurées en mm), afin d'explicitier les propriétés principales de la proportionnalité :

- l'existence de deux *rapports externes* réciproques : le rapport m/n qui lie les mesures du petit tan gram à celles du plus grand et le rapport n/m qui, inversement, lie les mesures du grand tan gram au petit ;
- une pluralité de *rapports internes*, soit ceux qui lient deux mesures du petit tan gram aux mesures correspondantes du grand ;
- le résultat de l'addition de deux mesures du petit tan gram qui correspond toujours au résultat de l'addition des deux mesures correspondantes du grand tan gram ;
- le fait que, dans son ensemble, la situation peut être représentée par un *tableau de correspondance* (tableau de proportionnalité), un *graphique* (qui prend la forme d'une droite) et une *formule algébrique* : $y = ax$ (où a représente la pente de la droite).

⁸⁹ Rouche affirme que le passage d'une fraction à son expression décimale constitue une forme de normalisation destinée à faciliter leur comparaison (comme cela peut être le cas pour les pourcentages). Or ce passage, qui procède de la division du numérateur par le dénominateur, ne s'effectue toutefois puisqu'il se décline en trois cas de figure bien spécifiques :

- quand $m > n$ et que la division s'arrête, on aboutit à un nombre décimal ;
- quand $m < n$ et que la division s'arrête, on aboutit aussi à un nombre décimal, mais il est surprenant de considérer que n puisse être contenu un nombre de fois dans m, puisqu'il n'y va pas même une fois ;
- quand $m > n$ ou $m < n$ et que la division ne s'arrête pas, on aboutit à un nombre : « improprement appelé nombre décimal infini ». (ibid., p.73)

⁹⁰ Dans ce deuxième ouvrage, Rouche parle de proportionnalité et non de linéarité.

Il présente et compare aussi plusieurs *techniques* qui reposent sur ces propriétés et qui permettent de résoudre tout problème de proportionnalité où trois mesures de grandeurs sont données et où il s'agit de déterminer la quatrième.

Le calcul avec les fractions.

En fin d'ouvrage, Rouche s'intéresse encore au *calcul avec les fractions*. Il affirme que ce dernier n'est pertinent que dans quatre cas de figure - étant donné que dans tous les autres, il est préférable d'utiliser leurs correspondants décimaux -, soit dans les rares situations où, au quotidien, on a recours aux fractions mesures, dans le cadre des probabilités, dans la préparation au calcul algébrique et dans le calcul des exposants fractionnaires.

La comparaison, l'addition et la multiplication de fractions sont essentiellement considérées sous leur aspect "mesures", à partir de segments et de rectangles. La composition de deux fractions, de même que leur division ne sont envisagées qu'à un plan numérique. Elles forment la transition vers le *système des nombres rationnels* - que Rouche ne fait qu'évoquer en guise de conclusion - en tant qu'entité abstraite, à la fois fondée sur et désormais dégagée des phénomènes et des conceptions relatives aux fractions dont ils procèdent.

« Nombres, grandeurs, proportions. Du quotidien aux mathématiques. » (Rouche, 2006)

Ce troisième ouvrage, écrit en 2006 et destiné en priorité aux instituteurs (donc à des adultes non-initiés aux mathématiques supérieures⁹¹), s'inscrit : « comme un essai de reconstruction de l'arithmétique au départ de la lumière naturelle, du sens commun » (p.5).

Dans cet ouvrage, Rouche considère que l'*arithmétique élémentaire* provient de deux sources principales : les *ensembles*⁹² *finis d'objets* qui peuvent être dénombrés, mais que l'on ne peut pas toujours partager en parts égales et les *grandeurs* - longueurs, poids, surfaces, volumes, etc. - qu'on ne peut pas dénombrer, mais que l'on peut toujours partager en autant de parts égales que l'on veut (si ce n'est concrètement, tout au moins par la pensée). Les ensembles finis d'objets donnent naissance aux nombres naturels, ce qui fait l'objet d'une première construction ; tandis que les grandeurs aboutissent aux nombres décimaux d'une part et aux fractions d'autre part⁹³, ce qui donne lieu à une seconde construction⁹⁴.

1^{ère} construction : des ensembles finis d'objets aux nombres naturels

Comparer des ensembles finis d'objets et des nombres naturels.

Dans cette première construction, Rouche part de la comparaison d'ensembles finis d'objets pour montrer que celle-ci n'implique pas impérativement le recours à des nombres. Quand les objets sont très peu nombreux, on peut en effet le faire à vue ; quand ils sont en nombre plus important, il est possible d'apparier les éléments de chaque ensemble pour le faire ; et quand ils le sont beaucoup plus, on facilite leur comparaison en regroupant leurs éléments dans des sous-ensembles de même cardinal. Les nombres naturels et la numération décimale de position ont comme fonction première de faciliter - quand les ensembles sont éloignés, par exemple - les comparaisons d'ensembles finis d'objets. La comparaison des nombres vient alors se substituer

⁹¹ Rouche précise que ce sont des *objets mentaux* (au sens de Freudenthal) qui seront pris en compte dans cet ouvrage et que les propriétés dont ils relèvent ne seront pas démontrées, mais simplement illustrées par des *exemples paradigmatiques*, c'est-à-dire des exemples que l'on peut étendre : « sans effort particulier à tous les autres possibles » (ibid., p.318).

⁹² Il faut prendre ici le mot "ensemble" dans son acception courante et non dans celle qu'il peut prendre, en mathématiques, dans le cadre de la théorie dite "des ensembles".

⁹³ Rouche défend le fait que les nombres décimaux et les fractions ne peuvent prétendre ici au statut de nombres rationnels, parce qu'ils n'en possèdent pas toutes les propriétés : « Les nombres par lesquels on passe d'abord et nécessairement sont des nombres plus quotidiens, des nombres pratiques. Ils ont quelques propriétés claires, qui en font des bons outils pour de grandes catégories de problèmes. Ce sont des objets mentaux au sens de Freudenthal (1983) » (ibid., p.320).

⁹⁴ On n'entrera pas ici sur une troisième construction de nombres qui figure pourtant dans l'ouvrage 2006 et qui concerne les nombres relatifs.

à la comparaison des ensembles d'objets. Elle relève d'un certain nombre de règles qui reposent conjointement sur les propriétés relatives à la comparaison d'ensembles et sur celles qui président au fonctionnement de la numération décimale de position.

Définir et caractériser des classes de situations.

Rouche considère ensuite les situations relatives aux quatre opérations élémentaires qu'il est possible de réaliser avec des nombres naturels. Comme chez Vergnaud (1981, 1991) auquel il réfère explicitement, il traite les situations additives et soustractives d'une part⁹⁵ et les situations multiplicatives et de division d'autre part. La classification des situations de Rouche diffère en revanche sensiblement de celle opérée par Vergnaud, puisqu'il recourt pour le faire à l'idée générale de *fonction* qui lui permet de révéler une meilleure correspondance entre les deux champs⁹⁶ : à savoir trois types de situations additives et cinq types de situations soustractives dans le premier et trois types de situations multiplicatives et cinq types de situations de division dans le second.

Des situations additives et soustractives, Rouche dit que certaines sont plus difficiles que d'autres, les plus faciles étant les situations additives qui se résolvent par une addition et les situations soustractives qui se résolvent par une soustraction. Il précise cependant que d'autres facteurs peuvent être source d'accroissement des difficultés, comme l'ordre dans lequel les données de la situation apparaissent dans son énoncé⁹⁷. Rouche examine également les techniques qui prévalent à l'addition et à la soustraction des nombres naturels dans le cas où ces nombres sont petits (inférieurs à dix), puis quand ils deviennent de plus en plus grands. Il présente plusieurs techniques de calcul mental et de calcul écrit, tout en explicitant les propriétés sur lesquelles ces techniques reposent. En ce qui concerne les situations multiplicatives et de division, il fait de même, réitérant le fait que certaines sont plus difficiles que d'autres, les plus faciles étant les situations multiplicatives qui se résolvent par une multiplication et les situations de division qui se résolvent par une division. Il présente à nouveau diverses techniques mentales et écrites pour effectuer des multiplications et des divisions de nombres naturels et les propriétés dont elles relèvent.

Investiguer les propriétés des nombres naturels.

On peut encore relever qu'en toute fin d'ouvrage, on trouve un chapitre spécifiquement consacré aux nombres naturels et où les propos concernent les nombres détachés de toute forme de référence aux ensembles finis d'objets. Il s'agit d'étudier à leur sujet quelques notions/propriétés que Rouche qualifie de "classiques", à savoir les *diviseurs* et les *multiples*, les *caractères de divisibilité*, les *nombres premiers*, les *communs diviseurs* et les *communs multiples*, ainsi que les *nombres figurés* (carrés ou triangles).

2^{ème} construction : des grandeurs aux nombres décimaux et aux fractions

Comparer, additionner, soustraire, multiplier, diviser et mesurer des grandeurs.

Dans cette seconde construction, Rouche part, comme en 1992, de la comparaison d'objets qui sont envisagés selon différentes grandeurs : leur longueur, leur poids, leur surface, leur volume, etc. Il montre que celle-ci peut être réalisée, dans divers cas de figure, à l'aide de différentes techniques qui évitent de recourir aux nombres. Il affirme aussi que, quel que soit le domaine

⁹⁵ Cela ne l'empêche pas toutefois d'affirmer vis-à-vis de la soustraction (il fera de même au sujet de la division vis-à-vis de la multiplication), qu'elle est : « d'abord une opération en soi, sans relation immédiate avec l'addition : elle traduit l'idée d'enlever une quantité à une autre » (ibid., p.9)

⁹⁶ Ce choix l'obligera cependant à traiter de manière spécifique les situations multiplicatives et de division qui mettent en rapport quatre ensembles d'éléments ou quatre grandeurs, autrement dit les situations de proportionnalité (voir la 2^{ème} construction qui suit).

⁹⁷ On observe encore que, contrairement à Vergnaud, la composition de transformations n'est pas pour Rouche, de façon explicite tout au moins, à la source d'une complexité plus grande des situations.

de grandeurs considéré, on peut, avant toute mesure, définir une forme d'addition et une multiplication par un nombre naturel, auxquelles il fait correspondre respectivement trois types de soustractions et trois types de divisions. La mesure des grandeurs, qu'il détermine par l'usage d'une grandeur intermédiaire faisant office d'unité, s'inscrit comme la façon appropriée de solutionner les situations où certaines comparaisons ou opérations s'avèrent délicates à réaliser directement sur les grandeurs.

Mesurer des grandeurs pour définir les nombres décimaux.

Contrairement à ce qui avait été réalisé dans l'ouvrage de 1992, la suite de la construction ne passe pas par le fractionnement des grandeurs pour aboutir aux fractions, mais bien par leur mesure décimale, - il parle de *grandeurs mesurées* - qui lui permettra de constituer les *nombres décimaux*. Alors même qu'il reconnaît que les fractions simples sont sans doute plus abordables et plus fondamentales que les décimaux, Rouche s'en explique par le fait que :

on les rencontre sans cesse dans la vie quotidienne et qu'ils sont donc familiers, et aussi parce que, au contraire des fractions à proprement parler, ils ont une écriture qui se rattache facilement à celle des nombres naturels. (ibid., p.319)

Les différentes manières de mesurer des grandeurs dans le cadre de ce système sont présentées pour déterminer ensuite comment il est possible de comparer et d'opérer avec des grandeurs, en prenant directement appui sur leur mesure. Rouche montre qu'il est possible de le faire en référant d'une part aux propriétés relatives aux grandeurs non-mesurées et d'autre part à celles qui président à la comparaison et aux opérations sur les nombres naturels (soit celles qui ont déjà été mises en évidence dans la première construction).

Des grandeurs mesurées, on pourra dès lors passer aux nombres décimaux en détachant le nombre du symbole de l'unité auquel il était associé, soit : « en coupant le cordon ombilical qui les relie initialement à la mesure des grandeurs » (ibid., p.133). Ce passage des grandeurs mesurées aux nombres décimaux nécessite toutefois des précautions qui visent à ce que ces "nouveaux nombres" puissent tout à la fois représenter à un niveau numérique les grandeurs et les mesures dont ils proviennent et généraliser en leur sein les nombres naturels et leurs propriétés, de manière à devenir : « un instrument puissant qui, grâce à son caractère abstrait, s'appliquera utilement à des objets aussi variés que les ensembles finis et les grandeurs de toutes sortes » (ibid., p.149).

Fractionner des grandeurs en parts égales et aboutir aux fractions.

C'est seulement dans un deuxième temps qu'est envisagée la construction des fractions qui, comme en 1992, ne passe pas par l'entremise des mesures fractionnaires⁹⁸, mais par le fractionnement des grandeurs en parts égales et le prélèvement d'un certain nombre de parts. Il s'agit ensuite de déterminer comment il est possible de manier - c'est-à-dire de comparer et d'opérer avec - ces grandeurs fractionnées de type m/nA , puis comment il est possible de détacher l'expression m/n de la grandeur qui l'a fait naître - au même titre qu'auparavant on a détaché le nombre décimal du symbole de l'unité de mesures - pour aboutir aux fractions.

Définir et caractériser la proportionnalité.

La question de la *proportionnalité* est développée une fois les nombres décimaux et les fractions constitués - arguant notamment que : « les mesures elles-mêmes traduisent des proportionnalités entre grandeurs et nombres » (ibid., p.206). Elle est envisagée à partir d'une situation mettant en jeu deux ensembles de grandeurs mesurées, ce qui permet à Rouche d'en dégager les principales propriétés. La proportionnalité est ensuite considérée du point de vue des grandeurs

⁹⁸ Celles-ci seront reprises après coup pour situer les fractions avec les décimaux sur un axe muni d'une unité de longueur, ainsi que pour montrer comment s'opère la transformation d'un nombre décimal en un nombre fractionnaire et sa réciproque.

avant toute mesure (pour mettre en évidence le cas où l'existence du rapport externe n'a pas lieu d'être), puis au niveau des nombres - nombres décimaux et fractions - détachés de toute grandeur. Les cas particuliers des pourcentages et de quelques parents proches (fonctions affines et proportionnalité inverse) de la proportionnalité sont enfin présentés et discutés.

LE PROJET DE ROUCHE : ASPECTS CRITIQUES ET ESSAI DE SCHÉMATISATIONS

Le projet de Rouché : aspects critiques

De façon générale, le projet de Rouché s'articule autour d'une double perspective qui est fort bien explicitée dans les propos qui suivent :

- A. Nous partons des ensembles que l'on dénombre et des grandeurs que l'on mesure pour construire diverses sortes de nombres.
- B. Nous partons de la pensée commune et des questions les plus quotidiennes, et n'introduisons de mathématiques plus techniques que pour répondre à des questions rencontrées en cours de route, à des nécessités du développement théorique. (2006, p.5)

Il y a donc d'une part la volonté de reconstruire les nombres à partir des ensembles et des grandeurs et d'autre part celle de partir de la pensée commune et des questions que l'on rencontre au quotidien pour "remonter" jusqu'aux mathématiques.

D'un point de vue didactique, ces perspectives soulèvent toutefois deux importantes questions quant au rôle qu'il est possible d'attribuer à un tel projet pour concevoir et mettre en œuvre un enseignement des grandeurs, des mesures, des nombres et de la proportionnalité - ce qui sera en partie le cas dans le volet expérimental de la thèse - dans un contexte de formation comme celui de la Fps.

Reconstruire les nombres à partir des grandeurs

S'agissant des grandeurs et des nombres⁹⁹, les constructions établies par Rouché distinguent trois plans (ou niveaux) dans les rapports grandeurs-nombres¹⁰⁰ : le plan des grandeurs, le plan des grandeurs mesurées et des grandeurs fractionnées et le plan des nombres décimaux ou des fractions.

- le premier plan est a-numérique ; on y opère sur des grandeurs indépendamment des nombres ; ces opérations produisent divers phénomènes qu'il est parfois possible de traiter, sans recourir aux nombres, en faisant appel à diverses manipulations reposant sur des propriétés relatives aux grandeurs non-numérisées (la multiplication et la division des grandeurs font exception vu qu'elles impliquent l'emploi d'un naturel) ;
- le deuxième plan associe, par le biais du fractionnement ou par le biais de la mesure, des nombres à des grandeurs ; on y opère sur des nombres, décimaux ou fractionnaires, qui restent attachés aux grandeurs ; ces opérations produisent d'autres phénomènes qu'il est possible de traiter, en faisant appel à diverses manipulations reposant sur des propriétés relatives aux grandeurs mesurées ou aux grandeurs fractionnées ;
- enfin, le troisième plan est exclusivement numérique ; on y opère sur des nombres, nombres décimaux ou fractions, indépendamment des grandeurs ; ces opérations

⁹⁹ Notons qu'en ce qui concerne les rapports entre les ensembles finis d'objets et les nombres, Rouché ne distingue que deux plans, soit celui des ensembles et celui des nombres naturels. Il serait néanmoins possible d'en rajouter un troisième, intermédiaire entre les nombres et les ensembles, soit celui des « nombres de ».

¹⁰⁰ On retrouve ces trois plans chez Comin (2002) qui, en référence à Douady (1986), parle plutôt de *cadre* : « cadre des grandeurs, cadre des grandeurs mesurées, où les quantités sont exprimées par des couples (mesure, unité), cadre des variables numériques ou algébriques » (p.155).

produisent encore d'autres phénomènes¹⁰¹ qu'il est possible de traiter, indépendamment des grandeurs, en faisant appel à diverses manipulations reposant sur des propriétés relatives aux nombres.

Ces constructions visent ensuite à articuler ces plans les uns avec les autres, en montrant comment certaines propriétés relatives au plan des grandeurs se retrouvent ensuite sur celui des grandeurs mesurées ou fractionnées pour être généralisées à celui des nombres, alors que d'autres propriétés, au contraire, restent spécifiques du plan auquel elles appartiennent¹⁰². Elles indiquent également comment l'appréhension des grandeurs permet d'envisager les nombres selon différentes facettes ou différents aspects - c'est le cas notamment des fractions dans l'ouvrage de 1998 - qui viennent enrichir les liens significatifs existant entre nombres et grandeurs. Elles montrent en outre comment les nombres peuvent parfois faciliter le traitement de certains phénomènes apparus au niveau des grandeurs et comment l'on peut alors les envisager comme des outils utiles à la résolution de certains problèmes.

Tout ceci devrait donc en principe contribuer, qui plus est pour un enseignant non-mathématicien, à mettre de l'ordre dans le divers des grandeurs, des mesures, des nombres et de la proportionnalité et à faire évoluer, en les intégrant les uns aux autres, les divers points de vue ou conceptions qu'il est possible de nourrir à leur propos. Et cela devrait aussi permettre d'envisager diverses voies d'approche en vue de leur enseignement selon les croisements qu'il est possible d'opérer, passant, par exemple, par le fractionnement des grandeurs, plutôt que par les mesures fractionnaires pour aboutir aux fractions ou bien en faisant précéder l'étude des grandeurs mesurées de celles des grandeurs fractionnées au moment d'aborder le second plan.

La première grande question que soulève le projet de Rouche de reconstruire les nombres à partir des grandeurs, réside toutefois dans l'autonomie qu'il est possible de conférer à chacun des deux plans, l'un vis-à-vis de l'autre. En effet, lorsque Rouche invite, à diverses reprises, ses lecteurs à considérer les grandeurs "avant toute mesure" et donc avant tout nombre, il exige de leur part un effort de pensée qui montre précisément que ces deux plans ne sont pas disjoints. Le processus d'abstraction qui procède des grandeurs, via les grandeurs mesurées/ou fractionnées, jusqu'aux nombres ne va donc pas seulement dans ce sens : *il est tout autant nécessaire de passer par un processus d'abstraction similaire, et sans doute aussi important, pour envisager les grandeurs sans les nombres et les mesures qui les caractérisent.*

L'examen détaillé de l'argumentation de Rouche montre en fait qu'il présente chacun de ces plans dans un *cadre algébrique*. Il décrit le plan numérique selon sa structure - la notion de structure étant une notion proprement algébrique - et il fait de même pour le plan des grandeurs (s'inscrivant en ce sens pleinement dans le prolongement de la réforme des maths modernes). Et c'est fort de cette représentation¹⁰³ algébrique des grandeurs d'une part et des nombres d'autre part qu'il peut aboutir à des plans autonomes, de structures proches, quasiment

¹⁰¹ L'emploi du terme de "phénomène" sur les trois plans est le fait de Rouche qui l'a repris de Freudenthal (1983) (cf. note n°84 dans ce chapitre).

¹⁰² On peut donner comme exemple la commutativité de la multiplication qui fonctionne dans tous les cas sur le plan numérique, mais pas sur le plan des grandeurs non-mesurées, lorsqu'il s'agit de multiplier une grandeur par un nombre : « l'idée même de permuter les deux facteurs, et d'écrire quelque chose comme $A \times 3$ est absurde ; multiplier un nombre par une grandeur - par exemple multiplier 5 par un poids - n'a pas de sens » (ibid., p.119).

¹⁰³ Ce processus d'abstraction et d'algébrisation des grandeurs fait écho au concept de *généricité*, développé par Patras (2014) qui, référant au logicien et philosophe Giuseppe Longo, affirme que :

les tentatives modernes pour fonder l'ensemble des mathématiques sur l'arithmétique, avec une insistance très forte sur le rôle de l'induction, sont passées à côté de phénomènes aussi fondamentaux que le rôle de la *généricité* (et des preuves associées, les "preuves prototypes"). En conséquence, l'épistémologie mathématique du XX^{ème} siècle a largement sous-estimé, au profit de preuves et de schémas déductifs formels, le rôle de la *construction* de concepts et structures dans le progrès mathématique. (p.94)

Rouche parle en fait continuellement de nombres et grandeurs génériques, ayant déjà fait le pas de l'abstraction, alors que cela n'est pas encore le cas, comme on le verra abondamment dans la deuxième partie de la thèse, chez les apprenties.

isomorphes. Les constructions auxquelles il parvient forment ainsi des agencements organisés et linéaires de notions découlant les unes des autres, ressemblant à des constructions axiomatiques (mais s'en démarquant toutefois, du fait qu'elles n'en possèdent pas toute la rigueur). Tout le contraire en fait de ce qu'il adviendra, comme on aura loisir de l'éprouver dans la seconde partie de la thèse, au cœur des interactions avec les apprenties, où il n'est pas possible de dissocier, de démêler ce qui tient du plan des grandeurs, de ce qui concerne le plan des nombres, ni non plus de suivre, pour y conduire l'enseignement, un exposé passant d'un plan à un autre.

Dans les termes de Conne (2004c), les constructions établies par Rouche procèdent d'une *logique d'exposition*, alors que le travail mené auprès des apprenties relève d'une *logique d'initiation* :

[...] la première organisation est celle d'une reconstitution, précisément l'organisation des principes - par exemple, la numération, ou la géométrie plane - à même d'en reconstituer des expériences passées et à venir, alors que la seconde est l'organisation de ces expériences mêmes. La première fait abstraction des instruments sémiotiques [...] supports de l'expérience et de l'exploration. La seconde organisation au contraire repose sur un appareil sémiotique touffu, complexe et surtout mouvant, qui s'enrichit, se renouvelle et aussi se redécouvre sans cesse. (p.64)

De fait, le risque encouru par l'élaboration et la publication successives de constructions comme celles de Rouche est qu'au travers de leur simplicité et leur limpidité effectives, elles tendent à nier l'existence de certains "écueils"¹⁰⁴ qui ne manqueront pourtant pas d'apparaître au cours des interactions¹⁰⁵.

De tels écueils parsèment pourtant le discours de Rouche, tantôt de manière explicite :

Considérons le cas où A est à B comme 2 est à 5. La fraction rapport s'écrit $\frac{2}{5}$ et la réduction à un seul nombre fournit 0,4. Le nombre 0,4 est "le nombre de fois que 5 est contenu dans 2", ce qui est une façon un peu bizarre de s'exprimer, puisque 5 n'est même pas contenu une seule fois dans 2. Il faut s'habituer à cela. (1998, p.72)

et tantôt de façon plus implicite, quand, par exemple, glissant de l'écriture $L = 7 \text{ m} + 3 \text{ dm}$ à l'écriture $L = 7,3 \text{ m}$, Rouche (2006) affirme simplement(!) que la seconde où : « on a placé une virgule à droite du nombre de mètres, de sorte que le chiffre à droite de la virgule indique le nombre de décimètres » (p.135) représente une forme plus commode à manier que la première. Cependant, comme ces écueils échappent à la logique d'exposition, ils ne peuvent intégrer les constructions établies dont ils se voient irrémédiablement exclus.

Partir de la pensée commune et des questions les plus quotidiennes

La deuxième grande question que soulève le projet de Rouche concerne les idées de *pensée commune* et de *quotidien*. S'il invoque la première à diverses reprises - de même que celle de *sens commun* - dans ses ouvrages, Rouche ne la définit pas vraiment. La seule tentative que l'on trouve dans ses écrits provient d'un texte antérieur où il invite à considérer la pensée commune : « dans un sens à la fois vague et familier, telle qu'on l'observe chez une personne qui agit, parle et lit dans la vie quotidienne, et manie les nombres entiers comme à l'école primaire » (1991a,

¹⁰⁴ Des écueils qui ont parfois été mis en évidence dans le cadre de travaux portant sur l'apprentissage des mathématiques. S'agissant du rapport entre un objet et l'une de ses grandeurs, on peut, entre autres, évoquer celui qui consiste, pour un sujet donné, à ne pas pouvoir considérer la grandeur comme un objet en soi, susceptible d'être comparé avec d'autres grandeurs d'un même domaine relatives à d'autres objets (Morf, Grize & Pauli, 1969).

¹⁰⁵ Si Rouche n'en est manifestement pas dupe, lorsqu'il déclare que : « la réalité des apprentissages est touffue, désordonnée, complexe. Notre travail n'a d'autre intention que de l'éclairer » (1992, p. 27), le fait qu'il réfère dans son discours à deux plans algébriques - les grandeurs et les nombres - semblent en revanche lui échapper, lorsqu'il prétend, par exemple, que la succession des chapitres de son deuxième ouvrage (1998) vont : « grosso modo du concret à l'abstrait » (p.3).

p. 142) et qui s'actualise dans un langage dont les unités, les mots, ne sont pas pourvus d'un sens univoque : « la fonction essentielle des mots de la langue commune est d'évoquer des choses connues par ailleurs, non par une définition, mais par l'usage et le contexte » (p.143).

Dans ce même texte, la pensée commune vient également s'opposer à celle dont relèvent les traités mathématiques, qui est rendue par un discours détaché de toute ambiguïté et dont chaque terme est censé procéder d'une définition univoque. La pensée commune y est envisagée comme source d'une autre face de la pensée mathématique, complémentaire à la première, que le mathématicien met en œuvre quand il résout un problème et où : « tout bouge à la fois : l'énoncé, la preuve et les concepts sont ajustés les uns aux autres par essais successifs, l'esprit allant de reprise en reprise jusqu'à la solution » (ibid. p. 144). De ce point de vue, la pensée mathématique procéderait de la pensée commune qui en constituerait une forme de point d'ancrage. Cette idée est d'ailleurs en partie reprise dans l'ouvrage de 2006, quand Rouche affirme que : « pour enseigner à penser mathématiquement, il ne faut pas présupposer la pensée mathématique, il faut l'élaborer pas à pas à partir de la pensée commune » (p.318). La pensée commune y est ici considérée comme celle qui apporte les premières explications aux phénomènes quotidiens de différente nature, mais qui, lorsqu'elle n'y parvient pas, appelle le recours à des notions mathématiques qui permettront d'y surseoir.

Il est donc difficile de déterminer ce que Rouche entend vraiment par cette idée de pensée commune, ce d'autant que le qualificatif de "commun" qui lui est attribué pourrait donner à penser qu'elle serait la même d'un individu à l'autre, ce qui est aberrant¹⁰⁶. Il faut donc plutôt envisager la pensée commune, comme une forme de référence vague, insaisissable, que Rouche emploie essentiellement à des fins rhétoriques, pour manifester la nécessité - qui a selon lui fait défaut durant la réforme des mathématiques modernes - de se rapprocher de la pensée de l'individu dans toute entreprise qui vise à lui enseigner les mathématiques.

Tout comme la pensée commune, il n'est pas simple non plus de déterminer ce que l'idée de "quotidien" signifie exactement pour Rouche. Dans un autre texte, contemporain au précédent (Rouche, 1991b), où il s'applique à montrer au travers de plusieurs exemples - la règle graduée qui engendre le concept de droite réelle, la vitesse d'un coureur qui produit celui de dérivée ou encore les aires et les volumes des objets simples qui aboutissent à celui d'intégrale -, les liens, mais aussi et surtout les écarts¹⁰⁷ qu'entretiennent les objets du quotidien et les concepts mathématiques qui leur correspondent, on perçoit que ce quotidien, au travers des objets choisis, est un quotidien déjà mathématisé. Il ne s'agit donc pas du quotidien d'un individu particulier qui rencontre des phénomènes de n'importe quelle nature et cherche à les appréhender, mais bien plutôt d'un quotidien paradigmatique auquel on rapporte la diversité des expériences de tout un chacun, ce qui permet ensuite à Rouche d'y désigner les objets qu'il considère être à la source des concepts qu'il manipule.

Dans les trois ouvrages considérés plus haut, le même processus se répétera à chaque fois. Ce sera déjà le cas dans le choix des objets et des actions à porter sur ces objets qui y sont proposés : on y évoque des objets pesants que l'on veut comparer entre eux, des objets allongés que l'on veut mettre bout à bout, des objets volumineux que l'on veut partager en parts égales etc., soit des objets déjà mathématisés qui rendent possible l'explicitation de telle ou telle caractéristique. Ce sera également le cas dans le choix des situations qui est opéré et de la catégorisation qui en

¹⁰⁶ Si l'on tient compte du fait qu'il y a vraisemblablement autant de pensées différentes que d'individus et que chaque pensée est susceptible de variation et d'évolution, il n'est nullement possible de l'enfermer dans une forme de "capsule commune".

¹⁰⁷ Ces écarts - que Rouche qualifie de *seuils épistémologiques* - font que les concepts mathématiques se révèlent inopérants dans le quotidien, tout autant que les objets du quotidien le sont en mathématiques. Il énumère pas moins de neuf distinctions - comme par exemple le fait qu'un objet quotidien et son correspondant mathématique puissent être dotés de propriétés contradictoires ou bien que : « pour accéder au statut mathématique, un objet est nettoyé de celles de ses connotations qui ne servent pas, voire qui seraient nuisibles dans la théorie - qui caractérisent ces écarts.

est faite : les situations ne sont pas extraites du quotidien de tout un chacun, mais constituent déjà des situations qui le modélisent ; tandis que la catégorisation produite procède explicitement d'une organisation mathématique destinée à en faire apparaître les similitudes et les différences. Et ce sera encore le cas, quand on se prêtera à comparer l'usage qui est fait de certaines notions dans les ouvrages de Rouche, de celui qui en est fait au "quotidien" de la Fps où, par exemple, on n'effectuera jamais, pour mesurer une longueur, le report successif de mesures d'un mètre, d'un décimètre et d'un centimètre et où, de surcroît, l'usage même du terme "décimètre" a totalement disparu du langage utilisé pour en rendre compte.

De fait, si, contrairement à *la pensée commune* qui faisait écho à quelque chose de vague, voire d'insaisissable, *l'idée de quotidien* chez Rouche apparaît comme un produit normé et stylisé par la pensée mathématisante de son auteur, les deux idées *peuvent néanmoins être considérées comme le produit d'une re-création dont le dessein est de favoriser l'entreprise de reconstruction des nombres à partir des grandeurs*. Elles participent donc de la même logique d'exposition et s'avèrent aussi bien inopérantes pour rendre compte de la pensée des apprenties, que du quotidien auquel celle-ci effectivement s'affronte¹⁰⁸.

Élaborer des constructions "sur mesure" et les faire fonctionner comme des schémas

La distinction entre logique d'exposition et logique d'initiation soulève la question de leur articulation que Conne envisage comme suit :

La première organisation sert de référence et de justification à la seconde, cette dernière n'a pour elle que sa propre efficacité pragmatique, mais apporte en retour à la première la confirmation ou l'infirmité de la pertinence didactique des présupposés de la première. (op.cit., p.64)

Et c'est à ce titre, précisément, qu'on cherchera à en faire usage dans la thèse, où les constructions serviront de référence et de justification (logique d'exposition) au déroulement des interactions, tandis que leur confrontation avec la réalité des interactions (logique d'initiation), contribuera, dans un rapport dialectique, à en éprouver la pertinence.

L'idée est donc de partir des ouvrages de Rouche et d'établir deux constructions calibrées sur les principales notions mathématiques ayant fait l'objet des interactions rapportées et analysées dans la deuxième partie thèse. Puis, afin d'en opérationnaliser la fonction dialectique, il s'agira de les considérer non comme des cadres de références rigides, mais bien comme des *schémas*, au sens où Bontems (2014), en référence à Gonseth, les définit¹⁰⁹.

Dans cette perspective, un schéma se constitue en effet sous l'action d'un double processus. Le premier processus est celui d'une *axiomatisation schématique* qui va sélectionner certains aspects de la réalité qu'il sera supposé représenter. Un schéma est de fait sélectif et sommaire, car il ne représente qu'une partie de la réalité dont il rend compte. Le second processus est celui de *schématisation réalisante* c'est-à-dire que, partant des éléments de réalité sélectionnés, il va permettre à celui qui s'en sert de raisonner pour produire des résultats dans le schéma. La concordance entre le schéma et la réalité représentée se mesurera ensuite à l'aune de ce que les résultats produits dans le schéma puissent être reportés de façon probante dans la réalité effective. Cela signifie donc qu'un schéma présente également un caractère provisoire, doté d'une capacité évolutive, car *susceptible d'être révisé par l'expérience*.

¹⁰⁸ Il suffira d'examiner les interactions qui seront rapportées dans la deuxième partie de la thèse pour prendre la mesure des écarts pouvant exister entre le quotidien envisagé par Rouche, vis-à-vis de celui des apprenties. Les écueils auxquels elles seront conduites à s'affronter seront les témoins de ce que constitue leur quotidien effectif.

¹⁰⁹ Il s'agit d'un essai d'application d'un concept relevant de l'épistémologie des mathématiques à des fins didactiques. Il a déjà tenté ailleurs, et de façon bien plus approfondie qu'il ne le sera ici, par Conne (2002), en vue de caractériser et de contraster l'enseignement de l'arithmétique et celui de la géométrie au primaire et au secondaire en Suisse Romande.

Ce sont ces différents aspects du schéma qu'il importera d'attribuer aux deux constructions établies : en les considérant tout d'abord comme le fruit d'une sélection des notions mathématiques dont elles procèdent, ce qui, immanquablement, leur conférera un aspect sommaire ; en les prenant ensuite comme des aides ou des appuis pour interpréter la réalité des interactions auxquelles elles seront confrontées ; en veillant enfin à leur déléguer et maintenir un caractère provisoire, susceptible d'être rectifié par ces confrontations.

Construction n°1 : grandeurs, mesures de grandeurs et nombres décimaux

La première construction¹¹⁰ concerne le champ de la mesure dont on retrouvera plusieurs aspects dans la seconde partie de la thèse, quand les apprenties seront invitées à opérer avec des grandeurs représentées par un nombre décimal et par une unité. Elle s'appuie, pour l'essentiel, sur la portion de celle établie par Rouche en 2006, partant des objets pour aboutir aux nombres, en distinguant trois niveaux d'abstraction successifs (cf. figure n°2), soit le niveau des grandeurs, le niveau des grandeurs mesurées et le niveau des nombres.

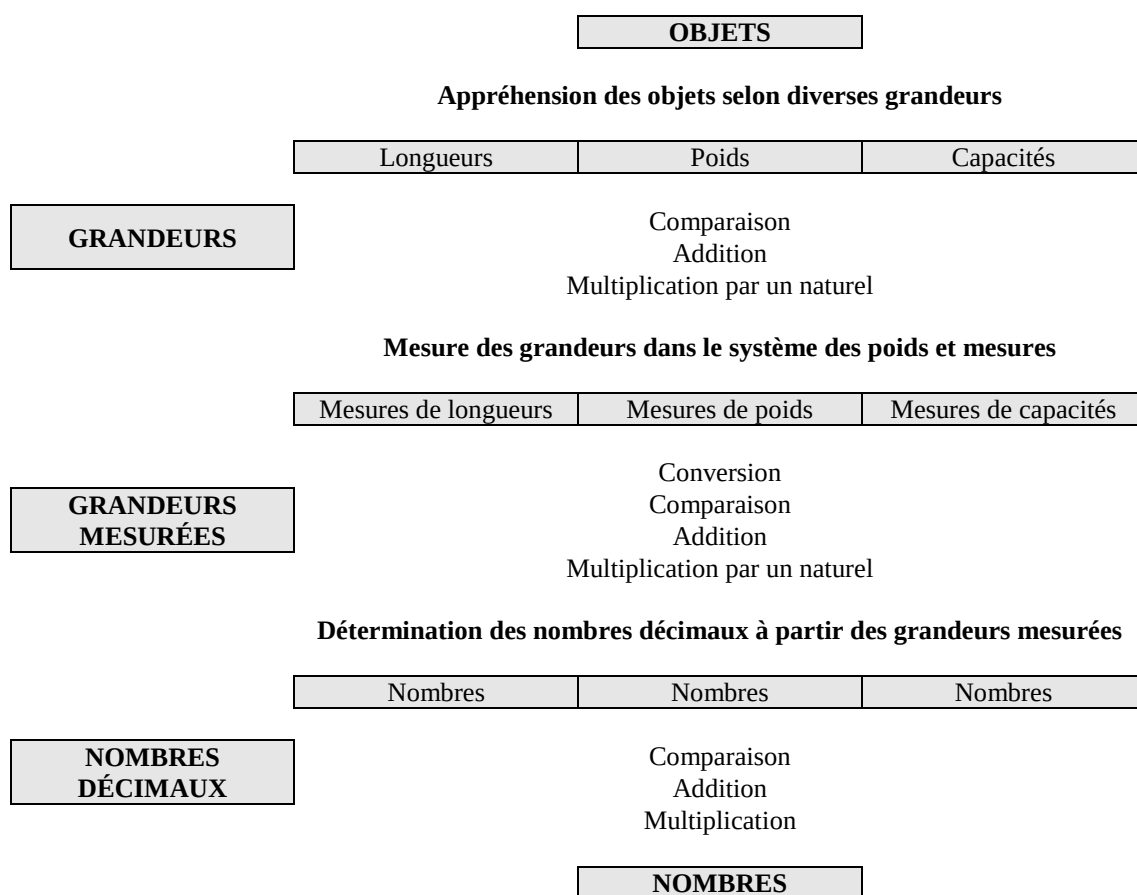


Figure n°2 - Structure de la construction n°1 relative au champ de la mesure

¹¹⁰ Les deux constructions ont été placées en annexe du chapitre afin de ne pas surcharger les propos. Il n'en est donné ici que leur structure.

Au niveau des grandeurs, les objets sont appréhendés, avant toute mesure, suivant trois domaines¹¹¹ de grandeurs distincts que sont les "longueurs", les "poids"¹¹² et les "volumes sous formes de liquides" que l'on désignera par le terme courant de "capacités". On y envisage tour à tour comment comparer, sans recourir aux nombres, des longueurs, des poids et des capacités et on explicite les propriétés sur lesquelles reposent ces comparaisons. On fait ensuite de même pour l'addition de ces grandeurs et pour leur multiplication par un naturel.

Le passage des grandeurs aux grandeurs mesurées nécessite ensuite de décrire comment ces mesures des longueurs, des poids et des capacités s'accomplissent dans le cadre du système décimal des poids et mesures auquel on a recours dans la majorité des pays en Europe. On y montre comment établir des conversions de mesures à l'intérieur d'un même domaine de grandeurs, celles-ci étant parfois nécessaires au calcul avec des grandeurs mesurées. On y envisage également comment comparer entre elles des mesures de longueurs, de poids et de capacité (et les propriétés qui sous-tendent ces comparaisons), puis comment il est possible de les additionner entre elles et de les multiplier par un naturel¹¹³.

Le passage des grandeurs mesurées aux nombres décimaux implique la prise en compte d'un certain nombre de conditions qui permettent de "détacher" les nombres des symboles de l'unité qui leur était attachée. La comparaison, l'addition et la multiplication des nombres décimaux font l'objet d'un nouvel examen, avant que la construction ne se termine par une brève discussion quant aux spécificités que les nombres décimaux présentent vis-à-vis des naturels.

Construction n°2 : grandeurs, rapports de grandeurs, proportions et proportionnalité

La seconde construction concerne le champ de la proportionnalité¹¹⁴ qui est largement impliquée dans la majorité des exercices que les apprenties ont eu à résoudre dans la seconde partie de la thèse. Elle est fondée sur les propos tenus par Rouche à son égard dans ses trois ouvrages (1992, 1998, 2006) dont elle apporte une synthèse. Elle reprend les trois niveaux d'abstraction qui avaient déjà été distingués dans la première (cf. figure n°3), soit le niveau des grandeurs, le niveau des grandeurs mesurées et le niveau des nombres.

La construction commence au niveau des grandeurs en présentant l'idée de rapport entre grandeurs avant toute mesure, puis en envisageant la comparaison de deux rapports. Une proportion y est définie comme l'égalité de deux rapports et la proportionnalité comme la relation unissant deux ensembles de grandeurs où tous les rapports sont égaux. A ce niveau, il est déjà possible de déterminer trois propriétés de la proportionnalité : la correspondance des sommes, la correspondance des rapports internes et l'existence d'un rapport externe et de sa réciproque (lorsque les deux ensembles de grandeurs sont de la même espèce).

Au niveau des grandeurs mesurées, la définition de la proportionnalité, tout comme les trois propriétés qui la caractérisent, sont reconduites. Il est alors possible de la représenter graphiquement à l'aide d'une droite passant par l'origine et de la modéliser par une formule de type $uQ = P$ (avec Q et P comme grandeurs mesurées et u comme coefficient dépendant des unités relatives à Q et à P).

¹¹¹ Le choix des poids et des capacités tient au fait que ce sont deux domaines de grandeurs que l'on retrouvera majoritairement par la suite dans les interactions. Celui des longueurs vient de ce que le segment (et la longueur qu'il représente) est universellement reconnu pour représenter des grandeurs quelconques : « Ainsi les segments, dans leur dépouillement et leur facilité de manipulation deviennent-ils les représentants (on dit aussi les paradigmes) de toutes les espèces de grandeurs » (Rouche, 1992, p.74).

¹¹² Il ne sera pas fait ici, comme l'explique Rouche dans son ouvrage de 2006 (p.329), de distinction entre poids et masse : la raison est que cette distinction, qui nécessite pour être perçue d'être éprouvée dans différents endroits de la Terre, voire hors de la Terre, est indiscernable au quotidien et qu'elle n'y est donc jamais faite.

¹¹³ Le cas de la multiplication de deux grandeurs mesurées est également considéré.

¹¹⁴ S'agissant de la proportionnalité, on mentionnera le travail de thèse conduit par Voisin (2013) dans les classes de SEGPA qui lui est spécifiquement consacré.

L'ensemble sera enfin repris au niveau des nombres avec, pour la formule, le passage à une expression algébrique, désormais détachée de toute grandeur, de type $ax = y$.

Au niveau des grandeurs mesurées et des nombres, quatre techniques de résolution d'un problème de proportionnalité sont présentées et comparées : l'usage direct du rapport interne, l'usage du rapport externe, la règle de trois et le produit en croix. Enfin, on discutera des cas particuliers des pourcentage et des conversions de mesures que l'on retrouvera plus avant dans la seconde partie de la thèse.

PROPORTIONNALITE			
	GRANDEURS	GRANDEURS MESURÉES	NOMBRES DÉCIMAUX
DÉFINITIONS	Rapports Comparaison de rapports Proportion	Rapports Comparaison de rapports Proportion	Rapports Comparaison de rapports Proportion
	Proportionnalité entre deux ensembles de grandeurs	Proportionnalité entre deux ensembles de grandeurs mesurées	Proportionnalité entre deux ensembles de nombres
PROPRIÉTÉS	Correspondance des sommes Correspondance des rapports internes Existence, dans certains cas, d'un rapport externe et de sa réciproque	Correspondance des sommes Correspondance des rapports internes Existence d'un rapport externe et de sa réciproque	Correspondance des sommes Correspondance des rapports internes Existence d'un rapport externe et de sa réciproque
		Représentation graphique sous forme d'une droite passant par l'origine Modélisation par une formule de type $uQ = P$	Représentation graphique sous forme d'une droite passant par l'origine Modélisation par formule de type $ax = y$
		Usage direct du rapport interne Usage du rapport externe Règle de trois	Usage direct du rapport interne Usage du rapport externe Produit en croix
TECHNIQUES DE RÉSOLUTION			
CAS PARTICULIERS		Les pourcentages Les conversions de mesures	

Figure n°3 - Structure de la construction n°2 relative au champ de la proportionnalité

ANNEXE AU CHAPITRE 3 : DEUX CONSTRUCTIONS POUR APPRÉHENDER LA COMPLEXITÉ DES INTERACTIONS DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPÉCIALISÉE

Construction n°1 : grandeurs, mesures de grandeurs et nombres décimaux

Dans cette première construction, on partira des trois¹¹⁵ domaines de grandeurs que sont les "longueurs", les "poids"¹¹⁶ et les "volumes sous formes de liquides" que l'on désignera par le terme courant de "capacités".

Les grandeurs, avant toute mesure, comparaison, addition et multiplication par un naturel

Avant toute mesure, c'est-à-dire sans avoir recours à des nombres, Rouche commence par montrer comment il est déjà possible de comparer des objets, selon leur longueur, leur poids ou leur capacité. Ainsi, pour les longueurs, on pourra reporter le premier objet sur le second en les faisant coïncider à une extrémité pour savoir lequel est le plus long ; dans le domaine des poids, on pourra déposer les deux objets sur chacun des deux plateaux d'une balance pour déterminer lequel est le plus lourd ; alors que pour celui des capacités, on pourra transvaser les deux liquides dans un récipient identique et comparer leur hauteur respective. Dans chaque technique, trois propriétés sont toujours respectées : il s'agit, pour les grandeurs, de *l'équivalence*, la *transitivité de l'ordre* et la *transitivité de l'équivalence*¹¹⁷.

On peut également déterminer une addition¹¹⁸, détachée de tout nombre, pour chaque domaine de grandeur considéré : deux objets peuvent être mis bout à bout pour constituer un nouvel objet dont la longueur sera la somme des deux longueurs de chacun des objets initiaux ; deux autres objets peuvent être mis l'un sur l'autre pour établir la somme de leur poids ; et dans le cas d'objets liquides, ceux-ci peuvent être versés dans un même récipient pour constituer la somme de leur capacité. L'addition de deux grandeurs relève à nouveau de trois propriétés générales que sont la *commutativité*, l'*associativité* et la *compatibilité de la somme et de l'ordre* au niveau des grandeurs¹¹⁹.

¹¹⁵ Le choix des poids et des capacités tient au fait que ce sont ces deux domaines de grandeurs que l'on retrouvera majoritairement par la suite dans les interactions. Celui des longueurs vient de ce que le segment (et la longueur qu'il représente) est universellement reconnu pour représenter des grandeurs quelconques : « Ainsi les segments, dans leur dépouillement et leur facilité de manipulation deviennent-ils les représentants (on dit aussi les paradigmes) de toutes les espèces de grandeurs » (Rouche, 1992, p.74).

¹¹⁶ Il ne sera pas fait ici, comme l'explique Rouche dans son ouvrage de 2006 (p.329), de distinction entre poids et masse : la raison est que cette distinction, qui nécessite pour être perçue d'être éprouvée dans différents endroits de la Terre, voire hors de la Terre, est indiscernable au quotidien et qu'elle n'y est donc jamais établie.

¹¹⁷ Rouche définit les deux premières de la manière suivante :

Propriété 1. Equivalence pour les grandeurs. Si on compare deux objets du point de vue d'une même grandeur (par exemple deux longueurs, ou deux poids, etc.), on ne change pas le résultat de la comparaison si on remplace un des deux objets par un autre de la même grandeur.

Propriété 2. Transitivité de l'ordre pour les grandeurs. Si A, B et C sont trois grandeurs de même espèce (par exemple trois longueurs, ou trois poids, etc.), et si $A < B$ et $B < C$, alors $A < C$. (ibid., pp.112-113)

Alors que la troisième, soit la transitivité de l'équivalence pour les grandeurs peut-être définie ainsi : si A, B et C sont trois grandeurs de même espèce et si $A \equiv B$ et $B \equiv C$, alors $A \equiv C$.

¹¹⁸ La soustraction de deux grandeurs peut être abordée d'une part comme une opération en tant que telle - distincte de l'addition - où il s'agit de prélever une longueur, un poids ou une capacité à une longueur, un poids ou une capacité plus grande ; et d'autre part comme la réciproque d'une addition de deux grandeurs A et B donnant $A + B$ et où, connaissant $A + B$ et A, il s'agit de trouver B, ou bien alors, connaissant $A + B$ et B, il s'agit de trouver A.

¹¹⁹ Rouche définit les deux premières de la manière suivante :

Propriété 3. Commutativité de l'addition des grandeurs. Si on additionne deux grandeurs A et B, on peut toujours les permuter : cela ne change pas le résultat. En d'autres termes, si A et B sont deux grandeurs, $A + B = B + A$.

Propriété 4. Associativité de l'addition des grandeurs. Si on additionne deux grandeurs A et B, et qu'à la somme on ajoute une grandeur C, on obtient le même résultat que si on commence par additionner B et C, et qu'on ajoute la grandeur obtenue à A. En d'autres termes, $(A + B) + C = A + (B + C)$. (ibid., pp.115)

Alors la propriété de la compatibilité de la somme et l'ordre peut-être définie ainsi : si A, B et C sont trois grandeurs de même espèce et si $A < B$, alors $A + C < B + C$.

Toujours en ce qui concerne le plan des grandeurs avant toute mesure¹²⁰, Rouche affirme enfin que seule la multiplication d'une grandeur par un nombre naturel peut être envisagée : s'il est possible en effet de doubler une longueur, de prendre trois fois un même poids ou d'absorber cinq doses identiques d'un liquide, il n'y a pas de sens, au niveau des grandeurs non-mesurées, à vouloir multiplier une longueur par une autre longueur, un poids par un autre poids ou une capacité par une autre capacité. Dans le cas de la multiplication d'une grandeur G par un naturel n , la commutativité de la multiplication n'a pas de sens non plus, les deux termes du produit nA n'étant pas de même nature (l'un étant un nombre et l'autre une grandeur non numérisée), il n'y a pas lieu de vouloir les permuter. Il est cependant possible de définir quatre nouvelles propriétés qui s'appliquent à la multiplication d'une grandeur par un naturel avant toute mesure et indépendamment du domaine de grandeur considéré¹²¹.

Mesure des grandeurs dans le système décimal des poids et des mesures.

Rouche pose ensuite que l'idée de la mesure provient de la difficulté, voire de l'impossibilité manifeste qu'il peut y avoir parfois à vouloir directement - c'est-à-dire physiquement, quand on ne peut pas mettre deux objets côte à côte pour les comparer, par exemple - opérer sur les grandeurs. Dans ce cas, on est contraint de recourir à une grandeur intermédiaire, qui servira d'unité, pour mesurer les grandeurs avec lesquelles on souhaite opérer.

Ainsi, si l'on cherche à comparer deux longueurs L et L' , on pourra utiliser une troisième longueur l , facilement déplaçable, que l'on pourra reporter d'abord sur L , puis ensuite sur L' , afin de déterminer combien de fois elle est contenue dans chacune d'entre elles. Il sera dès lors possible de remplacer chaque longueur L et L' , par deux nombres n et m qu'il suffira de comparer pour déterminer laquelle des deux longueurs est la plus grande.

Cette manière de procéder nécessite cependant de recourir à une même unité l , sans quoi la comparaison n et m ne saurait correspondre à la comparaison L et L' . Ce qui fait que :

il apparaît extrêmement commode que, dans une communauté humaine, et peut-être dans l'humanité toute entière, on utilise la même unité de longueur, la même unité de poids,... bref la même unité pour chaque type de grandeur. Si on fait cela, la communication des mesures entre les gens est grandement facilitée. (Rouche, 2006, p. 130)

La mesure des grandeurs dans un domaine particulier demande cependant que soient résolues deux questions. La première a trait au choix de cette unité, qui est un choix arbitraire, mais qui doit permettre de mesurer de façon à la fois efficace et précise n'importe quelle grandeur du domaine. La seconde a trait au fait que, quelle que soit l'unité choisie, il se présente toujours un risque qu'elle ne puisse "aller" un nombre entier de fois dans la grandeur qu'elle doit mesurer et qu'on ne puisse dès lors effectuer de mesures suffisamment précises.

¹²⁰ La division d'une grandeur par un naturel peut être abordée d'une part comme une opération en tant que telle - distincte de la multiplication - où il s'agit de partager une longueur, un poids ou une capacité en un certain nombre de parts égales et de prélever une part ; et d'autre part comme la réciproque de la multiplication d'une grandeur A par un naturel n donnant nA et où, connaissant nA et n , on aimerait trouver A ou bien alors, connaissant nA et A , on aimerait trouver n .

¹²¹ Ces quatre propriétés sont les suivantes :

Propriété 5. Si G est une grandeur quelconque, si m et n sont deux nombres naturels, et si on constate que $mG = nG$, alors on peut en conclure que $m = n$. Réciproquement, si on sait que $m = n$, alors on est sûr que $mG = nG$.

Propriété 6. Soient G_1 et G_2 deux grandeurs de la même espèce et n un nombre naturel. Si on constate que $nG_1 = nG_2$, alors on peut en conclure que $G_1 = G_2$. Si au contraire on constate que $nG_1 < nG_2$, on en conclut que $G_1 < G_2$. Réciproquement, si $G_1 = G_2$, on conclut que $nG_1 = nG_2$, et si $G_1 < G_2$, alors $nG_1 < nG_2$.

Propriété 7. Si n , G_1 et G_2 sont un nombre naturel et deux grandeurs de la même espèce, alors $n(G_1 + G_2) = nG_1 + nG_2$.

Propriété 8. Si n_1 et n_2 sont deux nombres naturels et si G est une grandeur, alors $(n_1 + n_2)G = n_1G + n_2G$. (ibid., pp.120-121)

Le système décimal des mesures, établi et mis en œuvre à la suite de la Révolution Française¹²², s'inscrit alors, selon Rouche, comme une réponse optimale apportée à ces deux importantes questions.

Mesure des longueurs dans le système décimal des poids et mesures.

Dans le système décimal des poids et mesures, l'unité fondamentale - c'est-à-dire celle qui a été définie en premier - est le mètre¹²³(m). Rouche montre que pour mesurer une longueur L, on commencera par compter combien de fois le mètre y est contenu¹²⁴. Si le mètre y va un nombre (n) exact de fois, on pourra dire que $L = n(m)$. Quand ce n'est pas le cas, on mesurera le reste avec une unité plus petite, égale à un dixième de mètre, qu'on appellera le décimètre (dm). Si le décimètre y va un nombre (p) exact de fois, on pourra dire que : $L = n(m) + (p) dm$. Mais au cas où le dm n'y va pas un nombre exact de fois, le processus se répétera une nouvelle fois. On mesurera le nouveau reste avec une unité dix fois plus petite que le dm qu'on appellera le centimètre (cm), ce qui, s'il va un nombre (q) exact de fois dans le nouveau reste donnera : $L = n(m) + p(dm) + q(cm)$. Et s'il tel n'est pas le cas, on continuera à procéder de la sorte jusqu'à trouver un reste qui admet une mesure exacte ou, par défaut, lorsqu'on parviendra à un reste suffisamment petit, qu'il deviendra impossible à mesurer et que l'on pourra dès lors se suffire de la précision ainsi apportée. Il sera par ailleurs parfois nécessaire de "sauter" une sous-unité manquante et l'on marquera ce saut par un zéro.

La mesure d'une longueur de sept virgule trois cent cinquante-deux mètres dans ce système prendra la forme : $L = 7 m + 3 dm + 5 cm + 2 mm$ que l'on pourra rendre de façon plus compacte par les écritures 7,352 m, 73,52 dm ou 7352 mm, la place de la virgule dans le nombre, définissant l'unité retenue pour rendre compte de la mesure¹²⁵.

Afin de mesurer des longueurs plus grandes, qu'on a peine à approcher ou à se représenter lorsqu'elles sont mesurées en mètres, on pourra recourir à des unités multiples du mètre comme

¹²² Dans Rouche (1992), on trouve que :

C'est à la fin du Siècle des Lumières que fut mise en œuvre, par la Révolution Française, l'idée d'un système de mesures fondé scientifiquement et destiné à remplacer toutes les mesures anciennes.

L'intérêt d'une telle entreprise était commercial, social et scientifique. Les anciennes mesures variaient d'une région et d'un métier à l'autre. Les étalons de longueur, souvent fixés à l'extérieur d'un bâtiment public, s'usaient. Les calculs étaient compliqués et les erreurs fréquentes. La confusion régnante favorisait les fraudes, ce dont le petit peuple pâtissait (particulièrement à l'époque des famines qui ont accompagné la révolution).

Sur la proposition de Talleyrand, l'Assemblée Nationale décide dès 1790 la constitution d'un système unifié de poids et mesures, entreprise qui s'étalera sur une dizaine d'années. L'étude en est confiée, dans l'Académie des Sciences, à une commission réunissant des savants réputés : Borda, Lagrange, Lavoisier, Tillet et Condorcet, et plus tard Laplace et Monge.

Le point de départ était l'unité de longueur. Elle fut définie comme la dix-millionième partie du quart de méridien terrestre. La difficulté majeure a été de mesurer ce méridien (ou au moins un arc de méridien assez long pour obtenir une grande précision), travail de plusieurs années qui fut confié à Delambre et Méchain et aboutit à la fabrication d'un mètre étalon.

L'unité de poids (la notion de masse n'est pas utilisée dans les documents officiels de l'époque) est dérivée de l'unité de longueur : le kilogramme est défini comme le poids d'un décimètre cube d'eau distillée à 4° centigrade. (pp.200-201)

¹²³ Ce n'est plus le cas aujourd'hui, où : « c'est la seconde qui est définie d'abord, à partir de la période d'une certaine radiation d'un atome de caesium. Le mètre est défini ensuite comme la distance parcourue par la lumière en 1/299792458 seconde » (Rouche, 2006, p.134).

¹²⁴ Précisons que la description sert à expliquer le fonctionnement du système, mais ne correspond nullement à la façon dont on s'y prend, au quotidien, pour effectuer des mesures de longueur. Dans tous les cas en effet, on se sert de divers instruments de mesures - une règle, un double mètre, un ruban métrique, une chaîne d'arpenteur,... - dans lesquels les unités et sous-unités ne sont pas détachées les unes des autres, mais au contraire intégrées les unes aux autres. De nos jours, l'usage du laser apporte même un résultat numérique instantané, dans une unité de mesure particulière, à tout type de longueurs.

¹²⁵ Dans une logique d'initiation (Conne, 2004), le passage de la forme additive de $L = 7 m + 3 dm + 5 cm + 2 mm$ à une forme ramassée telle que 7,352 m ne va pas de soi. On peut s'en rendre compte par la succession de transformations que ce passage implique :

$7 m + 3 dm + 5 cm + 2 mm \rightarrow 7 \times 1 m + 3 \times 1/10 m + 5 \times 1/100 m + 2 \times 1/1000 m \rightarrow 7 m + 3/10 m + 5/100 m + 2/1000 m \rightarrow (7 + 3/10 + 5/100 + 2/1000) m \rightarrow 7352/1000 m \rightarrow 7,352 m.$

le décamètre (dam) qui vaut dix mètres, l'hectomètre (hm) qui en vaut cent ou le kilomètre (km) qui en vaut mille.

Le tableau n°1 donne une vue d'ensemble des unités de longueurs les plus courantes¹²⁶ du système décimal de mesures :

1 mm	1 cm	1 dm	1 m	1 dam	1 hm	1 km
0,001 m	0,01 m	0,1 m	1 m	10 m	100 m	1000 m

Tableau n°1 - Vue d'ensemble des unités de longueur dans le système décimal des poids et mesures

Mesurer des poids dans le système décimal des poids et mesures.

Rouche indique ensuite que les mesures de poids fonctionnent selon les mêmes règles qui ont été établies pour les mesures de longueurs, avec une unité de base qui est le kilogramme (kg). On remarquera cependant que le fait que l'unité de base des poids soit désignée à l'aide du préfixe "kilo"¹²⁷ a comme conséquence d'augmenter à neuf (au lieu de six) le nombre d'unités de poids en usage¹²⁸. A défaut de pouvoir utiliser les préfixes "déca", "hecto" et "kilo" pour signifier les dizaines, les centaines et les milliers de kilos, il a en effet fallu recourir à d'autres mots¹²⁹ - le quintal¹³⁰, la tonne¹³¹ - qui rompent avec la logique qui prévaut dans la dénomination des unités de longueurs et des autres unités de poids.

Le tableau n°2 donne une vue d'ensemble des unités de poids les plus courantes du système décimal de mesures.

1 mg	1 cg	1 dg	1 g	1 dag	1 hg	1 kg	...	1 q	1 t
0,001 g	0,01 g	0,1 g	1 g	10 g	100 g	1000 g	10000 g	100000 g	1000000 g

Tableau n°2 - Vue d'ensemble des unités de poids dans le système décimal des poids et mesures

Mesurer des capacités dans le système décimal des poids et mesures.

Le litre est l'unité de base qui a été adoptée pour la mesure des capacités. Il est directement dérivé des unités de volumes et correspond à un décimètre cube (dm³). Selon Rouche, le litre a été spécifiquement créé pour mesurer des volumes de liquides, parce que les unités de volume qui s'échelonnent de 1000 en 1000 : « s'avèrent peu pratiques pour beaucoup d'usages domestiques, industriels et commerciaux » (ibid., p.144).

Le tableau n°3 donne une vue d'ensemble des unités de capacités en usage¹³² et leur correspondance avec les unités de volume respectives.

¹²⁶ L'usage du terme "courant" utilisé pour qualifier ces unités de mesures doit être pris avec précautions : ni le décimètre, ni l'hectomètre ne sont d'un usage courant au quotidien où l'on parlera plus volontiers de dizaine ou de centaine de mètres. Notons également que pour mesurer des longueurs supérieures au kilomètre ou inférieures au millimètre, il est possible de recourir à d'autres multiples ou sous multiples d'unités dont il ne sera pas fait état ici (voir à ce propos, Charrière, 1995, p.182).

¹²⁷ Rouche le qualifie "d'effet d'histoire", sachant que : « à une certaine époque, l'unité de base était le gramme » (ibid., p.139).

¹²⁸ En prenant à nouveau garde au fait que le décagramme, l'hectogramme, tout comme le décigramme et le centigramme n'ont plus vraiment d'usage au "quotidien".

¹²⁹ S'il n'en existe plus actuellement pour désigner la dizaine de grammes, on trouve en revanche dans le manuel de Roorda (1917), le terme de "myriagramme" accompagné de l'abréviation "Mg", pourvue d'une majuscule pour la distinguer de celle du milligramme (mg), qui relevait bien de la même logique.

¹³⁰ "Quintal" provient de l'arabe "quintâr" (poids de cent) qui à son tour : « vient du latin de basse époque "centenarium" (poids de cent livres) » (Rouche, op.cit., p.139). L'étymologie du mot entretient la confusion qui fait qu'on peut le prendre pour un poids de cinquante au lieu d'un poids de cent kilos.

¹³¹ "Tonne" en revanche est plus simplement dérivée de "tonnelle" ou de "tonneau".

¹³² La logique des noms et des préfixes qui prévalait dans le cas des unités de longueurs est cette fois-ci bien respectée. On peut à nouveau reconduire ici la remarque concernant le peu d'usage, au quotidien, du décalitre, de l'hectolitre et du kilolitre. Pour ce dernier d'ailleurs, ce sera généralement la désignation "mètre cube" qui sera préférée.

1 ml	1 cl	1 dl	1 l	1 dal	1 hl	1 kl
0,001 l	0,01 l	0,1 l	1 m	10 l	100 l	1000 l
1 cm ³	10 cm ³	100 cm ³	1 dm ³	10 dm ³	100 dm ³	1 m ³

Tableau n°3 - Vue d'ensemble des unités de capacité dans le système décimal des poids et mesures

Etablir des conversions d'unités dans le système décimal des mesures

Dans le système décimal des poids et des mesures, il est donc possible, dans un domaine de grandeurs particulier, d'opter entre différentes unités et sous-unités pour mesurer une grandeur. Ainsi, dans le domaine des longueurs, on pourra choisir entre les différentes unités du tableau n°1 pour le faire, un choix qui sera en partie déterminé par la taille de la grandeur à mesurer. Le choix d'une unité particulière aura à chaque fois des incidences sur le nombre qui servira à rendre compte de la mesure. Une longueur de vingt-huit centimètres pourra ainsi être représentée en centimètres par le nombre 28, alors qu'elle le sera par le nombre 280 en millimètres et par le nombre 0,28 en mètre. Ce sont donc tout à la fois les zéros et les virgules qui, en distinguant les nombres, rendent compte de l'unité choisie.

L'opportunité de pouvoir opter pour telle ou telle unité fait qu'il est possible d'attribuer plusieurs mesures équivalentes à une même grandeur. Dans l'exemple précédent, 28 cm, 280 mm et 0,28 m sont trois mesures de la même grandeur. Il est donc possible d'écrire que 28 cm = 280 mm = 0,28 m, alors même que 28, 280 et 0,28 sont des nombres différents et qu'il n'est pas possible d'écrire que 28 = 280 = 0,28. Le fait que plusieurs mesures équivalentes peuvent représenter une même grandeur a comme conséquence qu'il est parfois nécessaire - on le verra notamment par la suite dans le cas des opérations relatives aux grandeurs mesurées - de transformer une mesure en une autre mesure équivalente, par exemple de transformer en mètres une mesure de 28 cm ou, inversement, de transformer en centimètres, une mesure de 0,28 m.

Depuis bien longtemps, on enseigne, pour accomplir de telles transformations¹³³, une technique qui recourt à un tableau¹³⁴. Rouche n'en fait quasiment¹³⁵ pas mention dans ses trois ouvrages, mais on la trouve déjà dans un manuel rédigé au début du vingtième siècle par Roorda¹³⁶ (1917).

Supposons, par exemple, que la mesure d'une longueur nous soit donnée en décimètres ; qu'elle soit de : 28^{dam},13.

Ajoutons devant et derrière le nombre 28^{dam},13 des zéros qui n'en changeront pas la valeur ; puis plaçons-le sous le tableau de nos unités de longueur de manière que le chiffre 8, qui représentent les décimètres, soit dans la colonne surmontée du signe dam... ; comme ceci :

Mm	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
0	0	2	8,	1	3	0	0

¹³³ Ces conversions qui, sur les nombres, comprennent un simple déplacement de virgule et l'ajout/le retrait d'un ou de plusieurs zéro ne vont pourtant pas de soi : elles supposent à nouveau une succession de transformations, soit dans le cas particulier : 28 cm -> 28 x 1/100 m -> 28/100 m -> 0,28 m et réciproquement, 0,28 m -> 0,28 x 100 cm -> 28 cm.

¹³⁴ Le tableau comporte en soit deux éléments contradictoires susceptibles de constituer un écueil à son usage : le passage d'une colonne à une autre colonne est en effet uniformément supporté, de gauche à droite, par la division par 10 et, de droite à gauche, par la multiplication par 10 ; alors que la désignation des sous-unités de mesures par les préfixes "kilo", "hecto", "déca", "déci", "centi" et "milli" semble au contraire marquer un mouvement asymétrique qui "descend" du kilomètre vers le mètre, puis "remonte" du mètre vers le millimètre.

¹³⁵ Il est juste évoqué dans son ouvrage de 2006 dans le cas de la mesure décimale des aires (p.142). Si j'en fais mention ici, c'est parce que cette technique, bien présente dans Fps, interviendra à de nombreuses reprises dans les interactions rapportées dans la deuxième partie de la thèse.

¹³⁶ Dans les propos duquel on appréciera tout particulièrement les écritures 28^{dam},13 et 0^{km}, 2813 représentant respectivement 28,13 décimètres et 0,2813 kilomètres qui intègrent l'unité de mesure dans le nombre lui-même.

Le chiffre 2 qui, dans le nombre donné, représente des dizaines de dam, doit bien être situé dans la colonne des hm ; le chiffre 1, qui représente des dixièmes de dam, doit bien figurer dans la colonne des m ; etc.

Si, maintenant, nous voulons convertir nos $28^{\text{dam}},13$ en kilomètres, par exemple, nous placerons la virgule à la droite du zéro qui figure dans la colonne km, puisque ce zéro devra représenter les unités, les entiers ; et nous aurons sous les yeux le nombre $0^{\text{km}},2813$ (et le fait est que nos 8 dam..., par exemple, valent bien huit centièmes de km). (p.112)

Les grandeurs mesurées, comparaison, addition et multiplication par un naturel

Lorsqu'on sait mesurer des longueurs, des poids et des capacités dans le cadre du système décimal de mesures, il devient possible d'utiliser ces mesures pour comparer les grandeurs qu'elles représentent, les additionner/soustraire et les multiplier/diviser par un naturel. Rouche propose pour le faire, de s'appuyer d'une part sur l'ensemble des propriétés établies au niveau des grandeurs, puis, d'autre part, d'établir des conversions d'unités de façon à pouvoir ramener chaque opération à réaliser sur une mesure à une opération fondée sur des nombres naturels et faire usage des propriétés qui y président. Ainsi, pour comparer deux longueurs L et L' mesurées comme 0,194 km et 28,13 dam, il sera possible de procéder en trois étapes. La première étape demande d'exprimer les deux longueurs mesurées à l'aide d'une même unité, ce qui implique, dans le cas particulier, la conversion de 0,194 km en 19,4 dam ou celle de 28,13 dam en 0,2813 km. La deuxième étape vise à "chasser la virgule" des deux expressions, de façon à ramener la comparaison des deux grandeurs mesurées à la comparaison de deux nombres naturels. Ce qui suppose deux nouvelles conversions pour transformer respectivement 19,4 dam en 1940 dm et 28,13 dam en 2813 dm. La troisième étape demande d'utiliser les règles de comparaison de deux nombres naturels¹³⁷ qui disent que $1940 < 2813$, d'où l'on déduit que $L = 0,194 \text{ km} < L' = 28,13 \text{ dam}$.

L'addition (et la soustraction) de deux grandeurs mesurées procédera de la même façon en étant ramenée au cas de l'addition (et de la soustraction) de deux nombres naturels. Ainsi, par exemple, pour additionner deux longueurs de 13,29 m et de 27,54 dm, on pourra recourir à un tableau (voir tableau n° 4) comprenant en tête de colonne la succession des unités de longueurs afin d'y placer les deux grandeurs à additionner.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		1	3,	2	9	
			2	7,	5	4

Tableau n°4 - Addition de deux grandeurs mesurées à l'aide d'un tableau (1)

En enlevant les virgules des deux nombres et en inscrivant un 0 à droite du premier nombre dans la colonne des mm (voir tableau n° 5), on opère, de façon implicite, une conversion d'unités qui mesure les deux grandeurs en mm et transforme les deux nombres en naturels. Il est dès lors possible de réaliser l'addition en colonnes suivant les règles qui président à son effectuation dans le cas des nombres naturels. Au terme de l'opération, la pose de la virgule dans telle ou telle colonne, permet d'exprimer la nouvelle longueur dans l'unité de son choix.

¹³⁷ Les règles de comparaison de deux nombres naturels à l'écrit ont été établies comme suit par Rouche (2006) :

Propriété 3. Comparaison de deux nombres naturels. Si un nombre naturel comporte plus de chiffres qu'un autre, il est plus grand que celui-ci.

Pour comparer deux nombres naturels qui ont le même nombre de chiffres, on compare les chiffres de même rang à partir de la gauche ; le nombre qui, dans cette comparaison, a la première fois un chiffre plus grand que l'autre, est le plus grand des deux nombres. (p.31)

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		1	3	2	9	0
			2	7	5	4
		1	6	0	4	4

Tableau n°5 - Addition de deux grandeurs mesurées à l'aide d'un tableau (2)

En ce qui concerne enfin la multiplication (et la division) d'une grandeur mesurée par un naturel¹³⁸, la perspective sera à nouveau la même, à savoir de ramener chaque cas à la multiplication ou la division d'un naturel par un autre naturel.

Les nombres décimaux, comparaison, addition et multiplication par un naturel

Partant des grandeurs mesurées, il est possible enfin de faire accéder aux statuts de nombres les expressions de type 3,27 m. Rouche (2006) y assortit cependant cinq conditions :

- en premier lieu, il s'agit de pouvoir considérer dans l'expression $B = 3,27 \text{ m}$, le 3,27 comme un opérateur qui agrandirait A, à l'image du rôle que joue le 3 dans l'expression $B = 3 \text{ m}$ lors de la multiplication d'une grandeur par un naturel ;
- en deuxième lieu, il faut que, comme pour les naturels, qui permettent de résoudre une foule de questions qui se posent pour les ensembles finis d'objets, parce qu'ils sont définis à partir de ces mêmes questions, ces nombres, que l'on appellera les nombres décimaux puissent faire de même en ce qui concerne les grandeurs ;
- en troisième lieu il est nécessaire que, comme pour les ensembles finis d'objets et les nombres naturels, il soit possible, pour chaque nombre décimal, moyennant le choix d'une unité, de le faire correspondre à une grandeur concrète, autrement dit de faire correspondre une représentation symbolique abstraite à une réalité physique ;
- en quatrième lieu, il faut établir les règles de comparaison et d'opérations des nombres décimaux, de manière à ce que ces règles traduisent fidèlement les opérations physiques correspondantes ;
- en cinquième lieu, il faut que les règles attribuées aux décimaux soient compatibles avec celles en vigueur pour les naturels, les naturels servant aussi à opérer avec les grandeurs, il ne s'agit pas d'établir deux catégories de nombres distinctes comprenant des règles spécifiques.

Suivant ces cinq conditions, la comparaison, l'addition (et la soustraction), la multiplication (et la division) de deux nombres décimaux peut à nouveau - à l'image de ce qui a été fait précédemment pour les grandeurs mesurées - être ramenée à la comparaison, l'addition (et la soustraction), la multiplication (et la division) de deux nombres naturels.

Les nombres décimaux, spécificités vis-à-vis des nombres naturels

Accédant au statut de nombres, par le biais des naturels, Rouche montre encore que les décimaux s'en distinguent néanmoins sous plusieurs aspects. Tout d'abord, le 0 joue dans le cadre des nombres décimaux le rôle d'origine - c'est-à-dire de début d'où commencent tous les autres nombres -, un rôle qui est généralement tenu par le 1 dans le cadre des naturels. Ensuite, à la différence ce qui advient dans le cadre des naturels, il est possible d'ajouter autant de zéros que l'on veut à la droite de la partie décimale d'un nombre décimal, sans que celui-ci ne s'en trouve affecté ; cela signifie, entre autres, que les règles de comparaison des nombres naturels

¹³⁸ Rouche fait remarquer que la multiplication d'une grandeur par une autre grandeur, absurde lorsqu'on se trouve au niveau des grandeurs non-mesurées, devient possible dans celui des grandeurs mesurées. C'est le cas, par exemple, de la multiplication de la longueur et de la largeur d'un rectangle ; mais ceci se fait au prix de la transformation du domaine des deux grandeurs : la multiplication de deux longueurs aboutissant à une aire.

reposant sur leur nombre de chiffres ne fonctionneront plus de la même manière dans le cadre des nombres décimaux. Enfin, et c'est peut-être la distinction la plus importante, s'il est toujours possible de définir le prédécesseur ou le successeur d'un nombre pour les naturels, il n'en va pas de même pour les décimaux, au sein desquels il est toujours possible d'insérer des nombres entre deux qu'on aurait pu prendre comme se succédant l'un l'autre. Ce qui fait dire à Rouché en forme de conclusion provisoire :

Le fait qu'aucun nombre décimal n'ait de successeur immédiat a pour effet surprenant qu'on ne peut pas citer tous ces nombres un par un dans l'ordre. Tel n'est pas le cas pour les naturels : on peut dire un, deux trois, etc. et continuer ainsi, sachant pourtant qu'on n'arrivera jamais au bout. Avec les décimaux, on peut à peine commencer : après zéro qui est le premier, on ne peut même pas désigner un deuxième ! (ibid., p.153)

Construction n°2 : grandeurs, rapports de grandeurs, proportions et proportionnalité

Dans cette seconde construction, on partira à nouveau des longueurs, des poids et des capacités, mais pour envisager cette fois-ci leur rapport.

Les rapports avant toute mesure, comparaison, proportion

Partant de la définition d'Euclide (cité par Rouché, 1992) : « Un rapport est une sorte de relation relative à la taille entre deux grandeurs de même espèce » (p.56), Rouché affirme qu'il est déjà possible de percevoir, avant toute mesure, de nombreux rapports entre deux objets : un objet peut être plus grand, plus lourd, plus volumineux qu'un autre et l'ampleur de ce "plus grand", "plus lourd" et "plus volumineux" en constitue le rapport. On peut également percevoir un rapport à l'intérieur d'un même objet, considérant sa hauteur et sa largeur, par exemple, la première pouvant être plus ou moins grande que la seconde. La perception d'un rapport se fait généralement relativement à une norme ou à un autre rapport : on dira ainsi volontiers que "c'est beaucoup plus grand", "un peu plus lourd", "sensiblement moins volumineux". Et ces trois expressions "beaucoup", "un peu", "sensiblement" servent à rendre, de façon certes assez vague, la comparaison des rapports ramenés à ces normes ou à ces autres rapports.

La comparaison de deux rapports fait intervenir non pas deux, mais bien quatre grandeurs : affirmer que le rapport entre la hauteur et la largeur de cet objet est plus grand que le rapport entre la hauteur et la largeur de cet autre objet, implique deux hauteurs et deux largeurs, soit quatre grandeurs. Lorsqu'une comparaison de deux rapports aboutit à une égalité, on parlera de proportion : on dira, par exemple, que deux objets, relativement à leur hauteur et à leur largeur, sont dans la même proportion. Une façon d'exprimer l'égalité de deux rapports, ou la proportion entre deux grandeurs A et B, relativement à deux grandeurs C et D est de dire que : A est à B comme C est à D. L'agrandissement (ou la réduction) d'un document à l'aide d'une photocopieuse est un exemple de situation où l'on assiste à une démultiplication de proportions : ainsi les rapports qui existent entre chaque longueur du document de base et sa correspondante dans le document agrandi (ou réduit) sont toujours égaux ; pris deux par deux, ces couples de longueurs constituent à chaque fois une proportion.

La proportionnalité avant toute mesure

Dans la situation d'agrandissement d'une figure, on peut définir deux ensembles de longueurs : l'ensemble des longueurs de la figure de base et l'ensemble des longueurs de la figure agrandie. A chaque grandeur du premier ensemble correspond une grandeur du second ensemble. Le rapport entre chaque longueur du premier ensemble et la longueur correspondante du second ensemble est à chaque fois le même. On dira que ces deux ensembles sont proportionnels et le rapport qui lie les longueurs l'une à l'autre sera qualifié de *rapport externe* parce qu'il "sort" du premier ensemble pour le lier au second.

A l'intérieur de la figure de base, comme à l'intérieur de la figure agrandie, on peut également considérer toute une diversité de rapports qui lient deux grandeurs entre elles. Chaque rapport entre deux longueurs de la figure de base et son correspondant dans la figure agrandie sont identiques et constituent une proportion. Ces rapports sont qualifiés de *rapports internes* dans le sens où ils restent confinés à l'intérieur d'une même figure. L'égalité des rapports internes fait encore que le résultat de la somme de deux longueurs de la figure de base correspond au résultat de la somme des deux longueurs de la figure agrandie : le rapport entre ces deux résultats est en effet identique au rapport externe. Dans tous les cas où il est possible d'établir une correspondance terme à terme entre deux ensembles de grandeurs de même espèce, où les sommes et les rapports internes se correspondent et où un rapport externe lie les deux ensembles, on parlera d'une *situation de proportionnalité*.

Il existe par ailleurs beaucoup d'autres circonstances où cette correspondance terme à terme relie deux ensembles de grandeurs d'espèce différentes et où là encore les sommes et les rapports internes se correspondent. Ces situations pourront aussi être qualifiées de situations de proportionnalité. En revanche, il ne sera pas possible, au niveau des grandeurs non-mesurées, d'établir de rapport externe entre les deux ensembles, du fait qu'il ne sera pas possible de considérer un rapport entre une longueur et un poids ou un poids et un volume par exemple. Or, cette impossibilité d'établir un rapport externe dans ces diverses situations est loin d'être anodine, puisque c'est elle qui, selon Rouche, a fait que :

à l'époque d'Euclide, la seule façon d'exprimer la proportionnalité de grandeurs de natures différentes consistait à écrire qu'un rapport de deux grandeurs de la première espèce était égal au rapport des deux grandeurs correspondantes de la deuxième espèce. (ibid., p.226)

La proportionnalité au niveau des grandeurs mesurées

En passant au niveau des grandeurs mesurées, on remarque tout d'abord que la mise en correspondance que toute mesure opère entre un ensemble de grandeurs et un ensemble de nombres est également une proportionnalité : à l'addition ou la multiplication physique d'une certaine grandeur correspond l'addition ou la multiplication des nombres mesurant ces grandeurs à l'aide d'une unité. C'est d'ailleurs cette proportionnalité qui garantit que les nombres envisagés seront bel et bien représentatifs des grandeurs auxquelles ils correspondent.

Afin d'envisager la proportionnalité au niveau des grandeurs mesurées, on partira d'un exercice extrait de Rouche (2006), qui, comme on le verra dans la seconde partie de la thèse, est très semblable à ceux que l'on soumet aux apprenties dans la Fps.

« Hier, j'ai acheté 3 kg de farine à 1,20 EUR par kg. Combien ai-je payé ? Aujourd'hui, j'en achète 6 kg. Combien dois-je payer ? » (p.205).

Cet exercice permet de dresser un tableau de correspondance¹³⁹(cf. tableau n°6) entre les deux domaines de grandeurs en jeu - des poids d'une part, mesurés en kilogrammes (kg) et des prix¹⁴⁰ d'autre part, mesurés en euros (EUR) - qui permet de passer du cas particulier des quantités de 3 kg et 6 kg figurant dans l'énoncé à une vision plus générale de la situation. Le tableau permet de faire apparaître les trois propriétés constitutives d'une situation de proportionnalité que l'on avait déjà rencontrées auparavant, dans le cas de la proportionnalité avant toute mesure.

¹³⁹ Rouche désigne ce tableau par le terme de *tableau de proportionnalité* (ibid., p.206).

¹⁴⁰ Il est intéressant de remarquer, que s'agissant du domaine des prix, Rouche utilise systématiquement une écriture à deux décimales pour les nombres qui les mesurent, même quand ceux-ci comportent un ou deux zéros pouvant être supprimés. Ceci marque la prégnance de l'usage des nombres qui est fait au quotidien dans le domaine des prix - un domaine de grandeur qui n'est pas traité en tant que tel par Rouche, mais dont il sera pourtant question dans les interactions rapportées dans la seconde partie de la thèse - lequel distingue d'une part les francs et d'autre part les centimes.

Dans la première colonne du tableau, on voit que $5 \text{ kg} + 6 \text{ kg} = 11 \text{ kg}$, tout comme $6,00 \text{ EUR} + 7,20 \text{ EUR} = 13,20 \text{ EUR}$ dans la seconde et qu'il en sera toujours de même, quels que soient les deux grandeurs mesurées considérées de la première colonne et leurs correspondantes dans la seconde. On retrouve donc ici la *correspondance des sommes*¹⁴¹ rencontrée préalablement au niveau des grandeurs. L'addition entre deux grandeurs mesurées d'une même colonne implique par ailleurs de façon réciproque la soustraction : à l'addition $5 \text{ kg} + 6 \text{ kg} = 11 \text{ kg}$ de la première colonne sont associées les soustractions $11 \text{ kg} - 6 \text{ kg} = 5 \text{ kg}$ et $11 \text{ kg} - 5 \text{ kg} = 6 \text{ kg}$ et à l'addition $6,00 \text{ EUR} + 7,20 \text{ EUR} = 13,20$ de la seconde sont associées les soustractions $13,20 \text{ EUR} - 6,00 \text{ EUR} = 7,20 \text{ EUR}$ et $13,20 \text{ EUR} - 7,20 \text{ EUR} = 6,00 \text{ EUR}$.

The diagram shows a table with two columns: 'quantités (kg)' and 'prix (EUR)'. The rows contain values from 1 to 11 kg and their corresponding prices from 1,20 to 13,20 EUR. Annotations include: a curved arrow at the top labeled 'x 1,20 EUR/kg' connecting the two columns; curved arrows on the left and right sides labeled 'x 0,5' connecting rows 4 and 2; and curved arrows on the left and right sides labeled '+' connecting rows 5 and 6. At the bottom, a curved arrow labeled '÷ 1,20 EUR/kg' connects the two columns.

quantités (kg)	prix (EUR)
1	1,20
2	2,40
3	3,60
4	4,80
5	6,00
6	7,20
7	8,40
8	9,60
9	10,80
10	12,00
11	13,20
...	...

Tableau n°6 - Tableau de proportionnalité extrait de Rouche (2006, p.206)

Toujours dans la première colonne du tableau, on voit que $4 \text{ kg} \times 0,5 = 2 \text{ kg}$, tout comme $4,80 \text{ EUR} \times 0,5 = 2,40 \text{ EUR}$ dans la seconde et qu'il en sera toujours de même, quels que soient les deux grandeurs mesurées considérées de la première colonne et leurs correspondantes dans la seconde. On retrouve donc ici la *correspondance des rapports internes*¹⁴² rencontrée préalablement au niveau des grandeurs. Le rapport interne entre deux grandeurs mesurées d'une même colonne implique également la division : à la multiplication $\times 0,5$ qui lie 4 kg et 2 kg dans la première colonne et leurs correspondants $4,80 \text{ EUR}$ et $2,40 \text{ EUR}$ dans la seconde est associée la division $\div 0,5$ qui fait de même de façon réciproque¹⁴³.

¹⁴¹ Rouche la définit ainsi :

Propriété 1. La correspondance des sommes. A la somme de deux nombres quelconques de la première colonne correspond la somme des deux nombres correspondants de la deuxième colonne. (2006, p.207)

¹⁴² Rouche la définit ainsi :

Propriété 2. La correspondance des rapports internes. Le rapport entre deux nombres quelconques de la première colonne est égal au rapport des deux nombres correspondants de la deuxième colonne (ibid., p.209)

Cette notion de *rapport interne* est à rapprocher de celle d'*opérateur scalaire* chez Vergnaud (1981).

¹⁴³ Au lieu de la division, il est possible de passer par la multiplication de l'inverse de 0,5, soit la multiplication par 2 dans le cas particulier.

Enfin, le tableau montre qu'il est encore possible d'effectuer $3 \text{ kg} \times 1,20 \text{ EUR/kg} = 3,60 \text{ EUR}$ et qu'il est possible de faire de même entre chaque grandeur mesurée de la première colonne et la grandeur mesurée correspondante de la seconde. Alors que l'existence d'un rapport externe n'était, au niveau des grandeurs, envisageable que lorsque les deux ensembles de grandeurs étaient de même espèce, il est possible de le faire ici dans le cas de deux ensembles de grandeurs d'espèces différentes. Ceci nécessite toutefois que le rapport externe¹⁴⁴ soit accompagné d'une unité - l'EUR/kg qui relève d'un autre domaine de grandeur, le prix au kilo - qui permet de transformer la grandeur mesurée du premier domaine en la grandeur mesurée du second. Le rapport externe entre une grandeur mesurée de la seconde colonne et la grandeur mesurée correspondante de la première implique également la division : à la multiplication $\times 1,20 \text{ kg/EUR}$ qui lie 3 kg dans la première colonne et son correspondant 3,60 EUR dans la seconde est associée la division $\div 1,20 \text{ EUR/kg}$ qui fait de même de façon réciproque¹⁴⁵.

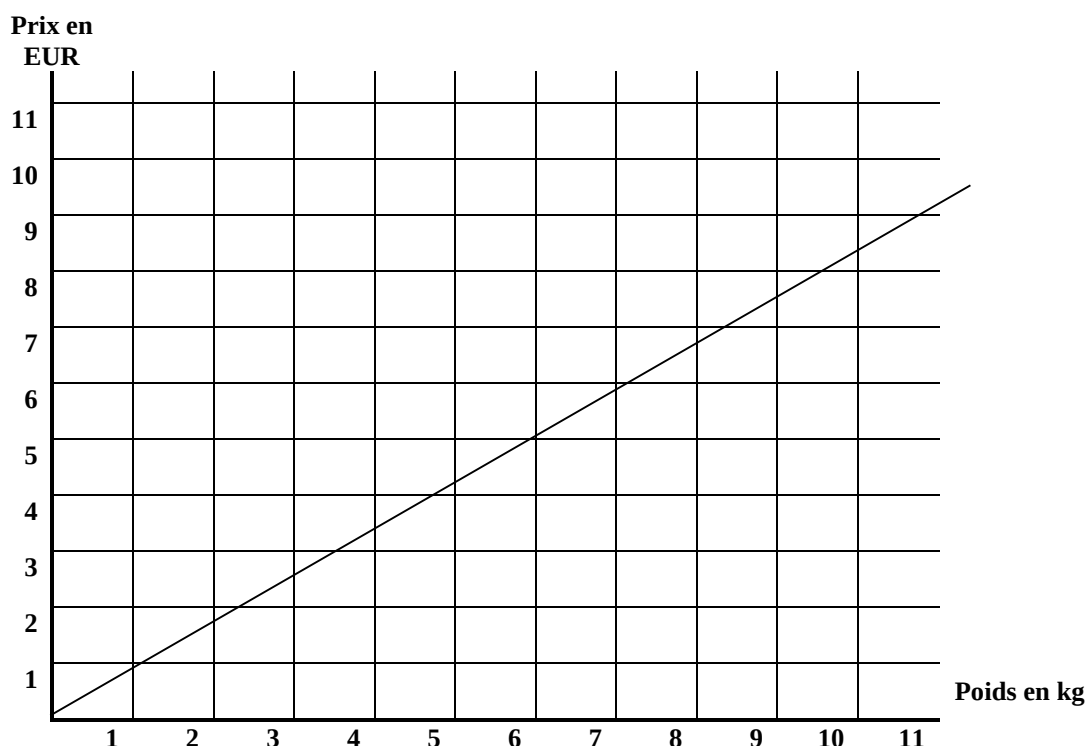


Tableau n°7 - Représentation graphique de la situation du calcul du prix de la farine

Ajoutons encore, pour terminer, qu'il est également possible, au niveau des grandeurs mesurées, d'utiliser un graphique (cf. figure n°7), au lieu d'un tableau de correspondance, pour donner une vision générale de la situation. Cette représentation graphique de la situation du calcul du prix de la farine se caractérise par une droite passant par l'origine des deux axes signifiant en abscisse le domaine du poids mesuré en kilos et en ordonnée le domaine du prix mesuré en euros. Elle donne lieu à une formule de type $uQ = P$ (avec Q comme poids en kilos, P comme prix en euros et u comme coefficient de proportionnalité égal à 1,20 EUR/kg).

¹⁴⁴ Rouche la définit ainsi :

Propriété 3. L'existence d'un rapport externe. Dans un tableau de proportionnalité, on passe d'un nombre de la première colonne à son correspondant dans la seconde, en le multipliant par un nombre, toujours le même, appelé rapport externe du tableau ; de même on passe ou (re passe) d'un nombre de la seconde colonne à son correspondant dans la première en le multipliant par l'inverse du rapport externe (ou, ce qui revient au même, en le divisant par le rapport externe). (ibid., p. 210-211)

Cette notion de *rapport externe* est à rapprocher de celle d'*opérateur fonction* chez Vergnaud (1981).

¹⁴⁵ Au lieu de la division, il est possible de passer par la multiplication de l'inverse, soit la multiplication par $1/1,20$ (ou $5/6$) kg/EUR dans le cas particulier. Mais cela implique de recourir aussi à une unité inversée, à savoir des kg/EUR qui relève d'un nouveau domaine de grandeur, le poids à l'euro, c'est-à-dire le poids que l'on peut obtenir pour un euro.

La proportionnalité abstraite

Il est enfin possible de considérer la proportionnalité au niveau des nombres, détachés des grandeurs qui les ont faits naître et affranchis des unités qui ont servi à les mesurer. Les deux ensembles mis en correspondance seront désormais des ensembles de nombres au lieu d'être des ensembles de grandeurs ou de grandeurs mesurées. Les propriétés de correspondance des sommes, de correspondance des rapports internes et d'existence d'un rapport externe et de sa réciproque s'y retrouveront, sauf qu'il ne sera plus nécessaire d'y assortir les précautions liées au maniement des grandeurs et des grandeurs mesurées : ainsi le rapport externe liant chaque nombre m du premier ensemble à chaque nombre n du second ensemble existera dans tous les cas, étant égale à m/n , et sans qu'il soit encore nécessaire de s'interroger sur les conditions liées au passage d'un ensemble à un autre. L'égalité de deux rapports, qui définit une proportion, sera traduite par l'égalité de deux fractions $m/p = n/q$. Chaque situation pourra à nouveau être représentée graphiquement par une droite passant par l'origine des deux axes et même algébriquement par une formule de type $y = ax$ où a correspond à la pente de cette droite.

La proportionnalité, techniques de résolution

Sur la base des trois propriétés énoncées plus haut et de la définition d'une proportion comme égalité de deux fractions, il est possible d'envisager au moins quatre techniques¹⁴⁶ qui permettent de résoudre un exercice de proportionnalité dans lequel trois grandeurs mesurées/trois nombres sont connues/connus et où il s'agit de déterminer la/le quatrième :

1° la règle de trois	2° l'usage direct du rapport interne
3° l'usage du rapport externe	4° le produit en croix

Les descriptions de chaque technique utilisent, pour les illustrer et les distinguer, l'exercice précédent extrait de l'ouvrage de Rouche, à savoir : « Hier, j'ai acheté 5 kg de farine pour 6,00 EUR. Aujourd'hui, j'en achète 3 kg. Combien dois-je payer ? ». Ils sont envisagés à la fois au niveau des grandeurs mesurées et au niveau des nombres.

a) la règle de trois

Selon Rouche (2006), la *règle de trois* est la technique qui est traditionnellement privilégiée pour résoudre des questions de proportionnalité. Elle tire son nom du fait qu'elle se déroule en trois temps. Ainsi, pour déterminer le prix des 3 kg de farine de l'exercice, elle procède de la façon suivante :

- 5 kg coûtent 6,00 EUR
- donc 1 kg coûtera $6,00/5$ EUR = 1,20 EUR
- enfin, 3 kg coûteront $6,00/5 \times 3$ EUR = 3,60 EUR (ibid., p. 208)

La règle de trois s'appuie sur la correspondance des rapports internes, en faisant appel à deux rapports. Au niveau des grandeurs mesurées, étant donné que ces rapports unissent des grandeurs mesurées à l'intérieur d'un même domaine, ils peuvent se constituer d'opérateurs exclusivement numériques. Dans le cas particulier, ces rapports correspondent aux opérateurs qui transforment, dans le domaine des poids, 5 kg en 1 kg - il s'agit de l'opérateur $\div 5$, sachant que $5 \text{ kg} \div 5 = 1 \text{ kg}$; puis 1 kg en 3 kg - il s'agit de l'opérateur $\times 3$, sachant que $1 \text{ kg} \times 3 = 3 \text{ kg}$. On obtient dès lors le prix des 3 kg de farine en utilisant ces mêmes opérateurs dans le domaine des prix, soit en divisant 6,00 EUR par 5 pour aboutir à 1,20 EUR, puis en multipliant 3 pour aboutir au résultat de 3,60 EUR.

¹⁴⁶ Ces quatre techniques ont été retenues, car ce sont celles que l'on retrouvera par la suite mis en œuvre dans les interactions pour résoudre des exercices de proportionnalité.

Au niveau des nombres, la règle de trois peut être reconduite de la même manière, en s'appuyant sur deux rapports et en ayant recours à deux opérateurs qui transitent à chaque fois par 1.

b) l'usage direct du rapport interne

Pour déterminer le prix des 3 kg de farine de l'exercice, il est aussi possible de faire un *usage direct du rapport interne* qui lie, dans le domaine des poids, la grandeur mesurée de 5 kg à celle de 3 kg. Comme ce rapport concerne à nouveau deux grandeurs mesurées d'un même domaine, il est possible de l'établir sur la base d'un rapport exclusivement numérique. Dans le cas particulier, ce rapport correspond à l'opérateur numérique qui transforme, dans le domaine des poids, 5 kg en 3 kg : il s'agit de l'opérateur $\times \frac{3}{5}$ ou ($\times 0,6$ en écriture décimale), sachant que $5 \text{ kg} \times \frac{3}{5} = 3 \text{ kg}$ (ou $5 \text{ kg} \times 0,6 = 3 \text{ kg}$). On obtient dès lors le prix des 3 kg de farine en utilisant ce même opérateur dans le domaine des prix, soit en multipliant 6,00 EUR par $\frac{3}{5}$ (ou par 0,6) pour aboutir au résultat de 3,60 EUR.

Au niveau des nombres, l'usage direct du rapport interne peut être rendu par l'égalité de deux fractions $x/p = n/q$ où n , p , q correspondent aux trois nombres connus de la proportion et x le quatrième qu'il s'agira de déterminer en multipliant n par p , puis en divisant le résultat par q .

c) l'usage direct du rapport externe

On peut également avoir recours à l'*usage direct du rapport externe* pour trouver le prix des 3 kg de farine de l'exercice. Au niveau des grandeurs mesurées, il implique toutefois de passer par l'usage d'un opérateur qui dépend des unités servant à mesurer les grandeurs des deux domaines. Dans le cas particulier, ce rapport correspond à l'opérateur qui transforme 5 kg en 6 EUR : il s'agit de l'opérateur $6,00/5 \text{ EUR/kg}$ (ou $1,20 \text{ EUR/kg}$ en écriture décimale), sachant que $5 \text{ kg} \times 6,00/5 \text{ EUR/kg} = 6,00 \text{ EUR}$ (ou $5 \text{ kg} \times 1,20 \text{ EUR/kg} = 6,00 \text{ EUR}$). On obtient dès lors le prix des 3 kg de farine en appliquant ce même opérateur au 3 kg de farine, soit en multipliant 3 kg par $6,00/5 \text{ EUR/kg}$ ($1,20 \text{ EUR/kg}$) pour aboutir au résultat de 3,60 EUR.

Au niveau des nombres, l'usage direct du rapport externe peut être signifié par la fonction $y = ax$ dans lequel a correspond au rapport externe, x un nombre du premier ensemble et y son correspondant du second qui pourra être déterminé par la multiplication de x par a .

d) le produit en croix

Une quatrième technique, intitulée *produit en croix*, peut être utilisée pour déterminer le prix des 3 kg de farine de l'exercice. Le produit en croix repose sur l'idée de proportion définie par l'égalité de deux fractions, soit $\frac{3}{5} = \frac{3,6}{6}$ dans le cas particulier. Dans cette égalité, le produit du numérateur de la première fraction par le dénominateur de la seconde est en effet égal au produit du numérateur de la seconde fraction par le dénominateur de la première. Ainsi considéré ces deux produits forment une croix, d'où le nom de « produit en croix » ou de « produits croisés ». La technique permet alors de déterminer n'importe lequel des quatre nombres de la proportion à partir des trois autres. Pour obtenir le nombre représentant en euro le prix des 3 kg de farine, il suffit dès lors de multiplier les nombres 3 et 6, puis de diviser le produit obtenu par 5 pour aboutir au résultat de 3,60.

A la différence des trois précédents, la technique du produit en croix s'établit exclusivement à un niveau numérique. Au niveau des grandeurs mesurées, il est en effet impossible d'attribuer une signification en termes de grandeur au produit de 3 kg par 6,00 EUR : le résultat de 18,00 qui en résulte pourrait certes correspondre au prix de 15 kg de farine (résultat de $5 \times 3 \text{ kg}$), mais l'unité effective du produit ainsi déterminé - des kilos-euros (kg-EUR) ? - vient contredire le fait qu'il puisse s'agir d'euros. Rouché n'en fait d'ailleurs pas mention explicite dans ces trois ouvrages, tandis que Comin le considère non pas comme une technique de résolution en tant que telle, mais plutôt comme un simple outil de calcul (op.cit., p.160). On le retrouve en

revanche chez Vergnaud (1981), sous l'appellation de "règle de trois". La confusion d'appellation entre ces deux techniques est fréquente, alors même que les propriétés sur lesquelles elles sont fondées ne sont pas les mêmes. Cette confusion est vraisemblablement entretenue par le fait que le produit en croix fait appel aux trois nombres d'une proportion pour déterminer le quatrième, d'où la tentation de l'appeler également règle de trois¹⁴⁷. Du point de vue des opérations à réaliser, le produit en croix s'avère en outre très proche de la règle de trois, puisqu'il s'effectue lui aussi en deux temps, à partir des mêmes opérateurs, soit $\div 5$ et $\times 3$, dans le cas particulier. Seul, l'ordre des opérations va différer¹⁴⁸, puisque dans la règle de trois, on commence par la division par 5 pour ramener le prix à sa valeur unitaire, avant de multiplier ce prix par 3 pour déterminer le prix des trois kilos. Alors que dans le produit en croix, on débute avec la multiplication par 3, avant de procéder à la division par 5.

Notons pour terminer qu'à considérer ces quatre techniques, il est difficile d'établir celle qui pourrait être la plus aisée à utiliser pour résoudre un exercice de proportionnalité et donc celle dont on pourrait privilégier l'enseignement. La chose a donné lieu à de nombreux et parfois farouches débats aussi bien à l'interne, qu'à l'externe de la communauté des didacticiens. Il n'est évidemment pas possible d'en rendre compte ici, mais on pourra tout de même, à titre d'illustration, citer les propos plutôt virulents de Bkouche (2008, p.2) :

Tout en critiquant, d'une façon peu pertinente, la réforme des mathématiques modernes, les didacticiens ont repris certains de ses points de vue. Ils ont ainsi continué à rejeter la règle de trois en y ajoutant leur propre point de vue, d'une part la nécessité d'un enseignement moderne, d'autre part la nécessité de donner du sens au savoir enseigné, comme si les mathématiques qui se sont développées au cours de l'histoire n'avaient pas de sens. Le sens devient ainsi un artefact pédagogique destiné à faciliter le travail des élèves. Revenons à la règle de trois ; celle-ci apparaît comme un objet obsolète par rapport à la notion de proportionnalité, elle est donc à éliminer. Il faut alors la remplacer par un outil d'usage facile, ce seront les produits en croix. Si les produits en croix ont une signification liée à la proportionnalité, encore que cette signification ne soit pas évidente lorsque l'on parle de grandeurs proportionnelles, une introduction brutale de l'usage des produits en croix apparaît comme une simple recette. En outre, les produits en croix ne peuvent être utilisés que dans un cadre numérique, ce qui suppose non seulement que les grandeurs soient mesurées, mais que l'on identifie les grandeurs et les nombres qui les mesurent.

De son côté, Rouche (1998) considère que la règle de trois est une procédure rigide¹⁴⁹ et qu'il y a bien des occasions où on peut la court-circuiter¹⁵⁰. Il penche donc pour favoriser l'usage du

¹⁴⁷ Chez Vergnaud, la chose est tout de même étrange, lui qui affirme à l'entame de son chapitre consacré aux problèmes de type multiplicatif, que la relation : « qui forme le tissu de la grande majorité des problèmes de type multiplicatif est une relation quaternaire et non une relation ternaire » (op.cit., 161).

¹⁴⁸ Tout en sachant bien que la commutativité entre les deux opérateurs fait que, d'un point de vue mathématique, l'ordre n'a aucune importance.

¹⁴⁹ En 1992, sa position vis-à-vis de la règle de trois était plus nuancée, arguant qu'elle était d'un usage simple et proche du sens, c'est-à-dire proche des opérations à réaliser sur les grandeurs. Sa simplicité d'usage n'allait toutefois pas sans poser un certain nombre de difficultés d'apprentissage que Rouche attribuait d'une part au fait que le sens pouvait s'évanouir quand les nombres en jeu exigeaient des calculs complexes ou d'autre part quand la règle de trois était abusivement utilisée dans des situations non-proportionnelles où elle n'avait pas lieu d'être :

Ainsi la règle de trois, ce monument très ancien de l'enseignement élémentaire (unique recours de pas mal d'adultes dans les problèmes de proportionnalité) doit sa position privilégiée au fait qu'elle demeure proche du sens à chacune de ses étapes. Sa simplicité ne soit pourtant pas faire oublier que beaucoup d'enfants ne l'acquièrent pas sans mal et qu'elle occasionne beaucoup d'erreurs, soit qu'on l'applique quand il ne faudrait pas, soit qu'on l'applique formellement et de travers, par exemple lorsque les nombres à manipuler y deviennent compliqués et absorbent l'attention au détriment du sens global » (1992, p.221).

¹⁵⁰ Rouche donne l'exemple de la situation où il s'agit de déterminer la quantité de sucre (en kg) que l'on peut obtenir pour 288 francs (il s'agit d'anciens francs belges), sachant que l'on peut en avoir 3 kg pour 144 francs : la recherche du poids au franc par le biais de la division de 3 par 144 ($3 \div 144 = 0,021$) qui apparaît lors de l'usage de la règle de trois s'avère peu réaliste

tableau de proportionnalité qui, n'étant pas une technique de résolution en soi, permet de choisir la technique la plus adaptée à chaque situation. Et si l'on s'en tient aux propos de Comin, l'usage du tableau de proportionnalité paraît effectivement comporter un certain nombre d'avantages qu'il sera intéressant de confronter ensuite à la réalité des interactions :

C'est un ostensif graphique qui sert de répertoire pour organiser les données - les valeurs numériques pouvant être des nombres abstraits ou des mesures de grandeurs étiquetées en tête de liste. L'instrumentalité du tableau de proportionnalité s'adapte aux différents niveaux de connaissances des élèves : les nombres peuvent être concrets ou abstraits, entiers, rationnels ou irrationnels, éventuellement représentés par des lettres. Le tableau est ainsi un outil qui peut être mis à disposition de l'arithmétique ou de l'algèbre. Il permet de traiter "proprement" les grandeurs en écrivant les unités en tête de liste. Il facilite la mise en œuvre des différentes techniques de la proportionnalité : calculs et comparaisons de rapports pour vérifier la proportionnalité ; utilisation des rapports, des additions, des soustractions pour la méthode réduction à l'unité ; calcul des produits en croix pour la méthode des proportions (op.cit., pp. 163-164)

La proportionnalité : deux cas particuliers.

Pour terminer ce second schéma consacré à la proportionnalité, on va encore évoquer deux cas particuliers de situations de proportionnalité que Rouche développe dans son ouvrage de 2006, parce qu'on les retrouvera par la suite dans les interactions : il s'agit d'une part des pourcentages qu'il considère comme une application, dans la vie quotidienne, de l'idée de proportionnalité et d'autre part des conversions d'unités de mesures qu'il apparente, sous un certain angle, à l'idée de proportionnalité inverse.

a) le cas particulier des pourcentages.

Afin d'évoquer la question des pourcentages, on partira à nouveau d'un exemple particulier¹⁵¹, correspondant à un type d'exercices que l'on soumet aux apprenties dans la formation professionnelle spécialisée : « On dispose de 12 kg de pommes de terre. L'épluchage des pommes de terre entraîne une perte de 18%. De combien de kg de pommes de terre épluchées disposera-t-on pour faire de la purée ? ».

Comme dans l'exercice du prix de la farine, il est à nouveau possible de constituer un tableau de correspondance qui distingue d'un côté le domaine des poids de pommes de terre non-épluchées (en kg) et celui des pommes de terre épluchées (en kg). En revanche, vu qu'aucune grandeur mesurée du second domaine ne figure dans l'énoncé, il n'est pas possible d'utiliser ici la correspondance des sommes ou celles des rapports internes pour constituer le tableau : il est donc nécessaire de s'appuyer sur le rapport externe. Etant donné que les grandeurs de chaque domaine sont de même espèce, ce rapport externe prendra la forme d'un opérateur numérique dépourvu d'unités. Dans l'exercice, il pourra être établi en soustrayant la perte de 18 % au 100 % représentant le poids des pommes de terre non-épluchées pour aboutir à 82 %. On obtient dès lors le poids des pommes de terre épluchées en multipliant 12 kg par 82/100 (ou 0,82 en écriture décimale) pour aboutir à 9,84 kg.

Rouche (1998) indique alors que dans le quotidien, beaucoup d'adultes utilisent une autre technique pour établir des pertes données en pourcents. Dans le cas particulier, il s'agirait d'opérer de la manière suivante :

- 12 kg correspondent à 100 % du poids des pommes de terre non-épluchées

en regard de l'usage direct du produit interne qui demande simplement de doubler 3 par 2 ($3 \times 2 = 6$) étant donné que 288 et le double de 144.

¹⁵¹ Dans son livre de 2006, Rouche prend l'exemple la situation d'une somme d'argent et d'un taux d'intérêt de n%.

- donc 1 % correspond à $12/100 \text{ kg} = 0,120 \text{ kg}$
- enfin, 18 % correspondent à $12/100 \text{ kg} \times 18 = 2,16 \text{ kg}$
- il s'agit alors de soustraire ces 2,16 kg à 12 kg pour aboutir à 9,84 kg

Cette technique relève en fait d'une règle de trois dans sa première partie et d'une soustraction dans sa seconde. Rouche affirme que la préférence qui lui est généralement donnée tient au fait que dans le langage courant qui parle de perte et donc de soustraction d'une certaine quantité entretient une conception additive des pourcentages (ibid., p.76). Il n'en reste pas moins qu'il fait apparaître une "proportionnalité" restée implicite dans la première, à savoir celle qui lie le domaine des poids des pommes de terre non-épluchées au domaine numérique des pourcent. Une situation de pourcentage relève donc non pas d'une seule, mais bien de deux "proportionnalités", la première qui unit les deux domaines en jeu dans la situation et la seconde qui unit l'un des domaines au domaine numérique des pourcents.

Dans le prolongement de ces propos, Rouche (1992) invite encore à considérer un autre fait surprenant concernant les pourcents, à savoir que la soustraction d'un certain pourcentage à une grandeur mesurée n'est pas l'opération réciproque de l'ajout du même pourcentage :

On augmente un salaire de 5 %, puis, un mois plus tard, on le diminue de 5 %. L'illusion consiste à croire que les deux opérations redonnent le salaire initial. Or, si le salaire de départ vaut 100 francs, après augmentation, il vaut 105 francs. Quand on veut ensuite le diminuer, on enlève 5 % non pas de 100 francs, mais de 105 francs, ce qui fait non pas 5 francs, mais 5,25 francs, et laisse un salaire de 99,75 francs. Cet effet paradoxal se double d'un autre : on pourrait croire que quand on exécute les deux opérations dans l'ordre inverse, c'est-à-dire si on commence par diminuer le salaire de 5 % pour l'augmenter ensuite de 5 %, on obtient l'effet inverse, à savoir une augmentation de salaire. Or il n'en est rien, on obtient le même effet (c'est toujours le patron qui gagne !). (p. 260)

Dans l'exercice des pommes de terre, cela se traduit par le fait que la diminution des 18 % des 12 kg de pommes de terre non-épluchées qui entraîne une perte de 2,16 kg ne correspond pas à la majoration de 18 % des 9,84 kg de pommes de terre épluchées qui entraîne une augmentation de 1,7712 kg. Cette non-réciprocité entre deux opérations inverses dans le cas des pourcentages aura des conséquences importantes lorsque, partant des quantités de pommes de terre épluchées qu'il faut prévoir pour un repas et connaissant la perte établie en pourcentage, il faudra prendre comme quantité égale à 100 % le poids (inconnu) des pommes de terre non-épluchées et non pas celui (connu) des pommes de terre épluchées.

b) le cas particulier des conversions de mesures.

La question des conversions d'unités de mesures a déjà passablement développée dans la construction précédente, consacrée aux grandeurs, mesures et décimaux. Ce que l'on peut encore ajouter ici, c'est qu'en premier lieu, la transformation d'une grandeur mesurée à l'aide d'une unité en une grandeur d'un même domaine mesurée en une autre unité relève à chaque fois d'une situation de proportionnalité. Si l'on prend pour exemple la transformation des longueurs mesurées en mètres en longueurs mesurées en centimètres, il est possible d'établir un tableau de correspondances entre les deux domaines considérés où les correspondances des sommes et des rapports internes sont conservées et où le rapport externe est égal à 100 cm/m.

Rouche (2006) montre néanmoins que si l'on considère au sein d'une conversion qui porte sur une succession d'unités, la variation des nombres en regard de la variation des unités de mesure,

la situation s'apparente plutôt à une situation de proportionnalité inverse¹⁵². Dans le cas où il s'agit de transformer une longueur donnée en mm, puis en cm, en dm, en m, etc., on observe en effet que :

chaque fois qu'on choisit une unité de longueur 10 fois plus grande, le nombre qui exprime la longueur devient 10 fois plus petit. Réciproquement, chaque fois qu'on choisit une unité de longueur 10 fois plus petite, le nombre qui exprime la longueur devient 10 fois plus grand. C'est là un phénomène proche de la proportionnalité inverse. La longueur, quant à elle, demeure évidemment toujours la même. A supposer qu'elle soit de 6 m, on peut l'écrire sous les différentes formes suivantes : 6000 mm = 600 cm = 60 dm = 6 m = 0,6 dam = 0,06 hm = ... (ibid., p.250)

La chose est importante à prendre en compte puisque l'usage du tableau qui permet d'effectuer des conversions de mesures décrit plus haut (et qui est celui enseigné aux apprenties dans la Fps) repose précisément sur la base d'une succession d'unités de mesure.

¹⁵² Dans les situations de proportionnalité inverse, l'usage du terme "proportionnalité" n'implique pas que la correspondance entre deux domaines de grandeurs possède les propriétés caractéristiques de la proportionnalité. La représentation graphique d'une telle situation n'est d'ailleurs plus une droite, mais une hyperbole et la formule qui la modélise est de type $y = a/x$.

CHAPITRE 4 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

INTRODUCTION

Le dispositif expérimental est composé d'une succession de cinq *investigations exploratoires* (Favre, 2004b). Sur les cinq investigations, trois reposent sur des interactions de connaissances avec des apprenties dans lesquelles j'étais moi-même impliqué. En conséquence, il s'agissait de recourir à un instrument efficace qui permette d'en conserver la trace sans (trop) en perturber le déroulement. Tout naturellement, c'est vers celui que nous utilisons régulièrement dans le cadre du groupe ddmes que je me suis tourné et que nous désignons par le terme de *narration*¹⁵³. La narration fait ainsi l'objet d'un développement théorique préalable destiné à en montrer le fonctionnement, à en fonder l'usage et à présenter le rôle important qu'elle sera conduite à jouer dans la thèse. Les cinq investigations exploratoires sont ensuite présentées tour à tour, à chaque fois selon une structure identique, donnant tout d'abord une description des éléments contextuels dans lesquels elles ont pris naissance et se sont déroulées, annonçant ensuite les intentions dont elles relèvent et les hypothèses qu'elles devront permettre d'éprouver et décrivant enfin les données qu'elles ont permis de récolter et la méthode qui a été employée pour en réaliser l'analyse.

LA NARRATION COMME INSTRUMENT DE RECHERCHE

Origines de la narration dans le groupe ddmes

On trouve déjà des traces du recours à la narration comme moyen de restitution et d'interprétation des interactions dans l'article de Conne (1987) intitulé : « Un canard dans les mares » qui repose sur la *description*¹⁵⁴ d'une leçon de mathématiques à l'école primaire. Le préambule de cet article est tout à fait explicite à ce sujet :

Le texte qui suit est la description d'une des modalités que peut prendre la leçon de mathématiques à l'école primaire. Mais l'histoire vaut ici plus qu'une anecdote. Son exposition dans un déroulement temporel permet de faire succéder différents cadrages constituant autant d'aspects d'analyse. La description en est alors la synthèse, la restitution dans leur jeu, sur les différents sites du travail didactique. (p.301)

Il s'agit bien en effet de rendre compte, par le biais d'une "histoire", une leçon de mathématiques de l'école primaire, dans une chronologie qui suit le déroulement temporel de la leçon. Les propos tenus dans cette histoire dépassent toutefois largement la seule description des interactions qui ont lieu en classe. Ils procèdent en effet de l'articulation d'aspects descriptifs de la réalité de la leçon et d'aspects analytiques portant, en les confrontant les uns avec les autres, sur différents sites du travail didactique pris en considération : le manuel du maître, la préparation de la leçon, la simulation de la résolution de l'exercice avec des proches, les copies d'élèves, etc. Ce qu'il y a en outre d'intéressant à

¹⁵³ La *narration* a été le thème des journées didactiques que le groupe ddmes a organisé en 2011 à La Chaux-d'Abel dans le canton de Berne (Groupe ddmes, 2011). L'acception dans laquelle la narration est prise ici ne doit pas être confondue avec celle qui prévaut ailleurs en ddm, sous la dénomination de *narration de recherche* (Bonafé & al., 2002), laquelle correspond à une modalité de travail développée au sein de l'IREM de Montpellier, demandant aux élèves de rédiger, au terme de la résolution d'un problème, le compte-rendu des démarches qu'ils ont engagées pour parvenir à sa résolution.

¹⁵⁴ C'est le terme employé par Conne qui ne parlait pas encore de "narration". Il reprend manifestement l'idée qui prévalait tout au long de son travail de thèse (Conne, 1981) dans lequel il affirmait que : « l'option délibérément prise est celle d'une "description" tout en regrettant que : « le statut de la description ne soit guère valorisé dans le travail de recherche et renvoie souvent à la représentation d'une démarche scientifique peu élaborée » (p.26).

relever dans la conclusion de l'article, c'est que Conne y affirme déjà de façon péremptoire que : « la description [entendons ici la narration] peut être utilisée comme un instrument de recherche à part entière. » (ibid., p.327)

Bien des années plus tard, l'usage de la narration comme instrument de recherche a été repris et développé dans le cadre du groupe ddmes, lequel l'avait avant tout adopté pour répondre aux spécificités de son mode de fonctionnement. Composé, dès ses débuts, tout à la fois de chercheurs, de formateurs et d'enseignants, le groupe ddmes a en effet choisi de s'inscrire comme un interlocuteur privilégié des questions, diverses, que ses membres étaient tour à tour amenés à se poser au sujet de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques dans l'Es. Dans son texte fondateur, il est notamment dit que :

La tâche dévolue au groupe est essentiellement celle d'étudier des questions de didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé, de les définir, de les formuler, de les relier à d'autres questions et de tenter d'y apporter des réponses. Le groupe se donne des moyens pour cette étude, en particulier il se dote d'un espace expérimental où il puisse mener soit des recherches, soit des investigations exploratoires de portée plus limitée, moins formelle et moins cadrée que des recherches proprement dites (Conne, cité par Favre 2004b, p. 129)

Cette étude des questions qui, dans l'espace expérimental désormais créé, se déclinait d'une part en investigations que chaque membre du groupe avait la possibilité de réaliser sur son lieu de travail respectif et d'autre part en entretiens de recherche qui étaient généralement menés par duo auprès d'élèves de l'Es, a nécessité, pour que le groupe puisse assumer cette fonction interlocutive, de recourir à un moyen de restitution que chacun pouvait facilement s'approprier. Et c'est ainsi que nous en sommes naturellement venus - Bruner (1996, p.151) déclare fort justement à ce propos que : « tout indique en effet que la manière la plus naturelle et la plus précoce dont nous organisons nos expériences et nos connaissances prend précisément une forme narrative » - à nous en faire le récit, d'abord sous une forme orale, puis, progressivement, quand des publications étaient en vue, sous une forme écrite.

Il est alors assez vite apparu que l'usage du récit, qu'au sein du groupe ddmes nous avons désigné par le terme de narration¹⁵⁵, présentait plusieurs intérêts. Tout d'abord la narration présentait bon nombre d'avantages pratiques, nous permettant de mener avec une certaine facilité notre travail de restitution de nos expérimentations au sein de groupe. Il n'y avait ainsi pas lieu de mener chaque investigation sous le couvert d'une caméra ou d'un enregistreur pour en conserver la trace. Nous n'étions pas non plus tenus de visionner dans leur ensemble les bandes vidéos issues de nos entretiens de recherche, voire de les retranscrire, comme cela se pratique de façon habituelle, mais excessivement chronophage, dans les études de ddm, sous la forme de protocoles (Brun & Conne, 1990). S'appuyant sur des événements inattendus (voire, plus rarement, sur certains que l'on avait voulu provoquer), la narration visait essentiellement à rendre compte de l'interprétation qu'était capable d'en faire après coup, celui ou celle qui avait su les repérer dans l'interaction. Elle s'avérait de fait d'un usage très souple, dans le sens où elle donnait la possibilité au narrateur d'y inclure, à sa convenance, une grande variété d'éléments : intentions préalables, tâches proposées, productions apparues, savoirs repérés, relances effectuées, raisonnements réalisés, questions restées sans réponse,... Certaines narrations rapportées au groupe pouvaient ainsi être relativement élaborées, parce qu'elles s'appuyaient sur des événements apparus dans plusieurs investigations successives, qu'elles avaient fait l'objet d'une longue réflexion, voire qu'elles avaient déjà été mises en

¹⁵⁵ Nous avons passablement hésité entre le terme de "narration" et le terme de "relation" qui, sous ses deux principales acceptions, permettait de rendre à la fois compte de l'idée du récit (relater) et de l'idée du lien (rapport) que le narrateur est amené à établir entre les faits qu'il raconte, mais c'est pourtant le premier, peut-être parce qu'il semblait plus proche du fait de se conter des histoires, qui a fini par s'imposer.

perspective avec d'autres études menées en ddm. Alors que d'autres narrations étaient au contraire très courtes, ciblées sur un événement ponctuel qui avait particulièrement *surpris* le narrateur (Conne 2004, 2006 ; Auckenthaler, 2004) et qui étaient livrées telles quelles à la discussion du groupe.

Le deuxième intérêt qu'a pris la narration dans le groupe ddmes est qu'elle s'articulait fort bien avec la manière selon laquelle nous menions nos investigations et nos entretiens de recherche. Dans la majorité des études de ddm en effet, les rôles de celui qui pilote les interactions et de celui qui les étudie sont clairement distincts : le rôle du pilote est généralement délégué à un enseignant et celui de l'étude à un chercheur. Le pilotage se fait en situation, à partir de ce qui a été conçu en amont par le chercheur qui l'a délégué ou parfois co-élaboré avec l'enseignant. Il débute quand commencent et se termine quand cessent les interactions. On pourrait dire qu'il est concomitant au déroulement de la situation. L'étude, en revanche, déborde largement la situation en son amont et son aval. Elle est déjà présente au moment de penser et de prévoir le pilotage ; elle se poursuit, au fil des interactions, quand le chercheur les observe et les consigne de manière à en conserver des traces ; elle se prolonge (parfois longtemps après) au-delà de la situation, à l'occasion des échanges pilote-chercheur, des retranscriptions de données, des analyses et des mises en formes que le chercheur sera conduit à réaliser à leur propos.

Or, dans les travaux menés par le groupe ddmes, cette distinction entre pilote et chercheur s'avère beaucoup moins tranchée¹⁵⁶. Lors des investigations que nous réalisons sur notre propre lieu de travail, les rôles du pilote et du chercheur sont dans un premier temps confondus et ne se distinguent véritablement qu'au moment de la restitution dans le groupe, lorsqu'il adopte sa fonction d'interlocuteur. Dans nos entretiens de recherche, ce sont par ailleurs la plupart du temps deux pilotes qui endossent conjointement le rôle de chercheurs et qui, dans l'interaction, se retrouvent tantôt en situation de pilote et tantôt en situation d'observateur :

À tour de rôle, et avec un esprit non dénué d'émulation, l'un de nous se chargeait de piloter l'expérience tandis que l'autre jouait le jeu d'observateur, quitte à ce que ce dernier s'inspire de ce qu'il aura pu observer lors d'expérimentations ultérieures. Un tel schéma très souple nous permet d'intégrer nos modes de faire fort distincts, dus au fait que nos expériences professionnelles ne sont pas les mêmes (Conne & al., 2004, p.90)

Ce que permet alors la narration dans les deux cas de figure (investigations et entretiens de recherche) - et que ne peuvent rendre compte ni une vidéo, ni un enregistrement, ni un protocole - c'est de restituer une part des raisonnements qui ont cours dans l'interaction, lorsque, livré à la contingence, le pilote doit prendre des décisions pour faire aux événements qui adviennent et aux surprises que lui occasionnent les réponses et les productions des élèves, distinctes de celles qu'il avait pu prévoir. De ce point de vue, et dans une première version¹⁵⁷, on pourrait dire que la narration constitue le récit du pilotage de la situation que le pilote livre au chercheur pour analyse. Un pilotage qui oscille constamment entre l'étude réalisée en amont de la situation pour penser le pilotage et l'étude qui se poursuit au cœur des interactions quand le pilotage prévu tend à s'échapper, ce que Conne (2003) propose d'appréhender en termes de *prises* et *pertes de contrôles*.

Enfin, le troisième intérêt qui a fait que la narration s'impose comme mode de restitution privilégié au sein du groupe ddmes a résidé dans le pouvoir d'évocation tout à fait saisissant

¹⁵⁶ L'idée nous a été inspirée par Bruner (1987) dans le chapitre intitulé : « Le rôle de l'interaction de tutelle dans la résolution de problèmes ».

¹⁵⁷ La narration pouvant être appelée à se transformer au moment où le chercheur a l'intention d'y intégrer ses analyses.

dont elle a su faire preuve et dont nous n'avions a priori nullement soupçonné l'importance. Rendre compte d'une interaction sous la forme d'un récit génère en effet invariablement chez ceux qui en prennent connaissance une intense activité cognitive constituée d'intuitions, de mises en lien, de raisonnements et d'évocations d'autres interactions auxquelles ils ont eux-mêmes participé¹⁵⁸. Ce pouvoir d'évocation de la narration se manifeste durant le troisième moment du « temps narré » défini par Ricoeur (1985) - le temps de la *refiguration* - soit celui où le lecteur (ou l'auditeur) s'approprie un récit. Il tranche ainsi considérablement avec celui produit par une vidéo, un enregistrement ou un protocole, lesquels appellent à chaque fois pour l'auditeur, le support d'un discours qui soit en mesure de l'introduire aux événements qu'il retrace. Dans les réunions du groupe, ce pouvoir d'évocation a permis d'enrichir considérablement nos débats, nous invitant même, de cas en cas, à tenter de reproduire les interactions relatées, afin d'apprécier dans quelle mesure les événements narrés étaient ou non reproductibles. Les journées didactiques que nous avons consacrées en 2011 au thème de la narration ont montré qu'il parvenait tout aussi bien à s'exercer à l'externe, comme en témoignent les propos rapportés de deux participants¹⁵⁹ dans les actes (ddmes, 2012) :

La narration, par l'évocation qu'elle provoque, favorise des échanges sur l'objet évoqué, elle offre des espaces d'intelligence des situations. [...] J'ai observé que chacun reliait la narration des divisions à une expérience de classe vécue par lui-même et que les prises de parole de chacun montraient les interférences entre la narration de Christian et leurs propres expériences. Ces interférences produisaient pour chacun un nouvel objet, une représentation, un espace de compréhension enrichi. (p.59)

Narrer, dans un groupe de recherche composé d'enseignants et de chercheurs, c'est une occasion de faire des abductions face aux surprises ou déconvenues qui se présentent, et donc de trouver des idées neuves, aussi bien en mathématiques qu'en didactique des mathématiques. (p.62)

Fondements théoriques de la narration

Narration et récit chez Bruner

L'idée de narration, telle qu'elle est envisagée dans le groupe ddmes, réfère à Bruner (1996) et plus particulièrement aux chapitres 6 et 7 de l'ouvrage, respectivement intitulés : « Les sciences par les récits » et « L'analyse narrative de la réalité », qu'il consacre au *récit*, en tant que *mode de pensée* et en tant que *structure pour organiser nos savoirs* (p.149). Dans ce chapitre, Bruner considère quatre aspects du récit - 1° sa nature et l'enjeu dont il relève ; 2° sa construction et l'interprétation qu'il est possible d'en faire ; 3° les contextes dans lesquels son usage est particulièrement approprié ; 4° la question de la scientificité du récit - qui vont permettre d'établir les principes généraux qui sous-tendent une narration.

Bruner commence par dire que le récit est une séquence d'événements qui vise à raconter à l'auditeur quelque chose d'inattendu, mais que : « la "mission" du récit est de résoudre l'inattendu, d'apaiser le doute de l'auditeur, ou, d'une certaine manière, de redresser ou d'expliquer le déséquilibre qui a porté l'histoire au premier plan » (ibid., p.152)

Dans la première version d'une narration, soit celle que le pilote élabore au sortir d'une situation, il s'agit bien en effet de réorganiser dans l'après coup les interactions qui s'y sont déroulées pour rendre compte des événements imprévus (parfois prévus) qui y ont eu lieu. Cette première version comporte déjà une part de résolution, même si elle est en grande partie implicite, qui s'actualise dans la reconstitution des événements et de leurs enchaînements qui

¹⁵⁸ Bruner affirme que : « chaque histoire en rappelle d'autres à ceux qui l'entendent » (1996, p.167).

¹⁵⁹ Il s'agit de Jean-Daniel Monod pour les premiers et d'André Pressiat pour les seconds.

aura été réalisée. L'analyse produite ensuite par le chercheur, sur la base de cette première version, prolongera et approfondira la "résolution de l'inattendu" ainsi entamée, mais en procédant cette fois-ci de manière beaucoup plus explicite, pouvant aller de cas en cas jusqu'à une réorganisation des interactions consignées dans la version établie par le pilote, suite à la nouvelle interprétation que le chercheur en aura donnée. L'objet de l'analyse ainsi réalisée étant d'aboutir, dans la mesure du possible, à une version : « qui soit à la fois convaincante et non contradictoire » et qui permette : « une lecture qui prenne en compte les détails qui la constituent. » (ibid., p.171)

Au sujet de la construction du récit, Bruner parle ensuite de « cercle herméneutique » qui veut qu'un récit se construise à partir des événements qu'il raconte et qu'en retour, ces événements tirent leur signification du récit envisagé dans son ensemble. C'est d'ailleurs, pour Bruner, ce qui fait que les récits sont sujets à interprétation et non à explication : « Vous ne pouvez expliquer une histoire ; tout ce que vous pouvez en faire, c'est en donner plusieurs interprétations » (ibid., p.152).

La première version de la narration élaborée par le pilote forme un tout élaboré à partir des événements qu'il a pu appréhender dans la situation. Réciproquement, cette narration constitue l'univers dans lequel ces différents événements prennent sens pour le pilote : elle témoigne de la compréhension qu'il en a, en tant que produit de l'interprétation qu'il a pu s'en faire. L'analyse que réalisera dans un second temps (et donc avec un peu de recul) le chercheur sur la base de cette narration aboutira à une nouvelle compréhension, produit d'une autre interprétation. Supposant que le chercheur se livre à l'exercice de faire à son tour une narration de la première version, il est fort à parier que celle-ci s'en distingue sensiblement, non parce qu'il n'aurait pas pris en compte l'ensemble des événements relatés dans la première, mais bien parce que l'interprétation qu'il s'en est dorénavant construite diffère de l'interprétation originale du pilote. Ainsi en adviendra-t-il d'ailleurs d'éventuels nouveaux auditeurs/lecteurs qui, à leur tour, seront irrémédiablement conduits à établir des interprétations nouvelles.

En ce qui concerne les contextes d'usage du récit, Bruner pose que :

[...] les histoires nous parlent plus volontiers d'agents humains que du monde naturel.
[...] Ce qui caractérise les agents humains, c'est que leurs actes ne sont pas produits par des forces physiques comme la gravitation, mais par des états intentionnels : des désirs, des croyances, des savoirs, des intentions, des engagements. Il est extrêmement difficile "d'expliquer" pourquoi les agents humains agissent de telle ou telle façon, ce qui donne encore plus de poids à l'exigence de l'interprétation pour comprendre les histoires. (ibid., p.153)

En suivant Bruner, il apparaît que la narration soit particulièrement appropriée à la restitution d'interactions qui mettent en scène des "agents humains". Il va sans dire que les investissements de savoir et les interactions de connaissances où se rencontrent un enseignant et des élèves autour d'un enjeu de savoir spécifique relèvent de cette catégorie. En revanche, on voit qu'il faut toujours prêter garde au fait que l'explication rationnelle des actions ou des propos de chacun des acteurs en présence est toujours délicate à réaliser et que l'analyse qui est portée par le pilote comme par le chercheur est toujours plus de l'ordre de l'interprétation que de l'explication.

Enfin, Bruner pose encore que si les récits sont le produit de narrateurs et que tout narrateur procède pour le faire d'un certain point de vue :

il en est de même lorsque l'on parle de sciences, même si le langage de la science, sous couvert d'une rhétorique de l'objectivité, fait de son mieux pour cacher cet

aspect. Le fameux « changement de paradigme » qui se produit durant les révolutions scientifiques dévoile ce qui a été caché jusqu'alors, à savoir que les données scientifiques ne sont que des observations construites, conçues selon un certain point de vue » (ibid., p.154)

Avec ce dernier aspect, c'est la délicate question de la scientificité de la narration qui est posée. Sachant qu'elle procède d'une reconstruction constituée à partir de traces et d'événements perçus par un pilote, puis d'une analyse portée sur cette reconstruction par un chercheur, la narration peut-elle être considérée comme un moyen de restitution duquel il est possible de tirer des résultats scientifiquement valides ? Autrement dit est-il envisageable de faire un usage raisonné de la narration dans le cadre d'une thèse ? Or, ce que nous dit ici Bruner, c'est que, même au sein des sciences dures, les données scientifiques produites relèvent d'observations qui ont été construites d'un certain point de vue, ce qui donne à penser que tout travail scientifique procède de près ou de loin d'une forme de reconstruction d'événements perçus.

La discussion autour de cette question mérite toutefois d'être poursuivie et on le fera selon trois axes : d'abord, en comparant la narration avec un autre moyen de restitution reconnu (Brun & Conne, 1990) et abondamment utilisé dans les travaux de ddm : le *protocole* ; ensuite, en associant l'idée de narration à celle d'*intrigue* que Pastré (2005) a emprunté à Ricoeur (1986) ; enfin, en montrant en quoi la narration peut être inscrite dans une démarche de *recherche qualitative* (Anadón & Guillemette, 2012).

Narration et protocole

En ddm, l'idée de demander au pilote des interactions que le chercheur souhaite analyser, de rendre compte des événements qu'il aura pu observer sous une forme narrative n'est pas courante¹⁶⁰. Dans la plupart des cas, le chercheur se dotera plutôt de moyens d'enregistrement externes (caméra, enregistreur, notes de travail,...) qui lui permettront de garder la trace des interactions, qu'il retranscrira ensuite sous la forme d'un protocole (Brun & Conne, 1990). S'il souhaite en savoir plus sur le pilotage, il organisera au terme de la situation avec le pilote un *entretien d'explicitation* (Vermersch, 2012) qui fera également l'objet d'un enregistrement, retranscrit sous la forme d'un protocole.

Ce mode de restitution, emprunté aux techniques de la psychologie piagétienne (Calpini, 1985) est conçu pour donner aux observations un gage de scientificité du fait qu'il permet en principe de saisir l'ensemble des interactions qui ont eu lieu dans la situation. Selon Brun & Conne (1990, p.265) en effet : « la transcription de l'observation en un protocole sert à restituer les conduites, actions et propos des élèves et de l'enseignant, au fur et à mesure de l'avancement des questionnements et des tentatives de solutions. » Avec cette manière de procéder, on obtient donc directement la reconstitution du déroulement de la situation qui a été pilotée et celle-ci peut dès lors être soumise aux analyses du chercheur qui : « ont pour but de reconstruire la logique du déroulement ; c'est en effet la logique qui nous intéresse et non le déroulement pour lui-même. » (ibid., p.269).

Cela veut donc dire qu'avec le protocole, on écarte sciemment les observations réalisées par le pilote pour reconstituer le déroulement effectif de la situation et que ce n'est

¹⁶⁰ On peut signaler que la revue « Math-école » en Suisse Romande a longtemps encouragé les enseignants à le faire dans la perspective d'un partage d'expériences. Ainsi, l'article de Perret & al. (1987) plaide-t-il en faveur de *comptes rendus descriptifs* d'une leçon pour appréhender la réalité de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques en classe. Il signale cependant que la réalisation de comptes rendus par les enseignants se heurte chez eux à au moins trois types d'obstacles : le fait qu'ils pensent qu'il soit impossible d'enseigner et d'observer simultanément ; le flou qui entoure les finalités de la réalisation d'un compte-rendu ; l'idée qu'un compte rendu doive irrémédiablement tendre vers la restitution d'une leçon-modèle.

qu'éventuellement dans l'après coup, lors d'une phase qui vise déjà à considérer la logique du déroulement (et qui fait donc déjà partie de l'analyse), que le chercheur pourra éventuellement s'en préoccuper dans le cadre d'un entretien avec le pilote. Or, si cette façon de faire paraît propre à objectiver tout au moins en partie¹⁶¹ les données recueillies quand le pilote et le chercheur se déclinent en deux sujets différents - généralement un enseignant et un chercheur - elle ne pourra pas fonctionner de la même manière dans le cas où le pilote et le chercheur sont confondus, puisqu'il devient, dans ce cas de figure, tout simplement impossible de soustraire les observations du pilote à la reconstitution du déroulement de la situation.

C'est donc bien quand un sujet assume tout à la fois le rôle du pilote et du chercheur¹⁶² que l'on pourra faire un usage approprié de la narration. Car, plutôt que de vouloir contourner les observations du pilote (ici un pilote-chercheur), la narration va au contraire proposer de s'y appuyer. Partant des événements de la situation qu'il aura identifiés et des traces mnésiques ou scripturales qu'il en aura conservés, c'est précisément au pilote-chercheur que reviendra le rôle de reconstituer le déroulement de la situation. Un déroulement qu'il ne pourra établir qu'en ayant par lui-même reconstitué une¹⁶³ logique qui viendra organiser les événements relatés dans la narration. Cela signifie que dans la narration une logique (soit celle que s'est élaborée le pilote-chercheur) précède l'inférence d'un déroulement, tandis que dans le protocole, le déroulement précède l'inférence d'une logique (soit celle que s'est élaborée le chercheur).

A ce titre, il est important d'ajouter que la narration établie par le pilote-chercheur au terme de l'interaction va en constituer une première version, qui sera susceptible d'être ensuite remaniée en fonction des analyses ultérieures réalisées par le pilote-chercheur et de l'interprétation nouvelle qu'il aura dès lors pu s'en constituer. En cohérence avec le deuxième aspect des récits emprunté à Bruner (op.cit.) qui veut que ces derniers soient sujets à plusieurs interprétations, on retrouve également ici, si l'on en vient, par l'esprit, à découpler les rôles de pilote et de chercheur, l'idée défendue plus haut que *la narration constitue le récit du pilotage de la situation que le pilote livre au chercheur pour analyse*.

Narration et intrigue

La narration peut être aussi rapprochée de l'idée d'*intrigue* que Pastré (2005) a empruntée à Ricoeur (1986) pour éclairer les démarches d'analyse rétrospective qu'il a conduit dans le cadre de ses premières recherches en didactique professionnelle, quand il s'agissait d'aider des professionnels à comprendre après coup ce qui avait bien pu contribuer à ce que des actions menées dans une situation particulière aient pu se solder par un échec.

Afin de mener une telle analyse, Pastré affirme alors que pour que le professionnel puisse conduire une analyse de son action, il doit disposer de traces de son activité autres que ses seuls souvenirs, pour éviter des fuites vers des interprétations plus ou moins fictives, mais qu'il est tout autant nécessaire de respecter la singularité de la situation vécue avant d'en tirer des conclusions trop hâtives. Il compare cette démarche à celles des historiens qui, pour donner du sens à un événement, doivent tenir compte de deux contraintes contradictoires :

d'une part, il leur faut respecter les faits pour éviter de se lancer dans des interprétations qui transformeraient l'histoire en fiction. Mais d'autre part, il leur faut

¹⁶¹ En écartant les observations du pilote, on n'évite cependant pas les effets produits par la lecture du déroulement de la situation que le chercheur établit selon ses propres cadres de pensée.

¹⁶² C'est d'ailleurs le fait que le pilote et le chercheur s'incarne dans une même personne qui a conduit à privilégier l'emploi du "je" vis-à-vis du "nous" qui prévaut habituellement dans une thèse. On verra cependant par la suite que les analyses des interactions portées aux chapitres 6 et 8 ont nécessité le recours au substantif "l'enseignant" et au pronom "il" pour marquer l'interprétation qu'accomplit le chercheur à l'égard de la conduite du pilote (qui revêt le rôle d'un enseignant).

¹⁶³ L'usage de l'article indéfini est d'importance, car cette logique dépend évidemment de l'interprétation que le pilote en a faite.

respecter la singularité des événements en évitant de tirer des lois générales d'événements qui ne sont historiques que parce qu'ils sont uniques (ibid., p.41)

Le travail d'analyse proposé par Pastré se déroule en trois temps, s'articulant : 1° du vécu au récit, 2° du récit à l'intrigue, 3° de l'intrigue à un essai de généralisation. Dans une première étape, il s'agit donc de rendre compte d'un vécu par le biais d'un récit s'appuyant sur les traces de l'activité qui ont été récoltées. Le récit comportera un début et une fin et sera composé d'une suite d'épisodes. La deuxième étape de l'analyse réside dans la mise en intrigue du récit. Telle que la conçoit Ricoeur (op.cit.), la notion d'intrigue tient au fait que les épisodes du récit ne sont pas sans lien les uns avec les autres, mais qu'ils entretiennent au contraire des relations entre eux. Ces relations peuvent être de trois ordres : des *relations de causalité*, des *relations de finalité* et des *relations de hasard*. La mise en intrigue revient alors à rechercher et à identifier ces relations de causalité, de finalité et de hasard de façon à être en mesure, pour reprendre la formule de Pastré, de : « trouver de l'intelligibilité à des événements singuliers ». La troisième étape revient enfin à chercher parmi les relations établies celles qui ont pu contribuer à l'échec des actions entreprises dans la situation relatée.

L'ensemble de la démarche vise donc à faire en sorte que :

[...] on ne quitte pas la singularité de l'action ; on est entièrement dans une recherche du sens de l'événement, recherche qui s'appuie à la fois sur le respect des faits et sur le souci de comprendre comment ils se sont enchaînés. (op.cit., p.41)

La perspective est donc très proche de celle qui prévaut dans le groupe ddmes vis-à-vis de la narration, tout comme celle qui sera envisagée dans la thèse. On y retrouve tout d'abord la nécessité de compiler des traces qui, dans le cadre des interactions, sont constituées, en priorité, des productions des élèves/apprenties. Ensuite, il s'agit, à partir de ces traces, d'élaborer un récit pourvu d'une suite d'épisodes, afin de coller au plus proche de la singularité de la situation qui s'est développée, en évitant des généralisations, on pourrait aussi parler de schématisations prématurées. Enfin, on procédera à une mise en intrigue qui s'appuiera sur le récit et se constituera des interprétations que l'on pourra en faire, en vue de trouver de l'intelligibilité dans la singularité des événements advenus.

Narration et recherche qualitative/interprétative

Dans un article visant à interroger le fait qu'une recherche qualitative soit nécessairement inductive, Anadón & Guillemette (2012) se livrent à une présentation des orientations épistémologiques fondamentales de la recherche qualitative. Six assertions extraites de cet article suffiront à y inscrire la narration, en tant que moyen de restitution et d'interprétation des interactions de connaissances :

1° Si la réalité empirique peut avoir une existence indépendante du sujet qui la connaît, la réalité épistémique n'existe que par la présence du sujet, sujet qui n'est pas indépendant d'une culture et de rapports sociaux. (ibid., p.28)

Dans la narration, c'est par la réalité épistémique du pilote que l'on a accès à la réalité empirique des interactions qui ont lieu en situation.

2° Dans les perspectives propres aux recherches qualitatives, la subjectivité et l'intersubjectivité sont considérées comme des moyens incontournables de construction des savoirs et non comme des obstacles à la production de connaissances. (ibid., p.28)

Dans la narration, il ne s'agit pas de vouloir écarter les observations du pilote parce qu'elles seraient des obstacles à la construction des savoirs concernant les interactions, mais bien de prendre appui sur ces observations qui participent à cette construction.

3° C'est généralement en partant d'une description du vécu du quotidien que les interactions socio-culturelles sont étudiées, cette description étant conçue comme le premier degré de l'interprétation et non comme le degré zéro de l'interprétation. (ibid., p.30)

La narration des interactions réalisée par le pilote est le produit de l'interprétation qu'il s'en fait, fort de la logique qu'il est parvenu à établir entre les divers événements et traces qu'il y a collectés. A ce titre, il s'agit bien d'un premier degré d'interprétation qu'au travers de ses analyses, le chercheur est amené à remodeler pour aboutir à d'autres degrés d'interprétation.

4° Sur le plan de la connaissance, ce qui intéresse les chercheurs est tout ce qui apparaît comme significatif dans les perceptions, les représentations, les sentiments et les actions des acteurs sociaux. (ibid., p.29)

La narration se constitue, en les articulant, des éléments de la situation qui ont paru significatifs au pilote, en regard des événements qu'il a pu y identifier et dont il cherche à rendre compte.

5° C'est l'ancrage dans les données empiriques qui sert ici de critère principal de scientificité en opposition aux démarches spéculatives qui sont considérées comme sans lien avec la réalité. En d'autres mots, il s'agit d'une démarche logique qui consiste à aller du concret vers l'abstrait en cernant les caractéristiques essentielles d'un phénomène. (ibid., p.32)

La narration doit être à même de cerner des phénomènes, c'est-à-dire de contribuer, dans une perspective résolument inductive, à des développements théoriques subséquents ancrés sur les données qu'elles restituent.

6° L'inférence abductive permet de combiner de manière créative des faits empiriques avec des cadres heuristiques de référence. L'utilisation de l'induction analytique et de l'abduction permet d'actualiser le travail créatif de la recherche qualitative tout en ayant recours aux connaissances existant dans le domaine auquel l'objet d'étude appartient. (ibid., p.34)

La narration doit également permettre, dans une perspective cette fois-ci abductive (Peirce, 2002), d'intégrer les données et les phénomènes identifiés dans les cadres de la ddm, le cas échéant, de les éprouver (Conne & al., 2004).

On conclura ce développement théorique consacré à la narration par une citation de Rouche (1988) qui lance un vibrant appel à l'usage du "récit détaillé" comme instrument de recherche à part entière :

Le récit détaillé, tout comme l'expérience individuelle et l'introspection, semble marqué par la subjectivité et peut être par-là discrédité (...) Des récits détaillés d'apprentissages dus à l'enseignant lui-même sont-ils autres qu'un tissu d'observations biaisées et d'opinions personnelles ? Tout dépend de l'analyse à laquelle ces sources sont soumises. En tant que produits spontanés, laissés à leur expression initiale, elles n'apportent sans doute pas grand-chose d'objectif. Mais supposons maintenant qu'on les dissèque à l'aide d'outils conceptuels. Ceux-ci servent de critères préétablis pour y reconnaître des choses et des phénomènes imprévus, qui ne s'y trouvent que de manière implicite et souvent même ont échappé à la conscience du sujet... (pp.26-27)

C'est en effet ainsi qu'il faut voir d'une part le travail de la narration rédigée d'abord juste après coup par le pilote, puis analysée plus tard à tête reposée par le chercheur en faisant jouer ses "outils conceptuels" pour affiner les interprétations.

UN DISPOSITIF COMPOSÉ DE CINQ INVESTIGATIONS SUCCESSIVES

La partie expérimentale de la thèse se compose de cinq investigations menées de 2009 à 2012 durant les quatre premières années de mon travail de responsable pédagogique au CFPS. Les analyses et les mises en relation entre les cinq investigations qui seront établies dans la deuxième partie de la thèse, selon le cadre théorique présenté aux chapitres 2 et 3, viseront à leur conférer le statut d'une recherche à part entière.

Les savoirs mathématiques en jeu durant la formation des apprenties au CFPS du Château de Seedorf (chapitre 5)

Eléments contextuels

La première investigation est fondée sur les documents qui, au CFPS, servent de cadre et de référence à la formation des apprenties et en déterminent le déroulement. Cette investigation a été rendue possible par le fait qu'à mon arrivée au CFPS en 2009, ma fonction de *responsable pédagogique* m'a donné accès à l'ensemble des documents qui avaient charge de l'organiser. Certains d'entre eux avaient été élaborés à l'externe par des instances fédérales ou cantonales, publiques ou privées, chargées de définir la formation professionnelle des apprenties, alors que d'autres avaient été conçus à l'interne pour en opérationnaliser le déroulement. Les documents externes étaient essentiellement des ordonnances et des plans de formations, alors que les documents internes se composaient principalement de programmes, de moyens d'enseignement et d'épreuves d'évaluation. L'examen de ces documents visait à répertorier et à caractériser les savoirs mathématiques qui faisaient partie intégrante de la formation. Les échanges que j'ai pu entretenir avec mes collègues à leur sujet m'ont donné quelques compléments d'informations sur l'usage qui en était fait dans les différents lieux où la formation se déroulait.

Intentions et hypothèses

Dans cette première investigation, on va essentiellement s'intéresser au niveau de l'institution, tel qu'il peut se révéler dans le contexte de la Fps, on affleuera parfois celui des investissements de savoirs, mais on ne traitera pas encore d'interactions de connaissances. Le CFPS du Château de Seedorf y est considéré comme un système d'enseignement fonctionnant, à l'interne, en interrelation avec les systèmes didactiques qui le composent et, à l'externe, en interrelation avec d'autres systèmes didactiques, systèmes d'enseignement et noosphères, insérés dans un système sociétal global : celui de la formation professionnelle initiale en Suisse. En tant qu'institution spécialisée, le système d'enseignement "CFPS du Château de Seedorf" y sera appréhendé comme un réseau de lieux, de personnes et de savoirs.

L'intention générale sera de poursuivre le travail amorcé au chapitre 1, qui a déjà permis de caractériser les principaux lieux de formation et les différentes personnes qui constituent ce réseau, pour s'intéresser maintenant plus spécifiquement aux savoirs mathématiques que l'on y rencontre et qui doivent, en principe, y faire l'objet d'investissements¹⁶⁴. Ces savoirs seront tout à la fois considérés suivant les formes sous lesquelles ils se donnent à voir, les déterminations internes et/ou externes dont ils procèdent, les enjeux dont ils relèvent, les types d'interactions auxquelles ils donnent lieu et, finalement, selon l'évolution qui est la leur tout au long de la formation.

L'hypothèse qui sous-tend cette première investigation veut qu'il existe bel et bien, dans chaque lieu de formation du CFPS, des savoirs mathématiques qui font partie des

¹⁶⁴ On parle prudemment ici d'investissements et pas encore d'enseignement, pour ne pas anticiper sur le rôle effectif que prendront les savoirs mathématiques dans la formation des apprenties.

programmes ; du fait que l'on se trouve dans un contexte de formation professionnelle, on peut s'attendre à ce que ces savoirs soient essentiellement envisagés d'un point de vue technique, liés aux tâches, essentiellement professionnelles, qu'ils permettront d'y accomplir ; ces savoirs font conjointement l'objet de déterminations externes pour répondre aux exigences de la noosphère et de déterminations internes pour répondre aux besoins particuliers de chaque lieu de la formation ; ils peuvent à la fois donner lieu à des interactions de type didactique organisé dans le cadre des cours et de type didactique improvisé lorsqu'ils émergent, de façon incidente, dans le cadre de la pratique ; enfin, il est possible de penser que leur évolution tout au long de la formation risque d'être freinée en raison de ce que ces savoirs s'adressent à des apprenties déclarées en difficulté d'apprentissage.

Données récoltées et méthode d'analyse

Les principaux documents qui ont déjà permis de décrire le déroulement de la formation des apprenties au CFPS du Château de Seedorf et déterminer le réseau de lieux et de personnes qui y participent sont le site officiel du centre, le serveur intranet et le système qualité (tous deux réservés à l'usage exclusif des collaborateurs) qui en assurent et en régulent le fonctionnement¹⁶⁵. En ce qui concerne les savoirs, ce sont les plans de formation qui servent de référence à la formation qui seront en priorité examinés ; puis, quand ceux-ci font défaut, on s'appuiera pour y suppléer sur les autres documents en usage que sont les moyens (ou méthodes) utilisés pour réaliser leur enseignement ou les rapports d'évaluation qui servent à marquer leur appropriation par les apprenties. L'analyse des savoirs portera exclusivement sur les deux principaux lieux¹⁶⁶ responsables de la formation professionnelle que sont, au CFPS, le département enseignement d'une part et le département professionnel d'autre part.

La méthode d'analyse consiste d'abord à distinguer les documents qui servent de référence à chacun des deux lieux et à en définir la provenance, que celle-ci soit interne ou externe au centre. On ordonnera ensuite ces documents d'un point de vue temporel, en suivant le déroulement de la formation des apprenties, pour permettre de marquer l'évolution des savoirs qu'on y rencontre. Dans chaque document, on identifiera les rubriques qui font explicitement référence aux mathématiques, en supposant que cette explicitation donnera cours, dans la formation effective, à des interactions de type didactique organisé. On visera alors à déterminer les tâches et les techniques - et, quand cela aussi sera le cas, les technologies et les théories - qui concourent à la définition des savoirs mathématiques en jeu. On s'intéressera également à relever, dans les rubriques où les mathématiques ne font pas l'objet d'une explicitation particulière, si des savoirs mathématiques y sont néanmoins impliqués, supposant que ceux-ci pourront donner lieu, dans la formation effective, à des interactions de type didactique improvisé. Enfin, on cherchera à distinguer, dans les savoirs répertoriés, ceux qui sont à visée professionnalisante, de ceux qui ne le sont pas.

Le soutien apporté à une apprentie employée de cuisine AFP, en vue de ses cours professionnels et de la passation de ses examens de fin d'apprentissage (chapitre 6)

Eléments contextuels

La deuxième investigation a porté sur le soutien individualisé que j'ai proposé, durant l'année 2009-2010, à une apprentie qui terminait sa formation d'employée de cuisine AFP et qui s'y retrouvait en difficulté. Cette investigation a été rendue possible par le fait qu'à mon entrée au

¹⁶⁵ Le site du CFPS du Château de Seedorf peut être consulté sur <http://www.cfps-seedorf.ch> ; tandis que l'intranet et le système qualité ne sont accessibles qu'à ses collaborateurs.

¹⁶⁶ Cela ne signifie pas que les autres lieux du centre ne concourent pas à la formation professionnelle des apprenties, ni non plus que des savoirs mathématiques n'y sont jamais matière à investissement. Il s'agit seulement d'une option prise a priori, dictée par le fait que c'était assurément dans ces deux lieux que l'on avait le plus de chances de retrouver des mathématiques identifiées dans les documents qui présidaient à la formation des apprenties.

CFPS, je me suis vu confier, parmi les mandats qui relevaient de ma fonction de responsable pédagogique, le soutien (on parle volontiers de coaching dans la formation professionnelle) d'une apprentie employée de cuisine AFP qui n'effectuait pas sa formation au CFPS, mais dans une entreprise de la ville de Fribourg. Agée de vingt et un ans, cette apprentie venait de débiter sa seconde année d'apprentissage, mais les difficultés qu'elle avait rencontrées dans le cadre des cours professionnels¹⁶⁷ durant la première année, risquaient de mettre en péril la réussite de sa formation, alors même que l'investissement et les compétences dont elle faisait preuve en entreprise étaient, du point de vue de son maître d'apprentissage, entièrement satisfaisants. L'Office de l'Assurance Invalidité (OAI) du canton de Fribourg, qui la soutenait financièrement dans sa formation, a donc fait appel au CFPS pour une prestation¹⁶⁸ qui devait apporter à cette apprentie un soutien dans le suivi des devoirs, l'aider à développer des stratégies d'apprentissage plus efficaces et lui permettre de progresser en français et en mathématiques. En deuxième partie d'année scolaire, il s'est plus particulièrement agi de l'accompagner dans la préparation de ses examens de fin d'apprentissage qui comportaient un versant mathématique.

A cette occasion, je me suis donc retrouvé assigné du rôle d'*enseignant de soutien*, ce qui m'a donné la possibilité de nouer mes premières interactions en mathématiques avec une apprentie dans un lieu où j'étais institutionnellement légitimé pour le faire. Au cours des rencontres de la première partie de l'année, j'ai eu accès à quelques exercices¹⁶⁹ de mathématiques qu'on lui demandait de résoudre dans le cadre de ses devoirs, ainsi qu'à une technique de résolution qui lui avait été enseignée pour le faire. Plus tard, ce seront d'autres exercices, issus ou conçus sur la base des procédures de qualification¹⁷⁰ des années antérieures qui lui étaient proposés en cours, en guise de préparation à ceux qui l'attendaient en fin d'année, qui ont servi de supports à nos interactions. Il m'a donc été possible d'observer comment cette apprentie s'y prenait, dans les exercices qui lui étaient proposés pour faire fonctionner les savoirs mathématiques qu'on lui avait enseignés dans les cours et comment, en retour, l'enseignant de soutien que j'étais, était en mesure de s'y prendre pour l'aider à se les approprier pour (bien) le faire.

Intentions et hypothèses

Dans cette deuxième investigation, on réalise une première incursion dans les investissements de savoirs mathématiques susceptibles d'apparaître dans la Fps et les interactions de connaissances qui en découlent. Investissements et interactions se déroulent au sein du département enseignement du CFPS dans le cadre d'un système didactique qui a été spécifiquement créé pour offrir un soutien hebdomadaire à une apprentie employée de cuisine AFP dont la formation se déroule à l'externe du centre, dans une entreprise pour la pratique et dans une école professionnelle pour les cours.

L'intention générale cherchera à appréhender les savoirs mathématiques qui font l'objet d'un investissement effectif dans le "système soutien" et à rendre compte de leur fonctionnement dans l'interaction. Dans un premier temps, les savoirs investis seront envisagés selon les

¹⁶⁷ Les cours étaient donnés à l'Ecole professionnelle artisanale et industrielle (EPAI) de Fribourg.

¹⁶⁸ L'entreprise où elle travaillait lui accordait une demi-journée de congé hebdomadaire pour qu'elle puisse bénéficier de ce soutien qui a débuté à la mi-septembre de l'année 2009.

¹⁶⁹ Le terme d'*exercice* sera utilisé par la suite tout au long de la thèse pour qualifier les tâches mathématiques qui sont proposées aux apprenties dans les cours au sein de la Fps et qui s'apparentent effectivement à des exercices scolaires, comprenant généralement un bref énoncé et une question, tels qu'on les trouvaient déjà dans la plupart des ouvrages de mathématiques précédant la réforme des mathématiques modernes et qu'on l'en rencontre encore dans les manuels actuels pour permettre aux élèves "d'exercer" (on dit aussi volontiers appliquer) les savoirs appris en cours. C'est d'ailleurs aussi le terme utilisé par Bloch (2010) et par Voisin (2013) pour qualifier les supports utilisés pour enseigner la proportionnalité dans un contexte spécialisé.

¹⁷⁰ C'est ainsi que l'on désigne, dans la formation professionnelle, les examens de fin d'apprentissage, et plus généralement, l'ensemble des évaluations qui participent à l'obtention du diplôme.

déterminations dont ils procèdent, les contextualisations, essentiellement sous la forme d'exercices, dont ils font l'objet et les algorithmisations auxquels ils donnent lieu pour favoriser la résolution des exercices. Dans un second temps, ce seront les productions générées par l'apprentie dans l'interaction - qui se déroule à chaque fois dans le cadre d'un contrat de reprise - qui donneront lieu à des interprétations systématiques.

L'hypothèse qui sous-tend cette deuxième investigation veut que les investissements de savoir qui ont lieu dans ce "système soutien" sont essentiellement le fait de déterminations externes liées à l'enseignement donné dans le "système école professionnelle", que les exercices proposés réfèrent à des tâches professionnelles relatives au métier d'employée en cuisine et que les techniques enseignées en cours contribuent effectivement au traitement adéquat de ces tâches ; du fait que l'apprentie est considérée comme éprouvant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, les productions issues des interactions vont en principe comporter un grand nombre d'erreurs ; ces erreurs marquent l'important décalage qui existe entre l'efficacité affichée des techniques enseignées et l'usage que l'apprentie parvient effectivement à en faire, permettant, de la sorte, de mieux comprendre ce qui participe à leur appropriation et à leur contrôle en vue de la résolution d'une tâche spécifique.

Données récoltées et méthode d'analyse

Les données récoltées qui feront l'objet d'une analyse comprennent les cinq narrations (cf. annexe 2) des séances de soutien qui se sont déroulées avec l'apprentie les mardis 5, 12 et 19 janvier, 2 février et 4 mai de l'année 2010. Une technique de résolution, qui lui avait été enseignée auparavant en cours pour résoudre des exercices multiplicatifs de type quatrième proportionnelle, complète le corpus¹⁷¹.

S'agissant des investissements de savoirs, la méthode d'analyse va tout d'abord consister à identifier les contraintes, internes et externes, qui pèsent sur le "système soutien" et qui en déterminent à la fois le fonctionnement et les contenus. Une analyse conceptuelle de l'ensemble des exercices qui servent de support aux interactions sera établie de façon à en déterminer la complexité cognitive. Une technique de résolution enseignée dans le cadre des cours professionnels fera l'objet d'une analyse sur la base du concept de calcul assisté par un diagramme. S'agissant des interactions de connaissances, et partant à nouveau du fait que celles-ci se déroulent dans un contrat de reprise, un repérage et une interprétation systématique des productions de l'apprentie résolvant les exercices qui lui ont été soumis mettra en évidence les écueils auxquels se heurte l'usage des techniques enseignées en cours ; en contrepartie, l'analyse permettra de déterminer les éléments qui participent à l'appropriation et au contrôle de ces techniques et donc de mieux comprendre leur fonctionnement en situation¹⁷².

Les épreuves de mathématiques soumises aux stagiaires avant et en vue de leur entrée en formation au CFPS du château de Seedorf (chapitre 7)

Eléments contextuels

La troisième investigation a porté sur les résultats des épreuves de mathématiques qui, tout au long de l'année scolaire 2010-2011, ont été soumises aux stagiaires qui envisageaient de

¹⁷¹ Ce choix restrictif relève de deux raisons distinctes. La première tient au fait que je n'ai conservé des séances qui se sont déroulées de septembre à décembre 2009 que de rares notes sporadiques, impropres à l'analyse. Le projet de réaliser une thèse n'était même pas encore à l'état d'ébauche et l'entrée dans ma nouvelle fonction de responsable pédagogique me prenait à peu près tout mon temps. Je n'ai donc conservé de cette période que quelques fiches d'exercices, ainsi qu'un procédé de résolution qui avait été enseigné à l'apprentie pour les résoudre. La seconde raison provient du fait que, de janvier à mai 2010, seules ces cinq séances ont finalement porté sur des mathématiques.

¹⁷² La dynamique propre aux interactions de connaissances ne fera pas encore l'objet d'une analyse spécifique dans cette première investigation.

venir accomplir leur formation professionnelle au CFPS du Château de Seedorf. Cette investigation a été rendue possible par le départ à la retraite de l'enseignant qui était jusqu'ici en charge de la passation des épreuves auprès des stagiaires et dont j'ai pu reprendre la responsabilité, dès le début de ma deuxième année de travail au sein du centre¹⁷³.

Dès lors que j'ai repris la conduite des épreuves auprès des stagiaires, j'ai immédiatement songé à les modifier afin de les actualiser¹⁷⁴ quelque peu. Le problème qui s'est alors posé a été de parvenir à déterminer ce qu'il y avait à changer et comment je pouvais m'y prendre pour le faire. La question était effectivement délicate, du fait que, par manque d'expérience auprès des apprenties qui fréquentaient le CFPS, je ne savais pas très bien quel pouvait être le niveau des stagiaires que j'allais rencontrer. Je présageais seulement devoir rencontrer des niveaux très variables et qu'il s'agissait en conséquence de constituer des épreuves suffisamment larges pour permettre à ces différents niveaux de s'exprimer pour se révéler. En ce qui concerne les mathématiques, je me suis attaché, à l'image des épreuves qui avaient été utilisées jusqu'alors, à créer des items de difficulté variable, allant du "très simple" pour donner la possibilité à une majorité de stagiaires de pouvoir "entrer" dans chaque épreuve, au "plus complexe", afin d'offrir à celles qui en étaient capables l'occasion de manifester la plus grande étendue de leurs savoirs. J'ai par ailleurs cherché à couvrir les domaines, essentiellement numériques, qui figuraient déjà dans les anciennes épreuves, tout en les élargissant à ceux de la géométrie et de la logique. J'ai recouru tantôt à des items plutôt classiques, c'est-à-dire proches de ceux qui figuraient déjà dans les épreuves précédentes et/ou que, d'expérience, je pensais que les stagiaires avaient pu rencontrer en classe durant leur scolarité ; mais également à d'autres, moins courants, que j'avais extraits de certaines recherches en ddm¹⁷⁵ et/ou élaborés par moi-même¹⁷⁶ durant les années où j'étais formateur à la HEPL, et que j'animais un séminaire de recherche consacré au travail de l'erreur en mathématiques dans le contexte de l'Es¹⁷⁷.

C'est donc un nouveau rôle d'*examineur* que j'ai endossé et éprouvé, chaque quinzaine avec de nouvelles stagiaires, tout au long de cette année. La passation effective des épreuves de mathématiques se déroulait sur trois séances, tandis que la quatrième permettait de leur présenter l'ensemble des résultats qu'elles y avaient obtenus et parfois de revenir sur certains items afin d'en discuter avec elles¹⁷⁸. Elle débutait à chaque fois par un bref moment d'échanges vis-à-vis des mathématiques, où, à partir de questions très générales comme : " C'est quoi au fait pour vous les maths ? Qu'est-ce que vous avez fait comme maths à l'école ?", j'essayais de jauger quel effet l'évocation des mathématiques pouvait produire auprès des stagiaires et dans quelle mesure elles les appréciaient ou au contraire les redoutaient. La discussion permettait aussi de distinguer progressivement les six domaines de mathématiques pris en considération durant les épreuves - numération, opérations, problèmes numériques, mesures, géométrie et logique - lesquels étaient tour à tour notés au tableau. Les stagiaires

¹⁷³ L'intérêt pour cette activité était double : elle allait d'une part me permettre d'établir un premier contact avec l'ensemble des apprenties qui constitueraient la prochaine volée entrant en formation ; d'autre part, elle devait me donner l'occasion d'apprécier, au travers des épreuves, les compétences scolaires dont les stagiaires pouvaient faire preuve

¹⁷⁴ On verra au chapitre 5 que la première épreuve de mathématiques notamment datait des années 50, comprenait des items obsolètes et que les niveaux établis correspondaient encore aux normes françaises de l'époque.

¹⁷⁵ On peut donner pour exemple celui de la division $7147 \div 7 =$ qui est extraite de la recherche de Brun & al. (1994).

¹⁷⁶ On peut également donner pour exemple celui de la multiplication $111 \times 111 =$ qui n'implique pas de faire appel à d'autres résultats de la table de multiplication que $1 \times 1 = 1$ et qui favorise de la sorte l'interprétation des erreurs qu'elle génère.

¹⁷⁷ J'ai également sollicité Christian Cange, François Conne et Jacinthe Giroux qui m'ont gentiment fait part de quelques suggestions.

¹⁷⁸ Le bilan était ensuite transmis à la responsable des stages et à la psychologue chargée de l'orientation qui en rendaient compte, parmi les autres documents d'évaluation provenant des différents lieux du centre fréquentés par les stagiaires, lors de l'entretien final qui décidait de leur venue ultérieure au CFPS.

choisissaient ensuite les feuilles d'exercices qui composaient les épreuves dans l'ordre selon lequel elles souhaitent procéder¹⁷⁹.

Durant les épreuves, je répondais à toutes les questions liées à la compréhension des items, questions qu'il m'arrivait même parfois de prévenir, lorsque je m'apercevais qu'une consigne n'avait pas été bien comprise par une stagiaire : au besoin, je relisais la consigne, voire l'illustrais pour en favoriser la compréhension. Les stagiaires disposaient pour toutes les épreuves de stylos de couleur (pas de crayon, ni de gomme, afin de conserver un maximum de traces de leurs essais), d'une équerre et d'une calculatrice (sauf pour le domaine des opérations). De cas en cas, j'intervenais pour poser une question, demander une précision au sujet d'un résultat que je n'étais pas certain de parvenir à interpréter. Parfois, je prenais place à côté d'une stagiaire pour la rassurer ou l'engager à poursuivre quand elle n'avait pas réussi à tout compléter et qu'elle disait ne plus vouloir continuer.

Intentions et hypothèses

Dans cette troisième investigation, on réalise une deuxième incursion dans les investissements de savoirs mathématiques susceptibles d'apparaître dans la Fps et les interactions de connaissances qui en découlent. Investissements et interactions se déroulent à nouveau au sein du département enseignement du CFPS, mais dans le cadre d'un système qui n'est pas didactique, puisqu'il est dépourvu d'intention d'enseigner : les résultats obtenus dans les différentes épreuves participent en effet, pour chaque stagiaire, à l'établissement d'une forme de pronostic, provisoire, du type de formation qu'en tant que future apprentie elle pourrait être en mesure d'accomplir.

L'intention générale de cette troisième investigation ne cherchera pourtant pas à établir de pronostic individualisé. Elle visera plutôt à dresser une forme d'état des lieux des savoirs maîtrisés par une volée¹⁸⁰ d'apprenties à leur entrée en formation. Les investissements de savoirs qui ont lieu dans ce "système d'évaluation" étant de détermination interne et prenant la forme d'épreuves papier-crayons, ce sont les items de chaque épreuve qui feront dans un premier temps l'objet d'une analyse particulière. Dans un second temps, ce seront les réussites d'une part et les erreurs d'autre part, produites par les stagiaires dans l'interaction¹⁸¹, qui donneront lieu à un travail d'interprétation systématique.

L'hypothèse qui sous-tend cette troisième investigation veut que les résultats des épreuves aboutissent à un nombre d'erreurs bien plus important que le nombre de réussites, vu qu'elles s'adressent à des stagiaires considérées comme en difficulté d'apprentissage. Les réussites doivent en principe permettre de délimiter le socle des savoirs maîtrisés par les apprenties à leur entrée au CFPS, tandis que l'interprétation des erreurs permettra, en complément, de caractériser les écueils auxquels viennent se heurter les autres savoirs qu'elles parviennent à mobiliser dans l'interaction

Données récoltées et méthode d'analyse

Durant l'année 2010-2011, cinquante-trois stagiaires, à raison de trois à quatre par quinzaine, ont accompli deux semaines de stage au CFPS. Cinquante et une d'entre elles avaient passé

¹⁷⁹La liberté de choix n'était cependant pas complète, les épreuves comprenant deux ou trois fiches d'exercices, je veillais à ce qu'elles aient touché aux six domaines considérés, avant de passer à la deuxième fiche d'un même domaine.

¹⁸⁰ Le fait qu'il serait possible de collecter un nombre conséquent - plus de cinquante - d'épreuves représentait une aubaine dans un contexte spécialisé où l'on est, dans la plupart des cas, contraint par essence de réaliser des études qui concernent un très petit nombre d'individus.

¹⁸¹ Il est important de relever ici qu'il s'agit exclusivement ici d'interactions cognitives puisque, en dehors des questions de compréhension des items qui sont parfois abordées et des encouragements qui leur sont adressés, les stagiaires se retrouvent seules à devoir assurer la résolution des épreuves. Ce n'est que dans le quatrième moment du stage, quand certains items donnent lieu à des échanges menés par l'enseignant que l'on pourra parler d'interactions de connaissances.

tout ou partie de leur scolarité dans le contexte de l'Es. L'effectuation des épreuves s'est à chaque fois déroulée en classe. Certaines apprenties ont réalisé l'ensemble des fiches d'exercices des épreuves, alors que d'autres n'en n'ont réalisé qu'une partie (par manque de temps ou parce qu'elles ne voulaient plus). Le tableau n°8 donne la répartition, selon les six domaines mathématiques considérés¹⁸², du nombre des fiches d'exercices ayant été complétées par les stagiaires durant l'année.

	Σ des fiches n°1 récoltées	Σ des fiches n°2 récoltées	Σ des fiches n°3 récoltées	Σ des fiches récoltées
Numération	53	33		86
Opérations	52	31		83
Problèmes numériques	53	27		80
Mesures	51	32	11	94
Géométrie	52	33	15	100
Logique	52	30		82
			Total général	525

Tableau n°8 - Répartition des fiches d'exercices en fonction des six domaines mathématiques considérés

L'analyse des données recouvre les quatre domaines numériques¹⁸³ qui composent les épreuves : numération, opérations, problèmes numériques et mesures¹⁸⁴. Dans chaque domaine, les items qui composent les exercices font l'objet d'une analyse préalable qui permet de définir les intentions dont ils relèvent et les enjeux mathématiques dont ils procèdent. Les réponses apportées par les stagiaires à chaque item sont ensuite analysées en deux temps :

- dans un premier temps, une analyse quantitative des réussites établit pour chaque item le nombre de réponses correctes, le nombre d'erreurs et le nombre de non-réponses ; cette analyse permet de délimiter la part des savoirs mathématiques qui sont maîtrisés par les stagiaires, de ceux qui ne le sont que partiellement et ceux qui ne le sont pas ; un nombre important de non-réponses à un item permet en outre d'avancer l'hypothèse que les savoirs mathématiques dont il relève correspondent à un champ notionnel qui n'a été que peu ou pas investi durant la scolarité antérieure des stagiaires¹⁸⁵ ;
- dans un second temps, une analyse qualitative des erreurs s'inscrit en complément à l'analyse quantitative des réussites ; cette analyse cherche, à chaque fois que cela possible, à reconstituer les procédés qui sont à l'origine des erreurs produites, de façon à mettre en évidence les savoirs mathématiques qui les supportent et qui ont été mobilisés par les stagiaires.

¹⁸² Les domaines de la numération, des opérations, des problèmes numériques et de la logique comprenaient deux fiches d'exercices à compléter, alors que les domaines des mesures et de la géométrie en comportaient trois.

¹⁸³ L'exclusion des analyses des épreuves de géométrie et de logique peut sembler paradoxale, alors même que ce sont précisément les deux domaines mathématiques que j'avais ajoutés aux épreuves, lorsque j'ai repris leur conduite auprès des stagiaires. Il faut cependant comprendre que les savoirs considérés dans ces deux domaines n'entraient pas directement en jeu dans les interactions qui font l'objet d'analyses dans les autres chapitres de la thèse. Investiguer plus avant les questions de géométrie et de logique dans le cadre de la Fps supposerait le développement d'une autre étude que la thèse n'accomplira pas.

¹⁸⁴ L'analyse des résultats obtenus dans la troisième fiche de l'épreuve du domaine des mesures ne sera pas non plus proposée, étant donné le peu de stagiaires (n = 11) qui l'ont résolue.

¹⁸⁵ En partant de l'idée que les stagiaires, sachant par avance qu'elles n'en ont pas la maîtrise, renoncent à s'y aventurer.

Les cours de mathématiques donnés à un groupe d'apprenties employées de cuisine AFP dans l'enseignement des branches professionnelles au CFPS du Château de Seedorf (chapitre 8)

Eléments contextuels

La quatrième investigation a porté sur le cours de mathématiques que j'ai donné au CFPS, durant l'année 2011-2012, à un groupe d'apprenties employées de cuisine AFP, dans le cadre de l'enseignement des branches professionnelles. Cette investigation a été rendue possible par le fait que le MSP de cuisine responsable de cet enseignement ait répondu positivement à ma proposition de venir enseigner les mathématiques dans le cadre des cours qu'il avait la responsabilité de donner aux apprenties en seconde année de formation d'employées de cuisine AFP¹⁸⁶. La demande d'enseigner les mathématiques aux apprenties m'avait déjà été faite à mon arrivée au CFPS par les MSP de cuisine eux-mêmes, mais je n'avais alors pas pu y souscrire, au vu d'un emploi du temps bien trop chargé. J'ai donc tenté ma chance deux ans plus tard, en souhaitant inscrire mes interventions dans le cadre d'un dispositif que j'avais déjà longuement expérimenté durant les années que j'avais passées à enseigner les mathématiques dans l'Es (Favre, 2012 ; 2013). Il consistait à intervenir dans une classe, en présence de l'enseignant titulaire, de façon à ce que celui-ci puisse prendre tout à la fois la position d'observateur et d'acteur des mathématiques que je proposais aux élèves, me permettant de ne pas avoir à endosser le rôle de maître de classe, garant du cadre de travail, et conserver celui de simple intervenant externe, pourvoyeur de mathématiques.

Au début du mois de septembre 2011, nous nous sommes donc rencontrés avec le MSP pour définir les grandes lignes de notre collaboration. Dans cet entretien, nous avons tout d'abord déterminé les contenus des cours vis-à-vis desquels j'allais revêtir le rôle d'*enseignant de mathématiques* auprès des apprenties. Nous avons convenu que les cours seraient en priorité destinés à préparer les apprenties à leurs examens de fin d'apprentissage, mais que j'y inclurais également, de cas en cas, le traitement de problèmes effectifs qu'elles rencontrent en cuisine, ainsi qu'un travail sur des savoirs mathématiques à visée non-professionnalisante qui pouvaient néanmoins être en mesure de les intéresser. Nous avons ensuite décidé que mes interventions dans les cours auraient lieu durant tout le premier semestre, à raison d'une heure d'enseignement par quinzaine¹⁸⁷. Enfin, nous avons parlé des apprenties à l'intention desquelles cet enseignement serait donné. Le groupe était composé de sept apprenties, âgées de 18 à 20 ans, qui étaient en seconde (et donc dernière) année de formation d'employée de cuisine AFP. Parmi ces sept apprenties, cinq avaient passé tout ou partie de leur scolarité dans l'Es, alors que deux d'entre elles l'avaient terminée dans un cycle d'orientation ordinaire. Une apprentie du groupe était sourde, ce qui impliquait la présence continue en classe d'une enseignante de soutien, spécialisée en langue des signes, pour traduire les propos échangés dans les cours et proposer un accompagnement individualisé dans l'effectuation des tâches (interprétation des consignes, réponses aux questions, mais aussi, encouragements à faire des essais, prendre part aux échanges, etc.).

Intentions et hypothèses

Dans cette quatrième investigation, on réalise une troisième incursion dans les investissements de savoirs mathématiques susceptibles d'apparaître dans la Fps et les

¹⁸⁶ Actuellement, la chose ne serait plus possible, puisque les apprenties employées de cuisine AFP suivent leurs cours de branches professionnelles et de culture générale à l'EPAI de Fribourg.

¹⁸⁷ Cette détermination de la fréquence et de la durée de mes interventions tenait avant tout compte de mes disponibilités personnelles dans le cadre de ma fonction de responsable pédagogique au CFPS et non pas d'une prévision concertée du temps d'enseignement qu'il serait nécessaire d'accorder aux mathématiques durant ce premier semestre. Le MSP avait en effet tout loisir de compléter ces interventions durant les quatre heures de cours hebdomadaires qui étaient mises à sa disposition pour y enseigner les branches professionnelles (où les mathématiques étaient incluses).

interactions de connaissances qui en découlent. Investissements et interactions se déroulent au sein du département professionnel du CFPS dans le cadre d'un système didactique qui fonctionne habituellement pour enseigner les branches professionnelles aux apprenties et au sein duquel je vais m'immiscer pour y enseigner une part du versant mathématique figurant au programme, tout en cherchant à y adjoindre deux autres types d'objets que sont d'une part les problèmes effectifs qu'elles rencontrent en cuisine et d'autre part certains savoirs mathématiques à visée non-professionnalisante susceptibles de les intéresser.

L'intention générale visera à examiner dans quelle mesure ces trois types d'objets peuvent donner lieu à un investissement et à cohabiter dans le "système cours", puis à rendre compte de leur fonctionnement dans l'interaction. On cherchera ensuite à caractériser leurs contextualisations et à les mettre en lien avec les algorithmisations auxquels ils aboutissent. Les productions générées par les apprenties dans les interactions donneront lieu à des interprétations systématiques. Une attention particulière sera accordée à la dynamique des séances, au travers du développement de l'activité du couple enseignant-enseigné qui s'y déroule.

L'hypothèse qui sous-tend cette quatrième investigation veut que, dans le "système cours", ce sont les savoirs déterminés à l'externe par les examens de fin d'année et ceux, à l'interne, correspondant aux problèmes rencontrés en cuisine qui seront en priorité matière à un investissement tangible ; on peut également penser que les exercices d'examen ne recoupent pas entièrement les problèmes rencontrés en cuisine (et réciproquement) et qu'à chacun d'entre eux correspondra une ou plusieurs techniques spécifiques à sa résolution ; du fait que les apprenties sont considérées comme éprouvant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, les productions issues des interactions devront en principe comporter un grand nombre d'erreurs ; ces erreurs marqueront une nouvelle fois le décalage existant entre l'efficacité affichée des techniques enseignées et l'usage que les apprenties parviendront à en faire, les interprétations qui en proviendront aidant encore un peu mieux à comprendre ce qui participe à leur appropriation et à leur contrôle dans la résolution des tâches proposées¹⁸⁸ ; on peut aussi prévoir que ces erreurs auront des répercussions notables sur la dynamique des interactions, générant tour à tour des pertes et des prises de contrôles de la part des apprenties et de l'enseignant qui y participent.

Données récoltées et méthode d'analyse

De septembre à décembre de l'année 2011, sept séances de cours se sont déroulées dans les conditions prévues, c'est-à-dire à quinzaine, le jeudi, de 10h00 à 11h00, dans la salle de cours du MSP. De janvier à février 2012, trois séances ont été ajoutées durant les semaines intercalaires pour offrir un appui à certaines apprenties et soumettre à d'autres des épreuves d'évaluations de rattrapage, ce qui a donné lieu en tout à six nouvelles séances. La préparation aux examens finaux n'ayant pu être entièrement réalisée durant le premier semestre, dix nouvelles séances, dont deux d'appui juste avant les examens, ont finalement été mises sur pied durant le second, ce qui donne un total de vingt-trois séances de cours pour l'ensemble de l'année 2011-2012. Toutes les séances qui ont eu lieu durant premier semestre (à l'exception de la dernière) ont fait l'objet d'une narration qui comprend à chaque fois l'ensemble des productions réalisées par les apprenties durant la séance (cf. annexe 3), soit un total de douze narrations. Les productions relatives aux dix séances du second semestre ont également toutes été collectées, mais elles n'ont donné lieu qu'à des notes plus éparpillées, relatant certains événements marquants qui y sont apparus.

¹⁸⁸ Du fait que passablement d'exercices soient proches de ceux soumis à Ca dans le chapitre 6, les similitudes ou les écarts entre erreurs ou entre interprétations de certaines erreurs émanant des deux investigations sont ainsi susceptibles de venir confirmer, préciser ou au contraire invalider les résultats des analyses qui en découlent.

L'analyse des données a porté dans un premier temps sur les investissements de savoirs qui ont eu lieu durant les séances de cours. Les narrations des treize séances du premier semestre ont d'abord fait l'objet d'un découpage systématique, distinguant la succession des activités¹⁸⁹ qui étaient tour à tour proposées aux apprenties. Ces activités ont ensuite été classées selon qu'elles relevaient de la préparation aux examens de fin d'année, de la résolution de problèmes rencontrés en cuisine ou du travail de notions mathématiques qui n'étaient pas directement en lien avec la réalité professionnelle des apprenties. Il s'agissait d'appréhender ce qui rendait possible ou au contraire contrecarrait l'investissement de telle ou telle activité en suivant la succession temporelle des cours. Les exercices soumis durant les deux semestres aux apprenties en vue de la préparation de leurs examens, de même que les problèmes rencontrés en cuisine qui ont pu être rapportés en cours dans le premier semestre, ont ensuite fait l'objet d'une analyse systématique, de manière à faire état de leur complexité cognitive respective et de déterminer les similitudes et les différences qu'ils nourrissaient les uns vis-à-vis des autres. Ils ont, à chaque fois que cela a été possible, été mis en rapport avec les techniques enseignées aux apprenties pour les résoudre qui ont, elles aussi, donné lieu à une analyse permettant d'en déterminer le fonctionnement.

Dans un second temps, l'analyse des données s'est intéressée aux interactions de connaissances qui se sont pour leur majorité déroulées dans le cadre d'un contrat de reprise. Un repérage et une interprétation systématique des productions des apprenties - issues des séances de cours des deux semestres - résolvant les exercices ont à nouveau été effectués, de façon à identifier les écueils auxquels se heurte l'usage des techniques enseignées en cours ; il s'agissait également, en contrepartie, de déterminer les éléments qui participent à l'appropriation et au contrôle de ces techniques et donc de poursuivre, en l'affinant, la compréhension de leur fonctionnement en situation. Deux narrations de séances ont donné lieu à une analyse en termes de pertes et de prises de contrôles, de façon à rendre compte du développement de l'activité du couple enseignant-enseigné et d'en examiner la dynamique.

Le soutien apporté à une apprentie praticienne en intendance, à sa demande, pour faire des progrès en mathématiques (chapitre 9)

Eléments contextuels

La cinquième investigation a porté sur un second soutien individualisé que j'ai apporté, durant l'année 2012-2013, à une apprentie en première année de formation de praticienne en intendance. Cette investigation a été rendue possible par le fait que cette apprentie m'a approché par elle-même pour me demander de lui donner, individuellement, des cours de mathématiques. Au terme de la première année qu'elle avait passée au CFPS, elle avait en effet dû se résoudre à signer un contrat de formation pratique, mais ne l'avait jamais vraiment accepté, s'estimant capable de suivre, à l'image de plusieurs de ses collègues, une formation de type AFP. Elle avait dès lors pris plusieurs initiatives destinées à faire état, au personnel du centre et à l'AI, de compétences qui n'avaient pu lui être reconnues. Suivre des cours de mathématiques avec le responsable pédagogique qui était désormais connu à l'interne pour son intérêt à l'égard de cette matière s'inscrivait dans ce désir de reconnaissance. Elle relevait toutefois d'un certain paradoxe, vu que la formation d'employée en intendance AFP à laquelle elle aspirait, ne comportait pas de compétences en mathématiques spécifiques distinguées dans le programme. La demande qu'elle formulait n'était donc pas liée directement à des savoirs du programme qu'elle souhaitait acquérir, mais bien plutôt à faire en sorte que ceux qu'elle serait en mesure d'acquérir puissent contribuer à mettre en évidence ce dont elle était capable.

¹⁸⁹ Le terme "activité" est à prendre ici dans son acception commune. Il est préféré à celui de "tâche" au sens où une activité est susceptible de recouvrir plusieurs tâches distinctes.

Nous nous sommes donc entendus pour nous rencontrer, à raison d'une heure hebdomadaire, sur le temps de congé¹⁹⁰ qui lui était régulièrement octroyé dans le secteur de l'intendance où elle accomplissait sa formation, en compensation du service de repas qu'elle accomplissait sur la pause de midi. C'est donc une nouvelle fois du rôle *d'enseignant de soutien* en mathématiques que je me suis retrouvé assigné, dans des conditions toutefois très différentes de celles qui avaient prévalu lors des séances de soutien effectuées durant ma première année de travail au CFPS (cf. la deuxième investigation) puisqu'aucun programme, ni examen ne définissait ce qui allait devenir les objets de nos rencontres. L'apprentie m'ayant laissé le choix des savoirs à lui enseigner - sa seule exigence, montrant combien elle prenait les choses très au sérieux, étant que je lui donne des exercices comme devoirs pour qu'elle puisse s'entraîner - c'est au thème des fractions qu'ont été consacrées nos premières rencontres : réputé pour être un objet difficile, il me paraissait en effet bien adapté au désir de reconnaissance auquel aspirait l'apprentie. Ce travail autour des fractions n'a toutefois pas duré longtemps, puisqu'au moment où elle a estimé qu'elle en avait assez appris - elle m'a dit avoir compris la signification des signes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ qui figuraient sur le récipient qu'elle utilisait pour effectuer des dosages dans son secteur professionnel, elle a souhaité passer à autre chose. C'est alors qu'elle m'a demandé de travailler sur les "transformations de recettes", parce qu'elle ne savait pas toujours comment s'y prendre pour adapter les quantités qui étaient inscrites dans son livre de cuisine lorsqu'elle devait préparer un repas. C'est donc sur demande de l'apprentie que je me suis trouvé à devoir reprendre une part de l'enseignement qui avait déjà été initié dans le cadre du soutien précédent (cf. chapitre 6) et poursuivi avec le groupe d'apprenties employées de cuisine AFP (cf. chapitre 8).

Intentions et hypothèses

Dans cette cinquième investigation, on réalise une quatrième et dernière incursion dans les investissements de savoirs mathématiques susceptibles d'apparaître dans la Fps et les interactions de connaissances qui en découlent. Investissements et interactions se déroulent au sein du département enseignement du CFPS dans le cadre d'un système didactique qui a été spécifiquement créé pour offrir un soutien hebdomadaire à une apprentie praticienne en intendance dont la formation se déroule entièrement à l'interne du centre.

L'intention générale sera de proposer à l'apprentie au fil des séances, les trois techniques de résolution d'un exercice de proportionnalité que sont : la règle de trois, l'usage direct du rapport interne (à partir d'un tableau de proportionnalité) et le produit en croix afin de rendre compte de leur fonctionnement respectif dans l'interaction et de déterminer, au travers des productions récoltées, si l'un des trois s'avère mieux propice que les autres à son appropriation par l'apprentie. Il s'agira également d'appréhender la dynamique des séances, au travers du développement de l'activité du couple enseignant-enseigné qui s'y déroule.

L'hypothèse qui sous-tend cette dernière investigation veut que les techniques qui seront l'objet de l'enseignement génèrent à nouveau de nombreuses erreurs de la part d'une apprentie se trouvant dans une formation de niveau inférieur - la formation pratique - à celles auxquelles ces savoirs ont été proposés lors des investigations précédentes. Les erreurs récoltées permettront de poursuivre, et de valider sur certains aspects, la compréhension de ce qui participe à l'appropriation et au contrôle d'une technique en vue de la résolution d'une tâche spécifique. Les incidences de l'apparition des erreurs sur la dynamique des séances seront tout aussi manifestes que dans les investigations précédentes, mais les réponses qui leur seront apportées seront plus aisées à accomplir du fait des contraintes moins lourdes - une seule apprentie, pas d'évaluations notées, pas d'examens finaux - qui pèsent sur le système.

¹⁹⁰ Dès lors que le soutien demandé ne faisait pas partie intégrante de son contrat de formation, il était nécessaire que celui-ci se déroule hors du temps de travail de l'apprentie, ce qui ne l'a aucunement conduit à y renoncer.

Données récoltées et méthode d'analyse

Les données récoltées qui feront l'objet d'une analyse comprennent les narrations des dix séances de soutien (cf. annexe¹⁹¹ 4) d'une durée d'une heure qui se sont déroulées avec l'apprentie durant l'année 2012-2013 et l'ensemble des fiches de devoirs qu'elle a produites¹⁹² et complétées. Ces séances¹⁹³ se sont déroulées les mercredis 5 et 12 décembre 2012, 16 et 23 janvier, 6 février, 27 mars, 10, 17 et 24 avril et 1er mai 2013. L'analyse des investissements de savoirs et des interactions de connaissances procéderont de la même méthode que dans l'investigation précédente.

Limites relatives à la configuration du dispositif expérimental

Pour conclure cette première partie de la thèse, on relèvera encore que les cinq investigations qui en forment la partie expérimentale déterminent conjointement les possibilités et les limites de l'étude des mathématiques et de leur fonctionnement dans la Fps qu'il me sera donné d'y réaliser. En partant du fait qu'il n'était pas envisageable de penser dans sa totalité un système de formation aussi complexe que le CFPS du Château de Seedorf, il faut comprendre ces investigations comme autant d'actions partielles que j'ai pu y porter, en y endossant des rôles auxquels ma fonction de responsable pédagogique du centre me donnait accès et en tenant compte des précautions auxquelles elle m'astreignait.

Voulant profiter de ce que cette fonction rendait possible, je n'ai aucun moment cherché à m'y soustraire, ce qui fait que j'ai sciemment accepté de me laisser enrôler dans l'entrelacs de contraintes (Favre, 2003) relatives à chacun des systèmes dans lesquels j'ai tour à tour été amené à évoluer. Il ne s'agissait pas de lever ces contraintes, mais bien plutôt de s'y mouvoir et, quand cela était possible, d'y exercer un certain jeu, lequel était à la fois révélateur de leur emprise, mais également des ouvertures que l'on pouvait y entrevoir.

Fort de la connaissance du système, de son fonctionnement et de ses acteurs, que j'ai progressivement développée au fil des années passées au CFPS, il est bien clair que d'autres investigations auraient tout aussi bien pu être menées. Les conclusions de la thèse en évoqueront d'ailleurs quelques-unes. Mais l'originalité et l'intérêt de celles qui ont finalement été conduites résident précisément dans ce qui constitue leur essence, c'est-à-dire d'avoir été accomplies sur le vif.

¹⁹¹ L'annexe 4 ne comprend que la narration de la séance du 12.12.12, du fait que le chapitre 9 procède d'une forme exclusivement narrative reprenant l'ensemble de ce qui est advenu lors des neuf autres séances.

¹⁹² L'apprentie s'étant créée, de son propre chef, des fiches de devoirs entre les séances.

¹⁹³ Les interruptions entre les séances de décembre 2012 et janvier 2013, de même qu'entre celles de janvier 2013 et mars 2013 sont le fait des vacances, de périodes de stage hors du centre ou d'absences de l'apprentie. Les séances se sont arrêtées en mai en raison d'un nouveau stage à l'externe du CFPS.

2^{ÈME} PARTIE

**RESTITUER, À L'EXTERNE,
LES MATHÉMATIQUES ET LEUR FONCTIONNEMENT
DANS LA FORMATION PROFESSIONNELLE SPÉCIALISÉE**

CHAPITRE 5 LES SAVOIRS MATHÉMATIQUES EN JEU DURANT LA FORMATION DES APPRENTIES AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF

INTRODUCTION

Le chapitre est entièrement consacré au niveau de l'institution. Il prend pour principal objet d'analyse les documents qui servent de cadre à la formation des apprenties au CFPS du Château de Seedorf, afin de rendre compte des mathématiques que l'on y trouve. La première partie du chapitre emprunte le déroulement temporel de la *formation globale* (cf. chapitre 1) dispensée aux apprenties au CFPS, en vue de caractériser les mathématiques en jeu dans le *département enseignement* du centre. La seconde partie procède de la même manière, mais dans le cadre du *département professionnel*. Une synthèse des analyses est proposée en fin de chapitre.

LES MATHÉMATIQUES DANS LE DÉPARTEMENT ENSEIGNEMENT DU CFPS

Les savoir mathématiques en jeu durant le stage préalable à l'entrée en formation

Description.

Dans le département enseignement, des savoirs mathématiques sont déjà bien présents lors du stage préalable que les futures apprenties accomplissent avant leur entrée au CFPS¹⁹⁴. Durant les deux semaines que dure le stage, elles passent en effet huit heures en classe (deux fois deux heures par semaine) pour accomplir diverses épreuves de français (lecture et écriture), d'informatique et de mathématiques. Les résultats obtenus lors de ces épreuves n'interviennent toutefois pas pour décider de l'éventuelle entrée des stagiaires au CFPS, car ce sont avant tout les appréciations des maîtres socioprofessionnels (au vu des compétences manifestées à apprendre le métier proposé) et celles des éducateurs (au vu des compétences manifestées à vivre en internat) qui sont prises en considération.

A l'origine, la fonction prioritaire de ces épreuves scolaires était d'apporter à la direction¹⁹⁵ du CFPS une contribution à la comparaison, année après année, du niveau général de l'ensemble des apprenties qui y entraient. Il s'agissait de se prémunir d'éventuelles critiques des offices AI vis-à-vis du niveau de formation atteint par les apprenties au terme de leur formation (au cas où ce dernier viendrait compromettre l'insertion en entreprise), montrant que celui-ci ne dépendait pas seulement du travail accompli par les acteurs du CFPS durant la formation, mais également du niveau des apprenties à leur entrée. La seconde fonction des résultats issus des épreuves scolaires était de permettre à la psychologue chargée de l'orientation au CFPS, de se faire une première idée du type de formation (AFPra, AFP ou CFC) qui pourrait être ultérieurement suivie par les stagiaires. Cette seconde fonction, actuellement toujours en cours, introduisait le processus d'orientation se déroulant durant la première année de formation au CFPS.

¹⁹⁴ Rappelons que le stage préalable se déroule en principe durant l'année qui précède l'entrée des apprenties au CFPS. Il est conçu pour permettre aux stagiaires de découvrir les différents secteurs professionnels et se faire une idée concrète des métiers qu'il est possible d'y entreprendre, de faire l'expérience de la vie en internat, d'apprécier les diverses facettes du travail éducatif proposé, de visiter les classes, etc. Pour les différents professionnels du centre, il s'agit en contrepartie de se prononcer sur la pertinence de la venue des stagiaires au CFPS ou, autrement dit, de déterminer si et en quoi le CFPS constitue bel et bien un lieu de formation adapté à leurs capacités. A cet effet, des instruments d'évaluation des compétences personnelles, professionnelles et sociales des stagiaires sont employés ; des entretiens avec la responsable des stages sont organisés ; des tests psychologiques sont également utilisés par une psychologue spécialisée dans le domaine de l'orientation. Le tout aboutit à une décision argumentée qui est communiquée aux stagiaires et à leurs répondants légaux au cours d'une séance de bilan qui ponctue le stage.

¹⁹⁵ Le changement de direction à la tête du CFPS en 2008 a considérablement atténué cette fonction, ce qui, on le verra plus en détails au chapitre 7, a permis de modifier sensiblement le contenu des épreuves.

A mon arrivée au CFPS en 2009, les épreuves de stage en mathématiques se composaient de deux tests : un premier test était destiné à évaluer le niveau scolaire des stagiaires et un second test était chargé d'apprécier la maîtrise des savoirs qui leur avaient été préalablement enseignés à l'école. Le test de niveau scolaire était un test datant des années cinquante¹⁹⁶, créé par deux psychologues français (Subes & Subes, 1954, 1965), tandis que le test de maîtrise des savoirs avait été élaboré à l'interne du CFPS.

Le premier test était composé de trente-sept items répartis en cinq niveaux. Les quatre premiers niveaux correspondaient à des niveaux scolaires français¹⁹⁷, alors que le cinquième, désigné par les lettres FE, équivalait visiblement à celui qui était attendu en formation élémentaire. Le test comprenait essentiellement des tâches de numération, de résolution de problèmes additifs et multiplicatifs, des opérations à effectuer en colonnes, des calculs d'aires et de volumes et quelques rares éléments de géométrie (tracer des lignes, tracer un angle, reconnaître des formes). Le passage d'un niveau à l'autre se faisait essentiellement par l'accroissement de la grandeur des nombres et leur diversification (décimaux, fractions) ainsi que par l'apparition de quelques notions plus complexes comme le calcul de pourcentages au niveau 5.

Le second test était également composé de trente-sept items. Il n'était pas structuré par niveaux, mais distinguait dix domaines¹⁹⁸, à savoir : la lecture de nombres, les quatre opérations, le calcul mental, la numération, les proportions, les fractions ordinaires, les mesures, l'argent, le temps et les graphiques. Neuf items figuraient déjà dans le premier test, mais ils s'y déclinaient sur des valeurs numériques différentes, alors que les vingt-huit autres tendaient à élargir des domaines qui, pour la plupart, figuraient déjà dans le premier test. Ainsi les items de numération étaient complétés par la lecture et l'ordonnance des nombres ; le calcul mental était associé au calcul écrit ; les mesures s'ouvraient sur d'autres grandeurs. En revanche, aucun item de géométrie n'avait été repris et seul le domaine des graphiques (interpréter la signification d'une courbe et d'un histogramme) faisait office de nouveauté.

Analyse.

Au cours du stage préalable, les déterminations dont procèdent les savoirs mathématiques en jeu sont exclusivement internes au CFPS. Elles sont liées à la gestion (par la direction) du CFPS d'une part et à l'orientation des apprenties d'autre part. Ces savoirs ne relèvent pas d'un enjeu didactique (en termes d'intention d'enseigner), mais d'un enjeu simplement évaluatif, destiné à apprécier le niveau de maîtrise des stagiaires. Les savoirs mathématiques figurant dans les deux tests proposés aux apprenties avant leur entrée en formation sont désignés sous la forme d'une suite de tâches distinctes à accomplir ; les techniques qui permettent de le faire ne sont pas définies, ce qui se comprend par le fait qu'il s'agit uniquement de pouvoir juger de la réussite ou de l'échec des apprenties aux items et non pas de leur enseigner des techniques pour

¹⁹⁶ Le fait que l'on ait recours à un test aussi ancien pour apprécier le niveau scolaire des stagiaires a bien sûr de quoi surprendre, quand on sait que l'école a passablement évolué durant ces soixante(!) dernières années et que les contenus enseignés en France ne sont pas forcément les mêmes que ceux enseignés en Suisse dans chaque niveau scolaire. Deux hypothèses peuvent contribuer à en expliquer les raisons. La première veut que l'usage d'un test standardisé pour déterminer le niveau scolaire des stagiaires lui octroie une "scientificité" qui légitime son usage, surtout quand l'interlocuteur, l'AI en l'occurrence, est précisément une instance où l'on a recours à des tests standardisés pour apprécier le niveau des apprenties. La seconde veut qu'une fois le test introduit, il n'est plus vraiment possible d'en changer si l'on veut être en mesure d'établir, année après année, des comparaisons des niveaux respectifs des volées d'apprenties qui entrent au CFPS. Il n'en reste pas moins que l'usage répété d'un test aussi ancien peut produire des "effets secondaires" tout à fait étonnants, comme le maintien en son sein de l'objet "preuve par neuf" qui, de nos jours, a entièrement disparu des programmes des écoles, ce qui fait que les volées de stagiaires successives qui l'ont rencontré à leur entrée au CFPS, ont assurément dû se retrouver bien empruntées pour la faire fonctionner.

¹⁹⁷ Il s'agissait des niveaux CE1 et CE2 qui signifient : « cours élémentaires 1 et 2 », lesquels correspondent aux actuelles 4^{ème} et 5^{ème} années Harmos en Suisse Romande et des niveaux CM1 et CM2 qui signifient : « cours moyens 1 et 2 » lesquels correspondent aux actuelles 6^{ème} et 7^{ème} années Harmos en Suisse Romande.

¹⁹⁸ Les domaines sont donc définis de manière assez singulière, puisque la lecture des nombres n'intègre pas le domaine de la numération, ni l'argent ou le temps celui des mesures.

les résoudre. On observe également que la majorité des savoirs considérés relèvent du champ numérique : nombres (naturels, décimaux, fractions), opérations et mesures, une tendance qui fait écho au phénomène de *surinvestissement du numérique et du calcul* que Conne (2003) a identifié dans les pratiques d'enseignement des mathématiques dans l'Es.

Les savoirs mathématiques en jeu durant la 1^{ère} année de formation

Description.

Durant la première année¹⁹⁹ de formation au CFPS, année d'orientation et d'initiation au travail conduisant à la signature du contrat d'apprentissage, les cours de culture générale sont essentiellement organisés autour de six grands thèmes que sont : le français, les mathématiques, l'informatique, les activités artistiques, les thèmes d'actualité et les projets (personnels ou de classe).

En 2009, les savoirs mathématiques qui faisaient l'objet d'un enseignement spécifique durant cette première année étaient consignés dans un rapport (cf. figure n°4) qui, à son terme, définissait, pour chaque apprentie, son niveau de maîtrise en culture générale et participait à la détermination définitive - avant la signature du contrat - du type de formation qu'elle allait pouvoir suivre. Ce rapport comprenait quarante items relevant pour l'essentiel - comme précédemment dans les épreuves de stage - des champs du français, de l'informatique et des mathématiques. Durant l'année, chaque item faisait l'objet d'un enseignement et d'une évaluation spécifiques qui permettaient aux enseignants et aux apprenties d'en apprécier la maîtrise²⁰⁰.

Les quarante items du rapport sont répartis en deux ensembles distincts. Le premier ensemble est intitulé "lecture, écriture, calcul" et le second, "application". La distinction porte sur le fait d'envisager d'un côté des savoirs de type "scolaire", c'est-à-dire intrinsèquement lié à l'institution "école", et de l'autre côté des savoirs qu'il est possible d'"appliquer", c'est-à-dire d'utiliser au quotidien, que celui-ci soit d'ordre privé ou professionnel²⁰¹. Sur les quarante items, on en compte vingt-quatre qui ont spécifiquement trait aux mathématiques. Dans le premier ensemble, ce sont : « comprendre tableaux, coordonnées, graphiques / lire et écrire en chiffres les nombres jusqu'à 1000 / compter dans l'ordre croissant et décroissant jusqu'à 1000 / additionner les nombres entiers et décimaux jusqu'à 1000 / soustraire les nombres entiers et décimaux jusqu'à 1000 / multiplier les nombres entiers et décimaux / diviser les nombres entiers et décimaux / calculer des proportions²⁰² / résoudre des problèmes simples / résoudre des problèmes complexes ». Alors que dans le second, on trouve : « compter pièces et billets jusqu'à Fr. 100.- / payer au plus près jusqu'à Fr. 100.- / rendre la monnaie jusqu'à Fr. 100.- / utiliser des instruments pour mesurer des longueurs / utiliser des instruments pour mesurer des masses / utiliser des instruments pour mesurer des capacités / connaître le vocabulaire de base pour le

¹⁹⁹ Cette première année de formation provoque une double rupture pour la majorité des apprenties. La première rupture est occasionnée par le passage d'un contexte familial à un contexte d'internat et la seconde par le passage d'un contexte essentiellement scolaire à un contexte professionnel. Ces deux ruptures seront prétexte à de nombreux changements dans la vie des apprenties, les conduisant, cinq jours par semaine, à appréhender de nouveaux lieux, côtoyer de nouvelles personnes, respecter de nouvelles règles et effectuer de nouvelles tâches, tant éducatives que professionnelles. Du point de vue de l'enseignement, la seconde rupture va se concrétiser par une réduction drastique du temps d'enseignement : quatre heures de culture générale et deux heures de branches professionnelles hebdomadaires en tout et pour tout.

²⁰⁰ Si la réalisation de chaque épreuve d'évaluation successive signifiait l'arrêt concomitant de l'enseignement qui lui était lié, il était cependant après coup possible pour les apprenties qui en faisaient la demande, à la suite d'un entraînement spécifique qu'elles avaient réalisé en dehors de la classe ou sans entraînement du tout, de refaire une épreuve et rendre ainsi compte d'une éventuelle progression.

²⁰¹ La distinction présente toutefois plusieurs ambiguïtés, sachant, par exemple, que la lecture de textes simples ou complexes, de même que l'interprétation de graphiques peut faire le lot du quotidien ; alors même qu'en sens inverse, la tenue d'un compte courant ou la lecture d'un horaire n'en fera pas forcément partie.

²⁰² Le calcul de proportions correspondait au calcul avec des fractions simples, de type moitié, triple, quart (et de leurs inverses, double, triple, quadruple) et des pourcentages (prendre le m % de n, par exemple).

temps / connaître les divisions du calendrier / classer des dates / lire l'heure / calculer des intervalles de temps / lire les horaires de type "arrivée/départ" / lire les horaires de type "intervalles" / tenir la comptabilité d'un compte courant ».

N°	ITEMS D'ENSEIGNEMENT DE CULTURE GENERALE	A1				✓
		TEST				
		1°	2°	3°	4°	
I	1 LECTURE					
	1.1 Comprendre les pictogrammes	3				3
	1.2 Classer par ordre alphabétique	3				3
	1.3 Rechercher selon l'ordre alphabétique	3				3
	1.4 Lire et comprendre des textes simples	3				3
	1.5 Lire et comprendre des textes complexes	1	1			1
	1.6 Comprendre tableaux, coordonnées, graphiques	3				3
	2 ECRITURE					
	2.1 Ecrire en caractères d'imprimerie	2				2
	2.2 Orthographier des phrases simples	2				2
	2.3 Orthographier des phrases complexes	2				2
	3 CALCUL					
	3.1 Lire et écrire en chiffres les nombres jusqu'à 1000	3				3
	3.2 Compter dans l'ordre croissant et décroissant jusqu'à 1000	3				3
	3.3 Additionner les nombres entiers et décimaux jusqu'à 1000	3				3
	3.4 Soustraire les nombres entiers et décimaux jusqu'à 1000	3				3
	3.5 Multiplier les nombres entiers et décimaux	3				3
	3.6 Diviser les nombres entiers et décimaux	1				1
	3.7 Calculer des proportions	3				3
	3.8 Résoudre des problèmes simples	3				3
	3.9 Résoudre des problèmes complexes	2				2
II	1 ARGENT					
	1.1 Compter pièces et billets jusqu'à Fr. 100.-	2				2
	1.2 Payor au plus près jusqu'à Fr. 100.-	3				3
	1.3 Rendre la monnaie jusqu'à Fr. 100.-	3				3
	2 LONGUEURS-MASSSES-CAPACITES					
	2.1 Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs	2				2
	2.2 Utiliser des instruments pour mesurer des masses	2				2
	2.3 Utiliser des instruments pour mesurer des capacités	2				2
	3 TEMPS					
	3.1 Connaître le vocabulaire de base pour le temps	2				2
	3.2 Connaître les divisions du calendrier	1				1
	3.3 Classer des dates	3				3
	3.4 Lire l'heure	3				3
	3.5 Calculer des intervalles de temps	2				2
	4 DEPLACEMENTS					
	4.1 Connaître les principaux signaux de la circulation	2				2
	4.2 Lire les horaires de type 'arrivée/départ'	2				2
	4.3 Lire les horaires de type 'intervalle'	3				3
	5 ADMINISTRATION					
	5.1 Préparer une enveloppe avec adresses	2				2
	5.2 Remplir des papiers administratifs	1				1
	5.3 Compléter un bulletin de versement pour la Suisse	0				0
	5.4 Effectuer des virements d'un CP à un autre	1				1
	5.5 Tenir la comptabilité d'un compte courant	3				3
	6 INFORMATIQUE					
	6.1 Utiliser un traitement de texte (bases)	2				2
	6.2 Utiliser un tableur (bases)	1				1
	6.3 Utiliser Internet (bases)	3				3

Légende : 3 = acquit 2 = acquis partiellement 1 = acquis très partiellement 0 = non acquis -1 = bon non évalué Résumé statistique en base suivante

Légende : 3 = acquis 2 = acquis partiellement 1 = acquis très partiellement 0 = non acquis -1 = non non évalué Résumés statistiques en page suivante

Figure n°4 - Rapport de culture générale de fin de première année de formation au CFPS datant de 2009

Analyse.

Comme auparavant dans les épreuves de stage, les savoirs mathématiques en jeu sont désignés sous la forme d'une suite de tâches distinctes à accomplir. Alors même qu'ils font cette fois-ci l'objet d'un enjeu didactique explicite, les techniques qui permettent de le faire ne sont pas non plus précisées²⁰³. Dispensé dans des cours spécifiques et évalué à son terme, l'enseignement²⁰⁴ qui en résulte est de type didactique organisé.

²⁰³ Cette désignation des savoirs en terme tâches laisse déjà apparaître un fait qui sera détaillé plus avant, à savoir que les tâches considérées sont d'une complexité cognitive excessivement variable : il suffit, dans le cas présent, de comparer par exemple la lecture des nombres entiers jusqu'à 1000 à la tenue d'un compte courant.

²⁰⁴ La réduction drastique du temps d'enseignement agit évidemment comme une contrainte forte avec laquelle il était nécessaire de composer pour déployer l'enseignement.

Les déterminations dont ces savoirs mathématiques procèdent sont à nouveau internes au CFPS. Ces savoirs sont cette fois-ci exclusivement numériques. Leur répartition en deux ensembles - "savoirs scolaires" d'une part, "savoirs d'application" d'autre part, résulte de la perspective de formation globale qui a cours dans le centre : il s'agit non seulement de "savoir" des mathématiques, mais également de savoir les utiliser à des fins professionnelle et/ou sociale. Savoir compter des pièces et des billets, rendre de la monnaie, utiliser des instruments de mesure de longueurs, de poids ou de capacités sont susceptibles²⁰⁵ de faire l'objet d'applications régulières, aussi bien dans le secteur professionnel où travaille chaque apprentie, que dans leur vie quotidienne. Il en va de même des items liés au temps ou à la lecture d'un horaire²⁰⁶.

En outre, si l'on compare les items du rapport établi au terme de la première année de formation (et qui en constitue le programme) à ceux figurant dans les épreuves de stage, on observe que, dans le premier ensemble, les neuf premiers items correspondent à des tâches se trouvant déjà dans au moins l'un des deux tests proposés aux stagiaires et que, dans le second ensemble, tout ce qui a trait aux mesures (argent, longueurs, poids, capacités et temps) le sont aussi. Les seules "nouveauautés" concernent les problèmes complexes (dont l'un est de type complexe mixte avec $n < 100$), la lecture des horaires et la tenue d'un compte courant. L'essentiel du programme de cette première année de formation peut donc être considéré comme une revue des items figurant dans les épreuves de stage. Cela signifie que les résultats qui ont été établis à cette première occasion n'ont pas permis de constituer un *savoir didactique* (Chevallard, 1988b), à partir duquel il aurait été possible d'ancrer l'enseignement de nouveaux savoirs²⁰⁷.

Les savoirs mathématiques en jeu durant les 2^{ème} et 3^{ème} années²⁰⁸ de formation

Les savoirs mathématiques dans les plans de formation de culture générale actuels

Description.

A partir de la deuxième année au CFPS, quel que soit le type de formation suivi (AFPra, AFP ou CFC), les apprenties entrent dans leur apprentissage proprement dit. Dès cet instant, l'enseignement de la culture générale réfère à un plan de formation externe intitulé : « Plan d'études des écoles cantonales pour l'enseignement de la culture générale » du canton de Fribourg (PEEC eCG Fribourg, version du 21 juillet 2008). Ce plan de formation a été élaboré par une commission dont les membres ont été désignés par le Service de la Formation Professionnelle (SFP) du canton de Fribourg et selon les directives figurant dans le « plan d'études cadre pour l'enseignement de la culture générale » (PEC CG, version du 27 avril 2006), qui a été établi au niveau fédéral par l'OFFT²⁰⁹. Il définit les contenus de culture générale devant être enseignés aux apprenties en formation CFC, et précise, parmi ceux-ci, les contenus qui s'adressent spécifiquement aux apprenties en formation AFP.

Le PEEC eCG Fribourg est établi sur la base de onze thèmes de réflexion qui, selon ses auteurs, « se rapportent à la réalité personnelle, professionnelle et sociale des personnes en formation » (PEEC eCG, 2008, p.16). Ces onze thèmes de réflexion sont les suivants : « De l'école à l'apprentissage - Consommateur - Temps libre ? - Vivre ensemble - Ouverture sur le monde - Enfin 18 ans ! - Mobilité - Santé - Regard sur les arts - Approche de la vie économique - Entrer

²⁰⁵ Il convient toutefois de faire ici la part entre ce qui est un usage possible et ce qui, dans la réalité, est un usage effectif.

²⁰⁶ Le travail de ces deux tâches particulières, dont la maîtrise est utile aux apprenties pour arriver et partir du CFPS en transport public, est relayé sous d'autres formes par les éducateurs.

²⁰⁷ La question visant à déterminer dans quelle mesure il est possible de faire jouer à ces résultats le rôle de *savoir didactique* pour y ancrer l'enseignement donné au CFPS sera débattue plus avant au chapitre 7.

²⁰⁸ Le cas des formations de type CFC, qui durent une année supplémentaire, n'est pas considéré du fait que les cours donnés aux apprenties qui suivent ce type de formation n'ont jamais eu lieu à l'interne du CFPS.

²⁰⁹ Dès le 1^{er} juillet 2013, l'OFFT a fusionné avec le Secrétariat d'état à l'éducation et à la recherche (SER) pour donner naissance à un nouveau Secrétariat d'état à la formation, à la recherche et à l'innovation (SEFRI), sous l'égide du Département fédéral de l'économie, de la formation et de la recherche (DEFR).

dans la vie active ». Le PEEC eCG Fribourg précise que tous ces thèmes doivent être abordés au travers de deux domaines principaux : le domaine "langue et communication" et le domaine "société", définis comme suit :

- le domaine "langue et communication" vise la promotion des compétences linguistiques et de communication des personnes en formation ;
- le domaine "société" comprend huit aspects (culture, droit, écologie, économie, éthique, identité et socialisation, politique et technologie) et trois perspectives transversales (histoire, genre et développement durable). (ibid., p.16)

Ce plan de formation ne comprend donc aucun savoir mathématique devant faire l'objet d'un enseignement spécifique, ni dans l'énoncé des thèmes de réflexion, ni dans les huit aspects et les trois perspectives transversales qui constituent le domaine "Société", ni non plus dans le domaine "Langue et Communication". Cette exclusion des mathématiques de la culture générale est cependant compensée, dans les formations de type CFC²¹⁰, par le fait que leur enseignement est dispensé dans le cadre des cours de branches professionnelles. Kaiser (2011) indique en effet que :

Quelle que soit la profession enseignée, les formations initiales comprennent toutes du "calcul professionnel" [...] Parfois il fait l'objet d'un cours à part, parfois les contenus sont intégrés à d'autres cours comme celui intitulé "Connaissance de la branche". (p.1)

Analyse.

Durant l'apprentissage, les contenus de culture générale relative à la formation des apprenties au CFPS relèvent d'une détermination externe²¹¹ : le PEEC eCG Fribourg. Ce plan d'études, qui définit les contenus des cours de culture générale des formations CFC et AFP, ne comprend pas de savoirs mathématiques explicitement définis, ceux-ci étant reversés dans le cadre de l'enseignement des branches professionnelles. Cela signifie que, contrairement à la large place qui leur est accordée à l'école et au gymnase/collège, les mathématiques, dans la formation professionnelle (qu'elle soit ici ordinaire ou spécialisée) ne sont plus formellement (i.e. dans les plans de formation) considérées comme faisant partie de la formation en culture générale des apprenties.

L'absence des mathématiques du PEEC eCG Fribourg n'implique pourtant pas la disparition de tout investissement de savoirs mathématiques au sein des cours de culture générale de la formation professionnelle, tant il est vrai que certains savoirs y sont nécessairement convoqués et traités, en fonction des thèmes et des différents aspects du plan qui seront pris en compte. Il est en effet bien certain que le thème "Approche de la vie économique", par exemple, va entraîner la prise en considération de divers savoirs mathématiques, que ce soit pour lire des graphiques, consulter des statistiques ou établir des comptes. Mais cela veut dire que, dans le cadre de la culture générale, ces savoirs n'étant pas désignés, ils n'ont pas vocation d'être enseignés, ni non plus d'être évalués, dans le cadre d'un enseignement de type didactique organisé²¹².

²¹⁰ La question de la place réservée aux mathématiques dans les cours de branches professionnelles des formations de types AFP et AFPr sera examinée plus avant.

²¹¹ L'OFFT/SEFRI au niveau fédéral et le SFP du Fribourg au niveau cantonal constituent, parmi d'autres acteurs, la noosphère du CFPS pour l'enseignement de la culture générale.

²¹² Au CFPS, il arrive que des savoirs mathématiques soient investis dans les cours de culture générale à la demande d'une apprentie désireuse d'en savoir plus au sujet d'une notion mathématique particulière. La chose se produit régulièrement chaque année et l'*extensibilité du temps d'enseignement* (Favre 2004 a) qui préside aux cours permet, de cas en cas, d'y donner suite. On trouvera dans l'annexe 1 de la thèse, le compte-rendu d'une séquence d'enseignement consacré au thème des puissances, une notion mathématique qui n'est à nulle part considérée au CFPS comme un savoir à enseigner. Cette séquence s'est déroulée durant un cours de culture générale, à la demande expresse d'une apprentie, qui avait le désir d'entreprendre une formation de type CFC, une fois sa formation AFP terminée. Elle affirmait que les puissances faisaient partie des savoirs mathématiques à

Les savoirs mathématiques dans les cours de culture générale avant la mise en œuvre du PEEC eCG Fribourg

Description.

Au CFPS, la mise en œuvre effective du PEEC eCG Fribourg a eu lieu à partir de l'année 2007. Elle a eu pour conséquence de faire disparaître l'enseignement des mathématiques qui, auparavant, était dispensé dans les cours de culture générale proposés aux apprenties en 2^{ème} et 3^{ème} année de formation. Alors que cet enseignement paraissait pourtant bien vivace - en témoignent les nombreux et divers documents et matériels (des boîtes entières de réglettes Cuisenaire, par exemple) que l'on trouve encore aujourd'hui dans les cartons poussiéreux de certaines armoires²¹³ - la place a été entièrement accordée, conformément aux directives du nouveau plan de formation, aux onze thèmes de réflexion qu'il s'agissait désormais d'aborder en cours avec les apprenties. Dans cet ensemble foisonnant de documents²¹⁴, il en existait un particulier qui avait été conçu par une enseignante de formation élémentaire²¹⁵ (Denvers, non-daté), spécifiquement pour ce niveau d'enseignement et qui offre un bon aperçu des savoirs mathématiques qui étaient alors en jeu dans les cours de culture générale au CFPS.

Le manuel comporte deux parties : la première s'intitule "calcul numérique" et la seconde "géométrie". La partie "calcul numérique" comprend dix thèmes : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, multiplier par 10, 100, 1000, les problèmes numériques, la proportionnalité, les pourcentages, la règle de trois et les fractions ; la partie géométrie comporte également dix thèmes : les unités de longueurs, les unités de capacités, les unités de masses, les unités de surfaces, le périmètre du rectangle, le périmètre du carré, l'aire du rectangle, l'aire du carré, le périmètre du cercle et l'aire du disque. Chaque thème est organisé à la manière des manuels d'enseignement qui précédaient la réforme des mathématiques modernes²¹⁶, en proposant tout d'abord un versant théorique qui définit ce qu'est une addition, une règle de trois, le périmètre d'un carré, etc. ; puis en décrivant pour chaque thème une technique pour effectuer une addition, appliquer une règle de trois ou calculer le périmètre d'un carré ; enfin, en proposant une kyrielle d'exercices d'application destinés à s'entraîner à bien le faire. Ainsi, par exemple, la multiplication est définie comme suit : « poser une multiplication, c'est rechercher la valeur d'une quantité totale lorsqu'on connaît la valeur d'une unité » (ibid., p.14). On montre ensuite, à partir de deux exemples - un objet coûte n francs, combien coûtent m objets ? combien coûtent n mètres de tissus au prix de m francs le mètre ? -, comment effectuer une multiplication - comprenant deux nombres naturels, un nombre naturel et un nombre décimal et deux nombres décimaux - et comment rédiger le résultat final, en associant le nombre obtenu à l'unité de mesure en jeu et le soulignant. Quatre exercices comprenant chacun douze multiplications de nombres naturels et de nombres décimaux suivent pour exercer ce qui a été préalablement expliqué.

Analyse.

L'enseignement des mathématiques qui avait lieu dans les cours de culture générale au CFPS avant l'arrivée du PEEC eCG Fribourg faisait exclusivement l'objet de déterminations internes au centre. Dans le manuel d'enseignement destiné à la formation élémentaire précité, les savoirs

maîtriser pour entreprendre un CFC et c'est à ce titre qu'elle souhaitait les apprendre. De telles séquences restent évidemment marginales dans le flot de celles qui sont organisées à l'intention des apprenties durant leur formation ; elles constituent néanmoins un bon exemple d'ouverture qu'il est possible de créer, partant d'une détermination interne, dans un cadre didactique improvisé.

²¹³ Au sous-sol du château, il existait même une salle entièrement dévolue à l'enseignement des mesures comprenant toute une kyrielle de récipients étalonnés, de balances et de poids, d'instruments de mesure de longueurs, de caisses enregistreuses, etc.

²¹⁴ L'analyse de tous ces documents supposerait une étude spécifique qu'il n'est pas possible de réaliser ici.

²¹⁵ Le manuel ne porte pas de date d'édition, mais sa création ne paraît pas remonter bien au-delà des années 2000. Son auteure était expressément venue au CFPS le présenter aux enseignants.

²¹⁶ Comme exemple parmi de nombreux autres, on peut citer le manuel de Roorda (1917).

mathématiques en jeu sont donnés sous la forme de définitions théoriques qui proviennent des conceptions de l'auteure et/ou d'autres moyens d'enseignement qui ont été consultés pour le rédiger²¹⁷. A ces définitions sont associées des techniques de résolution dont le fonctionnement ne réfère à aucune technologie explicite qui en justifie le fonctionnement. Les techniques sont appelées à fonctionner dans des exercices qui constituent les tâches qu'elles permettent de résoudre. Parmi ces exercices, certains évoquent des tâches susceptibles²¹⁸ d'être accomplies dans un cadre professionnel : c'est le cas, par exemple, du calcul de pourcentages, de l'usage de la règle de trois ou de la maîtrise des unités de longueurs, alors que d'autres ne le peuvent que difficilement : c'est le cas, par exemple, de la division des nombres décimaux, du calcul du périmètre d'un carré ou de l'usage d'un décigramme dont on ne voit pas très bien, a priori, en quoi elles pourraient intervenir dans l'exécution d'une tâche professionnelle²¹⁹.

Tel qu'il a été conçu, ce manuel relève d'une *conception techniciste* de l'enseignement des mathématiques qui fait écho à celle qui a été mise en évidence par Giroux et René de Cotret (2001) dans le contexte de l'Es. Sa présence, parmi beaucoup d'autres moyens pour enseigner les mathématiques, montre qu'un enseignement de type didactique organisé était bien présent dans les cours de culture générale qui étaient dispensés au CFPS avant l'entrée en vigueur du PEEC eCG Fribourg. Les vingt thèmes proposés dans le manuel témoignent à nouveau d'un surinvestissement massif du numérique, puisque la partie "géométrie" de l'ouvrage ne propose que des exercices relevant du calcul de mesures. La majorité des vingt thèmes - seuls les calculs de périmètres et de surfaces font exception - recoupent par ailleurs des tâches figurant déjà dans le programme de première année de formation et les épreuves de stage. Une forme de redondance²²⁰ des savoirs mathématiques enseignés entre la première et les deuxième et troisième années de formation était donc présente, ce qui laisse supposer que ceux enseignés en première année n'avaient pas pu servir de *savoir didactique* (Chevallard, 1988b) à l'enseignement de nouveaux savoirs en deuxième et en troisième année de formation. L'enseignement tendait donc à faire du surplace autour de savoirs qui ne marquent pas d'évolution tout au long du déroulement de la formation.

Les savoirs mathématiques dans les cours d'éducation cognitive

Description.

A partir de la deuxième année de formation au CFPS, les apprenties en formation AFPra et AFP suivent, à raison de deux heures par semaine, des cours intitulés : « apprentissage cognitif médiatisé » (aCM), en référence à l'ouvrage²²¹ éponyme écrit par Dias (2003), professeur à l'Université de Fribourg²²². L'intention principale des cours d'aCM dispensés au CFPS est l'acquisition de stratégies d'apprentissage efficaces que les apprenties puissent utiliser conjointement pour s'appropriier les contenus des cours de branches professionnelles et de

²¹⁷ Les références bibliographiques mentionnent cinq ouvrages français de niveau CM1-CM2 (6^{ème} et 7^{ème} Harmos) et un manuel genevois de 8^{ème} année (10^{ème} Harmos).

²¹⁸ Il s'agit à nouveau de veiller à ne pas confondre les tâches que les apprenties sont susceptibles d'accomplir dans un contexte professionnel de celles qu'elles rencontrent et accomplissent effectivement.

²¹⁹ On pourrait raisonnablement parler à leur propos de "détermination culturelle", au sens où ces dernières appartiennent à ce que, dans notre culture, on considère comme devant faire partie des savoirs mathématiques maîtrisés par tout un chacun.

²²⁰ Cette redondance des savoirs enseignés fait écho à un autre phénomène mis en évidence par Conne (1999) dans l'Es, soit celui de *reconduction dans l'ignorance* et dont on verra par la suite qu'il se reporte et se poursuit au CFPS dans le cadre de l'enseignement des branches professionnelles.

²²¹ A travers l'histoire de la psychologie cognitive au cours du 20^{ème} siècle et la description de plusieurs modèles de fonctionnement cognitif qui ont été successivement élaborés en son sein, l'ouvrage montre comment on en est venu à concevoir l'hypothèse de l'éducabilité de l'intelligence par la médiation et y présente quatre programmes d'éducation cognitive élaborés à ce dessein.

²²² La proximité de l'Université de Fribourg et du CFPS du Château de Seedorf n'est évidemment pas étrangère au fait que des cours de ce type aient été spécialement conçus et proposés aux apprenties.

culture générale et pour acquérir les compétences professionnelles, personnelles et sociales qui sont l'objet de leur formation globale.

Cet apprentissage cognitif médiatisé peut se réaliser au travers de diverses méthodes, toutes apparentées au courant *d'éducation cognitive* (Büchel, 1995). Selon Coulet (2003), qui en a réalisé une analyse critique pour la ddm :

L'éducation cognitive s'inscrit dans une prise de position en faveur de l'idée qu'il est possible d'apprendre à apprendre. [...]

Toutes les méthodes²²³ qui se rattachent à ce concept affichent la volonté de construire des capacités de portée générale et transférables ; de plus elles accordent une large place à la médiation. (p.169)

Au CFPS, c'est le *Programme d'Enrichissement Instrumental (PEI)* de Feuerstein (1990) qui a été utilisé en quasi-exclusivité pendant plus d'une vingtaine d'années. On y a progressivement associé quelques éléments du programme *Das Eigene Lernen Verstehen (DELV)* de Büchel (Büchel & Büchel, 2011) qui s'est inspiré des travaux de Feuerstein (Dias, 2003). A la suite de l'engagement d'une nouvelle enseignante formée à une troisième méthode, les *Ateliers de Raisonnement Logique (ARL)* de Higélé, Hommage & Perry (2013) sont venus compléter la palette d'instruments employés dans les cours d'aCM.

Dans les trois méthodes, on a recours à des supports qui engagent l'utilisation de savoirs mathématiques. C'est particulièrement le cas dans le cadre des ARL où l'ensemble des exercices sont structurés à partir de concepts extraits de la théorie piagétienne qui, comme on le sait, emprunte une grande partie de sa nomenclature aux mathématiques. Répartis en deux niveaux - niveau concret et niveau formel - les exercices sont ainsi regroupés en quatre domaines intitulés : « structure de relation, combinatoire, proportionnalité et structure de classe » pour le premier niveau et « combinatoire, opérations formelles et proportionnalité » pour le second (ibid., p.87). La plupart des exercices qui sont support aux développements du programme sont des exercices de mathématiques, semblables à ceux que l'on trouvait dans les manuels durant la réforme des mathématiques modernes²²⁴.

Cependant, contrairement au rôle qu'on pourrait faire jouer à la résolution de tels exercices dans le cadre de l'école, l'enjeu n'est pas d'apprendre des mathématiques (les enseignants qui les pratiquent disent même parfois qu'ils évitent d'en parler pour éviter "d'effrayer" les apprenties), mais bien de développer des stratégies. De fait, une fois la tâche résolue, si l'on va bien chercher à décrire les procédés utilisés par les apprenties et chercher à pointer celles qui se sont avérées les plus efficaces pour la traiter, ce ne sera toutefois pas pour les relier à un savoir mathématique spécifique dans un processus d'institutionnalisation classique (Brousseau, 1998). On va en effet s'intéresser à mettre en évidence toutes les stratégies qui ont participé à la résolution de la tâche,

²²³ Coulet (ibid., pp.171-172) distingue quatre caractéristiques communes à l'ensemble de ces méthodes d'éducation cognitive. La première est de vouloir proposer une « éducation compensatoire pour des adultes en grande difficulté » : le PEI de Feuerstein a ainsi été conçu à l'intention de jeunes personnes très affectées sur le plan cognitif et affectif au terme de la seconde guerre mondiale, le programme DELV pour des adolescents et des adultes arborant de grandes difficultés d'apprentissage ou un retard mental et les ARL pour des adultes présentant des bas niveaux de qualification que l'on cherchait à réinsérer dans le monde du travail. La deuxième caractéristique est de s'appuyer sur un postulat de base qui repose sur la « plasticité des capacités cognitives », lequel permet de penser qu'à tout âge une (ré)éducation des fonctions cognitives est possible. La troisième est de vouloir participer à la « construction de capacités transférables », c'est-à-dire des capacités générales auxquelles il est possible d'avoir recours dans une grande diversité de situations. Enfin, la quatrième caractéristique réside dans l'« éclectisme théorique des programmes », c'est-à-dire qu'ils ne réfèrent pas à un cadre théorique identique, chaque programme opérant des emprunts à des cadres variés pour fonder sa démarche.

²²⁴ Dans les premiers exercices, on fait même appel aux blocs logiques de Dienes comme support aux tâches proposées, alors que les suivants se réalisent essentiellement à partir de fiches, où il faut, par exemple, dans le cas de la combinatoire, trouver toutes les possibilités de menus que l'on peut réaliser à partir de deux entrées, deux viandes et deux desserts ou, dans le cas de la proportionnalité, sachant les quantités d'ingrédients se trouvant sur un plateau de repas prévu pour huit personnes, trouver les quantités d'ingrédients à placer sur un plateau de repas prévu pour respectivement quatre, six ou dix personnes.

ce qui comprend les procédés de résolution bien sûr, mais également toutes les façons de faire qui ont montré leur efficacité, telles que, par exemple, la relecture à plusieurs reprises de l'énoncé, le recours à tel ou tel schéma, la découpe de la tâche en plusieurs étapes, etc. Ces stratégies sont d'ailleurs non seulement explicitées, mais également thématisées, de façon à pouvoir imaginer les reporter sur d'autres situations de cours, du contexte professionnel ou du quotidien des apprenties, dans lesquelles on souhaite qu'elles puissent être transférées et réutilisées de manière tout aussi efficace.

Analyse.

Les cours d'éducation cognitive proposés au CFPS aux apprenties en deuxième et troisième année de formation procèdent exclusivement de déterminations internes. Les savoirs mathématiques relatifs aux exercices proposés aux apprenties y fonctionnent de manière implicite. L'usage qui en est fait ne relève nullement d'un enjeu didactique lié à l'enseignement d'un savoir mathématique spécifique, mais vise en priorité à valoriser les éléments stratégiques qui ont accompagné leur résolution. Il n'est donc pas lieu ici d'observer une évolution de ces savoirs, au-delà du fait que chaque méthode considérée évolue selon une progression, partant d'exercices simples d'un point de vue cognitif, vers des exercices de plus en plus complexes.

LES MATHÉMATIQUES DANS LE DÉPARTEMENT PROFESSIONNEL DU CFPS

Les mathématiques en jeu durant le stage préalable et la 1^{ère} année de formation

Description.

Dans le département professionnel, aucun savoir mathématique ne fait l'objet d'une mention explicite dans les programmes des stages préalables, ni dans ceux qui définissent les contenus de première année de formation.

Analyse.

L'absence de savoirs mathématiques dans l'ensemble des programmes s'explique tout d'abord par le fait que ceux-ci sont déjà pris en charge dans le cadre des cours de culture générale. Cela ne signifie pourtant pas qu'aucun investissement de savoir mathématique n'y sera fait, mais cela veut dire que, lorsque cela sera le cas, ces derniers se feront dans un cadre didactique de type improvisé²²⁵. Cette absence des savoirs mathématiques des programmes s'explique aussi par le fait que, contrairement aux formations de type CFC, aucun document produit à l'externe ne donne d'indications précises sur les savoirs mathématiques que les apprenties sont supposées maîtriser à leur entrée en formation, ce qui pourrait donner des indications plus précises sur les savoirs qu'il s'agirait d'évaluer lors des stages, puis sur ceux qu'il s'agirait d'enseigner durant la première année de formation²²⁶.

²²⁵ Comme le verra par la suite, certaines tâches que les apprenties s'exercent à accomplir dans les secteurs professionnels impliquent l'usage de savoirs mathématiques, ce qui permet de supposer que ces savoirs font bien l'objet d'un investissement effectif.

²²⁶ En ce qui concerne les formations CFC, une brochure (Antille & al., 2011) destinée aux futurs apprentis définit en effet, pour chaque profession, ce qu'il convient de savoir avant l'entrée en apprentissage. Après avoir rappelé que : « les mathématiques concernent tous les domaines professionnels et tous les CFC » (p.28), même si les notions varient beaucoup selon les métiers considérés, les auteurs regroupent les savoirs qui doivent être maîtrisés selon quatre niveaux - connaissances de bases, bonnes connaissances, bonnes connaissances à connaissances étendues, connaissances étendues - qui sont mis en correspondance avec les métiers concernés. Ainsi le niveau des connaissances de base qui concerne six domaines de formation sur sept en cours au CFPS (selon la brochure, la formation en horticulture de type CFC nécessite à l'entrée le niveau supérieur de bonnes connaissances) comprend huit thèmes (avec des exemples pour s'entraîner qui sont donnés à chaque fois) : les quatre opérations élémentaires (avec nombres entiers et décimaux), la maîtrise du livret (jusqu'à 10 x 10), les nombres rationnels (amplification, simplification, addition, soustraction, multiplication et division avec les fractions ; équivalence entre écritures fractionnaires et écritures décimales), les pourcentages, les mesures (conversions d'unités usuelles, usage de la règle du

Les mathématiques en jeu durant les 2^{ème} et 3^{ème} années de formation

Les savoirs mathématiques dans les plans de formation professionnelle actuels

Description.

Dès l'entrée en apprentissage (en début de deuxième année), la formation des apprenties dans les secteurs professionnels se réalise, quel que soit le type de formation suivi (AFPra, AFP ou CFC), sur la base de plans de formation spécifiques à chaque métier. Dans le cas des formations de types AFP et CFC, ce sont des ordonnances fédérales, édictées par l'OFFT (nouvellement SEFRI), qui, pour chaque métier, fixent un cadre général à la formation. Ces ordonnances sont ensuite "concrétisées" au sein de différents plans de formation, réalisés par les Organisations du monde du travail (ORTRA) qui chapeautent les métiers concernés²²⁷. Ces plans de formation sont ensuite validés en retour par l'OFFT/SEFRI. Chaque plan de formation définit les compétences professionnelles, méthodologiques, sociales et personnelles que les apprenties sont appelées à acquérir à l'occasion de leur formation²²⁸. Dans le cadre d'un concept de formation duale (entreprise + école), il distingue les compétences qui doivent être acquises dans l'entreprise, de celles qui doivent l'être dans le cadre des cours professionnels et des cours interentreprises²²⁹. Dans le cas des formations pratiques (AFPra), ces plans de formation sont définis en référence aux ordonnances et aux plans de formations qui cadrent les autres types de formation, par une commission spécialisée de l'Association de branche nationale des institutions pour personnes avec handicap (INSOS).

Au CFPS, ce sont les MSP de chaque secteur qui, à raison de deux heures hebdomadaires, dispensent les cours de branches professionnelles aux apprenties qui suivent une formation pratique²³⁰. Pour les apprenties en formation de types AFP et CFC, les cours sont donnés, à raison de quatre périodes hebdomadaires au sein des écoles professionnelles des cantons de Fribourg et Vaud²³¹. Certaines d'entre elles - c'est le cas pour toutes les apprenties en formation

rapporteur, lecture d'une échelle), les fonctions linéaires (propriétés, tableau de proportionnalité, résolution d'exercices), les surfaces simples (périmètre et aire d'un rectangle et d'un carré), la calculatrice (ordre de priorité des opérations).

A la lecture de ces huit thèmes, on ne peut manquer de remarquer la proximité des savoirs qui s'y trouvent avec ceux figurant dans les documents du CFPS qui ont été préalablement analysés. On y décèle également un surinvestissement du numérique (les savoirs géométriques se retrouvent surtout dans les niveaux supérieurs) et une conception "techniciste" des savoirs qui est patente (il s'agit partout de savoir calculer), ce qui signifie que ces deux caractéristiques des savoirs qui ne sont pas seulement propres à la Fps. La grande différence tient cependant au fait que, pour les formations de type CFC, il s'agit de savoirs considérés comme maîtrisés sur la base desquels l'enseignement va s'appuyer pour démarrer, tandis que pour les autres types de formations (AFP, AFPra), il s'agira bien plutôt de savoirs considérés comme non-maîtrisés que l'enseignement pourrait donc être amené à devoir retravailler.

²²⁷ Chaque profession en Suisse est représentée par une organisation faîtière qui, dans la plupart des cas, prend le support juridique d'une association. Pour les métiers qui sont en cours au CFPS, la blanchisserie est représentée par l'*Association suisse des entreprises d'entretiens des textiles (ASET)*, la confection par l'*Union suisse des métiers de la mode (USMM)*, la cuisine et la restauration par *Gastro suisse*, l'horticulture par *Jardin suisse*, l'intendance par *Ortra intendance suisse* et le commerce de détail par la *Formation du commerce de détail suisse (FCS)*.

²²⁸ L'application conforme des différents plans de formation est, pour le CFPS comme pour toute entreprise établie dans le canton de Fribourg, du ressort du *Service de la Formation Professionnelle (SFP)* qui a comme mission :

de développer et d'appliquer la politique de la formation professionnelle initiale, de formation continue à des fins professionnelles et de formation professionnelle supérieure et d'en exercer la surveillance, au sens de l'encadrement et l'accompagnement dans le cadre des dispositions du droit fédéral, des conventions et accords inter cantonaux et du droit cantonal, avec la communication que cela implique (SFP Fribourg, 2015)

²²⁹ Les cours de branches professionnelles donnés aux apprenties AFP et CFC sont complétés par des cours interentreprises obligatoires, organisés par les ORTRA, qui sont proposés de façon ponctuelle et compacte (une semaine en général) sur des thématiques particulières définies dans les plans de formation.

²³⁰ C'était aussi le cas, auparavant, pour l'ensemble des formations de type élémentaire et, jusqu'en juillet 2012 pour la formation des employés de cuisine AFP. A partir d'août 2012, tous les cours liés à cette formation sont désormais donnés à l'*Ecole professionnelle artisanale et industrielle (EPAI)* de Fribourg.

²³¹ Au sein de l'*Ecole romande d'arts et de communication (ERACOM)* à Lausanne pour la blanchisserie, l'*Ecole professionnelle artisanale et industrielle (EPAI)* de Fribourg pour la confection et la cuisine, l'*Institut agronomique de Grangeneuve (IAG)* près de Fribourg pour l'horticulture et l'intendance, l'*Ecole professionnelle de Montreux (EPM)* pour la restauration et finalement l'*Ecole de commerce de Fribourg (ECF)* pour le commerce de détail.

CFC et pour certaines en formation AFP - bénéficient à l'interne d'un appui hebdomadaire pour les cours de branches professionnelles qui est également à la charge d'un MSP.

Les plans de formation établis par les ORTRA, pour les formations de type AFP et l'association INSOS pour les AFPra se déclinent en listes de compétences ou d'objectifs²³² que les apprenties doivent apprendre à maîtriser tout au long de leur formation, selon des critères de technique, de qualité et de rapidité d'exécution²³³. Ils ne mentionnent toutefois à aucune reprise de contenus mathématiques spécifiques qu'il s'agirait d'enseigner aux apprenties et ce, à deux exceptions près : les formations d'employée en cuisine AFP et d'assistante du commerce de détail AFP²³⁴.

 Service de la formation professionnelle Amt für Berufsbildung	
CANTON DE FRIBOURG / KANTON FREIBURG	
Derrière-les-Remparts 1, 1701 Fribourg / Tél. 026 305 25 00, Fax 026 305 26 00	
FORMATION ELEMENTAIRE	
NOM PRENOM DESIGNATION DE L'ACTIVITE	
OUVRIERE EN BLANCHISSERIE	
DESCRIPTION SOMMAIRE DE L'ACTIVITE La formation vise l'acquisition des compétences et des connaissances générales liées au circuit du linge en blanchisserie et pressing.	
PROGRAMME DE FORMATION	
1. Compétences professionnelles • Trier la lessive selon les couleurs, les symboles d'entretien, les sortes d'étoffes et les mandats des clients • Peser la lessive et faire l'inventaire • Repasser à la calandre le linge plat • Repasser à la main le linge • Repasser sur le mannequin • Laver à la machine • Manipuler le tumbler • Plier le linge de maison et de la clientèle • Embaquer et étiqueter les vêtements • Raccorder : remplacer des boutons et effectuer des coutures droites • Reconnaître les dangers et prévenir les accidents à la place de travail • Manipuler correctement et sans danger des machines à laver, tumbler, presse, mannequin, machines à repasser et de la machine à étiqueter • Appliquer dans la pratique les connaissances théoriques acquises concernant le matériel 2. Compétences méthodologiques • Accomplissement d'une journée complète de travail en respectant les temps de travail en vigueur • Recevoir, accepter et appliquer les simples indications et instructions • Rythme de travail constant et le plus soutenu possible • Apprendre les techniques de travail, les exercer et les appliquer • Méthode de travail propre, consciencieuse, aussi indépendante que possible et productive • Etablissement d'un rapport au travail, au matériel et à l'environnement • Apprendre à connaître des stratégies et des aides pour apprendre, les accepter et les appliquer 3. Compétences sociales et propres compétences • Motivation et identification professionnelle • Pensée et action orientées sur la qualité • Attitude positive envers la formation et le travail • Comportement soigneux avec les moyens d'exploitation et le matériel • Intégration dans une équipe de travail existante • Ordre et propreté sur la place de travail et dans les locaux attenants • Respect des règles de savoir-vivre et de comportement dans la vie quotidienne sur les plans professionnel et personnel de même qu'en public Ce programme a été avalisé par l'ASET (Association suisse des entreprises d'entretien des textiles)	

Figure n°5 - Programme de formation élémentaire en blanchisserie encore en usage au CFPS

²³² Sont repris ici, sans être discutés, les termes figurant dans les plans de formation établis par les ORTRA.

²³³ Il s'agit en effet non seulement d'apprendre à faire, mais également d'apprendre à bien le faire, soit selon une ou des techniques particulières (c'est-à-dire de faire comme ceci et non comme cela), avec une précision suffisante (de manière à ce que le produit obtenu soit "livrable" à une clientèle), et le tout dans un temps donné : le milieu de l'économie de marché dans lequel bon nombre d'apprenties se retrouveront au terme de leur formation au CFPS est très sensible à la question de leur rendement ; c'est en effet à partir de son rendement que sera calculé le montant de l'éventuelle rente AI qui sera allouée à l'apprentie, en complément du salaire que lui versera son employeur.

²³⁴ Le cas particulier de la formation d'employée en cuisine AFP sera examiné plus avant.

Cette absence de savoirs mathématiques spécifiques à enseigner dans les plans de formation ne préjuge à nouveau pas de leur absence effective dans la formation donnée aux apprenties, sachant que certaines compétences ou objectifs qui y figurent appellent l'usage de mathématiques. Le plan de la formation élémentaire²³⁵ en blanchisserie (cf. figure n°5) en donne quelques exemples : c'est le cas notamment du tri de la lessive selon différents critères, de sa pesée sur une balance, du pliage du linge ou encore de la manipulation de différentes machines dont les apprenties doivent progressivement apprendre à maîtriser le fonctionnement²³⁶.

L'examen des plans de formation relatifs aux autres métiers dont l'apprentissage est proposé au CFPS, montre qu'il en va de même pour chaque formation²³⁷. Ainsi, en confection, les travaux d'assemblage de tissus, lorsqu'il s'agit d'appliquer des techniques qui tiennent compte du nombre, de la longueur, de la forme ou du volume des parties à assembler, de même que les travaux de retouches qui conduisent à raccourcir, rallonger ou élargir un vêtement demandent de faire usage de mathématiques. En horticulture, des mathématiques interviendront lorsqu'il s'agira de préparer le sol des surfaces à planter, classer des plantes, trier des déchets selon des critères écologiques ou mesurer des engrais liquides ou solides. En intendance, ce sera aussi le cas quand il faudra doser correctement les produits de nettoyage et d'entretien, gérer des stocks de matériel, préparer des commandes ou établir des factures. Enfin, dans le domaine de la restauration, il s'agira également d'en faire usage au moment de dresser des additions, procéder et contrôler leur encaissement, ou encore établir un inventaire de marchandises.

Analyse.

Durant l'apprentissage, les contenus professionnels que les apprenties doivent parvenir à s'approprier font l'objet de déterminations externes²³⁸ : les plans de formation établis par les ORTRA de chaque métier, conformément aux ordonnances fédérales définies par l'OFFT/SEFRI. A l'exception des formations d'employée de cuisine AFP et d'assistante du commerce de détail AFP, ces plans de formation ne comprennent pas de savoirs mathématiques explicitement définis. Comme pour l'enseignement de la culture générale, l'absence des mathématiques dans les plans de formation ne saurait toutefois impliquer la disparition de tout investissement de savoir mathématique que ce soit dans le travail en secteur ou dans le cadre des cours de branches professionnelles, puisque, dans tous les métiers, on trouve des compétences qui impliquent des mathématiques. Le fait que ces savoirs ne soient pas désignés laisse à nouveau supposer qu'ils ne feront pas l'objet d'un enseignement de type didactique organisé, mais que cet enseignement sera improvisé en fonction des besoins liés aux compétences à développer chez les apprenties.

Les savoirs mathématiques dans les plans de formation des cours de "calcul professionnel" mis sur pied suite à l'introduction du PEEC eCG Fribourg.

Description.

Avant l'adoption du PEEC eCG Fribourg en 2007, c'étaient les enseignants qui, au sein du département enseignement du CFPS, avaient la responsabilité de l'enseignement des

²³⁵ On observe que les plans de formation élémentaire en vigueur avant le développement des formations AFP étaient établis par le SFP et validés par l'ORTRA du métier concerné. Dans le cas de la blanchisserie où l'ORTRA a renoncé à mettre sur pied une formation de type AFP, c'est encore ce plan qui fait office de référence à la formation pratique qui est donnée au CFPS.

²³⁶ D'autres tâches, internes au secteur, sont également susceptibles de faire appel à des mathématiques. Dans la blanchisserie, c'est encore le cas, par exemple, lorsqu'il s'agit de remplir une facture adressée à la clientèle.

²³⁷ Tous ces exemples réfèrent aux compétences et objectifs professionnels que l'on trouve dans les plans de formation de chaque métier.

²³⁸ L'OFFT/SEFRI et l'association INSOS au niveau fédéral, le SFP au niveau cantonal constituant, parmi d'autres acteurs, la noosphère du CFPS pour la formation en entreprise et l'enseignement des branches professionnelles.

mathématiques durant l'apprentissage. Avec la disparition des mathématiques des programmes de culture générale, cet enseignement aurait donc dû en principe revenir aux MSP en charge des cours professionnels. Ces derniers n'étant toutefois pas au bénéfice d'une formation d'enseignement spécifique et ne disposant pas de moyens d'enseignement appropriés pour le faire, c'est un enseignant de culture générale a mis sur pied, durant l'année 2007-2008, un cours spécifique de "calcul professionnel". Ce cours a été proposé aux apprenties, à raison d'une heure par semaine, en les regroupant par métier. Du fait que les plans de formation ne donnaient pas de directives particulières quant aux savoirs mathématiques à aborder dans les cours, des programmes de mathématiques ad hoc²³⁹, ont été constitués à cette occasion en collaboration avec les MSP de chaque secteur professionnel²⁴⁰.

 Calcul professionnel Programme A2 et A3 	
Domaine	Niveau de compétence
MESURES DE MASSE - Estimer des masses - Lire des masses sur la balance (divisions par kg, 500 g et 100 g) - Transformer - A3 - Utilisation de la tare (calculer la masse brute et la masse nette)	- En kg et en g - De kg en g et inversement - Connaître les termes tare, contenant et contenu
MESURES DE CAPACITE - Estimer des capacités - Lire les mesures de capacité - A3 - Transformer l/dl – l/cl – l/ml – dl/cl – dl/ml – cl/ml, et inversement	- En l, dl, cl et ml - Connaître l'équivalence de ml ; cm et cm³
PROPORTIONS - Utiliser le demi, le tiers, le quart, le cinquième, le sixième et le dixième - Pliage en 2;2 – 2;4 – 3;3 – 3;4 – 4;4 – 3;5 - Répartir des pièces dans plusieurs corbeilles d'entraînement	
ARGENT - Compter l'argent jusqu'à 200 Fr - Rendre la monnaie jusqu'à 100 Fr - A3 - Préparer une facture (Prix unitaire x nombre d'unités, total de la facture)	
TEMPS - Lire l'heure en digital et en analogique - Calculer des intervalles de temps - Additionner des durées	¼ d'heure / ½ heure / ¾ d'heure

Figure n°6 - Programme de calcul professionnel pour les apprenties en blanchisserie durant l'année 2007-2008 au CFPS

La figure n°6 présente le programme de calcul professionnel qui a été établi pour les apprenties de formation élémentaire en blanchisserie. Le programme est constitué de cinq domaines, dont

²³⁹ A défaut d'une noosphère externe au CFPS qui s'est donné pour tâche de définir ces savoirs, la question ne peut que revenir à l'interne du système, à la charge directe des acteurs de la formation professionnelle qui y est donnée. Ce phénomène a bien été mis en évidence dans la thèse de Maréchal (2011), à propos de l'enseignement des mathématiques dans l'Es, où les enseignants spécialisés qui ne recourent pas aux programmes et aux moyens d'enseignement officiels utilisés dans l'Eo, doivent assumer une étape supplémentaire du processus de *transposition didactique* (Chevallard, 1985), qui réclame une réflexion sur les contenus mathématiques à enseigner et sur la façon de les enseigner.

²⁴⁰ Seuls cinq secteurs étaient concernés, vu que les formations en commerce de détail et en restauration n'existaient pas au CFPS à cette époque.

quatre relèvent des mesures de grandeurs : masses, capacités, temps et argent. Les domaines des masses et des capacités demandent de pouvoir estimer et lire des masses et des capacités exprimées en différentes unités de mesures, effectuer des conversions d'unités et, concernant les masses, déterminer une masse brute ou une masse nette, connaissant la tare et la masse nette ou brute correspondante. Le domaine de l'argent requiert de savoir compter et rendre de l'argent, ainsi que compléter une facture, alors que celui du temps demande de savoir lire l'heure, calculer des intervalles de temps et additionner des durées. Un cinquième domaine, intitulé "proportions", regroupe, de manière plutôt surprenante, tout à la fois l'usage de quelques fractions élémentaires, le pliage du linge et le tri d'habits selon différents critères. On remarque par ailleurs qu'à trois domaines sur cinq est associé un "niveau de compétences" qui précise les notions particulières que les apprenties devraient maîtriser dans chaque domaine : les kilos, les grammes et les transformations qui les lient dans le domaine des masses (avec la connaissance lexicale des mots "tare", "contenu" et "contenant") ; puis les litres, les décilitres, les centilitres et les millilitres, ainsi que l'équivalence cm^3 et ml (y compris l'abréviation "ccm") dans le domaine des capacités ; enfin les $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ d'heure dans le domaine du temps.

Analyse.

Les programmes ad hoc qui ont été constitués au CFPS en 2008 pour y enseigner le calcul professionnel sont exclusivement de détermination interne. Ils offrent un bel aperçu de ce que les MSP d'un secteur particulier considèrent, au sein des mathématiques, comme utiles à la formation professionnelle des apprenties. L'exemple du programme conçu pour la blanchisserie montre que les savoirs mathématiques sont une nouvelle fois désignés sous forme de tâches, regroupées par domaines, dépourvues des techniques qui leur sont associées. L'enseignement sera de type didactique organisé (la précision du niveau de compétences laissant même supposer qu'une évaluation de l'apprentissage aura lieu). L'absence de définition des techniques donne par ailleurs à penser que des écarts importants puissent exister entre celles qui seront proposées en cours par l'enseignant et celles qui seront attendues en secteur par les MSP. En l'absence de concertation entre les deux lieux, ce sont les apprenties qui seront contraintes de gérer ces écarts, sachant que les techniques enseignées en cours, si elles diffèrent, n'auront pas forcément lieu d'être reconnues comme efficaces dans les secteurs.

L'examen des tâches figurant dans ce programme rend compte aussi de la proximité que l'on cherche à établir vis-à-vis des besoins effectifs du secteur blanchisserie. Le choix des mesures de masses, de capacités, d'argent et de temps correspondent en effet aux tâches professionnelles qui demandent de peser le linge avec une corbeille, doser des produits, rendre la monnaie aux clients, anticiper la durée d'un programme d'une machine, etc. (et si d'autres mesures comme les longueurs, les aires ou encore les angles n'ont pas été retenues, c'est très certainement parce qu'on n'en fait pas vraiment usage en blanchisserie). Il en va de même des unités spécifiées - kilos et grammes pour les masses ; litres, décilitres, centilitres et millilitres pour les capacités - qui sont celles employées en secteur, où on ne parlera par contre jamais d'hectogrammes ou de décagrammes, mais où, en revanche, l'usage de certains récipients comprenant l'inscription ccm (pour centimètres cubes), demanderont d'en connaître la signification. C'est du reste aussi le cas dans le domaine des proportions, où la présence de quelques fractions usuelles s'explique par les mesures qu'il s'agit d'opérer sur les quantités de lessive ou par les inscriptions qui figurent sur des récipients, et que l'on y retrouve aussi des tâches professionnelles comme le pliage ou le tri du linge²⁴¹.

²⁴¹ La raison de la présence du tri du linge dans le domaine des proportions est assez difficile à interpréter ; en revanche, celle du pli de linge peut s'expliquer par le fait que lorsqu'on opère un pli sur un linge, il se trouve "plié en deux", c'est-à-dire en deux parties égales ; que quand on opère deux plis, il est "plié en quatre", c'est-à-dire en quatre parties égales, puis qu'avec trois plis, il est "plié en huit", etc. On observe ainsi une correspondance entre le nombre de plis et le nombre de parties de linges qui sont produites par l'action du pliage qui n'est pas proportionnelle, mais exponentielle, de type $f(x) = 2^x$. Les expressions

On observe en outre que la plupart des tâches figurant dans ce programme se trouvait déjà dans celui de culture générale de première année de formation, et plus avant, dans les épreuves proposées aux stagiaires. Ce qui montre à nouveau que l'enseignement fait du surplace autour de savoirs qui ont été déjà enseignés, alors même que l'on aurait pu s'attendre, dans le dispositif de cours mis en place (une heure hebdomadaire), à ce que l'éventail des tâches figurant dans le programme puisse être étoffé et diversifié.

	Blanchisserie	Confection	Cuisine	Horticulture	Intendance
Opérations		Additionner Soustraire Multiplier Diviser		Maîtriser les tables de multiplication	Additionner Soustraire Multiplier Diviser
Longueur		Estimer Mesurer Lire Etablir des conversions		Estimer Lire Etablir des conversions	
Aire				Estimer Calculer	
Masse	Estimer Lire Etablir des conversions Calculer avec la tare		Estimer Lire Etablir des conversions Peser avec la tare Calculer la masse comestible	Estimer Lire Etablir des conversions Peser avec la tare	Estimer Lire Etablir des conversions Peser avec la tare
Capacité	Estimer Lire Transformer		Estimer Lire Transformer	Estimer Lire Transformer	Estimer Lire Transformer
Argent	Compter Rendre la monnaie Préparer une facture	Compter Rendre la monnaie Préparer une quittance Tenir le compte d'une caisse Calculer un prix de fournitures Calculer un prix de revient	Compter Rendre la monnaie Calculer le prix d'une marchandise	Calculer un prix de revient	Compter Rendre la monnaie Préparer une facture
Temps	Lire Calculer des intervalles Additionner des durées			Lire Calculer des intervalles	Lire Calculer des intervalles
Température				Lire Calculer des écarts	
Proportions	Utiliser des fractions simples Plier du linge Trier du linge	Utiliser un tableau de proportionnalité Utiliser la règle de trois Calculer des pourcentages	Utiliser des fractions simples Utiliser la règle de trois Calculer des pourcentages	Utiliser des fractions simples Calculer des pourcentages	Utiliser des fractions simples Utiliser la règle de trois
Inventaire			Compléter des fiches d'inventaire		

Tableau n°9 - Comparatif des programmes de calcul professionnel durant l'année 2007-2008 au CFPS

Le tableau n°9 qui décrit, en les regroupant par domaines, les tâches retenues pour chaque secteur professionnel, montre qu'il est possible de reconduire des analyses du même ordre²⁴² sur tous les programmes ad hoc qui ont été constitués pour l'enseignement du calcul professionnel. On y retrouve également un surinvestissement du numérique - qu'annonce d'entrée l'intitulé du cours : *le calcul professionnel* - qui prévalait déjà auparavant dans les

"plier en deux" ou "plier en quatre" présentent de fait une certaine ambiguïté pour déterminer si le deux ou le quatre correspond au nombre de plis ou au nombre de parties, laquelle fait parfois hésiter des apprenties qui ne parviennent pas à opter pour celle qui, par convention, est admise dans les secteurs.

²⁴² On relèvera simplement que trois secteurs sur cinq accordent une importance particulière à la maîtrise du calcul.

programmes de culture générale, tout comme la conception techniciste de l'enseignement qui se traduit encore par la désignation des savoirs en termes de tâches. S'agissant de ces deux caractéristiques, on a déjà vu plus haut que la première n'était pas spécifique de la Fps, mais qu'elle pouvait être attribuée plus largement à la formation professionnelle prise dans son ensemble. Il est probable qu'il en va également de même pour la seconde si l'on s'en réfère à certains travaux menés en didactique professionnelle (Rabardel, 2007) qui ont bien montré que, dans le champ professionnel :

ce qui est premier est l'action efficace [...], le faire, la réalisation ; la connaissance n'étant là que comme support ou ressource, mobilisable, et souvent mobilisée, mais de façon généralement subordonnée à ce faire. (p.88)

Il n'en reste pas moins que le fait de décrire les savoirs mathématiques en termes de tâches fait que celles-ci ne sont nullement distinguées selon leur *complexité cognitive* (Vergnaud, 1991). Coexistent de fait, au sein du programme, des tâches de complexité très variable, allant, pour les plus simples, de la lecture de l'heure en mode digital, vers des bien plus complexes, comme la préparation d'une facture ou le calcul de pourcentage. Les tâches retenues sont "à savoir", indépendamment les unes des autres, l'important étant qu'on sache en faire usage dans les secteurs. A la différence des programmes de mathématiques que l'on trouve dans l'Eo, il n'y a donc pas ici d'organisation des savoirs à enseigner visant à considérer l'âge et le développement des élèves, ni encore les liens qui peuvent exister entre les différents savoirs. La Fps se situant en aval de l'école, c'est un peu comme si on se trouvait au-delà de l'idée d'une progression ou d'une programmation, les savoirs en jeu étant exclusivement dépendants des tâches à accomplir.

L'abandon des programmes de calcul professionnel au CFPS sauf dans le cas particulier de la formation d'employée de cuisine AFP.

Description.

Les cours de "calcul professionnel" qui ont eu lieu en 2007-2008 n'ont pas été reconduits l'année d'après. L'enseignant qui en avait la charge y ayant renoncé devant l'absence de reconnaissance de leur impact sur les compétences professionnelles manifestées par les apprenties qui lui avaient été rapportées par les MSP (c'est du moins là la raison que l'on m'en a donnée). Aucune instance à l'interne du CFPS n'ayant pris le relais de cet enseignement, les programmes de "calcul professionnel" ont été abandonnés, à l'exception toutefois de ceux de la formation d'employée en cuisine AFP.

Du point de vue des mathématiques, la formation d'employée en cuisine AFP constitue en effet un cas particulier parmi l'ensemble des formations proposées au CFPS²⁴³, du fait que l'ordonnance fédérale qui sert de base légale à la formation exige, dans l'article 18-1b relatif à la procédure de qualification, la mise sur pied d'un examen des connaissances professionnelles apprises durant la formation, qui comprend une part de "calcul professionnel" :

b. Connaissances professionnelles

L'examen final dure env. 2 ½ heures. La partie orale dure environ ½ heure. L'examen comprend les domaines suivants : connaissances d'entreprise, hygiène, sécurité au travail et protection de la santé, menus, calcul professionnel [c'est moi qui souligne], diététique, denrées alimentaires et cuisine. (SEFRI, 2004, p.6)

²⁴³ Actuellement, la formation d'assistante de commerce de détails AFP en constitue un autre, puisque son plan de formation comprend une compétence mentionnant de façon explicite la maîtrise de savoirs mathématiques :

Les assistantes du commerce de détail savent utiliser dans la pratique les opérations fondamentales de calcul et elles sont capables de calculer des pourcentages ; elles manient les chiffres et l'argent avec assurance et sont en mesure d'établir un budget personnel (FCS, 2011, p.4).

On retrouve également, dans le plan de formation édicté par l'ORTRA Gastro Suisse (Hotel & Gastroformation, 2004), la mention d'un enseignement du calcul professionnel dans l'objectif 6, intitulé : « Objectif général menus et calcul professionnel », qui précise que :

Des connaissances essentielles en matière de menus et de calcul professionnel sont des compétences importantes des employés en cuisine. Ils savent établir des menus simples en prenant en considération les substances nutritives et les saisons, et sont capables de documenter et d'adapter leurs préparations et de calculer des menus simples. (p.26)

Selon ce plan de formation, l'enseignement du calcul professionnel doit s'opérer tout aussi bien dans les cours, que dans l'entreprise, de manière à ce que les apprentis employés de cuisine AFP soient en mesure :

de créer, d'adapter des recettes de façon autonome et de calculer, dans de simples exemples, la valeur des quantités et des coûts ;

d'exposer les principes pour la conception de menus et d'établir des menus simples ainsi que calculer et justifier les quantités. (ibid., p.26-27).

Au CFPS, cette présence du calcul professionnel dans l'ordonnance fédérale et le plan de formation qui supporte la formation d'employée de cuisine AFP a fait que, contrairement aux autres formations, les MSP en charge des cours professionnels ont reçu, dès 2008, le mandat de reprendre l'enseignement du "calcul professionnel". Ils ont également été tenus de procéder à des évaluations notées des apprentissages réalisés par les apprenties, du fait que la moyenne des notes de mathématiques comptait dans la moyenne des notes des cours professionnels. Le programme de calcul professionnel élaboré en 2007-2008 a donc été reconduit, les MSP de cuisine ayant à leur tour dû concevoir et dispenser un enseignement de mathématiques pour les apprenties de leur secteur et ce, à défaut d'une formation didactique en mathématiques particulière, ainsi que de moyens d'enseignement conçus spécifiquement pour le faire²⁴⁴.

Analyse.

Il est pour le moins surprenant de découvrir qu'un système d'enseignement comme le CFPS a pu, dans quatre secteurs professionnels sur cinq, se passer d'un coup d'un enseignement de mathématiques spécifique, alors même que certaines tâches professionnelles que les apprenties doivent apprendre à maîtriser requièrent des mathématiques pour le faire. Il y a donc lieu de s'interroger sur ce qui, à l'interne du système, a fait que cet abandon n'ait a priori pas porté préjudice au déroulement de la formation. Au moins quatre hypothèses (non exclusives), échafaudées à partir des observations réalisées et des échanges entretenus à l'interne, peuvent être envisagées pour tenter de l'expliquer :

- La première hypothèse veut que certaines apprenties maîtrisent suffisamment les savoirs mathématiques nécessaires à l'exécution des tâches professionnelles qui leur sont demandées d'accomplir dans les secteurs. Mobilisés adéquatement en cas de besoin, ces savoirs ne nécessitent plus d'enseignement particulier, à l'image de ce que tout un chacun est capable de réaliser au quotidien, quand certaines tâches le requièrent.
- La deuxième hypothèse veut que les MSP qui ont la responsabilité de la formation professionnelle des apprenties procèdent malgré tout à un enseignement des mathématiques quand le besoin s'en fait sentir, c'est-à-dire quand une apprentie ne parvient pas exécuter telle ou telle tâche professionnelle. C'est le cas, par exemple, lorsque

²⁴⁴ C'est ce qui a fait que, dans le mois qui a suivi mon arrivée au CFPS en 2009, un MSP de cuisine m'a demandé de reprendre l'enseignement du calcul professionnel. Il ne m'a toutefois pas été possible de souscrire directement à sa requête, du fait que celle-ci ne pouvait entrer dans un cahier des charges déjà bien rempli ; mais cela sera cependant le cas deux ans plus tard, donnant lieu à la quatrième investigation de la partie expérimentale de la thèse (cf. chapitre 8).

les apprenties doivent rendre de la monnaie à des clients qui viennent acheter des denrées ou bénéficier d'un service dans leur secteur²⁴⁵.

- La troisième hypothèse veut que les MSP, au cas où un savoir mathématique fait défaut, recourent à des stratégies qui permettent d'éviter le recours aux mathématiques. C'est le cas, par exemple, lorsque l'on fait appel à un artefact comme une calculette qui évite de devoir calculer par écrit ou par oral ; ou quand on utilise une balance qui permet d'intégrer le poids d'un récipient et permet ainsi d'éviter la déduction de la tare dans le poids qu'elle affiche. Et c'est encore le cas, par exemple, quand, dans le secteur de la confection, pour ne pas avoir à faire usage du ruban métrique pour mesurer des pièces de tissu, on fait appel à certains repères sur le corps qui donnent directement des estimations de mesures effectives²⁴⁶.
- La quatrième hypothèse veut que les MSP conservent sous leur responsabilité les aspects mathématiques d'une tâche, quand les apprenties n'en ont pas la maîtrise. Ce sera le cas, par exemple, si une apprentie ne réussit pas à utiliser un procédé pour rendre la monnaie et que le MSP (le cas échéant, une autre apprentie qui, elle, le maîtrise) va devoir y suppléer auprès des clients. Et c'est sera également le cas, lorsqu'un savoir mathématique, utile pour la réalisation d'une tâche, paraît "hors de portée" des apprenties²⁴⁷.

Si ces quatre hypothèses - sans que l'on ne puisse évidemment en exclure d'autres - permettent, peu ou prou, d'expliquer comment le CFPS a pu s'accommoder de la disparition d'un enseignement des mathématiques de type didactique organisé, on peut également en conclure que les déterminations internes au système ne sont pas à elles seules suffisantes pour en garantir la pérennité. Pour assurer son existence, ce dernier nécessite l'appui de déterminations externes, comme cela a été le cas pour la formation des employées en cuisine AFP, seule formation professionnelle qui, à partir de 2008, a continué à dispenser au CFPS un enseignement des mathématiques de type didactique organisé au sein des cours professionnels²⁴⁸.

SYNTHÈSE DES ANALYSES

Les analyses effectuées dans ce chapitre permettent de caractériser les savoirs mathématiques que l'on rencontre au niveau de l'institution dans le contexte du CFPS du Château de Seedorf.

Les savoirs mathématiques dans la formation des apprenties au CFPS

Les savoirs mathématiques qui participent à la formation globale au CFPS constituent une part très restreinte des savoirs en jeu dans la formation. Leur existence dans le système dépend

²⁴⁵ S'agissant de rendre la monnaie un client, un MSP disait qu'il enseignait aux apprenties un procédé qui partait du prix à payer et remontait, par pallier successifs, jusqu'au montant versé par le client : ainsi pour rendre la monnaie sur un billet de CHF 20.- à partir d'un prix d'achat CHF 6.45, on commençait par donner une pièce de 5 ct pour "aller" jusqu'à CHF 6.50 ; puis une pièce de 50 ct pour "aller" jusqu'à CHF 7.- ; puis une pièce de CHF 2.- et une pièce de CHF 1.- (ou trois pièces de CHF 1.-) pour "aller" jusqu'à 10 CHF ; enfin un billet de CHF 10.- (ou deux pièces de CHF 5.-) pour "aller" jusqu'à CHF 20.- .A la fin, on ne savait pas le montant qui avait été rendu (CHF 13.55), mais on était à peu près certain qu'il était correct.

²⁴⁶ Une MSP disait qu'elle enseignait aux apprenties que la distance de deux bras tendus écartés correspondait à une longueur d'environ un mètre cinquante, que celle allant du menton à l'extrémité d'un bras tendu était égale à environ huitante centimètres, que celle allant d'une épaule à l'extrémité d'un bras tendu mesurait environ soixante centimètres, alors que, depuis l'autre épaule, on obtenait une longueur d'environ un mètre.

²⁴⁷ Une MSP disait qu'elle recourait au nombre π pour effectuer des mesures lors de la confection de certains patrons de vêtements, mais qu'elle ne voyait pas comment en faire part aux apprenties qui, pour certaines, éprouvaient encore des difficultés à maîtriser les quatre opérations élémentaires.

²⁴⁸ Dans des conditions qui, selon Kaiser (2011), prévalent aussi dans la formation professionnelle ordinaire où l'on rencontre:

- des contenus inutiles définis selon : « un point de vue scolaire et traditionnel, peu axé sur la réalité d'un quotidien professionnel » ; (p.1)
- des formateurs qui ne reçoivent pas de formation particulière en didactique, ce qui fait que : « leurs attentes sont marquées par leurs propres expériences d'écouler du degré primaire et du degré secondaire » ; (ibid., p.2)
- des procédés d'enseignement qui ressemblent au modèle suivant : « je vous explique le principe et vous l'appliquez à des exemples concrets ». (ibid., p.2)

conjointement de déterminations externes et de déterminations internes au système. Les déterminations externes sont seules à même de garantir qu'un enseignement des mathématiques de type didactique organisé soit donné aux apprenties ; ce qui signifie, en contrepartie que le système est à même de se passer d'un tel enseignement.

Les savoirs mathématiques à détermination externe au CFPS

Les savoirs mathématiques qui font l'objet d'une détermination externe relèvent exclusivement des savoirs professionnels : ils sont définis dans les plans de formation établis par les organisations faïtières, conformément aux ordonnances fédérales fixées par le SEFRI. Il n'y a que deux domaines de formation²⁴⁹ (sur les sept qui sont présents au CFPS) qui explicitent dans leurs plans de formations des savoirs mathématiques spécifiques, devant être enseignés aux apprenties : il s'agit de la formation d'employée en cuisine AFP et de la formation d'employée en restauration AFP. Les savoirs mathématiques qui figurent dans les plans de formations sont essentiellement numériques, décrits sous la forme de tâches professionnelles et dépourvus des techniques qui leur correspondent. L'appellation "calcul professionnel" dont ces tâches relèvent laisse supposer que l'enseignement des mathématiques sera résolument technique, axé sur le professionnel ; on assiste de fait à un renversement complet d'enjeu avec l'école : il s'agit "d'apprendre des mathématiques pour faire", alors qu'à l'école, on va "faire pour apprendre des mathématiques". Actuellement, il n'y a plus d'enseignement de mathématiques de type didactique organisé à détermination externe qui est dispensé au CFPS : celui-ci se déroule exclusivement dans les écoles professionnelles²⁵⁰.

Les savoirs mathématiques à détermination interne dans le Département enseignement du CFPS

Dans le Département enseignement, les savoirs mathématiques à détermination interne sont présents tout au long de la formation des apprenties :

- lors du stage préalable, il s'agit d'évaluer les savoirs maîtrisés par les apprenties avant leur entrée en formation pour envisager le type de formation qui sera suivi ultérieurement : la perspective est non-didactique, car évaluative ;
- en première année de formation, il s'agit d'enseigner des savoirs mathématiques aux apprenties pour préparer l'entrée en apprentissage : ce sont essentiellement des savoirs numériques, envisagés d'un point de vue technique et à visée professionnelle : la perspective est didactique, de type organisé ;
- en deuxième et troisième années de formation, des enseignements ponctuels peuvent être proposés, en fonction des thématiques de culture générale abordées : la perspective est didactique, de type improvisé ;
- dans les cours d'éducation cognitive, l'enseignement est produit à partir de supports fortement mathématisés, mais les savoirs mathématiques n'en sont pas l'enjeu : la perspective est non-didactique ;
- dans les cours d'appui, un enseignement des mathématiques est donnée quand les devoirs que les apprenties importent des cours qu'elles suivent à l'école professionnelle l'imposent : la perspective est didactique, de type improvisé ;
- à l'initiative d'une apprentie ou d'un enseignant, il est en tout temps possible de conduire des enseignements de savoirs mathématiques spécifiques : la perspective est didactique, de type improvisé.

²⁴⁹ On n'envisage pas ici le cas des formations de type CFC.

²⁵⁰ C'était heureusement encore le cas, au moment de la récolte de données, pour les apprenties employées de cuisine AFP. Dans le cas contraire, la quatrième investigation (cf. chapitre 8) n'aurait pas eu lieu.

Les savoirs mathématiques à détermination interne dans le Département professionnel du CFPS

Dans le Département professionnel, les savoirs mathématiques à détermination interne sont également présents tout au long de la formation des apprenties :

- dans la pratique, des enseignements ponctuels sont proposés, en fonction des besoins des tâches à accomplir : la perspective est didactique, de type improvisé.
- dans les cours professionnels donnés au CFPS, des enseignements ponctuels sont proposés en fonction des thématiques de branches professionnelles abordées : la perspective est également didactique, de type improvisé.

L'évolution des savoirs mathématiques durant la formation

Le tableau n°10 synthétise la présence de savoirs mathématiques tout au long de la formation des apprenties dans le département enseignement et dans le département professionnel en fonction des enjeux dont ils relèvent : non didactique (ND), didactique de type improvisé (DI) et didactique de type organisé (DO)

	Département enseignement			Département professionnel		
	ND	DI	DO	ND	DI	DO
Stage préalable	x					
Année 1	x	x	x		x	
Année 2	x	x			x	(x) ²⁵¹
Année 3	x	x			x	(x)

Tableau n°10 - Présence des savoirs mathématiques durant la formation des apprenties au CFPS

Si des savoirs mathématiques jalonnent le parcours de formation des apprenties, un enseignement de type organisé ne leur est proposé au CFPS que dans l'année d'orientation et d'initiation au travail dans le département enseignement et, pour les seules apprenties employées en cuisine AFP, durant leurs deux années apprentissage au sein du département professionnel. L'examen des contenus des programmes internes montre par ailleurs que les savoirs mathématiques n'évoluent pas tout au long de la formation ; cet immobilisme peut s'expliquer par le fait que le CFPS constitue, du point de vue des mathématiques, un système autarcique, du fait qu'il est tout à la fois dépourvu d'un amont (étant ignorant des savoirs qui précèdent) et d'un aval (sans savoirs ultérieurs à l'appropriation desquels ils pourraient participer) et qu'il revient donc aux apprenties, par le biais de ce qu'elles montrent de ce qu'elles savent de permettre ou d'empêcher les savoirs de défiler.

L'analyse des savoirs mathématiques présents au niveau de l'institution étant établie, il est maintenant possible de quitter ce premier niveau pour rejoindre ceux des investissements de savoirs effectifs qui se manifestent dans la Fps et des interactions de connaissances qui en découlent : ce que les quatre chapitres qui suivent vont maintenant œuvrer à rendre compte.

²⁵¹ Les parenthèses rappellent qu'enseignement des mathématiques de type didactique organisé n'avait lieu que pour la formation d'employée en cuisine AFP (au moment où les données ont été recueillies s'entend, vu que ce n'est plus le cas maintenant).

CHAPITRE 6 LE SOUTIEN APORTE A CA, APPRENTIE EMPLOYÉE DE CUISINE AFP, EN VUE DE SES COURS PROFESSIONNELS ET DE LA PASSATION DE SES EXAMENS DE FIN D'APPRENTISSAGE

INTRODUCTION

Le chapitre propose une première incursion dans les investissements de savoirs et les interactions de connaissances susceptibles d'apparaître dans la Fps, en prenant pour objet d'analyse, cinq séances de soutien qui, durant l'année 2009-2010, ont été apportées à une apprentie employée de cuisine AFP - dénommée "Ca" tout au long du chapitre - dont la formation se déroulait à l'externe du centre, dans une entreprise fribourgeoise pour la pratique et dans une école professionnelle pour les cours. La première partie du chapitre met en évidence les déterminations - essentiellement externes - qui ont présidé aux savoirs en jeu dans les interactions et caractérise les supports - des exercices relatifs au travail en cuisine - qui leur ont servi de contextualisations. L'analyse d'une technique enseignée en cours offre l'exemple d'un savoir mathématique que l'apprentie a été invitée à s'approprier pour les résoudre. La deuxième partie du chapitre rend compte de l'analyse des productions de l'apprentie issues des cinq séances en s'appuyant sur les interactions de connaissances effectives qui y ont eu lieu et qui ont été rapportées sous la forme de narrations²⁵². La narration de la première séance y est d'abord rendue dans son entier, entrecoupée, au terme de la résolution de chaque exercice, par l'interprétation des productions de Ca. Celles en provenance des quatre autres séances ont ensuite été rassemblées par *domaines d'expérience* (Vergnaud, 1991) auxquels réfèrent les exercices qui en sont à l'origine pour procéder à leur interprétation. Une synthèse des analyses est proposée en fin de chapitre.

INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS

Les déterminations des savoirs en jeu dans les interactions

Les observations et les évaluations portées par les enseignants de l'école professionnelle où Ca suivait ses cours de branches professionnelles et de culture générale ayant déterminé que cette apprentie éprouvait des difficultés d'apprentissage (et parmi lesquelles des difficultés en mathématiques), l'OAI du canton de Fribourg s'est résolu à faire appel au CFPS pour mettre sur pied un soutien devant l'aider à réussir sa deuxième année d'apprentissage.

Le système didactique qui a été créé à l'occasion de ce soutien doit son existence à un système d'enseignement externe au CFPS qui est l'école professionnelle de Ca²⁵³.

Le mandat, externe, qui a été attribué à ce soutien - suivi des devoirs, développement de stratégies d'apprentissage, progression en français et en mathématiques - et les conditions, internes, dans lequel il a été appelé à se dérouler - deux heures d'enseignement hebdomadaires - ont eu des incidences importantes sur les savoirs mathématiques qui ont fait l'objet des interactions. De septembre à décembre de l'année 2009, ce sont les exercices qui ont été donnés à Ca durant les cours comme devoirs qui ont constitué les principaux objets²⁵⁴ sur lesquels elles ont porté.

²⁵² Les narrations des cinq séances se trouvent dans l'annexe 2 de la thèse.

²⁵³ Les décalages typographiques distinguent les aspects descriptifs des propos, de ceux qui relèvent d'une visée analytique.

²⁵⁴ Il est utile de préciser qu'à l'époque, alors que je venais de faire mon entrée dans la Fps, je n'avais pas bien d'autres idées, tout enseignant spécialisé que j'étais, sur comment j'aurais pu m'y prendre de façon différente pour le faire : il s'agissait en toute priorité d'aider Ca à "faire" les exercices qu'elles ne parvenaient pas à résoudre par elle-même.

Ces exercices constituaient les tâches que Ca devaient apprendre à résoudre, des tâches qui, à une exception près (voir plus avant), étaient dépourvues, au-delà de ce que Ca a pu en montrer ou en dire par elle-même dans le cadre des séances, des techniques qui lui avaient été enseignées en cours pour y parvenir.

Le fait que ces deux heures de soutien aient été finalement en grande partie utilisées pour les devoirs a rendu impossible toute élaboration d'un projet d'enseignement appelé à se développer séance après séance, ce qui fait que les interactions qui ont eu lieu dans le "système soutien" ont essentiellement relevé d'un didactique improvisé : les séances, qui n'étaient pas toutes entières consacrées aux mathématiques, étaient disconnexes, les savoirs considérés changeant d'une semaine à l'autre, en fonction des exercices à accomplir.

Le système mis en place n'a toutefois pas tenu très longtemps, du fait que le travail réalisé en son sein n'a pas pu être reconnu à l'école professionnelle (et donc ni par Ca non plus, ni par le maître d'apprentissage, ni par l'OAI), les résultats de Ca, notamment en mathématiques, ne s'étant pas améliorés²⁵⁵. Un réaménagement du soutien a donc eu lieu à partir de janvier 2010, avec l'attribution d'un nouveau mandat²⁵⁶, portant cette fois-ci sur l'accompagnement de la réalisation d'un travail personnel approfondi²⁵⁷ et la préparation aux examens de fin d'apprentissage. Ce nouveau mandat devait en principe garantir qu'une meilleure continuité soit établie et qu'un véritable projet d'enseignement puisse ainsi être échafaudé.

Un suivi en mathématiques de quatre séances (une par semaine sur cinq semaines avec un saut d'une semaine) a dès lors été réalisé de janvier au début de mois de février. Les interactions ont essentiellement porté sur une batterie de sept exercices (voir plus avant), semblables à ceux que l'on pouvait trouver dans les procédures de qualification (examens) des apprenties employées de cuisine AFP des années précédentes.

Selon le nouveau mandat qui avait été fixé, il apparaissait en effet plus probant de travailler sur ce type d'exercices, plutôt que de recourir à d'autres supports qui auraient ensuite demandé à Ca tout un travail de transfert que j'imaginais très (trop) conséquent. Sachant que les examens auxquels référaient les exercices avaient été conçus et édités par l'ORTRA Gastro suisse²⁵⁸, c'est donc l'organisation faîtière responsable de la formation d'employée en cuisine AFP qui a constitué le système externe déterminant les savoirs mathématiques en jeu dans le "système soutien".

A nouveau par ignorance des techniques enseignées en cours pour résoudre ces exercices, mon intention première était de les soumettre à Ca pour repérer les procédés qu'elle allait mobiliser dans l'interaction, afin de pouvoir envisager ensuite comment et en quoi il serait possible de s'y appuyer pour l'aider à mieux le faire. En fin de compte, les deux premières ont simplement permis à Ca d'explorer quatre exercices sur les sept que j'avais préparés à son intention, tandis que la troisième a été toute entière dévolue à la résolution d'un cinquième exercice et que la quatrième a été consacrée au traitement des deux derniers. A partir de février, les séances de soutien auxquelles Ca a participé ont été entièrement occupées par la

²⁵⁵ Deux heures hebdomadaires pour effectuer les devoirs, progresser en français et en mathématiques et développer des stratégies d'apprentissage plus efficaces, c'était sans doute insuffisant pour que des progrès significatifs puissent être avalisés à l'externe.

²⁵⁶ Le soutien aux devoirs étant désormais attribué dans un autre cadre, également à raison de deux heures hebdomadaires, à une enseignante spécialisée en formation.

²⁵⁷ Le travail personnel approfondi (TPA) est un mini-mémoire écrit, que toute apprentie en formation AFP doit réaliser en deuxième année d'apprentissage sur un thème spécifique et qu'elle doit aussi présenter oralement : c'est ce travail qui sert d'évaluation finale aux cours de culture générale, en lieu et place d'un examen écrit ou oral.

²⁵⁸ Toutes les questions d'examens sont conçues en allemand par Hotel & Gastro *formation* à Weggis (Lu) et éditées par Deutschschweizerische Berufsbildungsämter-Konferenz (DBK) à Lucerne. Elles font ensuite l'objet d'une traduction à l'intention des écoles professionnelles de Suisse Romande.

rédaction du travail personnel approfondi qu'elle devait concevoir en guise d'évaluation de ses cours de culture générale et nous n'avons finalement pu nous rencontrer, autour des mathématiques, qu'à l'occasion d'une cinquième et ultime séance²⁵⁹, qui s'est déroulée au mois de mai 2010.

Le dispositif réaménagé n'a donc, pas plus que le précédent, donné lieu à un enseignement des mathématiques s'approchant un tant soit peu du didactique organisé. On verra par la suite que, dans les cinq séances autour desquelles il s'est articulé, il a tout au plus permis à Ca de mettre en œuvre et confronter ses propres savoirs aux exercices qui lui ont été proposés, sans qu'il ne soit possible de déterminer ce qu'elle a bien pu en retirer²⁶⁰.

Néanmoins, les difficultés en mathématiques repérées par l'école professionnelle, qui n'ont pu être qu'effleurées dans le cadre du soutien mis en place, n'ont pas pour autant empêché Ca de réussir ses examens et d'obtenir avec succès son AFP d'employée en cuisine. Cela signifiait donc que les mathématiques en jeu dans la formation, dont l'enseignement répondait aux exigences conjointes de l'ordonnance fédérale établie par l'OFFT/SEFRI et le plan de formation élaboré par l'ORTRA Gastro suisse, n'étaient manifestement pas déterminantes pour l'obtention d'une telle réussite²⁶¹. La chose est alors assez cocasse, si l'on se souvient (voir chapitre précédent) que c'était pourtant cette inscription dans des documents noosphériques qui, au CFPS, avaient permis d'assurer la pérennité d'un enseignement des mathématiques dans les cours de branches professionnelles donnés aux apprenties employées de cuisine AFP.

En découvrant maintenant que l'apprentissage de ces mathématiques ne constituait nullement un incontournable pour réussir cette formation et accéder au métier lui correspondant, il était possible d'en déduire que la détermination externe représentée par ces documents officiels était avant tout de l'ordre du symbolique, ce qui n'enlevait pourtant rien au poids qu'elle exerçait, malgré tout, à l'interne du centre.

Les contextualisations de savoirs supports aux interactions

Forme et contenus des exercices de mathématiques issus des procédures de qualification

Les sept exercices qui ont servi de supports aux interactions durant les quatre premières séances de soutien ont donc été établis de façon à correspondre à ceux que l'on rencontrait dans les procédures de qualification soumises aux apprenties employées de cuisine AFP au terme de leur formation. La cinquième séance avec Ca s'est d'ailleurs déroulée directement autour d'une procédure de qualification effective, comprenant six autres exercices, qui avait été proposée à Ca comme évaluation et avait servi d'examen blanc dans ses cours.

Les exercices de mathématiques figurant dans les procédures de qualification faisaient tous référence au contexte de la cuisine. Ils proposaient dans tous les cas une ou plusieurs quantités d'ingrédients qui devaient être transformées d'une façon spécifique. Il s'agissait donc exclusivement d'exercices numériques qui se situaient au niveau des grandeurs mesurées.

²⁵⁹ Ca avait apporté une épreuve d'examen qu'elle avait dû effectuer sous forme d'évaluation à l'école professionnelle et à laquelle elle n'avait pas obtenu la moyenne requise. Ayant reçu un 3 sur un maximum de 6 (la moyenne étant fixée à 4), elle souhaitait que l'on puisse en faire la correction, en guise de préparation aux examens effectifs qui s'approchaient.

²⁶⁰ Dans la perspective de l'apprentissage du couple enseignant-enseigné (Conne, 1998), et au vu des analyses que ces séances m'ont permis d'effectuer, il va sans dire que j'ai été le grand gagnant dans l'affaire !

²⁶¹ En fait, j'apprendrai beaucoup plus tard qu'un échec dans une procédure de qualification d'employée de cuisine AFP ne peut être prononcé qu'à partir d'une note inférieure à 4 (sur un maximum de 6) dans l'examen pratique ou d'une note inférieure à 4 dans la moyenne générale qui recoupe l'ensemble des moyennes obtenues durant les quatre semestres de formation, la note des examens théoriques et celle des examens pratiques.

Ingrédients pour 2 litres :

<i>Eau</i>	700 g
<i>Zeste de citron</i>	10 g
<i>Jus de citron</i>	50 g
<i>Manque (pulpe de fruit)</i>	350 g
<i>Crème entière</i>	200 g

Sucre	125 g
Fécule de maïs	15 g
Melon (pulpe de fruit)	450 g
Vin blanc	100 g
Citronnelle	15 g

Calculez les ingrédients nécessaires pour **5 litres** de potage froid au melon et à la manque :

Espace pour les calculs et les notes :

[illegible]

<i>Eau</i>	<i>g</i>
<i>Zeste de citron</i>	<i>g</i>
<i>Jus de citron</i>	<i>g</i>
<i>Manque (pulpe de fruit)</i>	<i>g</i>
<i>Crème entière</i>	<i>g</i>

<i>Sucre</i>	<i>g</i>
<i>Fécule de maïs</i>	<i>g</i>
<i>Melon (pulpe de fruit)</i>	<i>g</i>
<i>Vin blanc</i>	<i>g</i>
<i>Citronnelle</i>	<i>g</i>

Ces exercices étaient formatés de la manière suivante (cf. figure n°7) : un énoncé précisant la liste d'ingrédients à transformer, la question (ou la tâche) définissant la ou les transformations à accomplir, un espace réservé aux calculs à effectuer²⁶² et un autre espace pour y inscrire les résultats découverts. On y trouvait parfois des indications d'ordre lexical, précisant la signification de certains mots, comme le fait par exemple qu'un fruit entier corresponde à son "poids brut", les déchets ou la partie non-comestible à sa "tare" et la partie comestible du fruit à son "poids net". Y figurait aussi occasionnellement une technique de résolution décrivant la façon de transformer une première quantité, qu'il s'agissait ensuite de reconduire de la même manière sur les autres quantités pour produire les résultats attendus²⁶³.

²⁶³ S'agissant d'un examen, la chose est plutôt surprenante, un peu comme si l'on voulait par ce biais favoriser la réussite des apprenties (effet Topaze). Une hypothèse explicative tient au fait que les examens proposés aux apprenties en formation AFP sont conçus à partir de ceux élaborés pour les apprenties en formation CFC. En suggérant une technique de résolution, on vise ainsi à réduire la complexité de l'exercice, tout en maintenant la tâche de cuisine à laquelle il correspond dans l'examen

Analyse conceptuelle des exercices ayant servis de supports aux séances

En référence à la TCC de Vergnaud (ibid.), les treize exercices que Ca a résolus durant les séances peuvent faire l'objet d'une analyse conceptuelle visant à en déterminer la complexité. Il s'agit pour cela de caractériser le domaine d'expérience dont ils relèvent, la structure relationnelle qui les fondent et les valeurs numériques qu'ils comprennent.

Domaines d'expérience.

Les treize exercices peuvent être répartis en quatre domaines²⁶⁴ d'expérience :

Domaine n°1 : le complément de fiches d'inventaires (2 ex. sur 13).

Il s'agit d'ajouter ou de soustraire des quantités n d'ingrédients à des quantités m d'ingrédients figurant sur une fiche d'inventaire (exemple traité durant la quatrième séance de soutien avec Ca) :

Vous allez chercher 3,5 l d'huile d'arachide et 500 g de crème en poudre à la cave. A votre arrivée, les fiches d'inventaire précisent qu'il reste 45 l d'huile d'arachide et 2,300 kg de crème en poudre. Combien restera-t-il d'huile d'arachide et de crème en poudre après votre passage ?

Domaine n°2 : le calcul de poids (4 ex. sur 13).

Il s'agit de déterminer le poids brut ou le poids net d'une quantité d'ingrédients, soit en connaissant la perte encourue lors d'une préparation en cuisine, soit, lors d'une pesée, en connaissant le poids du récipient dans lequel sont déposés les ingrédients (exemple traité durant les première et deuxième séances de soutien avec Ca) :

On épluche un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, on découpe les carottes en dés, ce qui entraîne 200 g de déchets supplémentaires. Quelle quantité de carottes découpées obtient-on au final ?

Domaine n°3 : la transformation de quantités d'ingrédients d'une recette (3 ex. sur 13).

Il s'agit, partant des quantités d'une recette définie pour un nombre n de personnes ou pour une quantité x d'un produit, de trouver les quantités à prévoir pour un nombre m de personnes ou pour une quantité y du produit (exemple traité durant la troisième séance de soutien avec Ca) :

Pour faire un gratin dauphinois pour 4 personnes, une recette indique qu'il faut : 1 gousse d'ail, 1,200 kg de pommes de terre pelées et coupées en fine tranches, 100 g de lard, 150 g de fromage râpé, 4 dl de lait, 1 cuillère à café de sel et 10 grammes de beurre frais. Calculez les quantités de chaque ingrédient qu'il faudra pour faire un gratin pour 10 personnes.

Domaine n°4 : le calcul de coûts.

Il s'agit d'une part, partant d'une ou plusieurs quantités d'ingrédients et d'un coût unitaire, de déterminer son ou leur coût total et, d'autre part, connaissant le coût de base d'un ingrédient, de trouver son coût effectif, tenant compte d'un rabais ou d'une plus-value (exemple traité durant la quatrième séance de soutien avec Ca) :

L'épicier vous livre :

- 1 cageot de 20 kg de pruneaux à CHF 2.20/kg
- 1 caisse de salades comprenant 8 pièces à CHF 1.10 la pièce
- 5 radis blancs à CHF 0.90 la pièce
- un assortiment de légumes pour le potage à CHF 4.20
- 500 g de raisin à CHF 4.40 le kg

Quel est le montant de la facture à payer ?

CFC. Ceci suppose toutefois que les apprenties parviennent à se saisir de la technique en question, ce qui, comme on aura abondamment l'occasion de s'en rendre compte dans l'analyse des interactions qui suivent, est une parfaite illusion.

²⁶⁴ Il s'agit des quatre domaines que l'on retrouvait dans les procédures de qualification alors en ma possession.

Structures relationnelles.

Les exercices sont soit de structure de base additive, soit de structure de base multiplicative (Vergnaud 1981)

Exercices à structure de base additive (7 ex. sur 13).

6 exercices sont de type ET^+E ou ET^-E avec recherche de l'état final. 1 exercice est de type EEE également avec recherche de l'état final.

4 exercices impliquent plusieurs transformations à effectuer, du fait qu'ils comportent plusieurs quantités d'ingrédients.

4 exercices incluent des grandeurs mesurées exprimées par des unités différentes, ce qui fait qu'une ou plusieurs relations de type "multiplication" ou "division quotient" (Vergnaud, op.cit.) viennent s'articuler à la structure de base (exemple traité durant les première et deuxième séances de soutien avec Ca) :

On épluche un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, on découpe les carottes en dés, ce qui entraîne 200 g de déchets supplémentaires. Quelle quantité de carottes découpées obtient-on au final ?

En donnant l'état initial du poids des carottes qui est de 5 kg et la perte de 450 g consécutive à l'épluchage, la recherche du premier état final implique d'enlever 450 g à 5 kg. Comme les mesures sont exprimées en unités différentes, il est nécessaire d'établir une conversion pour transformer en grammes la quantité de 5 kg ou pour transformer en kilos la quantité de 450 g. La première relation est de type "multiplication", tandis que la seconde est de type "division quotient".

kg	g
1	1000
5	x
multiplication	

kg	g
1	1000
x	450
division quotient	

On remarque aussi que si c'est la première conversion qui a été pratiquée (les kilos ont été transformés en grammes), la recherche du second état final consécutive à la découpe en dés n'entraînera pas de nouvelle relation multiplicative, puisque la quantité à soustraire est donnée en grammes. Par contre, si l'on a opté pour la seconde conversion (les grammes ont été transformés en kilos), il faudra en réaliser une seconde, impliquant une nouvelle relation qui sera soit de type "multiplication", si l'on transforme en grammes les 4,550 kg relatifs à la première perte, soit de type "division quotient", si l'on transforme en kilos les 200 g à soustraire. Ce n'est dès lors pas seulement une, mais bien deux relations multiplicatives qui viennent ainsi se rajouter à la structure additive de base de l'exercice.

2 exercices impliquent encore une perte ou un rabais exprimé en pour cent (exemple donné comme devoir à Ca au terme de la première séance) :

A la boucherie, une pièce de bœuf coûte 72 francs. En fin de journée, le boucher offre un rabais de 25 %. Quel sera le nouveau prix de cette pièce de bœuf ?

Considérant l'état initial du prix de la pièce de bœuf de 72 francs et la transformation sous la forme d'un rabais de 25 %, le calcul de l'état final relève là aussi d'une soustraction²⁶⁵. Toutefois, comme le rabais est exprimé en %, il sera nécessaire, au

²⁶⁵ Une opération qu'il est possible de réaliser de manière toute simple sur une calculette, en appuyant successivement sur les touches /7/2/-/2/, /5/%/, ce qui donne directement le résultat de 54. Voir même mieux encore, puisqu'en appuyant encore une fois sur la touche /=/, on obtient (- 18), soit le rabais en francs, donné avec son signe (-), qui est accordé par le boucher ! Le

préalable, de chercher la valeur en francs des 25 %, ce qui implique l'ajout d'une relation multiplicative, de type "quatrième proportionnelle" (Vergnaud, *ibid.*), pour le faire. Notons qu'il est également possible de procéder d'une façon inverse, soit en envisageant d'abord les 72 francs de l'état initial comme les 100 % du prix. On procédera alors d'abord à la soustraction de 25 à 100, pour ne réaliser que dans un second temps la transformation multiplicative de type "quatrième proportionnelle" :

%	CHF
100	72
25	x
quatrième proportionnelle	

%	CHF
100	72
75	x
quatrième proportionnelle	

Exercices à structure de base multiplicative (6 ex. sur 13).

3 exercices, soit ceux qui relèvent du domaine de la transformation de quantités d'ingrédients d'une recette, sont de type "quatrième proportionnelle" du fait que la valeur unitaire n'y est pas donnée. Etant donné qu'ils comprennent tous une liste d'ingrédients, il y a plusieurs calculs à effectuer à chaque fois, mais sur la base d'une transformation qui est toujours la même.

3 exercices, soit ceux qui relèvent du domaine du calcul de coûts, sont de type "multiplication", puisque la valeur unitaire est à chaque fois donnée. Les exercices comportant également des listes d'ingrédients, il y a à nouveau plusieurs calculs à effectuer, mais sur la base de transformations différentes (car liées à la valeur unitaire de chaque produit). Quand l'unité de mesure relative à la quantité d'ingrédients diffère de celle définissant la valeur unitaire, une relation multiplicative de type "multiplication" ou de type "division quotient" vient s'ajouter à la relation de base pour effectuer les conversions. Enfin, dans les 3 exercices, la demande de rechercher le coût total des ingrédients y ajoute une relation additive supplémentaire, de type EEE, comprenant plusieurs états initiaux, avec recherche de l'état final.

Valeurs numériques.

Les nombres qui figurent dans les énoncés des exercices sont compris entre 0 et 10'000.

5 exercices comprennent uniquement des nombres naturels.

8 exercices comportent également des décimaux où 6 sont donnés en code décimal et 2 en code fractionnaire (dans le cas des pourcentages).

4 exercices (sur les 12 qui comprennent une relation multiplicative) impliquent des rapports fondés sur des relations numériques naturelles.

3 exercices (sur les 12 qui comprennent une relation multiplicative) impliquent des rapports fondés sur des relations numériques naturelles et décimales.

4 exercices (sur les 12 qui comprennent une relation multiplicative) impliquent des rapports fondés sur des relations numériques décimales.

1 exercice (sur les 12 qui comprennent une relation multiplicative) implique des rapports fondés sur des relations numériques rationnelles.

subterfuge tient au fait que la calculette garde en mémoire la première opération effectuée, à savoir 72 -, et la reconduit, au moment où l'on appuie une seconde fois sur la touche =, sur le résultat de 54 pour donner (- 18).

Le tableau n°11 donne un récapitulatif de l'analyse conceptuelle des 13 exercices. Il indique :

- le numéro de la séance et celui de l'exercice ;
- leur domaine d'expérience : CFI (complément de fiches d'inventaires), CP (calcul de poids), TQIR (transformation de quantités d'ingrédients d'une recette), CC (calcul de coût) ;
- leur structure relationnelle (structure de base et relation/s combinée/s) : additive EEE, additive ET⁺E, additive ET-E, dans les trois cas avec recherche de l'état final ; multiplicative M (multiplication), multiplicative DQ (division quotition) et multiplicative QP (quatrième proportionnelle) ;
- les valeurs numériques en jeu : taille des nombres et appartenance des nombres et des rapports à N, D ou Q.

Domaine d'expérience		Structure relationnelle		Valeurs numériques	
Séance/ex.	Domaine	Structure de base	Relation/s combinée/s	Nombres	Rapport
1-2/1	TQIR	Multiplicative/QP	---	N : 0-1000	Q
1-2/2	CP	Additive/ET-E	Multiplicative/M ou DQ	N, D : 0-1000	N
1-2/3	CP	Additive/ET-E	Multiplicative/M ou DQ	N : 0-1000	N
1-2/5	CC	Additive/ET-E	Multiplicative/QP	N, D (%) : 0-100	D
3/4	TQIR	Multiplicative/QP	---	N : 0-1000	D
4/6	CC	Multiplicative/M	Multiplicative/M ou DQ Additive / EEE	N, D : 0-1000	N, D
4/7	CFI	Additive/ET-E	Multiplicative/M ou DQ	N, D : 0-1000	N
5/1	TQIR	Multiplicative/QP	---	N : 0-10'000	D
5/2	CFI	Additive/ET-E	---	N, D : 0-1000	---
5/3	CP	Additive/ET-E	Multiplicative/M ou DQ	N : 0-1000	N
5/4	CP	Additive/ET-E	Multiplicative/QP	N, D (%) : 0-100	D
5/5	CC	Multiplicative/M	Multiplicative/DQ Additive / EEE	N, D : 0-1000	N, D
5/6	CC	Multiplicative/M	Multiplicative/DQ Additive / EEE	N, D : 0-1000	N, D

Tableau n°11 - Récapitulatif des exercices supports aux interactions durant les cinq séances de soutien avec Ca

12 exercices sur 13 comportent au moins une relation multiplicative. Dans les 3 cas où cette relation est unique, elle est de type "quatrième proportionnelle", alors que dans les 9 autres, elle se combine à une, voire à deux autres relations. Ces 12 exercices peuvent donc être considérés comme des *problèmes complexes* (Vergnaud, op.cit.).

Les algorithmisations de savoirs en jeu dans les interactions

Un exemple de technique enseignée dans le cadre des cours professionnels

La figure n°8 présente un exemple de technique qui a été enseignée à Ca dans le cadre de l'école professionnelle : elle est la seule à laquelle j'ai eu un accès direct²⁶⁶ durant les séances de soutien que nous avons passées ensemble.

²⁶⁶ Par le biais d'une fiche que Ca avait amenée dans le cadre du soutien, que je n'ai malheureusement pas conservée, et qui a été reconstituée d'après mémoire et des notes que j'en avais prises.

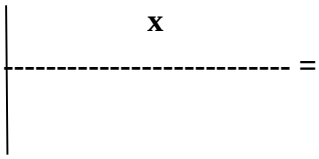
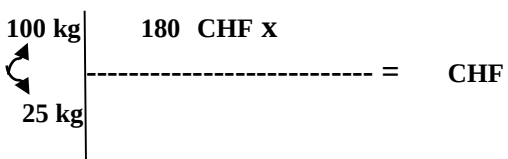
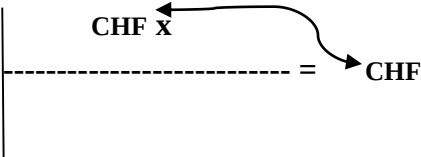
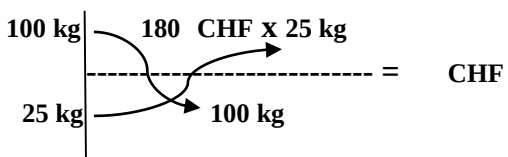
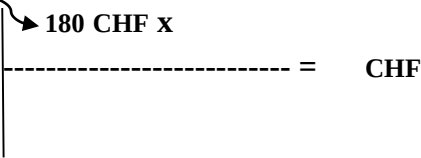
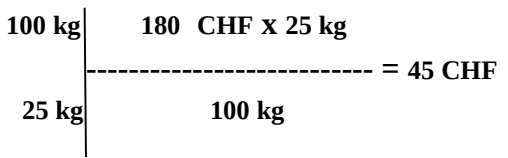
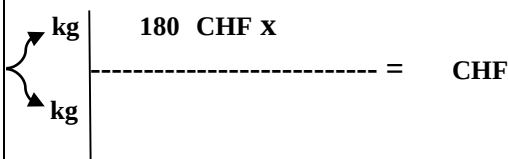
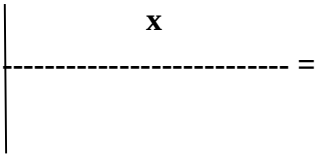
100 kg de pommes de terre coûtent CHF 180.- Combien doit-on payer pour en acheter 25 kg ?	
0° dessiner le diagramme suivant (un trait vertical, un horizontal, un signe + et un signe =)	4° chercher dans l'énoncé les nombres correspondant à cette autre unité et les placer dans le diagramme
	
1° chercher dans l'énoncé l'unité de la quantité à découvrir et la placer dans le diagramme	5° effectuer deux déplacements croisés
	
2° chercher dans l'énoncé le nombre correspondant à cette unité et le placer dans le diagramme	6° effectuer les calculs (180 x 25 / 100)
	
3° chercher dans l'énoncé l'autre unité qui s'y trouve et la placer dans le diagramme	7° utiliser le même procédé pour résoudre un nouvel exercice
	

Figure n°8 - Technique du "produit en croix" enseignée à Ca dans le cadre des cours professionnels

Intitulée "règle de trois" (alors que si l'on en réfère à Rouche (1992), il s'agit plutôt d'un produit en croix²⁶⁷), elle a été spécifiquement conçue pour résoudre des exercices CC comprenant une structure de base multiplicative/QP. Partant d'un énoncé placé en tête de fiche, la technique s'appuie sur un diagramme composé de deux traits placés en croix (comme pour la division en colonne) d'un signe (x) et d'un signe (=).

L'originalité de la technique tient au fait qu'elle se développe sur plusieurs cases (comme dans une bande dessinée) qui représentent les étapes à suivre pour en faire un usage adéquat. La première case présente le diagramme vierge de toute donnée. Les cinq cases qui suivent détaillent à l'aide d'indications verbales et de flèches comment effectuer la pose des données figurant dans l'énoncé, de façon à préparer les deux opérations qui devront être accomplies dans l'avant dernière case, à savoir une multiplication, suivie d'une division. La dernière case présente le diagramme à nouveau vierge, prêt à être employé pour la résolution d'un nouvel exercice CC.

²⁶⁷ La différence d'acception du terme "règle de trois" qui avait déjà mise en évidence au chapitre 3 entre Vergnaud et Rouche se retrouve également dans le contexte de la Fps : on verra en effet plus avant au chapitre 8 que la "règle de trois" enseignée par le MSP de cuisine au CFPS correspond bien à la signification qui lui est donnée par Rouche dans ses ouvrages (1992, 1998, 2006).

Cette technique, mise au point par un enseignant de l'école professionnelle, a prétention d'algorithme, puisqu'elle a été conçue pour résoudre toute une classe d'exercices CC de structure de base multiplicative/QP. Elle montre le soin tout particulier mis à ce que ce soit la technique qui prenne en charge la pose correcte dans le diagramme des nombres et des unités figurant dans l'énoncé. On pourrait parler à ce propos "d'algorithme d'implémentation de données" dans un autre algorithme, puisque son rôle est d'assurer leur bon positionnement dans le diagramme du produit en croix auquel est délégué l'ordre des calculs à effectuer.

La confection d'un tel algorithme s'inscrit manifestement comme une réponse, d'ordre didactique, au fait que l'apprentie n'est pas en mesure de contrôler la pose adéquate des données dans le diagramme correspondant au produit en croix : elle vise donc à faire en sorte que ce soit l'algorithme qui assume ce contrôle, plutôt que l'apprentie qui devra en faire usage. On ne peut cependant manquer de relever la précarité de l'entreprise²⁶⁸ - et ce, pour autant bien sûr, que les apprenties parviennent à s'emparer de la technique - puisqu'il suffit d'une modification bénigne de l'énoncé - ou s'il contient, comme c'est fréquemment le cas, toute une liste d'ingrédients - pour qu'elle soit instamment mise à défaut, du fait qu'on ne saura plus dès lors quels nombres et quelles unités prendre en compte pour les y introduire.

Cet exemple de technique enseignée dans le cadre de l'école professionnelle vient renforcer les analyses effectuées au chapitre 5 qui mettaient déjà en évidence une conception résolument techniciste de l'enseignement des mathématiques dans la Fps. On observe ici que cette conception tend à se renforcer quand les apprenties ne parviennent pas à s'approprier une technique permettant de résoudre les exercices qui figureront ultérieurement dans les procédures de qualification. Celle-ci se voit doublée d'une autre technique qui vise à surseoir ce qui fait défaut. Le problème, c'est qu'en agissant de la sorte, la technique gagne en complexité (il y a un plus grand nombre de règles à prendre compte), le contrôle de son déroulement est soustrait à celle qui doit l'appliquer, tandis que son efficacité (le fait qu'elle aboutira) reste tributaire de toutes sortes d'aléas (dès que l'énoncé comprend plus de trois quantités, par exemple)²⁶⁹.

INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : LA SÉANCE AVEC CA DU 5 JANVIER 2010

Note préalable : Dans les analyses, les calculs effectués sur la calculatrice sont rendus, de gauche à droite, en suivant les touches qui ont successivement été utilisées et qui sont séparées les unes des autres par le signe "/". Les résultats intermédiaires qui s'affichent tour à tour sur l'écran ne sont pas retranscrits.

Durant cette première séance, Ca s'est trouvée en situation de résoudre trois exercices. La narration qui en réalise le compte rendu (cf. annexe 2) est proposée dans son intégralité. Elle est entrecoupée, après la résolution de chaque exercice, par l'interprétation des productions²⁷⁰.

Narration (1^{ère} partie)

Cela se passe un mardi après-midi. Je travaille seul en coaching avec une apprentie (Ca). J'ai apporté quelques problèmes de maths que j'ai créés en fonction des problèmes que j'ai

²⁶⁸ On peut parler à ce titre d'un *effet de contrat* que Brousseau (1986) a désigné par le terme de *glissement métacognitif* où : [...] l'affirmation faite à l'élève qu'il existe une méthode automatique (ou presque) pour établir une famille de résultats, même si cela est vrai, tend à le décharger de la responsabilité fondamentale de son travail intellectuel, bloque donc la dévolution du problème, ce qui fait échouer le plus souvent l'activité [...]. (p.83)

²⁶⁹ On verra plus loin que Ca cherchera à mettre en œuvre la technique du produit en croix à diverses reprises, mais sans recourir au diagramme, ni aux règles qui président à la pose des données, et sans parvenir au résultat attendu.

²⁷⁰ Dans la partie interprétative, les décalages typographiques visent à distinguer ce qui concerne plus spécifiquement l'interprétation des productions, de l'analyse à laquelle cette interprétation donne lieu.

trouvés sur des examens de fin de formation des années précédentes. Je conviens avec Ca que je vais lui demander de résoudre quelques problèmes en vue de préparer les examens qu'elle aura à passer en juin. Je lui dis d'essayer de les résoudre seule, de manière à ce que je puisse essayer de comprendre comment elle s'y prend pour le faire et afin que je puisse, le cas échéant, mieux l'aider après coup. Elle commence par résoudre le problème n°1.

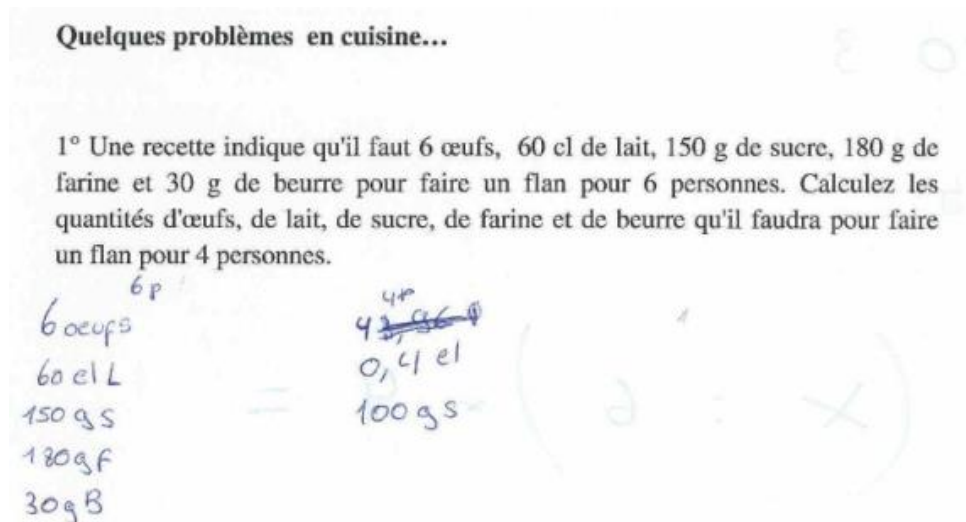


Figure n°9 - Résolution par Ca de l'exercice n°1 le 05.01.10

Après avoir lu l'énoncé, Ca commence par récrire (en colonne) toutes les quantités qui figurent dans la donnée, avec l'initiale de ce que la quantité désigne : 6 œufs, 60 clL, 150 gs,... Au-dessus de la colonne, elle écrit 6 p et 4 p un peu à côté. Puis, elle commence à taper des calculs sur la calculette (je ne parviens pas bien à voir ce qu'elle fait). En face de 6 œufs et au-dessus de 4p, elle finit par écrire 4, puis elle recommence à taper, biffe son 4, puis écrit 3, 96 (je ne sais pas si c'était 3,96 ou 3 et 96 séparément). Ca est très hésitante, elle reprend la calculette et dit qu'elle a oublié la formule... Je lui demande de m'expliquer comment elle s'y est prise pour résoudre son problème. Elle me dit qu'elle a essayé de faire $6 : 4 \times 6 =$, mais que cela ne va pas, parce qu'elle trouve 9 et qu'elle devrait trouver quelque chose de plus petit que 6 (pour 4 personnes). J'essaie encore de lui demander comment elle a fait pour aboutir à 3,96, mais elle me dit qu'elle ne sait plus, en indiquant qu'elle a déjà oublié les calculs qu'elle vient de faire.

Je lui demande de continuer. Ca reprend la calculette, tipe à nouveau quelques calculs que je ne parviens pas à observer, puis note 0,4 cl en face du 60 clL et en-dessous de ses propositions précédentes. Elle est toujours très hésitante, je dois beaucoup l'encourager à continuer, à essayer. Ca me dit qu'elle hésite entre deux formules, puis trois, dont une où elle doit diviser par 100. Je lui demande si elle peut m'en communiquer une. Elle évoque $6 \times 60 : 4$, qui ne fonctionne toujours pas, et elle ne se rappelle plus bien des autres. Elle poursuit sur la calculette, en inscrivant finalement 100 gs à côté des 150 gs, mais elle ne sait pas si sa réponse est correcte et s'arrête.

Interprétation des productions.

L'exercice est un exercice TQIR, de structure de base multiplicative/QP, comprenant des nombres naturels inférieurs à 1000 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique rationnelle.

Les cinq mesures d'ingrédients accompagnées de leur unité (cf. figure n°3) disposées en colonne, ainsi que les inscriptions 6p et 4p qui figurent juste au-dessus, montre que Ca a bien identifié les différentes transformations que l'exercice demande de réaliser.

S'agissant de la transformation des 6 œufs, Ca a tenté à plusieurs reprises d'appliquer une "formule" apprise en cours qui se traduit par deux opérations successives : une division et une multiplication. Tant l'interprétation des deux résultats successifs qu'elle a inscrits sur sa fiche : 4, comme résultat de $/6 \div /6/x/4/=/$ (ou de $/6/x/4 \div /6/=/$) sur la calculette et 3,96 (contraction de 3,9999996 affiché sur l'écran), comme résultat de $/4 \div /6/x/6/=/$ que l'expression du calcul $/6 \div /4/x/6/=/$ qui lui a donné 9 et qu'elle a refusé, donnent à penser que la "formule" en question correspond à la technique du "produit en croix".

Les hésitations de Ca dévoilent qu'elle ne contrôle pas l'ordre dans lequel elle doit positionner les nombres dans la technique et l'on voit que le diagramme qui lui avait été enseigné en cours n'a pas été réinvesti pour l'aider à le faire.

Cependant, le refus du 9 (tout comme les autres nombres qui précèdent) montre que Ca exerce bel et bien un contrôle sur les résultats qu'elle doit obtenir. Dans le cas du 9, ce contrôle pourrait provenir du fait que l'exercice proposant la réduction d'une recette prévue pour six personnes à une recette pour quatre personnes, le résultat de la transformation ne peut aboutir à une quantité supérieure à celle de départ (9 œufs dans la recette pour quatre contre 6 œufs dans la recette pour six).

Pour la transformation des 60 cl de lait, l'explicitation du $/6/x/6/0 \div /4/=/$ "qui ne fonctionne toujours pas" montre que Ca a de nouveau essayé de mettre en œuvre une "formule" apprise en cours, mais où l'ordre des opérations a changé : d'abord une multiplication, ensuite une division.

C'est un peu comme si Ca se livrait à un procédé "essai-erreurs" : elle sait qu'il y a une multiplication et une division à accomplir et juge ensuite sur pièce le résultat produit : le 90 issu du calcul tapé sur la calculette, qui correspond à un accroissement de la quantité de départ, est refusé, ce qui marque bien qu'il a été contrôlé.

Le résultat 0,4 cl qui sera finalement retenu, de même que les propos tenus par Ca au sujet d'une division par 100, laisse en outre supposer que la mesure exprimée en centilitres (cl) induit chez elle l'idée d'effectuer une conversion - une transformation des cl en l ? - qui a pu être accomplie de la sorte : $/6/0 \div /6/x/4 \div /1/0/0/=/$ (ou $6/0 \div /1/0/0 \div /6/x/4/=/$) qui donne 0,4 sur la calculette.

Vis-à-vis de la transformation des 150 g de sucre, le résultat de 100 qui figure sur la fiche donne à penser que Ca a une nouvelle fois recouru à la "formule" apprise en cours, en tapant : $/1/5/0 \div /6/x/4/=/$ (ce qui donne 100 sur la calculette).

Le procédé essai-erreurs semble se poursuivre et le fait que la "formule" ait été cette fois-ci appliquée de manière correcte n'est manifestement pas contrôlé par Ca, auquel cas elle l'aurait vraisemblablement reconduite sur les deux autres mesures d'ingrédients restant à transformer (ce qu'elle n'a pas fait). Le résultat de 100 n'est toutefois pas refusé (étant inférieur à la mesure de départ de 150 g, il reste compatible avec l'idée d'une réduction de quantité d'ingrédients), mais il n'est pas non plus validé.

Narration (2^{ème} partie)

Je lui propose de laisser la résolution de son problème en l'état et de passer à un autre (tout en insistant pour que cette fois-ci, elle écrive les calculs sur sa feuille avant de les taper sur la calculette). Elle accepte du bout des lèvres et je lui donne un deuxième exercice.

Au terme de sa lecture, Ca écrit tout de suite un grand signe + en-dessous de l'énoncé, puis, en ligne : 500 g + 800 g + 1,200 + 850 g + 1000 kg + 1,150 kg qu'elle tape sur la calculette pour trouver 3152,35 qu'elle inscrit sur sa feuille en notant 3152,35 kg.

2° Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

$$500g + 800g + 1,200 + 850g + 1000kg + 1,150kg = 3152,35kg$$

Figure n°10 - Résolution par Ca de l'exercice n°2 le 05.01.10

Comme j'ai observé qu'elle semblait très surprise de ce résultat et qu'elle ne regardait jamais les totaux partiels qui apparaissaient sur sa calculette au fil des opérations, je prends la calculette en lui demandant de bien regarder ce qui se passe. Je commence par taper $500 + 800 + 1,200$ (ce qui aboutit à 1301,2), puis recommence une fois en tapant $500 + 800 + 1200$ (ce qui aboutit à 2500). En voyant 2500 sur l'écran, elle prononce "deux kilos cinq cents". Je lui demande de me dire, si elle a vu la différence entre les deux calculs, mais elle répond par la négative. Je recommence une fois, ce qui lui permet de remarquer que j'ai utilisé la touche (.) dans le premier cas et pas dans le second. Je lui demande d'effectuer les deux procédés, ce qu'elle fait sans difficulté, puis lui propose de laisser ce deuxième problème en l'état et de passer à la résolution d'un troisième.

Interprétation des productions.

L'exercice est un exercice CP, de structure de base additive/EEE, à laquelle est associée une relation multiplicative/M ou DQ (pour les conversions), comprenant des nombres naturels et décimaux inférieurs à 1000 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique naturelle.

Le signe "+" que Ca a inscrit sous l'énoncé (cf. figure n°4) indique qu'elle a bien saisi qu'il fallait recourir à une addition pour résoudre l'exercice.

L'écriture du calcul figurant sur la fiche montre que les trois quantités de l'énoncé mesurées en grammes et représentées par un nombre de trois chiffres ont été reprises telles quelles avec l'abréviation "g". Par contre, deux des trois quantités de l'énoncé mesurées en kilos ont été transformées : 1,2 est devenu 1,200 et 1 est devenu 1000. De cette façon, les trois nombres signifiant des kilos comportent désormais quatre chiffres (1,150 qui comprenait déjà quatre chiffres est resté 1,150). Contrairement à 1,200 et 1,150, 1000 ne présente pas de virgule, tandis que 1000 et 1,150 sont accompagnés de l'abréviation "kg", alors que 1,200 ne l'est pas.

Au moment de devoir lire le nombre 2500 sur la calculette, Ca prononce "deux kilos cinq cents" et non "deux mille cinq cents".

Il semble que les nombres composés de trois chiffres correspondent à des grammes pour Ca et que les nombres représentant des kilos sont composés de quatre chiffres, indépendamment du fait que ce nombre possède ou non une virgule. 1,200 serait ainsi envisagé par Ca comme un poids de "un kilo deux cents", au même titre que 1000 kg ou que 1,150 kg seraient respectivement considérés comme des poids de "un kilo" et de "un kilo cent cinquante".

Cette hypothèse est renforcée par la lecture qu'a faite Ca du nombre 2500 apparu sur l'écran de la calculette, à savoir "deux kilos cinq cents". Elle permet en outre d'interpréter la surprise de Ca devant le résultat final de 3152,23 qu'apporte la calculette, comme un décalage de forme entre un nombre qu'elle attendait et le nombre qui apparaît : si 3152 est considéré par Ca comme signifiant "trois kilos et cent cinquante-deux grammes", il est en effet difficile pour elle de comprendre ce que pourrait bien signifier les deux chiffres 2 et 3 qui apparaissent après la virgule.

Narration (3^{ème} partie)

A nouveau, Ca écrit un signe - le signe – cette fois-ci - juste en-dessous de l'énoncé, puis 5 – 650 qu'elle projette de réaliser sur la calculette. Et là, sans doute une dizaine de fois consécutives, elle se met à taper 5 – 650 = qui, à chaque fois, aboutit au résultat de – 645. Surprise, incompréhension, désarroi, puis découragement semblent se lire sur son visage, au point qu'elle sera prête à me croire quand je lui dirai que je lui ai donné une calculette qui ne sait vraiment pas bien calculer...

3° On épluche un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, on découpe les carottes en dés, ce qui entraîne 200 g de déchets supplémentaires. Quelle quantité de carottes découpées obtient-on au final ?

$$5 - 650$$

4, ~~645~~ 350g

$$200 + 450 = 650$$

$$5000 - 650 = 4350$$

$$0,450 + 0,200 = 0,650$$

$$5 - 0,650 =$$

Figure n°11 - Résolution par Ca de l'exercice n°3 le 05.01.10

Je l'invite donc à laisser la calculette de côté et à essayer de réaliser 5 – 650 sans y avoir recours. Ca me dit que cela fera "quatre (qu'elle écrit) quelque chose". Elle poursuit en disant "quatre kilos quatre cents (elle écrit 400) à peu près". Je rebondis en lui disant qu'il n'y a donc plus que le 50 à ôter, ce qu'elle semble ne pas comprendre. Je précise en disant (et en montrant sur le 650 qu'elle a écrit) qu'après avoir enlevé le 600, il ne reste plus maintenant qu'à enlever le 50. Elle fait mine de comprendre, puis trace le 400 qu'elle a écrit auparavant pour le remplacer par 350 et prononce "quatre kilos trois cent cinquante".

Je poursuis en lui demandant comment il serait donc possible de faire apparaître ce "fichu quatre kilos trois cent cinquante" sur la calculette. Ca essaie 5 – 650 = qui donne à nouveau – 645. Je lui rappelle alors qu'elle avait commencé par additionner 200 à 450 pour trouver 650 qui sont des grammes et que pour enlever ces 650 g à 5 kg sur la calculette, il faut transformer ces 5 kg en 5000 grammes. Je lui demande de tenter le coup, puis lui montre qu'il aurait également été possible de passer par $0,450 + 0,200 = 0,650$ / $5 - 0,650 = 4,350$, ce qu'elle semble pourtant moins bien comprendre.

Interprétation des productions.

L'exercice est un exercice CP, de structure de base additive/ET-E, à laquelle est associée une relation multiplicative/M ou DQ (pour les conversions), comprenant des nombres naturels et décimaux inférieurs à 1000 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique naturelle.

Le signe "-" que Ca a inscrit sous l'énoncé (cf. figure n°5) indique à nouveau qu'elle a bien saisi qu'il fallait recourir à une soustraction pour résoudre l'exercice. Mais au lieu de procéder

à deux soustractions successives, Ca a additionné mentalement les deux quantités à soustraire et inscrit sur sa fiche la soustraction : $5 - 650 =$.

Contrairement à ce qu'elle avait fait dans l'exercice précédent, elle n'a pas ici transformé le nombre 5, mesure d'une quantité en kilos, en un nombre à quatre chiffres, ce qui montre que la conversion n'est pas systématique.

Le résultat ($- 645$) que produit la calculatrice est ensuite refusé²⁷¹ à chaque fois qu'il réapparaît sur l'écran.

Cela signifie que Ca contrôle à nouveau le fait que le résultat est inadéquat. Ce contrôle pourrait ici résulter d'un savoir qui se manifeste lorsque l'enseignant demande à Ca d'essayer de résoudre le calcul $5 - 650$ sans faire appel à la calculatrice et qu'elle dit que cela fera "quatre quelque chose", puis "quatre kilos quatre cents".

Cela montre aussi qu'en renonçant à la calculatrice, Ca a fort bien su distinguer le nombre 5, mesure d'une quantité en kilos, du nombre 650, mesure d'une quantité en grammes : la soustraction de 650 à 5 l'ayant conduite à trouver "quatre kilos quatre cents", elle a assurément dû envisager que le 1 qui était ôté de 5 pour aboutir à 4 devait ensuite être considéré comme 1000 pour qu'il soit possible de lui retrancher 600 et parvenir à 400.

A ce titre, il est plutôt étonnant de remarquer que cette technique - que l'enseignant a cherché à prolonger en l'invitant à ôter 50 à "quatre kilos quatre cents" pour aboutir à "quatre kilos trois cents cinquante"- n'ait pu être mobilisée par Ca comme technique alternative quand elle tapait $/5/-/6/5/0/=$ à répétition sur la calculatrice, sans jamais parvenir à se satisfaire du résultat.

Mais peut-être s'étonnait-elle précisément du fait que la calculatrice n'y parvienne pas d'elle-même, ce qui expliquerait pourquoi, elle ait d'abord fait mine de croire l'enseignant, quand ce dernier a dit lui avoir donné une calculatrice qui ne savait pas calculer ; puis qu'elle ait repris l'option de taper $/5/-/6/5/0/=$, quand il lui a demandé comment elle bien pourrait s'y prendre pour y faire apparaître le résultat de "quatre kilos trois cent cinquante".

Narration (4^{ème} partie)

Je suggère alors à Ca d'utiliser ce qu'elle a compris de ce troisième problème pour tenter de contrôler ce qu'elle a fait dans le deuxième (devant m'absenter pour aller chercher une enseignante à la réception, je la laisse seule face à sa feuille).

2° Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

$$\begin{array}{r}
 + \\
 500g + 800g + 1200 + 850g + 1000kg + 1,150kg = 3152,35kg \\
 \hline
 500g + 800g + 1200kg + 850g + 1000 + 1150kg = 5500kg
 \end{array}$$

Figure n°12 - Suite de la résolution par Ca de l'exercice n°2 le 05.01.10

A mon retour, je remarque qu'elle a écrit sur sa feuille (toujours en ligne) $500g + 800g + 1200kg + 850g + 1000 + 1150kg = 5500kg$. Je lui demande si ça lui va, ce à quoi elle

²⁷¹ Il n'est pas possible de déterminer dans quelle mesure le signe "-" qui apparaît sur la gauche de l'écran de la calculatrice est pris en considération dans le refus de Ca.

répond par l'affirmative, discute quelques courts instants de la question des unités (kg et g), puis lui demande de reprendre le premier problème.

Interprétation des productions.

Le nouveau calcul écrit par Ca montre qu'elle a conservé des nombres à quatre chiffres pour désigner les quantités de l'énoncé mesurées en kilos, mais qu'elle leur a cette fois-ci supprimé les virgules. Elle a à nouveau placé l'abréviation "g" à côté des nombres à trois chiffres et l'abréviation "kg" (ou "k") à côté de chaque nombre à quatre chiffres.

Le résultat de 5500 kg qui est associé à l'abréviation "kg" lui convient, ce qui laisse supposer que, de son point de vue, 5500 kg représente bien "cinq kilos cinq cents" et non pas "cinq mille cinq cents kilos".

Dans la perspective d'un procédé essai/erreur, on peut voir cela comme un ajustement de la lecture, souplesse dont elle semble ne pas avoir conscience puisqu'elle s'étonne que la machine ne "lise" pas comme elle.

Narration (5^{ème} partie)

Sous la liste des ingrédients qu'elle avait préalablement dressée, je réécris 6p (pour six personnes), dessine 6 œufs, inscris 4p un peu à côté et demande : "alors combien d'œufs pour quatre personnes ?". Elle sourit, oscille de la tête (elle semble trouver les choses tout à coup très simples) et répond 4. Je poursuis en inscrivant 60 cl sous le dessin des 6 œufs. Elle réfléchit un instant, puis énonce : "quatre décilitres". Et là, c'est moi qui souris. J'inscris 4 dl sur la feuille et lui demande combien cela fait de cl, ce à quoi elle répond de suite 40 cl que j'inscris aussi sur la feuille.

Quelques problèmes en cuisine...

1° Une recette indique qu'il faut 6 œufs, 60 cl de lait, 150 g de sucre, 180 g de farine et 30 g de beurre pour faire un flan pour 6 personnes. Calculez les quantités d'œufs, de lait, de sucre, de farine et de beurre qu'il faudra pour faire un flan pour 4 personnes.

6p	4p	3p	1p
6 œufs	4 œufs	80	0
60 cl L	40 cl	30/3cl	10cl/10cl
150 g S	100 g S	75	25
180 g F	120	90	30
30 g B	20 g	15 g	5 g

Figure n°13 - Suite de la résolution par Ca de l'exercice n°1 le 05.01.10

Je continue en inscrivant 150 g sous les 60 cl. Ca réfléchit un bon moment. Elle propose d'abord 45, puis 40, mais elle n'est vraiment pas sûre. Je lui suggère d'essayer pour 180 g et

elle répond à nouveau 40, sans grande certitude. On passe alors au 30 g où Ca, après un nouvel instant de réflexion, a une idée assez étonnante. Elle commence par chercher la moitié de 30, trouve 15, puis "partage" ce 15 en trois et trouve 5. A partir de 5, elle cherche à plusieurs reprises (par itération : 5, 10, 15,...) combien de fois ce 5 peut aller dans 30 et, après avoir remarqué qu'il "y va" six fois, propose 20g de beurre pour la recette à 4 personnes. N'ayant pas compris du premier coup comment elle en était arrivée à 5, je lui demande comment elle s'y prise. En l'écoutant, je note sur la feuille à quoi correspond le 15 (3 personnes), puis le 5 (1 personne) et l'invite à revenir sur l'une des questions qui précèdent (150 g). Ca reprend alors le même procédé : partage par la moitié (75), "partage" de la moitié en trois (25), itération jusqu'au nombre de départ (150), itération par quatre et découverte du 100. Pour 180 g enfin, Ca trouve assez facilement (peut-être par proximité au 25 qui précède ?) la valeur 30 (qui correspond à 1 personne) et propose d'abord 90, puis 120 (comme valeur pour 4 personnes). Je lui demande encore de compléter les quantités de lait et d'œufs pour 1 et 3 personnes, afin d'avoir un relevé complet des valeurs de ce qui est devenu une sorte de tableau.

Interprétation des productions.

L'intervention du pilote (réécriture des données et dessin des œufs) a conduit Ca à abandonner la "formule" qu'elle avait vainement tenté d'appliquer lors de sa première résolution de l'exercice.

Les correspondances 6 œufs - 6 personnes / 4 œufs - 4 personnes et 60 cl - 6 personnes / 40 cl - 4 personnes semblent soudain évidentes pour elle, au point de lui permettre d'effectuer directement une conversion de centilitres en décilitres qui n'était pourtant pas demandée par l'exercice²⁷².

Ceci tend à montrer qu'en situation d'interaction cognitive, lors de la première résolution, la centration sur la technique apprise en cours était telle qu'elle faisait écran à toute alternative. L'interaction de connaissances que l'enseignant noue ici avec Ca vient rompre avec le procédé essais-erreurs dans lequel elle s'était unilatéralement engagée et peut être envisagée comme une ouverture offerte à la recherche d'autres moyens de substitution²⁷³ qui sont d'abord de mon ressort (à partir du dessin des œufs), puis du sien (à partir de la correspondance des chiffres de chaque nombre) vis-à-vis desquels elle peut à nouveau opérer un contrôle sur les résultats produits.

Pour les deux quantités qui suivent - 150 g de sucre et 180 g de farine -, il n'était en revanche plus possible pour Ca de s'appuyer sur les correspondances de chiffres qui composaient les nombres à transformer.

Les résultats de 45 et 40 qu'elle propose peuvent être interprétés comme le résultat d'une division par 4 (un 4 qui correspond au nombre de personnes de la recette transformée) des deux nombres que l'on peut envisager comme un essai de réduire à quatre les quantités d'ingrédients de la recette pour six personnes.

Ca engage donc un nouveau procédé de substitution qui lui permet de produire deux nouveaux résultats vis-à-vis desquels elle exerce un certain contrôle.

²⁷² Il semble que, comme dans la première résolution de l'exercice, la seule considération de l'abréviation "cl" induit chez Ca la nécessité d'une conversion (ici en dl).

²⁷³ Cette remarque anticipe une importante question concernant l'usage d'épreuves "papier-crayon" pour déterminer, comme ce sera le cas lors des épreuves de stages analysées au chapitre suivant, les savoirs maîtrisés par les apprenties. Quand l'exercice écrit induit chez une apprentie l'usage d'une technique particulière, l'interprétation à laquelle elle va donner lieu ne permet nullement d'appréhender la diversité de toutes celles qui auraient potentiellement pu être mises en œuvre !

Le report du même procédé sur la dernière quantité de la recette - 30 g de beurre - participe alors, de façon totalement imprévue, à l'engagement d'un procédé nouveau²⁷⁴ qui se compose successivement d'une division par 2 qui aboutit à 15, d'une division par 3 qui aboutit à 5, d'une itération à six reprises du résultat 5 qui aboutit à 30 et d'une itération à quatre reprises du résultat 5 qui aboutit à 20.

Ce nouveau procédé semble issu du précédent, puisqu'il apparaît précisément lorsque la division par 4 que Ca avait entreprise se heurte au fait que le nombre 15 ne se laisse pas partager par la moitié. C'est la relation numérique $5 \times 3 = 15$ soudainement identifiée qui la conduit à privilégier cette voie d'accès pour aboutir au nombre de 5. Un nombre qui s'est avéré "aller opportunément six fois" dans 30 et qui a ensuite permis, par quatre itérations successives, d'aboutir au résultat (20) qui était attendu.

Cela signifierait que l'élaboration et l'usage de ce nouveau procédé de substitution a été en quelque sorte pilotée par les relations numériques que Ca était incidemment parvenue à prendre en compte. S'il reste intrinsèquement lié au nombre 30 qui lui a donné naissance, puisqu'il est dépendant des relations numériques $2 \times 3 \times 5$ qui le composent, il se laisse pourtant bien fort bien "transférer" sur les nombres 150 et 180 qui représentent deux autres quantités de la recette de base, puisqu'étant multiples de 30, ces derniers se composent également des mêmes relations.

Narration (6^{ème} partie)

Au terme de la séance, Ca semble très contente. Elle va même jusqu'à me demander un autre problème²⁷⁵ à faire chez elle, qu'elle choisit au hasard dans ceux qui restent :

5° A la boucherie, une pièce de bœuf coûte 72 francs. En fin de journée, le boucher offre un rabais de 25 %. Quel sera le nouveau prix de cette pièce de bœuf ?

De mon côté, je m'interroge assez longuement sur comment dès lors, je pourrai bien m'y prendre pour lui permettre de retrouver ses formules...

INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : LES PRODUCTIONS DE CA LORS DES SÉANCES DES 12 ET 19 JANVIER, 2 FÉVRIER ET 4 MAI 2010

Durant les quatre séances suivantes, rappelons que Ca s'est trouvée en situation de résoudre 12 exercices : 6 d'entre eux étaient de ma propre conception (3 étant les mêmes que ceux qui ont servi de supports aux échanges dans la première séance²⁷⁶) et 6 autres provenaient directement d'une procédure de qualification proposée à Ca en guise d'examen blanc. Les productions issues de la résolution des exercices ont été regroupées par domaine d'expérience et leur interprétation repose sur les narrations des quatre séances²⁷⁷ (cf. annexe 2).

Les exercices de complément de fiches d'inventaires (CFI)

2 exercices CFI (cf. figure n°14) ont été résolus par Ca au cours des séances. Le premier l'a été durant la séance du 2 février 2010 et le second à l'occasion de l'examen blanc qui a eu lieu dans le cadre de ses cours et dont la correction s'est déroulée lors de la séance du 4 mai 2010.

Analyse des productions relatives aux deux exercices CFI

L'analyse des productions issues des deux exercices montre que, dans ce domaine d'expérience, Ca maîtrise la résolution d'exercices de structure de

²⁷⁴ Un procédé qui pourrait à point nommé être baptisé "règle de quatre", vu qu'il se déroule en quatre temps.

²⁷⁵ L'exercice ne sera pas repris dans les séances ultérieures et je ne sais donc pas ce que Ca a pu en faire.

²⁷⁶ Ils ont été à nouveau proposés à Ca dans la deuxième séance pour observer ce qu'elle avait pu retenir de la première.

²⁷⁷ Ici les décalages typographiques cherchent à distinguer le rapport de certains faits, l'interprétation des productions et l'analyse qui en ressort.

base additive de type E ET⁺E et ET⁻E avec recherche de l'état final et que la seule erreur qu'elle a faite provient de l'item impliquant une conversion de mesure.

Ex. n°1	Vous allez chercher 3,5 l d'huile d'arachide et 500 g de crème en poudre à la cave. A votre arrivée, les fiches d'inventaire précisent qu'il reste 45 l d'huile d'arachide et 2,300 kg de crème en poudre. Combien restera-t-il d'huile d'arachide et de crème en poudre après votre passage ?																																																																						
Ex. n°2	Exercice 2 On vous livre des denrées que vous avez commandées. Vous devez ranger les denrées à l'économat et y ajouter les fiches d'inventaire. Quelles sont les quantités que vous avez maintenant en stock ? Voici les denrées qui doivent être <u>ajoutées au stock et rangées</u> dans l'économat: <table border="0"> <tr> <td>12 boîtes d'olives (voir modèle de solution)</td> <td>24 b. Tomates pelées</td> </tr> <tr> <td></td> <td>12 bt. Sauce au soja</td> </tr> <tr> <td></td> <td>100 l Huile de friture</td> </tr> <tr> <td></td> <td>75 kg Farine complète</td> </tr> <tr> <td></td> <td>50 kg Riz-caroline</td> </tr> <tr> <td></td> <td>25 kg Sucre de canne</td> </tr> </table> Devoir: Inscrivez dans la fiche d'inventaire quelle quantité il y a en stock après rangement: (Inscrivez la réponse dans les cases vides) Fiche d'inventaire <table border="1"> <tr> <th></th> <th>Olivives</th> </tr> <tr> <td>Stock précédent</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Livraison</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Nouveau stock</td> <td></td> </tr> </table> 33 boîtes 12 boîtes 45 boîtes Suivez l'exemple des boîtes d'olives! Fiche d'inventaire <table border="1"> <tr> <th></th> <th>Tomates pelées</th> </tr> <tr> <td>Stock précédent</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Livraison</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Nouveau stock</td> <td></td> </tr> </table> 4 boîtes 24 b 28 b Fiche d'inventaire <table border="1"> <tr> <th></th> <th>Riz créole</th> </tr> <tr> <td>Stock précédent</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Livraison</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Nouveau stock</td> <td></td> </tr> </table> 5 kg 50 kg 55 kg Fiche d'inventaire <table border="1"> <tr> <th></th> <th>Farine complète</th> </tr> <tr> <td>Stock précédent</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Livraison</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Nouveau stock</td> <td></td> </tr> </table> 56 kg 75 kg 131 kg Fiche d'inventaire <table border="1"> <tr> <th></th> <th>Huile de friture</th> </tr> <tr> <td>Stock précédent</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Livraison</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Nouveau stock</td> <td></td> </tr> </table> 25 litres 100 l 125 l Fiche d'inventaire <table border="1"> <tr> <th></th> <th>Sauce au soja</th> </tr> <tr> <td>Stock précédent</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Livraison</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Nouveau stock</td> <td></td> </tr> </table> 2 bouteilles 12 b 14 b Fiche d'inventaire <table border="1"> <tr> <th></th> <th>Sucre de canne</th> </tr> <tr> <td>Stock précédent</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Livraison</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Nouveau stock</td> <td></td> </tr> </table> 7,5 kg 25 kg 32,5 kg Report 6		12 boîtes d'olives (voir modèle de solution)	24 b. Tomates pelées		12 bt. Sauce au soja		100 l Huile de friture		75 kg Farine complète		50 kg Riz-caroline		25 kg Sucre de canne		Olivives	Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			Tomates pelées	Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			Riz créole	Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			Farine complète	Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			Huile de friture	Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			Sauce au soja	Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			Sucre de canne	Stock précédent		Livraison		Nouveau stock		Nombre points maximal obtenu 3
	12 boîtes d'olives (voir modèle de solution)	24 b. Tomates pelées																																																																					
	12 bt. Sauce au soja																																																																						
	100 l Huile de friture																																																																						
	75 kg Farine complète																																																																						
	50 kg Riz-caroline																																																																						
	25 kg Sucre de canne																																																																						
	Olivives																																																																						
Stock précédent																																																																							
Livraison																																																																							
Nouveau stock																																																																							
	Tomates pelées																																																																						
Stock précédent																																																																							
Livraison																																																																							
Nouveau stock																																																																							
	Riz créole																																																																						
Stock précédent																																																																							
Livraison																																																																							
Nouveau stock																																																																							
	Farine complète																																																																						
Stock précédent																																																																							
Livraison																																																																							
Nouveau stock																																																																							
	Huile de friture																																																																						
Stock précédent																																																																							
Livraison																																																																							
Nouveau stock																																																																							
	Sauce au soja																																																																						
Stock précédent																																																																							
Livraison																																																																							
Nouveau stock																																																																							
	Sucre de canne																																																																						
Stock précédent																																																																							
Livraison																																																																							
Nouveau stock																																																																							

Figure n°14 - Les deux exercices CFI résolus par Ca

Dans cet item (cf. figure n°14/ex. n°1 : détermination de la quantité de crème en poudre), Ca, comme dans l'exercice n°3 de la première séance, a tapé directement /2/,/3/0/0/-/5/0/0/=/ sur la calculette pour trouver - 497,7 et n'a pas pu se satisfaire du résultat obtenu, puisqu'elle l'a répété à plusieurs reprises le même calcul sur la calculette.

Cela montre que l'idée même de devoir opérer une conversion avant de procéder au calcul, n'était à nouveau pas présente chez Ca et qu'il existait bien de sa part, une forme de contrôle sur le résultat, puisque celui-ci n'a pas pu être validé. Ca n'a cependant pas eu recours à un moyen alternatif pour se sortir de l'impasse dans laquelle elle s'est retrouvée.

Ce sera donc d'abord la suggestion de l'enseignant de passer par l'effectuation d'un calcul en colonne qui lui a permis de le faire, en la conduisant d'abord à poser :

$$\begin{array}{r} 2,300 \\ - 0,500 \\ \hline 00 \end{array}$$

et à inscrire 200 comme résultat (après avoir soustrait $5 - 3$) qu'elle a refusé ; puis, par celle de passer par une soustraction itérée de "cinq fois cent grammes" qui, en l'amenant à écrire successivement : $2.300 - 100 / 2.200 - 100 / 2.100 - 100 / 2.000 - 100 / 1.900 - 100$, lui permettra d'aboutir au résultat de 1,800 (sans unité) qui sera cette fois-ci validé.

C'est donc le passage d'une situation d'interaction cognitive à une situation d'interaction de connaissances qui l'a conduite à mobiliser deux autres procédés, pour mener la résolution de l'exercice à son terme.

La demande de l'enseignant d'essayer de produire le même résultat sur la calculatrice n'a pas abouti, ce qui a fait qu'il a dû lui montrer la manière de s'y prendre en tapant $/2/,/3/0/0/-/0/,/5/0/0/=/$ (il lui a aussi montré $/2/3/0/0/-/5/0/0/=/$ pour marquer la différence).

L'opération l'ayant fait sourire et dire qu'elle avait encore oublié le zéro, il semble donc que c'était cela - à savoir l'ajout de zéros - qu'elle ait retenu des conversions à établir.

Le fait de disposer du résultat 1,800 lui a par contre permis de reprendre son calcul en colonne et fait se souvenir de comment disposer les emprunts pour le mener à bien.

Les exercices de calcul de poids (CP)

4 exercices CP ont été résolus par Ca au cours des séances (cf. figures n°15, 16 et 17). Les deux premiers l'ont été durant la séance du 12 janvier 2010 et les deux suivants à l'occasion de l'examen blanc qui a eu lieu dans le cadre de ses cours et dont la correction s'est déroulée lors de la séance du 4 mai 2010.

Analyse des productions relatives aux deux premiers exercices CP

L'analyse des productions issues des trois premiers exercices confirme que, dans ce nouveau domaine d'expérience, Ca maîtrise la résolution d'exercices de structure de base additive de type ET^+E ou ET^-E avec recherche de l'état final. En revanche, les conversions d'unités à établir lui posent à nouveau problème.

Ex. n°1	On épluche un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, on découpe les carottes en dés, ce qui entraîne 200 g de déchets supplémentaires. Quelle quantité de carottes découpées obtient-on au final ?
Ex. n°2	Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

Figure n°15 - Les deux premiers exercices CP résolus par Ca

Le premier exercice (cf. figure n°15) lui avait déjà été proposé durant la première séance.

Ca a commencé par écrire $500 \text{ kg} - 450 - 200 \text{ g}$ sur sa feuille, avant de taper : $5/0/0/0/-/4/5/0/-/2/0/0/=/$ sur la calculatrice pour trouver 4350 qu'elle a lu "quatre kilos trois cent cinquante".

Ca s'est donc souvenu de la nécessité de transformer le nombre 5 en 5000, même si elle a d'abord passé par l'écriture de 500 dont elle a tracé les deux zéros. Le fait qu'elle ait lu le nombre 4350 affiché sur l'écran "quatre kilos trois cent cinquante" et non pas simplement "quatre mille trois cent cinquante" montre que ce nombre suffisait à désigner la quantité qu'il représente, en étant

scindé, pour le faire, en deux entités distinctes : le premier chiffre du nombre signifiant des kilos et les trois derniers chiffres représentant des grammes.

Le deuxième exercice (cf. figure n°15) lui avait également été proposé durant la première séance.

Ca a tout d'abord écrit $500 \text{ g} + 800 \text{ g} + 1,200 \text{ kg} + 850 + 1000 \text{ k} + 1,150 \text{ kg}$ en ligne sur sa fiche, ce qui correspondait au même calcul qu'elle avait établi lors de la séance précédente.

Les abréviations "g" ont à nouveau été associées aux nombres à trois chiffres de l'énoncé et les abréviations "kg" (ou "k") aux nombres à quatre chiffres. 1000 n'avait pas de virgule, tandis que 1,200 et 1,150 en avaient bien une.

Quand l'enseignant a demandé à Ca d'essayer de résoudre ce calcul par elle-même (i.e., avant de le taper sur la calculatrice), elle a écrit en colonne l'addition qui suit, ce qui lui a permis de trouver le bon résultat de 5,500.

$$\begin{array}{r} 1,200 \\ 1,150 \\ 1,000 \\ 850 \\ 800 \\ \underline{500} \\ 5,500 \end{array}$$

Lors de l'écriture en colonne du calcul, les différents nombres figurant dans l'énoncé ont été ordonnés selon leur ordre décroissant et une virgule a été ajoutée au 1000.

Cette mise en ordre tend à montrer le rôle organisateur de la disposition en diagramme qu'elle effectue.

Le bon déroulement de l'addition écrite ne souffre nullement du fait qu'il n'y ait pas eu de conversions de mesures préalables, les trois premiers nombres du calcul désignant des quantités mesurées en kilos et les trois derniers des quantités mesurées en grammes sans interférence aucune.

La confrontation du résultat produit par le calcul en colonne (5,500) avec celui produit par la calculatrice, du calcul en ligne (3152,35) a conduit Ca à modifier le calcul en ligne.

Après s'être exclamée qu'elle avait "oublié les zéros", elle a arrangé son calcul pour parvenir à une nouvelle écriture : $0,500 \text{ g} + 0,800 \text{ g} + 1,200 \text{ kg} + 0,850 \text{ g} + 1000 \text{ k} + 1,150 \text{ g} =$ qui, après avoir été tapée sur la calculatrice, a produit 1004 comme résultat, ce qui l'a laissée bien perplexe.

Les conversions à entreprendre consistaient donc à nouveau pour Ca à ajouter un zéro et une virgule aux nombres de trois chiffres, tandis que le fait que 1000 comporte ou non une virgule ne semblait pas vraiment significatif pour elle.

Analyse des productions relatives au troisième exercice CP

Dans le troisième exercice, (cf. figure n°16), Ca a écrit $3000 \text{ kg} - 600 \text{ g} = 2'400 \text{ g}$ pour répondre à la première question.

Le nombre de 3 de l'énoncé représentant des kilos a donc été transformé en 3000, mais l'abréviation "kg" a été conservée, tandis que le nombre "600" représentant des grammes a été repris tel quel avec l'abréviation "g".

Sur la calculette, c'est manifestement le calcul $/3/0/0/0/-/6/0/0/=/$ qui a été effectué pour aboutir au résultat de 2'400. Celui-ci comporte une apostrophe et a été associé à l'abréviation "g", lorsqu'il a été retranscrit sur la fiche, alors même que la question demandait un résultat en "kg".

		Nombre points maximal obtenu	
		Report	6
Ex. n°3	Exercice 3		
	Vous épluchez 3 kg de pommes. Les épluchures et les parures pèsent 600 g. Puis, vous découpez les pommes en petits morceaux.		
	Devoir A:		
	Calculez combien il vous reste de pommes épluchées en kg.		
	$3000 \text{ Kg} - 600 \text{ g} = 2'400 \text{ g}$		
	Quand vous coupez les quartiers de pommes, vous perdez encore une fois 0,150 kg.		
	Devoir B:		
	Calculez quelle quantité vous obtenez de quartiers de pommes en kg.		
	$2,400 \text{ kg} - 0,150 \text{ kg} = 3'399 \text{ kg}$		
			3
			2

Figure n°16 - Le troisième exercice CP résolu par Ca

Dans la deuxième partie de l'exercice, Ca a écrit $2,400 \text{ kg} - 0,150 \text{ kg} = 3'399 \text{ kg}$.

Le résultat de 2'400 g a donc été repris et transformé en 2,400 kg, alors que le 0,150 kg figurant dans l'énoncé a été reproduit tel quel.

Le calcul qui a été accompli sur la calculette n'est par contre pas, comme on pouvait s'y attendre, $/2/,4/0/0/-/0/,1/5/0/=/$, qui aurait donné 2,25. Le résultat 3'399, qui comprend une apostrophe et qui a été associé à l'abréviation "kg", laisse en effet supposer que c'est bien plutôt le calcul $/2/4/0/0/-/0/,1/5/0/=/$ qui a été tipé sur la calculette, lequel donne 2'399,85 comme résultat (et où le premier chiffre aurait été recopié de manière incorrecte - 3 au lieu de 2 - et les deux derniers, supprimés). Cela signifierait que le nombre 2'400, produit d'une conversion entre les deux parties de l'exercice pour aboutir à 2,400 aurait malgré tout été tipé 2'400 au moment d'effectuer la seconde soustraction sur la calculette.

L'usage des apostrophes et des virgules, de même que l'attribution des abréviations d'unités de poids, sont donc utilisées de manière très approximative par Ca, ce qui lui joue des tours dont elle ne perçoit manifestement pas l'origine, au moment où elle se retrouve en situation de taper des calculs sur la calculette et surtout d'y lire les résultats produits.

Analyse des productions relatives au quatrième exercice CP

Le quatrième exercice CP que Ca a eu à résoudre (cf. figure n°17) diffère des trois autres, dans le sens où il n'implique pas de conversions de mesures, mais qu'il comprend un calcul de pourcentage, engageant une relation de type "quatrième proportionnelle".

Ex. n°4

Exercice 4

Vous allez chercher à la cave un sac de pommes de terre contenant 22,500 kg.
L'épluchage des pommes de terre entraîne 18 % de perte. Combien de kg de pommes de terre épluchées vous reste-t-il pour faire de la purée?

Devoir:

Calculez combien de kg de pommes de terre épluchées vous obtenez.

$$22,500 \text{ Kg} \times 100 = 2,250 \text{ K} - 18\% = 15,75^0$$

3

0.5

Figure n°17 - Le quatrième exercice CP résolu par Ca

Ca a écrit le calcul : $22,500 \text{ kg} \times 100 = 2,250 \text{ k} - 18 \% = 15,75$ sur sa fiche.

La deuxième partie du calcul - $2,250 \text{ k} - 18 \% = 15,75$ - montre qu'elle a correctement identifié la structure de base de type ET-E avec recherche de l'état final de l'exercice, en l'associant à une soustraction.

Le résultat de 15,75 laisse supposer que Ca a tapé successivement $/2/2/,5/0/0/-/1/8/=$ qui donne - 15,75, ce qui signifierait qu'elle n'a pas tenu compte du signe % inscrit sur sa fiche ; ou alors qu'elle a tapé $2/2/,5/0/0/-/1/8/\div$ qui donne aussi - 15,75 (en ayant interverti la touche $\div$ et la touche % et sans avoir eu recours à la touche =).

La première partie de son calcul - $22,500 \text{ kg} \times 100 = 2,250 \text{ k}$ - reste plus délicate à interpréter.

Il est possible que Ca ait tenté une ébauche de produit croisé, induite par l'idée même de pourcentage, et qu'elle ait ensuite converti le produit de la multiplication obtenu ($22,500 \times 100 = 2250$) en 2,250 en l'associant à l'abréviation (k).

Il y aurait dès lors deux procédés qui auraient successivement employés, lesquels correspondent chacune à l'une des deux relations (additive et multiplicative) en jeu dans l'exercice.

Les exercices de transformation de quantités d'ingrédients d'une recette (TQIR)

3 exercices TQIR ont été résolus par Ca au cours des séances (cf. figure n°18). Le premier l'a été durant la séance du 12 janvier 2010, le deuxième lors de la séance du 19 janvier 2010 et le troisième à l'occasion de l'examen blanc qui a eu lieu dans le cadre de ses cours et dont la correction s'est déroulée lors de la séance du 4 mai 2010.

Analyse des productions relatives aux trois exercices TQIR

L'analyse des productions issues des trois exercices montre à deux reprises que, dans ce domaine d'expérience, lorsque le rapport de proportionnalité est fondé sur une relation numérique disponible, Ca maîtrise la résolution d'exercices de structure de base multiplicative de type proportionnalité.

Cela a été d'abord le cas à l'entame de la résolution du deuxième exercice quand Ca a déclaré que ce serait plus facile d'effectuer les transformations pour huit plutôt que pour dix personnes : lorsque l'enseignant l'a encouragée à le faire, elle est en effet parvenue à accomplir l'ensemble des transformations, en doublant chaque quantité de

la recette de base (avec une seule erreur dans le cas des 150 g de fromage râpé, qu'elle a transformés en 250 g, mais où elle avait manifestement l'intention d'effectuer un double²⁷⁸).

Ex. n°1	Une recette indique qu'il faut 6 œufs, 60 cl de lait, 150 g de sucre, 180 g de farine et 30 g de beurre pour faire un flan pour 6 personnes. Calculez les quantités d'œufs, de lait, de sucre, de farine et de beurre qu'il faudra pour faire un flan pour 4 personnes.																																																		
Ex. n°2	Pour faire un gratin dauphinois pour 4 personnes, une recette indique qu'il faut : 1 gousse d'ail, 1,200 kg de pommes de terre pelées et coupées en fine tranches, 100 g de lard, 150 g de fromage râpé, 4dl de lait, 1 cuillère à café de sel et 10 grammes de beurre frais. Calculez les quantités de chaque ingrédient qu'il faudra pour faire un gratin pour 10 personnes.																																																		
Ex. n°3	Exercice 1 Pour un banquet de mariage, vous préparez sept litres de crème de volaille au curry. Dans le manuel, vous trouvez la recette suivante: Ingrédients pour 2,5 litres: <table><tr><td>Beurre</td><td>50 g</td><td>Poitrine de poulet, sans peau</td><td>300 g</td></tr><tr><td>Oignons épluchés</td><td>100 g</td><td>Riz siam patna</td><td>30 g</td></tr><tr><td>Curry de Madras</td><td>40 g</td><td>Crème entière</td><td>150 g</td></tr><tr><td>Farine blanche</td><td>110 g</td><td>Lait de coco</td><td>50 g</td></tr><tr><td>Fond de volaille clair</td><td>3200 g</td><td>Coriandre</td><td>5 g</td></tr></table> Devoir Calculez les ingrédients nécessaires pour sept litres de crème de volaille au curry. Utilisez l'espace pour les calculs et les notes (méthode de résolution). 50 x 100 % 50 Ecrivez les ingrédients pour sept litres de crème de volaille au curry dans les colonnes correspondantes. <table><tr><td>Beurre</td><td>2</td><td>g</td><td>Poitrine de poulet, sans peau</td><td>2</td><td>g</td></tr><tr><td>Oignons épluchés</td><td>2</td><td>g</td><td>Riz siam patna</td><td>2</td><td>g</td></tr><tr><td>Curry de Madras</td><td>2</td><td>g</td><td>Crème entière</td><td>2</td><td>g</td></tr><tr><td>Farine blanche</td><td>2</td><td>g</td><td>Lait de coco</td><td>2</td><td>g</td></tr><tr><td>Fond de volaille clair</td><td>0</td><td>g</td><td>Coriandre</td><td>0</td><td>g</td></tr></table> Report 3	Beurre	50 g	Poitrine de poulet, sans peau	300 g	Oignons épluchés	100 g	Riz siam patna	30 g	Curry de Madras	40 g	Crème entière	150 g	Farine blanche	110 g	Lait de coco	50 g	Fond de volaille clair	3200 g	Coriandre	5 g	Beurre	2	g	Poitrine de poulet, sans peau	2	g	Oignons épluchés	2	g	Riz siam patna	2	g	Curry de Madras	2	g	Crème entière	2	g	Farine blanche	2	g	Lait de coco	2	g	Fond de volaille clair	0	g	Coriandre	0	g
Beurre	50 g	Poitrine de poulet, sans peau	300 g																																																
Oignons épluchés	100 g	Riz siam patna	30 g																																																
Curry de Madras	40 g	Crème entière	150 g																																																
Farine blanche	110 g	Lait de coco	50 g																																																
Fond de volaille clair	3200 g	Coriandre	5 g																																																
Beurre	2	g	Poitrine de poulet, sans peau	2	g																																														
Oignons épluchés	2	g	Riz siam patna	2	g																																														
Curry de Madras	2	g	Crème entière	2	g																																														
Farine blanche	2	g	Lait de coco	2	g																																														
Fond de volaille clair	0	g	Coriandre	0	g																																														

Figure n°18- Les trois exercices TQIR résolus par Ca

Et cela s'est reproduit ensuite lors de la correction du troisième exercice, quand l'enseignant a demandé à Ca de passer de 2,5 l à 5 l de crème de volaille (au lieu de 2,5 l à 7 l comme l'indiquait l'énoncé) et qu'elle a d'abord vu que l'on pouvait doubler chaque quantité d'ingrédients de la recette de base ; puis, peu à près, quand elle a suggéré d'ajouter encore une fois 2,5 pour parvenir à 7,5 et approcher²⁷⁹ de la sorte les sept litres de crème à préparer.

Lorsque la relation numérique sur lequel repose le rapport de proportionnalité n'est pas disponible, le procédé utilisé par Ca n'est plus fonctionnel.

²⁷⁸ Les 100 de 150 ont été doublés pour aboutir à 200 ; puis 50 a été ajouté à 200 pour donner 250 au lieu d'être doublé auparavant.

²⁷⁹ Une technique qui aurait assurément toute sa pertinence en cuisine permettant d'assurer un second service.

En situation d'interaction cognitive, cette non-fonctionnalité l'a conduite, sans succès, à refaire usage des formules apprises en cours, une nouvelle fois, sans qu'il y ait recours à un diagramme

On le voit sur la fiche (cf. figure n°18) comprenant le troisième exercice où, durant l'évaluation en cours, Ca a écrit $50 \times 100 \% 50$, qui peut être interprété comme un essai de produit en croix²⁸⁰, portant sur la première quantité à transformer (les 50 g de beurre).

Aucun procédé alternatif n'ayant pu être mis en œuvre, Ca s'est retrouvé contrainte d'abandonner la résolution de l'exercice.

En situation d'interaction de connaissances (soit lors de la correction durant la séance de soutien), par contre, Ca a de nouveau pu s'employer à utiliser d'autres procédés.

Ainsi, lors de la résolution du premier exercice (qui était le même que celui qui lui avait été soumis au cours première séance), Ca s'est d'abord souvenue des correspondances 6 œufs/4 œufs et 60 cl/40 cl de lait qu'elle avait établies lors de la première séance (sans toutefois transformer cette fois-ci les 40 cl en 4 dl).

Devant les 150 g de sucre et les 180 g de farine, elle ne savait plus bien comment s'y prendre et si elle s'est également rappelée de la correspondance 30/20 relative à la quantité de beurre, elle ne savait plus non plus comment elle était parvenue à l'établir. Finalement elle s'est résolue à diviser 150 et 180 par 4 sur la calculette, comme elle l'avait fait dans la première séance pour trouver respectivement 37,5 et 45.

Le report de la division par 4 sur les 30 g de beurre a de nouveau buté sur le fait que 15 ne se laissait pas diviser par 2, ce qui l'a conduite à proposer 15 comme résultat et non pas à 7,5. Et c'est lorsque l'enseignant l'amènera à comparer ce 15 au résultat 20 qu'elle avait obtenu lors de la première séance qu'elle se rappellera soudainement qu'elle avait passé par 5 pour y aboutir.

Analyse spécifique des productions relatives au deuxième exercice TQIR

Ce recours à des procédés alternatifs en situation d'interactions de connaissances a été encore plus manifeste lors de la résolution du deuxième exercice.

9° Pour faire un gratin dauphinois pour 4 personnes, une recette indique qu'il faut : 1 gousse d'ail, 1,200 kg de pommes de terre pelées et coupées en fine tranches, 100 g de lard, 150 g de fromage râpé, 4dl de lait, 1 cuillère à café de sel et 10 grammes de beurre frais. Calculez les quantités de chaque ingrédient qu'il faudra pour faire un gratin pour 10 personnes.

8 + 2 = 10

4 per

3 gousse d'ail

25 l

10 per

2 1/2 gousse d'ail

2.600 pommes

350

400g de lard

350 fromage

10dl de lait

2 1/2 caf

25 g beurre

Figure n°19 - Résolution par Ca de l'exercice n°9 le 19.01.10

²⁸⁰ Si l'on considère que le signe % figurant sur la fiche correspond à celui d'une division (÷) et non à un pourcentage.

L'inscription 4 x 3 qu'elle a écrit (cf. figure n°19, l'inscription 4 x 3, au centre en haut sous l'énoncé, a été raturée et n'est donc plus très distincte) après avoir effectué toutes les transformations (elle avait écrit 4 x 2 en-dessus des transformations réalisées pour huit personnes), puis qu'elle a biffé pour la remplacer par $8 + 2 = 10$ montre qu'elle a bien cherché à passer par une multiplication pour le faire.

C'est donc bien le fait que la relation numérique $4 \times 5/2 = 10$ ne soit pas disponible qui l'a conduite à en déterminer une autre qui permette d'y surseoir : $8 + 2$ pouvant être interprété comme la reprise de la transformation établie pour huit personnes et l'ajout de deux pour parvenir à dix.

Les résultats auxquels elle a abouti ont permis d'inférer l'usage de deux nouveaux procédés.

Le premier procédé a consisté à reprendre les quantités établies pour huit personnes et à leur ajouter la moitié des quantités pour quatre personnes : c'est ainsi que Ca a procédé pour l'ail et la cuillère à café de sel (2 avec rajout de $\frac{1}{2}$ qui donne $2\frac{1}{2}$), pour les 4 dl de lait (8 avec rajout de 2 qui donne 10) et pour les 10 grammes de beurre (20 avec rajout de 5 qui donne 25).

Le second procédé a consisté à ajouter 2 à la quantité d'ingrédients établie pour huit personnes, mais où l'ajout du 2 a porté sur l'un des chiffres du nombre différent de 0 (on retrouvera un procédé identique chez El dans le chapitre 9) : c'est ainsi que Ca a procédé pour les 1,200 kg de pommes de terre ($2,400 + 2$ qui donne 2,600), pour les 100 g de lard ($200 + 2$ qui donne 400) et pour les 150 g de fromage râpé, mais où elle a cette fois repris le 150 et transformé le 1 en 3 (c'est très visible sur sa fiche) pour aboutir à 350.

Le recours à l'un ou l'autre des deux procédés dépend donc essentiellement de la capacité de Ca à prendre la moitié des quantités à transformer.

La chose est en effet bien apparue lorsque l'enseignant a encouragé Ca reprendre le premier procédé pour corriger les transformations effectuées à l'aide du second et qu'elle s'est retrouvée dans l'impossibilité d'établir la moitié de 1,200 (même avec la calculatrice) et a qu'elle a eu de la peine à déterminer celle de 150 (procédant par essais/erreurs, en tentant tour à tour 60, 65, 70, avant d'aboutir à 75).

Cela signifierait alors que l'ajout de 2 dans le second procédé vient se substituer à l'impossibilité de prendre la moitié du nombre qui est requis dans le premier (alors même que la calculatrice était à disposition pour le faire). Il ne serait dès lors qu'un substitut du premier, au même titre que celui-ci n'était qu'un substitut venant pallier l'indisponibilité de la relation $4 \times 5/2 = 10$.

Dans la production de la figure n°19, on voit encore que Ca a apporté une correction à un résultat trouvé.

Le résultat de 400 g qu'elle avait obtenu suite à la transformation des 100 g de lard (en ajoutant 2 au 2 des 200 g qui correspondait à la quantité de lard pour huit personnes) a été biffé et remplacé par 350 g

Cette correction montre à nouveau que Ca exerce un contrôle sur les résultats qu'elle obtient.

Ici, l'origine du contrôle a été explicité par Ca dans l'interaction : le résultat de 400 ne pouvait lui convenir, parce qu'il correspondait à la quantité de lard nécessaire à une recette pour seize personnes.

Ce serait donc ici la disponibilité conjointe de deux relations numériques distinctes $4 \times 4 = 16$ et $100 \times 4 = 400$ qui seraient entrées en contradiction pour rejeter le résultat de 400.

L'issue de la contradiction a par ailleurs été pour le moins singulière, puisqu'elle a conduit Ca à diminuer 400 pour le transformer en 350, sans qu'il ne soit possible de déterminer pourquoi elle avait choisi 350, plutôt que 300 ou 250

Il semble qu'il lui fallait modifier le nombre pour le rendre compatible à l'expression d'une quantité moindre, mais sans veiller à ce qu'il corresponde à la représentation d'une quantité exacte pour dix personnes. Une façon de faire qui fait penser à un geste de cuisine lorsqu'on peut se retrouver en passe d'estimer à vue une quantité à rajouter ou soustraire.

Trois premiers écueils à l'usage de la règle de trois

En perspective de l'enseignement de la règle de trois pour résoudre des exercices TQIR qui aura lieu dans les chapitres 8 et 9, on relèvera encore trois écueils à son usage qui ont été révélés par les interactions, montrant que, dans un premier temps tout au moins, son usage ne peut faire abstraction de la singularité des nombres sur lesquels elle porte.

Le premier écueil est apparu lors de la résolution du deuxième exercice quand l'enseignant a invité Ca à employer le premier procédé qu'elle avait utilisé (reprise de la quantité pour huit personnes et ajout de la moitié de la quantité pour quatre personnes) pour transformer les 100 g de lard.

Au lieu de s'arrêter à la recherche de la moitié de 100 qui lui avait donné 50, Ca a en effet poursuivi de la même manière, cherchant la moitié de 50 qui lui a donné 25 ; ce qui l'a amené à déclarer qu'elle avait trouvé la quantité pour une personne (et l'a conduit à écrire 25 et 1 sur sa fiche).

La détermination de la quantité pour une personne - et non pas d'un seul coup, comme dans une règle de trois habituelle - avait donc été obtenue en deux temps, et de façon contingente, parce que le nombre 100 se prêtait bien à la recherche de sa moitié, puis à celle de la moitié de cette moitié.

Il en ira par la suite de façon toute à similaire, quand le pilote demandera à Ca, partant de cette quantité pour une personne, de déterminer la quantité pour dix personnes : alors qu'on pouvait s'attendre à ce que Ca multiplie directement 25 par 10 pour y parvenir, elle a repris le nombre 200 relatif à la recette pour huit personnes, auquel elle a ajouté 25 successivement à deux reprises pour trouver d'abord 225, puis 250.

Le deuxième écueil est apparu à l'occasion de la correction du troisième exercice, quand l'enseignant a suggéré à Ca, partant de la recette prévue pour 2,5 l de crème de volaille, de déterminer les quantités pour 1 litre de crème et qu'elle a proposé de diviser les quantités d'ingrédients de la recette de base par 2, puis par 0,5.

Cette scission du nombre 2,5 en 2 et en 0,5, appelant l'exécution de deux divisions successives pour accomplir la réduction à un l'a laissé bien emprunté pour montrer à Ca que le procédé ne fonctionnait pas²⁸¹.

Quant au troisième écueil, il est apparu quand l'enseignant a voulu revisiter le premier exercice TQIR afin de montrer à Ca que la règle de trois pouvait être utilisée pour

²⁸¹ Il aurait été intéressant de la laisser opérer cette double transformation qui aboutit à chaque fois au nombre de départ - $(n \div 2) \div 1/2 = n$ - pour lui montrer qu'elle n'avait pas lieu d'être.

résoudre d'autres exercices de ce type : lorsqu'il s'employait à lui montrer comment réduire à un les quantités de la recette pour six personnes, elle a proposé de passer par 2 (plutôt que par 1) en divisant les quantités par 3, parce que 4 et 6 étaient des nombres "ronds" (elle voulait sans doute dire des nombres "pairs").

L'idée était évidemment très bonne, sauf qu'arrivée à deux personnes, Ca ne savait plus trop comment remonter jusqu'à quatre et qu'elle a finalement proposé d'ajouter 2.

Les exercices de calcul de coûts (CC)

3 exercices CC ont été résolus par Ca au cours des séances (cf. figure n°20, 21 et 22). Le premier l'a été durant la séance du 2 février 2010 et les deux autres à l'occasion de l'examen blanc qui a eu lieu dans le cadre de ses cours. Ces deux derniers exercices, par manque de temps lors de la séance du 4 mai 2010, n'ont pas cependant fait l'objet d'une interaction spécifique ; il n'en reste donc que les traces laissées par Ca sur ses fiches.

Analyse des productions relatives au premier exercice CC

L'analyse des productions²⁸² issues du premier exercice (cf. figure n°20) montre que, dans ce domaine d'expérience, Ca maîtrise la résolution d'exercices de structure de base multiplicative de type multiplication, à laquelle est associée une relation additive de type EEE (comprenant cinq états) avec recherche de l'état final.

Ex. n°1	<i>L'épicier vous livre :</i> • 1 cageot de 20 kg de pruneaux à CHF 2.20/kg • 1 caisse de salades comprenant 8 pièces à CHF 1.10 la pièce • 5 radis blancs à CHF 0.90 la pièce • un assortiment de légumes pour le potage à CHF 4.20 • 500 g de raisin à CHF 4.40 le kg <i>Quel est le montant de la facture à payer ?</i>

Figure n°20 - Le premier exercice CC résolu par Ca

Les traces des calculs que Ca a laissées sur sa fiche indiquent qu'elle a utilisé la multiplication pour déterminer les prix des trois premières quantités d'ingrédients ($20 \text{ kg} \times 2.20 \text{ fr} = 44 \text{ fr}$ / $8 \times 1.10 \text{ la pièce} = 8.80$ / $5 \times 0.90 \text{ la pièce} = 4,5$).

Dans le cas du raisin, Ca a recherché la moitié de CHF 4.40 (en tenant manifestement compte du fait que 500 grammes correspondait à la moitié d'un kilo) pour aboutir à 2.20 fr.

Dans l'addition finale (qui a été réalisée en colonne sur sa fiche), Ca a repris les quatre montants qui avaient fait l'objet d'un calcul préalable, omettant celui de CHF 4.20 qui correspondait à l'assortiment de légumes

Analyse des productions relatives au deuxième exercice CC

Le premier exercice de l'examen blanc (cf. figure n°21) demandait de calculer le coût total des marchandises nécessaires à la réalisation d'une paella, afin de déterminer si celui-ci était inférieur ou supérieur à un montant de CHF 20.-. Les données étaient organisées dans un tableau à cinq colonnes²⁸³.

²⁸² L'exercice a été réalisé en situation d'interaction cognitive, l'enseignant ayant dû s'absenter de la salle de cours

²⁸³ Les en-têtes des colonnes sont : « produit utilisé », « quantité », « unité », « CHF par unité » et « coût des marchandises ». La colonne « unité » est là pour accueillir les quantités après conversion, de façon à les faire correspondre au prix unitaire

					Report		Nombre points maximal obtenu	
Exercice 5					12			
Vous avez décidé de préparer pour votre famille le plat national espagnol: la paella. Il vous reste encore 20.- CHF dans vos économies. Est-ce suffisant?								
Devoir Calculez le coût des marchandises nécessaires pour préparer votre paella (Cet exercice peut être calculé sans méthode de résolution.)							Suivez l'exemple des cuisses de poulet!	
Produit utilisé	Quantité	Unité	CHF par unité	Coût des marchandises				
par ex. cuisses de poulet	480 g	0,480 kg	8.20 CHF par kg	CHF 3.95				
Echines de porc prêtes à l'emploi	120 g	0,120 kg	14.50 CHF par kg					
Huile d'olive	40 g	0,040 kg	6.70 CHF par kg					
Saucisse à l'ail	120 g	0,120 kg	8.50 CHF par kg					
Poivrons 3 couleurs	50 g	0,050 kg	5.10 CHF par kg					
Tomates	80 g	0,080 kg	3.- CHF par kg					
Riz arborio	200 g	0,200 kg	1.80 CHF par kg					
Safran en poudre	1 g	0,001 kg	4.50 CHF par g					
Fond de volaille	10 dl	0,100 l	- .90 CHF par l					
Moules	200 g	0,200 kg	6.70 CHF par kg					
Crevettes géantes	120 g	0,120 kg	23.- CHF par kg					
Citron	1 pièce	1 pièce	- .60 CHF pièce	- .60 ✓				
Sel				CHF 0.03				
Coût total des marchandises:								
Espace pour les calculs et les notes:								
					3 05			
					Report 15			

Figure n°21 - Le deuxième exercice CC résolu par Ca

Ca a entièrement complété la colonne intitulée "unité", mais elle n'a été en mesure de calculer qu'un seul coût : celui des citrons qui était donné "par pièce" et qui n'impliquait pas de conversion.

La chose a évidemment de quoi surprendre si l'on réfère à la maîtrise dont elle avait su faire preuve dans l'exercice qui précède, mais il est possible de penser que c'est l'incertitude provoquée par les conversions établies dans la colonne "unité", dont elle doutait peut-être de l'exactitude, qui l'a conduite à renoncer à toute forme de résolution.

Le remplissage de la colonne "unité" effectué par Ca montre par ailleurs que, comme dans les exercices CP, les conversions en kilos des quantités exprimées en grammes ont consisté, de façon systématique, à ajouter un zéro et une virgule devant le nombre représentant les grammes (un procédé qui est de plus validé par l'exemple donné en tête de tableau où 480 g correspond bien à 0,480 kg).

figurant dans la colonne « CHF par unité ». La colonne « coût des marchandises » est là pour accueillir les prix de chaque produit, résultat de la multiplication de la quantité conversée et du prix unitaire ; elle permet ensuite d'accomplir directement l'addition finale déterminant le coût total des marchandises. Un exemple est donné en tête de tableau (le calcul du coût de 480 g de cuisses de poulet) afin d'illustrer son fonctionnement.

Seuls deux items échappent à cette systématique : le cas du 1 gramme de safran, qui n'impliquait pas de conversion, mais qui a néanmoins été transformé en 0,1000 g et celui des 10 dl de fond de volaille qui ont été transformés en 0,100 l (où à chaque fois le nombre de zéros ajoutés à droite de chaque semble traduire les rapports kg/g et l/dl).

Analyse des productions relatives au troisième exercice CC

Le second exercice de l'examen blanc (cf. figure n°22) demandait, quant à lui, de calculer le coût total des marchandises nécessaires à la réalisation d'un dessert. L'exercice ne comprenait cette fois-ci pas de tableau, ni d'exemple de calcul à accomplir.

Ex. n°3

Exercice 6		Report	15
Pour passer votre examen pratique, vous décidez de créer un dessert à la banane. Vous appelez votre création la "Banana-Fantasy". Le chef vous dit que vous devez calculer le coût des marchandises nécessaires à votre création.			
Devoir: Calculez le coût de marchandises à acheter pour votre création dessert:			
Dénrées et quantités nécessaires pour 4 personnes:			
8 pièces	Mini-meringues, à 10 centimes pièce	80c	
4 pièces	Grandes bananes à 70 centimes pièce	280 CHF	
8 boules	Glace chocolat à 35 centimes la boule	280 CHF	
2 dl	Crème fouettée à CHF 8.10 le litre	4,05 CHF	
120 g	Sauce chocolat à CHF 7.- le kg		
20 g	Raisins secs à CHF 6,50 le kg		
8 pièces	Bricolats à 5 centimes pièce		
70 g	Framboises à CHF 5.20 le kg		

$8 \times 10 = 80 \text{ c}$ $4 \times 70 = 280 \text{ c}$ $8 \times 35 = 280 \text{ CHF}$ $8 \times 5 = 40 \text{ c}$ $200 \text{ dl} \times 100 \% / 4 = 5000 \text{ g} = 4,05$ $120 \text{ g} \times 100 \% / 4 = 3$	$- 8.10$ 200

Le coût total des marchandises nécessaires à votre création de ce dessert pour 4 personnes s'élève à _____ CHF.

Figure n°22 - Le troisième exercice CC résolu par Ca

Comme elle l'avait montré dans le premier exercice de calcul de coûts, Ca commencé par faire un usage adéquat de la multiplication pour calculer les coûts des quatre quantités d'ingrédients qui étaient fondées sur des pièces et des boules et qui n'impliquaient pas de conversion.

En revanche, dès qu'il s'est agi d'opérer avec des quantités où une conversion était requise, Ca a complètement changé de procédé.

Ainsi, pour calculer le coût des 2 dl de crème, elle a écrit : $200 \text{ dl} \times 100 \% / 4 = 5000 \text{ g} = 4,05$.

L'interprétation de l'ensemble du calcul est évidemment délicate à réaliser, mais on peut faire l'hypothèse que Ca a mis en œuvre deux procédés consécutifs pour établir le coût des 2 dl de crème.

Le premier procédé²⁸⁴ serait un essai de produit en croix reposant sur trois nombres : 200 (qui correspond au 2 dl qui a été multiplié par 100, comme c'est déjà advenu à plusieurs reprises dans d'autres exercices impliquant des mesures de capacité), 100 (dont on ignore l'origine²⁸⁵, mais qui était déjà apparu dans le calcul $50 \times 100 \% 50$, lors de la résolution de l'exercice de transformation de quantités d'ingrédients figurant dans le même examen blanc) et 4 (qui réfère au nombre de personnes de la recette qui constitue une donnée non pertinente dans la résolution de l'exercice) ; et sur deux opérations : une multiplication (traduite par le signe $\times$) et une division (traduite par le signe $\%$). Le tout aboutit au résultat de 5'000 (qui est bien le résultat de $/2/0/0/\times/1/0/0/\div/4/=$ tipé sur la calculette) auquel Ca a associé l'abréviation "g".

Le second procédé est une division par deux du prix unitaire de la crème qui a abouti au résultat de 4,05.

Comme dans le cas du quatrième exercice CP, il y aurait deux procédés successivement employés, lesquels correspondent à deux façons d'envisager la relation multiplicative en jeu dans l'exercice.

Dans la figure n°15, on peut encore relever la présence des deux résultats de 280 c et 280 CHF qui figurent conjointement sur la fiche.

Ceux-ci donnent à penser que l'on retrouve dans le domaine de la monnaie une façon similaire de désigner les mesures à celle qui est apparue dans le domaine des poids : 280 CHF serait équivalent à 280 c, dans le sens où les écritures signifieraient toutes deux : "deux francs huitante", et non pas distinctement "deux cent huitante francs" pour la première et "deux cent huitante centimes".

Une différence manifeste apparaîtrait toutefois entre les deux domaines en ce sens que, dans le cas des poids, le nombre correspondant aux grammes comporte trois chiffres, alors que dans celui de la monnaie, le nombre correspondant aux centimes n'en comporte que deux, comme le veut l'usage qui est fait des deux mesures au quotidien.

SYNTHÈSE DES ANALYSES

Les analyses effectuées dans ce chapitre permettent de tirer quelques premiers enseignements concernant les investissements de savoirs et les interactions de connaissances à l'œuvre dans le contexte du CFPS du Château de Seedorf.

Investissements de savoir dans le système soutien

Les épreuves de mathématiques qui font partie des procédures de qualification soumises aux apprenties au terme de leur formation se composent d'exercices numériques, proches de ceux que l'on rencontre à l'école, dont l'habillage est en rapport avec le cadre professionnel de la formation - la cuisine dans le cas particulier. La réussite aux épreuves de mathématiques ne préjuge pas de la réussite de la formation dans son ensemble, mais il n'en reste pas moins que ce sont elles qui définissent pour une bonne part le contenu des cours de mathématiques qui, au sein de l'école professionnelle, sont donnés aux apprenties. Il semble en effet que le

²⁸⁴ On voit que la reconduction du même procédé pour établir le coût des 120 g de sauce chocolat a été abandonnée par Ca.

²⁸⁵ L'irruption du nombre de 100 dans les productions de Ca m'a d'ailleurs fait penser à un élève que j'avais rencontré lors d'un séminaire d'initiation à la recherche que j'animais, il y a plus de dix ans, à l'Institut de Pédagogie Spécialisée de la HEP-Vaud, qui insérait systématiquement le nombre 100 dans l'application de la règle de trois qu'il avait apprise en classe pour calculer des pourcentages, et ce, quel que soit le domaine de grandeurs envisagé.

principal enjeu de l'enseignement des mathématiques soit de doter les apprenties de techniques, des algorithmes, devant leur permettre de résoudre ces exercices. L'examen d'une technique enseignée en cours - le produit en croix - donne à penser que son appropriation par les apprenties ne va pas de soi : cet enseignement s'est en effet enrichi de celui d'un autre algorithme propre à les guider dans l'identification des données à considérer dans l'énoncé et dans la pose de ces mêmes données au sein du diagramme servant de support à l'exécution de la technique.

Interactions de connaissances au sein du couple enseignant-enseigné

Durant les cinq séances analysées, les interactions qui se sont nouées entre l'enseignant et l'apprentie (Ca) n'ont pas donné lieu à un enseignement de type organisé. L'enseignant s'en est trouvé empêché tant par les contraintes institutionnelles, internes et externes au CFPS, déterminant le "système soutien", que par sa faible expérience du terrain de la Fps. Etablies autour des exercices du même type que ceux figurant dans les procédures de qualification de fin de formation, ces interactions ont néanmoins donné un premier aperçu de comment une apprentie pouvait s'y prendre, dans le contexte de la Fps, pour résoudre de tels exercices à partir des techniques enseignées en cours.

D'un point de vue général, les analyses ont apporté les enseignements suivants :

1° Les techniques enseignées en cours donnent bel et bien lieu à des essais de mise en œuvre par Ca, mais elles ne lui permettent généralement pas de résoudre les exercices proposés : elles sont exécutées de façon partielle, les diagrammes devant leur servir de support n'étant pas repris ; il semble que Ca cherche avant tout à répondre à l'injonction de "faire pour résoudre" et qu'elle procède un peu en tous sens dans les calculs qu'elle tipe tour à tour sur la calculette.

2° Alors que les exercices sont dépourvus de rétroactions, Ca porte cependant un jugement critique sur les résultats qu'elle obtient, ce qui la conduit souvent à les réfuter. Il y a donc un contrôle porté sur les résultats produits par la technique, dont l'origine varie selon les exercices résolus.

3° En situation d'interaction cognitive, les techniques apprises en cours sont les seules à être mobilisées par Ca, le résultat invalidé ne la conduisant jamais à tenter de faire usage d'un procédé alternatif. La technique initiale est reconduite à plusieurs reprises, en étant parfois légèrement modifiée. De telles répétitions conduisent dans la plupart des cas à l'abandon de la résolution de l'exercice.

4° En situation d'interaction de connaissances, les interventions de l'enseignant sollicitent en revanche le recours à d'autres procédés, révélant chez Ca des savoirs indécélables jusqu'alors. Ces procédés peuvent être qualifiés d'*expédients* dans le sens où ils permettent à Ca de surseoir à la technique qui fait défaut (et donc de se tirer d'affaire), en fonction des relations numériques qu'elle parvient à reconnaître et faire fonctionner dans l'exercice : ils restent donc tributaires des nombres en jeu et n'ont pas valeur d'algorithmes, susceptibles de résoudre toute une classe d'exercices.

5° En contrepartie, l'usage d'une technique générale, comme la règle de trois, vient se heurter à la singularité des nombres en jeu dans chaque exercice de la classe qu'elle devrait en principe permettre de résoudre.

6° La résolution d'un exercice s'apparente pour Ca à un processus essais-erreurs, auquel fait écho les interventions de l'enseignant qui, de son côté, procède un peu de la même manière, cherchant lui aussi, par essais et par erreurs, à les arrimer aux productions qu'il découvre, selon les interprétations qu'il parvient/ne parvient pas à en faire.

D'un point de vue plus spécifique aux exercices proposés, les analyses ont apporté d'autres enseignements concernant ce que l'enseignant est en mesure d'attribuer à l'apprentie :

1° La résolution des exercices RFI et CP de structure de base additive/EEE, ET⁺E et ET-E est maîtrisée par Ca, excepté les cas où une conversion de mesures est en jeu. Il en va de même des exercices CC de structure de base multiplicative/M.

2° La résolution des exercices TQIR de structure de base multiplicative/QP est également maîtrisée par Ca quand la relation numérique sur lequel se fonde le rapport de proportionnalité est disponible. Dans le cas contraire, cela engage d'un côté Ca de recourir à quelque expédient fondé sur des relations numériques qu'elle maîtrise ; et de l'autre côté cela amène l'enseignant à lui suggérer quelque technique, permettant de se passer des relations numériques qui lui font défaut.

3° S'agissant des conversions de mesures, il apparaît progressivement à l'enseignant que les difficultés rencontrées par Ca sont le fait d'un système de désignation des mesures de poids qu'elle s'est constituée. Ce système repose sur la manière de désigner à l'oral²⁸⁶ les mesures de poids où 500 g est prononcé : « cinq cent grammes » et 1,200 kg : « un kilo deux cents », au lieu de « un virgule deux cents kilos » ou « un virgule deux kilos ».

Dans ce système:

- les nombres à trois chiffres, comme 500, 800 ou 450 désignent des quantités exprimées en grammes et sont généralement suivies de l'abréviation "g".
- les nombres à quatre chiffres, comme 1,200, 1'200, 4350 qui sont généralement suivis de l'abréviation "kg" (ou "k"), désignent des quantités exprimées en grammes et en kilos. Le premier chiffre du nombre désigne des kilos et les trois derniers chiffres, des grammes.
- l'abréviation "g" qui accompagne les nombres à trois chiffres a bien valeur de représenter des grammes, tandis que l'abréviation "kg" qui accompagne les nombres à quatre chiffres signifie seulement que le nombre comprend des kilos.
- la virgule et l'apostrophe sont interchangeables, puisqu'elles relèvent d'une fonction indifférenciée qui est de séparer, dans les nombres à quatre chiffres, la partie du nombre désignant les kilos de celle qui représente les grammes : les mesures 1,200 kg et 1'200 kg y sont équivalentes.
- la désignation des grandeurs dans un tel système, de même que les additions et les soustractions qui sont effectuées à l'oral ou à l'écrit, peuvent très bien se passer de conversions, en évitant le recours à l'usage des nombres décimaux.

Un tel système constituerait dès lors un obstacle à l'usage des nombres décimaux pour représenter et transformer des mesures, au sens que lui donne Brousseau (1978), puisqu'il constituerait bien un savoir, qu'il trouverait son domaine de validité dans l'usage des poids que l'on réalise au quotidien²⁸⁷ et qu'il résisterait aux calculs comprenant des nombres décimaux à effectuer sur une calculette. Un tel obstacle ne pourrait cependant pas être considéré comme un obstacle ontogénétique, n'étant pas lié au développement de l'apprentie, ni épistémologique, n'étant pas lié à la construction des mesures de poids, ni même encore didactique, n'étant pas le fruit

²⁸⁶ Notons à ce propos que, étymologiquement parlant, le terme "kilo" signifiant "mille", pourrait fort bien être associé à la diction du nombre au lieu de l'être à l'unité de mesure. Le terme mille qui est utilisé en numération parlée et qui ne l'est pas en numération écrite chiffrée, réapparaîtrait dans la désignation des unités de mesure.

²⁸⁷ Rappelons qu'il est vraisemblable que le système échafaudé dans le domaine des poids se retrouve aussi dans le domaine de la monnaie, mais en ayant fait l'objet d'une transposition consécutive à l'usage spécifique qui est fait au quotidien des mesures dans chacun des deux domaines.

direct d'un enseignement : échafaudé dans le cadre des pratiques quotidiennes, on pourrait plutôt parler d'obstacle "empirique" ou "pratico-empirique".

Tous ces enseignements issus des analyses restent naturellement liés à la singularité de la situation - le "système soutien" constitué avec Ca - sur laquelle elles ont porté. Dans quelle mesure ont-ils une portée plus générale relative aux mathématiques et à leur fonctionnement dans le contexte de la Fps ? C'est à cette question qu'il sera tenté de répondre dans les chapitres qui suivent, en apportant trois nouveaux cadrages sur la base des situations quelque peu différentes auxquelles je me suis retrouvé confronté lors des trois investigations qui lui ont succédé.

CHAPITRE 7 LES ÉPREUVES DE MATHÉMATIQUES SOUMISES AUX STAGIAIRES AVANT ET EN VUE DE LEUR ENTRÉE EN FORMATION AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF

INTRODUCTION

Le chapitre présente une deuxième incursion dans les investissements de savoirs et les interactions de connaissances (il s'agira cette fois-ci surtout d'interactions cognitives) susceptibles d'apparaître dans la Fps, en prenant pour principal objet d'analyse, les résultats obtenus par les stagiaires durant l'année 2010-2011 aux épreuves de mathématiques qui leur ont été soumises avant leur entrée en formation. Le chapitre est composé de quatre parties qui correspondent chacune à un domaine mathématique spécifique : *la numération, les opérations, les problèmes numériques et les mesures*. Dans chaque partie, les exercices qui composent les épreuves sont envisagés les uns après les autres, en donnant d'abord lieu à une présentation et une analyse succinctes. Une analyse quantitative des réussites permet ensuite de distinguer les items de chaque exercice qui sont maîtrisés, de ceux qui ne le sont que partiellement et de ceux qui ne sont que peu maîtrisés. Une analyse qualitative des erreurs²⁸⁸ lui succède pour reconstituer, quand cela est possible, les procédés qui les ont produites et les savoirs qui les supportent. Une synthèse des analyses, ainsi qu'une discussion critique concernant leur pertinence et leur portée, sont proposées en fin de chapitre.

LES ÉPREUVES DE NUMÉRATION

Les épreuves de numération comportent six exercices. Ces exercices abordent divers aspects de la numération décimale de position orale (en mots) ou écrite (en mots et en chiffres) et/ou des rapports que ces systèmes de numération entretiennent les uns avec les autres.

Exercice n°1 : lecture de nombres écrits en chiffres

Description et analyse préalable

L'exercice demande de lire à voix haute les douze nombres qui suivent :

7 33 104 2019 1000001 3,6 2,001 1/3 3/4 7/5 $\sqrt{2}$ π

L'intention est de distinguer les nombres que les stagiaires savent lire de ceux qu'elles ne savent pas lire ; puis, vis-à-vis de ceux qu'elles ne savent pas lire, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

7 et 33 sont avant tout proposés pour favoriser une entrée adéquate dans la tâche. Il est donc attendu que l'ensemble des stagiaires parviennent à les lire.

104 et 2019 cherchent à observer comment le 0 intercalaire est pris en compte dans la lecture d'un nombre à trois, puis à quatre chiffres.

1000001 opère un saut dans l'univers des grands nombres. En cas d'erreur ou d'impossibilité de lecture, un stylo est proposé pour susciter et observer un éventuel usage des apostrophes.

²⁸⁸ L'analyse a été réalisée de façon systématique, afin de prendre en compte chaque erreur récoltée. Il n'en sera toutefois donné ici que les principaux résultats - de façon à ne pas surcharger des propos déjà très denses - qui sont illustrés dans la plupart des cas par des exemples d'erreurs spécifiques.

3,6 et 2,001 opèrent une entrée dans le monde des nombres décimaux écrits en code décimal. 2,001 permet d'apprécier la prise en compte effective des deux 0 (dont on dit parfois qu'ils ne comptent pas lorsqu'ils sont placés après la virgule) dans la lecture du nombre.

1/3, 3/4 et 7/5 occasionnent une première rencontre avec les fractions. 1/3 et 3/4, du fait de leur usage au quotidien, portent des noms spécifiques courants : "un tiers" et "trois quarts", alors que "sept cinquièmes" résulte d'une lecture générique de l'ensemble des fractions. En cas d'erreur ou d'impossibilité de lecture, l'écriture 1/3 munie d'une barre de fraction horizontale est proposée.

$\sqrt{2}$ et π sont deux nombres irrationnels relativement "courants", la touche $\sqrt{}$ figurant sur la plupart des calculettes disponibles dans le commerce, alors que π est intrinsèquement lié au calcul de la circonférence d'un cercle ou de l'aire d'un disque.

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°12) montre que :

- la lecture des nombres de un à quatre chiffres, de même que celle d'un nombre décimal ne comprenant pas de zéro sont bien maîtrisées²⁸⁹ par l'ensemble des stagiaires avec des taux de réussite allant de 92 à 100 % ;
- la lecture d'un nombre décimal avec zéros ou des fractions courantes (1/3, 3/4) est partiellement maîtrisée avec des taux qui oscillent entre 61 et 76 % ;
- la lecture d'un nombre à sept chiffres avec zéros, celle d'une fraction non-usuelle (7/5) et celle des nombres $\sqrt{2}$ et π sont peu maîtrisées par les stagiaires avec des taux variant de 23 à 48 % ;

Item	Nb de fiches récoltées ²⁹⁰	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
7	53	52	---	---	100 %
33	53	52	---	---	100 %
104	53	52	---	---	100 %
2019	53	48	4	---	92,3 %
1000001	53	19	23	10	36,5 %
3,6	53	52	---	---	100 %
2,001	53	41	11	---	78,8 %
1/3	53	33	17	2	63,5 %
3/4	53	32	12	8	61,5 %
7/5	53	25	14	13	48,1 %
$\sqrt{2}$	53	12	19	21	23 %
π	53	14	8	30	26,9 %

Tableau n°12 - Réussites à l'exercice "lecture de nombres écrits en chiffres"

- les non-réponses concernent exclusivement le nombre à sept chiffres, les fractions et les deux nombres irrationnels ; leur nombre élevé ($n \geq 10$) dans les cas de 10000001, 7/5, $\sqrt{2}$ et surtout π donne à penser que les grands nombres, les fractions non-usuelles et les nombres irrationnels constituent des champs notionnels qui n'ont été que peu ou pas investis durant la scolarité antérieure des stagiaires²⁹¹.

²⁸⁹ On considérera les taux de 80 à 100 % comme item bien maîtrisé, 50 à 79 % comme partiellement maîtrisé et inférieur à 50 % comme peu maîtrisé par l'ensemble des stagiaires.

²⁹⁰ Une stagiaire n'a pas complété l'exercice.

²⁹¹ Certaines stagiaires savent que le signe $\sqrt{}$ figure sur une touche de la calculette, mais n'en connaissent pas la signification.

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- les quatre erreurs de lecture du nombre 2019 sont les mêmes : 2019 est lu "deux cent dix-neuf" au lieu de "deux mille dix-neuf"; ces erreurs proviennent manifestement d'une généralisation de la lecture des nombres, 101, 102, 103, 104,..., respectivement 201, 202, 203, 204,..., au-delà de 209 (2010 étant lu "deux cent dix", 2011, "deux cent onze", etc. comme 208 était lu "deux cent huit et 209, "deux cent neuf") ;
- les vingt-trois erreurs de lecture du nombre 1000001 (cf. tableau n°13) peuvent être interprétées comme autant d'essais d'exprimer un nombre "plus grand que mille", soit par l'usage d'un facteur décimal de mille (dix, cent), soit par le recours à un mot qui désigne une puissance de la base dix supérieure à mille (million, milliard), soit par la composition des deux (dix millions, cent milliards) ;

1000001		7/5	
Erreurs	Nombre d'erreurs	Erreurs	Nombre d'erreurs
cent mille un	6	sept virgule cinq	2
dix mille un	4	sept cinq, je sais pas	2
un milliard un	4	sept barre cinq	1
mille un	3	sept tiret cinq	1
mille cent un	1	sept demi cinq	1
dix millions un	1	sept fois cinq	1
cent millions un	1	sept centimètres cinq	1
cent milliards un	1	sept je sais pas comment c'est cinq	1
mille	1	sept tiers	1
cent millions	1	sept tiers sur cinq	1
Total d'erreurs	23	sept quart	1
		sept cinq	1
		Total d'erreurs	14

Tableau n°13 - Erreurs relatives à la lecture des nombres 1000001 et 7/5

- dans le cas du nombre 2,001, c'est la non-lecture des deux zéros qui produit la grande majorité des erreurs (avec sept occurrences) ;
- enfin, dans les cinq derniers nombres (fractions et irrationnels), on observe que face à des désignations qu'elles ignorent, les stagiaires s'essaient à faire usage de mots qui, dans leur majorité, sont empruntés au vocabulaire mathématique ; c'est le cas par exemple pour 7/5 (cf. tableau n°13), lorsque "demi", "fois" ou "centimètre" sont utilisés pour désigner la barre de la fraction ou quand ce sont des mots appartenant au champ même de la fraction comme "tiers" ou "quart" auxquels les stagiaires ont recours.

Exercice n°2 : transcription en chiffres de nombres écrits en mots

Description et analyse préalable

L'exercice demande de transcrire en chiffres les dix nombres qui suivent :

trois - dix-sept - septante-deux - cent un - mille cinq cent trente-six - deux mille sept
deux mille dix - deux cent onze mille six cent dix-neuf - trois millions - zéro virgule zéro un

L'intention est de distinguer les nombres que les stagiaires savent transcrire de l'écriture en mots à l'écriture en chiffres de ceux qu'elles ne savent pas retranscrire ; puis, vis-à-vis de ceux qu'elles ne savent pas retranscrire, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

Les trois premiers items - "trois", "dix-sept" et "septante-deux" - sont avant tout proposés pour favoriser une entrée adéquate dans la tâche. Il est donc attendu que l'ensemble des stagiaires parviennent à les retranscrire en chiffres.

Contrairement à "septante-deux" qui comprend un nombre de mots égal au nombre de chiffres pour le transcrire, "cent un" en comporte un de moins. Il s'agit d'observer dans quelle mesure cette non-correspondance entre nombre de mots et nombre de chiffres est/n'est pas source d'erreurs dans le cas d'un nombre à trois chiffres.

"Deux mille sept" et "deux mille dix" comportent également tous deux un nombre de mots pour les écrire qui n'est pas équivalent au nombre de chiffres pour les transcrire. Il s'agit d'observer si cette non-correspondance entre mots et chiffres est/ n'est pas source d'erreurs dans le cas de nombres à quatre chiffres. "Deux mille dix" est par ailleurs un nombre que les stagiaires ont pu rencontrer à plusieurs reprises au quotidien, puisqu'il désignait l'année en cours (ou l'année précédente²⁹² pour les stagiaires qui sont venues au CFPS à partir de janvier 2011) quand les épreuves ont été proposées. Il est donc possible que le nombre ait été mémorisé tel quel (et qu'il n'est donc pas nécessaire de faire appel à des règles d'écriture spécifiques). Comme dans le cas de la lecture de 2019 à l'exercice n°1, la succession "deux mille sept" et "deux mille dix" est par ailleurs susceptible de produire des erreurs de type "2007" -> "20010".

"Deux cent onze mille six cent dix-neuf" et "trois millions" comprennent à leur tour un nombre de mots pour les écrire qui diffère du nombre de chiffres pour les transcrire. Il s'agit d'observer dans quelle mesure cette non-correspondance entre mots et chiffres est/ n'est pas source d'erreurs dans le cas de nombres de plus de quatre chiffres. Dans le cas de trois millions, c'est un de plus mot-nombre correspondant à une nouvelle puissance de la base dix qui fait son apparition²⁹³.

"Zéro virgule zéro un" enfin réalise une incursion dans l'écriture des nombres décimaux, tout en conservant, dans le cas particulier, l'égalité entre le nombre de mots et le nombre de signes (chiffres et virgule) à utiliser pour le transcrire.

Analyse quantitative des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°14) montre que :

- la transcription en chiffres de nombres écrits en mots comprenant un à trois chiffres, celle d'un nombre de quatre chiffres d'usage courant (2010), de même que celle d'un nombre décimal avec zéro sont bien maîtrisées par l'ensemble des stagiaires avec des taux de réussite allant de 85 à 100 % ;
- la transcription en chiffres de nombres écrits en mots comprenant quatre chiffres avec ou sans zéro est partiellement maîtrisée avec des taux de 70 et 77 % ;
- la transcription en chiffres de nombres écrits en mots comprenant six ou sept chiffres est peu maîtrisée par les stagiaires avec des taux de 43 et 49 % ;
- il n'y a que très peu de non-réponses dans l'exercice.

²⁹² Une stagiaire qui en avait bien pris la mesure m'a d'ailleurs fait le reproche de ne pas avoir mis mes exercices à jour.

²⁹³ A la différence de ce qui se passe pour dix (ante), cent et mille où, à chaque fois que le nombre de chiffres d'un nombre augmente d'une unité, un nouveau mot-nombre est utilisé à l'oral pour représenter la nouvelle puissance de la base dix, celui-ci n'intervient dorénavant qu'après un accroissement de trois unités du nombre de chiffres. Il est donc intéressant d'observer en quoi cette rupture dans le système de désignation des nombres dans le système de numération décimal (qui intervient entre les nombres inférieurs et supérieurs à neuf mille neuf cent nonante neuf) peut être source d'erreurs.

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
trois	53	53	---	---	100 %
dix-sept	53	52	1	---	98,1 %
septante-deux	53	52	1	---	98,1 %
cent un	53	49	4	---	92,4 %
mille cinq cent trente-six	53	37	14	2	69,8 %
deux mille sept	53	41	12	---	77,3 %
deux mille dix	53	45	8	---	84,9 %
deux cent onze mille six cent dix-neuf	53	26	23	4	49 %
trois millions	53	23	29	1	43 %
zéro virgule zéro un	53	51	2	---	96,2 %

Tableau n°14 - Réussites à l'exercice "transcription en chiffres de nombres écrits en mots"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- la plus grande part des erreurs recensées peut être interprétée comme le produit de la mise en correspondance de deux systèmes de désignation des nombres (mots et chiffres) qui ne fonctionnent pas selon des règles identiques ; plus le nombre de puissances de dix est important dans l'écriture en mots, plus la variété des erreurs est étendue ; le phénomène est particulièrement frappant dans la transcription du nombre "deux cent onze mille six cent dix-neuf " où l'on observe pas moins de vingt et une occurrences distinctes²⁹⁴ (cf. tableau n°15) : les erreurs procèdent soit par l'ajout de chiffres 0 excédentaires, comme dans 20116019, soit par l'ajout de chiffres 1 excédentaires, comme dans 2111619, soit encore par l'ajout conjoint de chiffres 0 et 1 excédentaires comme dans 211'100060019, qui servent à marquer l'une ou l'autre des puissances de la base dix qui figure dans l'écriture en mots²⁹⁵ ; de plus rares erreurs relèvent également de l'éviction de l'un ou l'autre des chiffres multiples d'une puissance de la base dix qui est remplacé par un 0, comme dans 20011600.

Erreurs	Nombre d'erreurs
2011619	2
212'619	2
211'100060019	1
211116119	1
200'011'619	1
20116019	1

²⁹⁴ Il y en avait déjà quatorze pour "mille cinq cent trente-six".

²⁹⁵ Ce qui fait que le nombre de chiffres utilisé pour transcrire le nombre oscille de quatre à douze ; un peu comme si le fait que la taille d'un nombre, dans le système d'écriture en chiffres, est (en partie) définie par le nombre de chiffres qui le compose, s'évanouisse vis-à-vis d'un autre fait plus prégnant, soit celui de représenter par les chiffres 0 ou 1, les puissances de la base dix que l'on trouve dans le système d'écriture en mots.

200,11619 ²⁹⁶	1
20011600	1
2116719	1
2111619	1
2110619	1
2011'609	1
211'199	1
211618	1
210619	1
2'06119	1
111'619	1
21619	1
2169	1
2019	1
2	1
Total d'erreurs	23

Tableau n°15 - Erreurs dans la transcription en chiffres du nombre "deux cent onze mille six cent dix-neuf"

- dans le cas particulier de la transcription en chiffres du nombre de "trois millions" (cf. tableau n°16), il est possible d'identifier deux autres sources d'erreurs ; la première est consécutive à la rupture engendrée par le système de désignation des nombres par des mots qui change de règles de construction pour des nombres supérieurs à neuf mille neuf cent nonante-neuf ; c'est en tous les cas ainsi que l'on peut interpréter le résultat 30000, donné à seize reprises, comme transcription du nombre "trois millions" : le fait que dans la succession des puissances de dix, le terme "million" vient juste après "mille", correspond à ce qu'un 0 supplémentaire (au lieu de trois) ait été ajouté à l'écriture 3000 (trois mille) pour donner 30000 (trois millions) ; la seconde source d'erreurs concerne le contrôle du nombre de zéros à faire figurer dans un nombre pour que ce dernier représente bel et bien le nombre "trois millions" : l'usage des apostrophes qui est/sont souvent ajoutée/s après coup sur l'écriture en chiffres n'étant pas en mesure de le garantir.

Erreurs	Nombre d'erreurs
30000 (14) - 3'0000 (2)	16
300000 (4) - 3'00000 (1) - 300'000 (1)	6
3000	5
300	2
Total d'erreurs	29

Tableau n°16 - Erreurs dans la transcription en chiffres du nombre "trois millions"

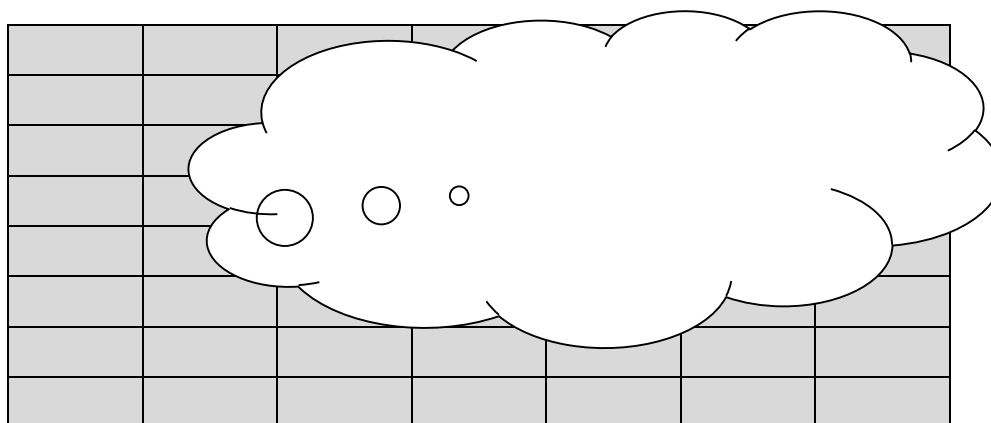
Exercice n°3 : dénombrement d'un réseau rectangulaire de cases

Description et analyse préalable

L'exercice demande de dénombrer les cases d'un rectangle de huit cases sur sept.

²⁹⁶ On remarque que l'apostrophe a été remplacée à une occasion par une virgule.

Combien y a-t-il de cases en tout sur le tableau gris qui se trouve derrière le nuage ?



L'intention est de déterminer si les stagiaires parviennent à réaliser le dénombrement des cases d'un réseau rectangulaire et à observer le procédé - dénombrement par un, dénombrement par n (suivant les lignes) ou par m (suivant les en colonnes), multiplication du nombre de lignes (m) par le nombre de colonnes (n) - sachant que la présence du nuage vise en principe à faire obstacle au comptage par un, au profit d'un comptage par n ou par m ou de la multiplication de n par m.

Analyse quantitative des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°17) montre que :

- le dénombrement des cinquante-six cases d'un réseau rectangulaire est partiellement maîtrisé par l'ensemble des stagiaires avec un taux de réussite de 74 % ; sur les trente-neuf réponses correctes²⁹⁷, vingt-cinq l'ont été en ayant recours à la multiplication de 7 par 8, treize grâce au comptage par un (avec souvent le dessin des cases manquantes qui a été tracé à l'aide du rapporteur) et une seule en recourant au comptage par sept (sept ; quatorze ; vingt et un ; etc.) ;
- aucune non-réponse n'est à recenser.

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
Combien y a-t-il de cases en tout sur le tableau gris qui se trouve derrière le nuage ?	53	39	14	---	73,6 %

Tableau n°17 - Réussites à l'exercice "dénombrement d'un réseau rectangulaire de cases"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- neuf erreurs sur proviennent d'un comptage par un qui n'a pas abouti ; trois erreurs sont le fait d'une prise en compte inexacte du nombre de cases par ligne ($6 \times 8 = 48$ et $5 \times 8 = 40$ au lieu de $7 \times 8 = 56$) ou par colonne ($7 \times 9 = 63$ au lieu de $7 \times 8 = 56$) ; deux erreurs résultent d'une mécompréhension de l'énoncé (qui n'a pu être révisée durant le déroulement de l'épreuve)

²⁹⁷ En tenant compte du fait que quatre réussites ont eu lieu après relecture de la consigne, les stagiaires concernées ayant d'abord compris qu'il s'agissait de dénombrer l'ensemble des cases qui se trouvaient soit derrière, soit hors du nuage.

Exercice n°4 : comptage et décomptage par n

Description et analyse préalable

L'exercice demande de compléter cinq suites de six nombres en comptant et en décomptant par n ; dans trois items, un nombre de la suite et n sont donnés et il s'agit de retrouver les cinq autres ; dans les deux autres items, deux nombres sont donnés et il s'agit de retrouver n et les quatre autres nombres de la suite.

<i>Comptez...</i>						
<i>par 1</i>	...	48	...	...	...	...
<i>par 10</i>	80	...	...	...	...	...
<i>par ...</i>	34	39	...	...	...	...
<i>par ...</i>	...	...	...	...	72	83
<i>par 0,1</i>	0,7	...	...	...	...	...

L'intention est d'identifier les suites de nombres que les stagiaires parviennent à compléter de façon adéquate et d'observer en quoi les régularités des suites (relatives au système décimal de position écrit) servent de point d'appui ou au contraire de distracteur.

Le premier item est avant tout proposé pour favoriser une entrée adéquate dans la tâche. Il est donc attendu que l'ensemble des stagiaires parviennent à compléter la suite des nombres.

Le deuxième item comprend un comptage par 10 qui comporte une rupture au passage du nombre 100, soit dès l'instant où il ne s'agit plus de modifier le premier chiffre du nombre (80, 90, 100), mais le deuxième (100, 110, 120).

Les troisième et quatrième items demandent d'abord la recherche de n qui peut s'opérer soit par comptage ou décomptage par 1, soit par l'usage direct de la soustraction, avec ou sans recours à la calculatrice²⁹⁸. Le comptage par 5 comprend des régularités aussi bien dans le chiffre des dizaines (3, 3, 4, 4, 5, 5, ...) que dans celui des unités (4, 9, 4, 9, 4, ...), tandis que le décomptage par 11 comporte une rupture dans la régularité de la suite au passage du 50 au 39, quand, au chiffre des dizaines, il est nécessaire de "sauter" directement du 5 au 3, sans passer par le 4.

Le cinquième item opère une incursion dans l'univers des décimaux. Il comporte également une rupture dans la régularité de la suite au passage de l'unité : les ajouts successifs de 0,1 à partir de 0,7 donnent 0,8, 0,9, 1 et 1,1 et non pas 0,8, 0,9, 0,10 et 0,11.

Analyse quantitatives des réussites

Item	Nb de fiches récoltées ²⁹⁹	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
$n = 1$	33	32	1	---	97 %
$n = 10$	33	30	3	---	90,9 %
$n = 5$	33	31	2	---	93,9 %
$n = 11$	33	27	6	---	81,8 %
$n = 0,1$	33	10	23	---	30,3 %

Tableau n°18 - Réussites à l'exercice "comptage et décomptage par n"

²⁹⁸ Il est également possible de recourir à l'addition, par essais et erreurs, avec ou sans la calculatrice : j'essaie $34 + 4$, je vois que cela donne 38 ; j'essaie $34 + 5$, je constate que cela donne bien 39 et j'en déduis que l'écart entre 34 et 39 est égal à 5.

²⁹⁹ Il s'agit de bien prendre en compte ici le fait que seulement 33 stagiaires sur les 53 qui ont effectué un stage au CFPS durant l'année 2010-2011 ont pris part à cette deuxième partie de l'épreuve de numération, les 20 autres n'ayant pu l'accomplir, essentiellement par manque de temps, la durée pour compléter les fiches d'exercices étant très variable d'un stagiaire à l'autre.

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°18) montre que :

- les comptages/décomptages par 1, par 10, par 5 et même par 11 sont bien maîtrisés par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec des taux de réussite allant de 82 à 97 % ;
- en revanche le taux chute de façon très conséquente (plus que 30 % de réussite) dans le cas du comptage par 0,1 qui n'est que peu maîtrisé par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve, la rupture dans la régularité de la suite au passage de l'unité ayant eu de très larges effets (voir plus avant) ;
- aucune non-réponse n'est à recenser.

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- c'est la prise en compte de certaines régularités des suites qui fonde la plupart des erreurs recensées, la calculette pourtant à disposition, n'étant que peu utilisée pour réaliser les calculs et encore moins comme instrument de vérification après coup ; c'est le cas, par exemple, à deux reprises, dans le deuxième item au passage du 100 qui donne : 80, 90, 100, 200, 300 ; ou encore dans le quatrième item qui aboutit une fois à 32, 43, 52, 63, 72, 83 et une autre fois à 38, 49, 50, 61, 72, 83.
- elle est particulièrement manifeste dans le cinquième item (cf. tableau n°19), où ce sont les régularités d'accroissement des deux "chiffres" qui se trouvent de part et d'autre de la virgule qui prennent le pas sur l'ajout du 0,1 ; on voit ainsi que la quasi-totalité des erreurs (qui représentent plus de la moitié des réponses récoltées) aboutissent à la suite : 0,7, 0,8, 0,9, 0,10, 0,11, 0,12 ; trois autres suites³⁰⁰ sont produites par la prise en compte de régularités différentes : 0,7, 0,8, 0,9, 0,10, 0,2, 0,3 et 0,7, 0,8, 0,9, 0,10, 0,20, 0,30, où c'est sur le chiffre à droite de la virgule que portent les ajouts successifs de 1 et : 0,7, 0,8, 0,9, 1, 2, 3, où, une fois le 1 atteint, c'est le comptage par 1 qui prend le pas sur l'ajout successif de 0,1.

Erreurs	Nombre d'erreurs
0,7, 0,8, 0,9, 0,10, 0,11, 0,12	18
0,7, 0,8, 0,9, 0,10, 0,2, 0,3 0,7, 0,8, 0,9, 0,10, 0,20, 0,30	2
0,7, 0,8, 0,9, 1, 2, 3	1
0,7, 0,13, 0,19, 0,25, 0,31, 0,37	1
0,7, 1,4, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8	1
Total d'erreurs	23

Tableau n°19 - Erreurs relatives au comptage par 0,1

Exercice n°5 : ordre des nombres dans N et dans D

Description et analyse préalable

L'exercice demande d'ordonner des nombres qui appartiennent à N dans le premier item et à D dans le second.

210	1002	211112	120	21	102	122221
3,1	1,02	3,7	3,01	1,1	3,07	0,37

³⁰⁰ On peut encore remarquer que la suite 0,13, 0,19, 0,25, 0,31 et 0,37, qui opère par "bonds de 6" sur la partie décimale, est vraisemblablement due à la prise en compte de l'écart existant entre le "par 0,1" et le "0,7" qui figurent côte à côte sur la fiche à l'item n°5, tandis que la dernière suite figurant dans le tableau : 0,7, 1,4, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8 reste plus difficile à interpréter.

L'intention est de déterminer si l'ordre des nombres dans N et dans D est maîtrisé par les stagiaires et, quand ce n'est pas le cas, d'identifier les critères³⁰¹ qui sont pris en compte pour le faire.

Le premier item ne comporte que des nombres naturels de deux à six chiffres. Les trois nombres à trois chiffres, composés des mêmes chiffres, demandent de comparer les chiffres de chaque nombre. Il en va de même pour les deux nombres à six chiffres. Le fait que 122221 comporte plus de chiffres 2 que 211112 est par ailleurs susceptible d'entraîner une contradiction.

Le second item ne comporte que des nombres décimaux de deux et trois chiffres. Quatre nombres commencent par le chiffre 3, deux par le chiffre 1 et un par le chiffre 0. Outre le procédé qui permet d'ordonner adéquatement les sept nombres, il est aussi possible de prévoir un ordre qui (comme pour les naturels) tient d'abord compte du nombre de chiffres de chaque nombre, puis de la comparaison des chiffres en commençant par la gauche qui aboutirait à 3,07, 3,01, 1,02, 0,37, 3,7, 3,1 et 1,1 et un ordre qui tient d'abord compte du premier chiffre du nombre, puis du nombre de chiffres de chaque nombre qui aboutirait à 3,07, 3,01, 3,7, 3,1, 1,02, 1,1 et 0,37.

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°20) montre que :

- l'ordre des nombres dans N est bien maîtrisé par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec un taux de réussite de 82 % ;
- le taux chute de façon conséquente dans le cas de l'ordre des nombres dans D (42 %) qui n'est que peu maîtrisé par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve ;
- une seule non-réponse est à comptabiliser.

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
210-1002- 211112-120- 21-102-122221	33	27	6	---	81,8 %
3,1-1,02-3,7- 3,01-1,1- 3,07-0,37	33	14	18	1	42,4 %

Tableau n°20 - Réussites à l'exercice "ordre des nombres dans N et dans D"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- l'inversion entre les nombres 122221 et 211112 est à l'origine de la plupart des erreurs de l'ordre des nombres dans N, ce qui tend à montrer que, pour les apprenties considérées, le nombre de 2 qui compose le nombre est, dans le cas des nombres à six chiffres, un critère plus déterminant que la position des chiffres dans le nombre ;

³⁰¹ Rappelons que dans N, l'ordre réfère en premier lieu au nombre de chiffres de chaque nombre, puis, au cas où les nombres possèdent le même nombre de chiffres, à la comparaison successive (en commençant par la gauche) des chiffres de chaque nombre. Dans D en revanche, l'ordre des nombres ne réfère plus à la taille des nombres (nombre de chiffres) - 3,1 est plus grand que 1,02, alors même qu'il possède un chiffre de moins - et il convient d'examiner d'abord la partie entière du nombre puis, en cas d'équivalence, de procéder à la comparaison successive (en commençant par la gauche) des chiffres de la partie décimale.

- en ce qui concerne l'ordre dans D, c'est assez curieusement le critère³⁰² de comparaison des chiffres des nombres qui sont différents de 0 qui est déterminant dans la majorité des erreurs recensées, comme dans 0,37/3,07/3,7/3,01/3,1/1,02/1,1 ; puis vient celui de la taille des nombres (critère qui est premier dans N), comme dans : 3,07/3,01/1,02/0,37/3,7/3,1/1,1 ; alors que dans plusieurs suites, il reste difficile d'inférer un critère qui permet de déterminer l'ordre qui a été suivi, comme dans : 3,7/3,1/1,1/1,02/3,01/3,07/0,37.

LES ÉPREUVES CONCERNANT LES OPÉRATIONS³⁰³

Les épreuves concernant les quatre opérations élémentaires comportent quatre exercices. Deux exercices s'intéressent à l'effectuation des opérations à l'oral et deux autres exercices à l'usage des algorithmes de calcul écrits.

Exercice n°1 : opérations dans N à l'oral

Description et analyse préalable

L'exercice demande d'effectuer par oral trois additions, trois soustractions, trois multiplications et trois divisions :

$9 + 3 =$	$13 + 26 =$	$37 + 13 =$
$9 - 3 =$	$44 - 7 =$	$64 - 27 =$
$9 \times 3 =$	$3 \times 10 \times 2 =$	$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 =$
$9 \div 3 =$	$12 \div 1 =$	$100 \div 10 =$

L'intention est de déterminer les opérations que les stagiaires parviennent à résoudre à l'oral ; puis, vis-à-vis de celles qu'elles ne savent pas résoudre, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

$9 + 3 =$, $9 - 3 =$, $9 \times 3 =$ et $9 \div 3 =$ sont avant tout proposés pour favoriser une entrée adéquate dans la tâche. Il est donc attendu que l'ensemble des stagiaires parviennent à les résoudre.

$13 + 26 =$ et $37 + 13 =$ mettent deux fois en jeu l'addition du 13 ; dans le premier cas, l'ajout du 3 des unités n'implique pas de passage par la dizaine, ce qui fait qu'il est possible de procéder "chiffre par chiffre", indépendamment de l'ordre des sous-opérations à réaliser, en effectuant $6 + 3 = 9$ et $2 + 1 = 3$ pour aboutir à 39 ; alors que, dans le second cas, le fait que $7 + 3$ soit égal à 10 et qu'il implique un report de la dizaine obtenue le permet plus difficilement.

$44 - 7 =$ rend possible un décomptage par 1 pour aboutir directement à 37, alors que $64 - 27 =$ demande de coordonner le décomptage par 1 à la soustraction de 2 (20) à 6 (60) pour parvenir à 37 ; dans le cas où l'on commence par la soustraction de 2 (20) à 6 (60), il est possible de réutiliser le résultat de $44 - 7 =$ pour trouver directement 37, ce qui n'est pas possible si l'on débute par $64 - 7 =$; par ailleurs, le fait que les deux soustractions aboutissent au même résultat est susceptible d'entraîner une contradiction.

$3 \times 10 \times 2 =$ est proposé pour déterminer si une multiplication composée de trois termes est maîtrisée par les stagiaires, tandis que $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 =$ joue sur la répétition de l'élément neutre de la multiplication pour observer dans quelle mesure la "neutralité" du 1 demeure, lorsqu'il est répété plusieurs fois dans un même calcul.

³⁰² On place d'abord les nombres qui contiennent 3 et 7, puis ceux qui contiennent 3 et 1, puis ceux qui contiennent 1 et 2 et 1 et 1 ; 0,37 échappe néanmoins parfois à la règle en demeurant en queue de liste comme dans : 3,07/3,7/3,01/3,1/1,02/1,1/0,37 ou dans : 3,7/3,07/3,1/3,01/1,1/1,02/0,37.

³⁰³ Contrairement aux autres épreuves, celles relatives au domaine des opérations se réalisent évidemment sans que les stagiaires ne puissent recourir à la calculatrice.

$12 \div 1 =$ et $100 \div 10 =$ permettent tous deux d'être résolus par l'usage de la multiplication correspondante : $1 \times 12 = 12$ et $10 \times 10 = 100$; il est par ailleurs possible que le résultat 12 dans $12 \div 1 =$, qui est égal au dividende de l'opération, entraîne une contradiction.

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°21) montre que :

- l'addition dans N (nombres à un et deux chiffres avec ou sans report de la dizaine), la soustraction dans N (nombres à un chiffre) et la multiplication dans N (nombres à un chiffre) sont bien maîtrisées à l'oral par l'ensemble des stagiaires avec des taux de réussite allant de 83 et 96 % ;
- la soustraction dans N (nombres à deux chiffres), la multiplication dans N de trois nombres (nombres à un et deux chiffres) et la division dans N (nombres à un, deux ou trois chiffres par un nombre à un chiffre) sont partiellement maîtrisées à l'oral par l'ensemble des stagiaires avec des taux de réussite oscillant entre 54 et 79 % ;

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
$9 + 3 =$	52	50	2	---	96,2 %
$13 + 26 =$	52	47	5	---	90,4 %
$37 + 13 =$	52	45	7	---	86,5 %
$9 - 3 =$	52	50	2	---	96,2 %
$44 - 7 =$	52	41	10	1	78,8 %
$64 - 27 =$	52	28	22	2	53,8 %
$9 \times 3 =$	52	43	8	1	82,6 %
$3 \times 10 \times 2 =$	52	38	13	1	73,1 %
$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 =$	52	23	27	2	44,2 %
$9 \div 3 =$	52	40	3	9	76,9 %
$12 \div 1 =$	52	38	6	8	73,1 %
$100 \div 10 =$	52	36	3	13	69,2 %

Tableau n°21 - Réussites à l'exercice "opérations dans N à l'oral"

- la multiplication itérée de l'élément neutre est peu maîtrisé par l'ensemble des stagiaires avec un taux de 44 % ;
- le nombre élevé de non-réponses ($n \geq 10$) dans le cas de la division d'un nombre de trois chiffres par un nombre de deux chiffres tend à désigner un champ notionnel qui n'a été que peu ou pas investi durant la scolarité antérieure des stagiaires³⁰⁴.

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- dans l'addition et la soustraction dans N, les erreurs sont surtout des erreurs de comptage et de décomptage dans l'égrenage des nombres, comme dans : $44 - 7$ qui donne 36 ou 38, au lieu de 37 et de report ou d'emprunt de la dizaine, comme dans $37 + 13 =$ qui donne 40, au lieu de 50 ; dans le cas de la soustraction de $64 - 27 =$, c'est l'interversion de l'ordre des chiffres des unités ($7 - 4$ au lieu de $4 - 7$), produisant le résultat de 43, qui constitue l'erreur la plus fréquente (avec neuf occurrences) ;

³⁰⁴ Les stagiaires qui ont renoncé, même après sollicitation de ma part, disent pour certaines qu'on ne leur a pas enseigné la division, alors que d'autres avancent qu'elles l'ont oubliée.

- dans la multiplication dans N, on retrouve des erreurs de comptage dans l'égrenage des nombres, mais aussi des erreurs dans le comptage par n, comme dans $9 \times 3 =$ qui donne 18 ou 36, au lieu de 27 ; dans l'item $3 \times 10 \times 2 =$, on observe à plusieurs reprises que l'addition vient se substituer à la multiplication dans le calcul, comme dans 23 $((2 \times 10) + 3)$, 32 $((3 \times 10) + 2)$ ou 50 $((3 + 2) \times 10)$; le fait est encore bien plus marqué dans le cas de l'item $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 =$, où le résultat 5 $(1 + 1 + 1 + 1 + 1)$ apparaît à vingt-deux reprises et les résultats 4 $((1 \times 1) + 1 + 1 + 1)$ et 3 $((1 \times 1) + (1 \times 1) + 1)$ sont produits respectivement à trois et deux reprises ;
- dans la division dans N, ce sont des substitutions³⁰⁵ d'opérations qui produisent la majorité des erreurs, comme dans $9 \div 3 =$ qui donne 27 (9×3) au lieu de 3, dans $12 \div 1 =$ qui donne 11 $(12 - 1)$ au lieu de 12 ou encore dans $100 \div 10 =$ qui donne 110 $(100 + 10)$ ou 1000 (100×10) au lieu de 10.

Exercice n°2 : opérations dans N à l'écrit (1)

Description et analyse préalable

L'exercice demande d'effectuer deux additions et deux soustractions par écrit :

$$\begin{array}{ll} 75 + 49 = & 358 - 174 = \\ 7 + 18 + 126 = & 202 - 143 = \end{array}$$

L'intention est de déterminer les additions et les soustractions de nombres à deux et trois chiffres que les stagiaires savent effectuer par écrit ; puis, vis-à-vis de celles qu'elles ne savent pas résoudre, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

$75 + 49 =$ comprend deux nombres de deux chiffres, ce qui fait que l'opération ne nécessite pas de précaution particulière dans l'alignement des nombres lors de la pose en colonne ; elle implique toutefois le report d'une retenue (1) dans sa résolution. $7 + 18 + 126 =$ comprend trois nombres constitué d'un nombre de chiffres différents, ce qui fait que l'opération demande de veiller à l'alignement des nombres (ce d'autant que le nombre à trois chiffres est en troisième position dans l'opération en ligne) lors de la pose en colonne ; elle implique également le report d'une retenue (2) au cours de sa résolution.

$358 - 174 =$ et $202 - 143 =$ comprennent deux nombres de trois chiffres, ce qui fait que les deux opérations ne nécessitent pas de précaution particulière dans l'alignement des nombres lors de la pose en colonne ; $358 - 174 =$ implique un seul apprêt des données dans sa résolution, tandis que $202 - 143 =$ en demande deux. La présence d'un zéro dans le nombre 202 complique sensiblement la transformation par emprunt (puisque'il faut aller effectuer l'emprunt dans la colonne des centaines).

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°22) montre que :

- l'addition dans N (deux nombres à deux chiffres) avec report d'une retenue est bien maîtrisée à l'écrit par l'ensemble des stagiaires avec un taux de réussite de 89 %
- l'addition dans N (trois nombres à un, deux et trois chiffres) avec report d'une retenue et la soustraction dans N (nombres de trois chiffres), impliquant un ou deux apprêts de données dans l'effectuation de l'algorithme est partiellement maîtrisée par l'ensemble des stagiaires avec des taux allant de 58 et 69 % ;

³⁰⁵ La présence de telles substitutions d'opérations peut être associée au nombre important de non-réponses pour étayer l'hypothèse d'un faible investissement de la division durant la scolarité antérieure de tout un ensemble de stagiaires.

- il n'y a que peu de non-réponses dans l'ensemble des items de l'exercice.

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
$75 + 49 =$	52	46	6	---	88,5 %
$7 + 18 + 126 =$	52	36	16	---	69,2 %
$358 - 174 =$	52	32	18	2	61,5 %
$202 - 143 =$	52	30	20	2	57,7 %

Tableau n°22 - Réussites à l'exercice "opérations dans N à l'écrit (1)"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- dans les additions, les erreurs sont essentiellement liées à l'égrenage des nombres dans les calculs, et tout particulièrement dans le cas de $7 + 18 + 126$ quand il s'agit d'additionner $7 + 6 + 8 =$ (avec neuf occurrences) ; dans le même item, celles consécutives à la pose des nombres (cf. tableau n°23) restent assez réduites (seulement cinq occurrences, dont deux fois la première³⁰⁶), tout comme celles relevant de la pose de la retenue (seulement quatre occurrences entre les deux items) ;

1 7 + 1 8 1 2 6 1 0 0 6	1 1 1 2 6 + 1 8 + 7 3 1 3	1 1 1 2 6 1 8 7 2 1 4	1 7 + 1 8 1 2 6 1 0 6

Tableau n°23 - Erreurs relatives à la pose des nombres dans la soustraction $7 + 18 + 126 =$

- dans les soustractions, les erreurs sont majoritairement (dix-sept occurrences entre les deux items) liées à l'apprêt des données relative à l'emprunt³⁰⁷, ce qui est plus particulièrement le cas dans le second item (cf. tableau n°24), où la présence du 0 au chiffre des dizaines complique singulièrement l'usage de la technique (avec douze occurrences, les résultats 159 et 67 qui apparaissent deux fois, étant issu de la même procédure) ;

10 9 10 2 0 2 - 1 4 3 9 5 9	8 9 9 10 10 7 2 0 2 - 1 4 3 8 4 6	1 10 10 2 0 2 - 1 4 3 2 6 9	2 0 2 - 1 4 3 1 6 9	9 2 0 12 - 1 4 3 1 5 9
10 1 0 12 2 0 2 - 1 4 3 6 9	2 10 12 2 0 2 - 1 4 3 6 9	0 10 12 2 0 2 - 1 4 3 6 9	1 10 10 2 0 2 - 1 4 3 0 6 7	1 2 0 12 - 1 4 3 0 0 9

³⁰⁶ Il est intéressant ici de remarquer que le résultat 1006 n'est nullement remis en cause, tandis que chez Ca, dans le chapitre précédent, chaque résultat "hors norme" était invalidé de façon systématique. L'explication tient peut-être au fait que l'on se trouve ici au niveau des nombres, tandis que les exercices résolus par Ca se situaient au niveau des grandeurs mesurées : le contrôle du résultat produit par un calcul serait mieux assuré dans le second cas, du fait que l'éventail des résultats possibles est limité par le fait qu'ils doivent correspondre, dans une certaine mesure (!), à la grandeur qu'ils représentent.

³⁰⁷ Notons que l'on ne trouve pas trace dans l'ensemble des productions de la soustraction par compensation qui semblent donc avoir entièrement disparu de l'enseignement obligatoire.

Dans 959 et 846, l'emprunt de 1 réalisé sur le 2 des centaines de 202 conduit à tracer ce 2 et le remplacer par un 10 (au lieu d'un 1). Pour 846, le 10 posé au-dessus du chiffre des centaines fait l'objet d'un second emprunt, le 10 étant remplacé par un 9. Ce double emprunt est ensuite reporté sur le chiffre des dizaines, d'abord par un 10, puis par un 9. Ce 9 fait à son tour l'objet d'un emprunt, étant remplacé par un 8, qui est reporté sous la forme d'un 7 sur le chiffre des unités.

Dans 269, le premier 69 et les deux 67, un emprunt est d'abord réalisé sur le 0 des dizaines lequel est reporté sous la forme d'un 10 sur le chiffre des unités ; puis un autre emprunt est effectué sur le 2 des centaines (transformé en 1) qui est à son tour reporté sous la forme d'un 10 sur le chiffre des dizaines. Dans le cas de 269, les deux 1 des centaines sont additionnés au lieu d'être soustraits, alors que pour les deux 67, le 3 des unités a été directement soustrait au 10 emprunté, le 2 des unités du 202 n'étant pas pris en compte.

Dans 169, aucun emprunt n'a été marqué, mais l'opération se réalise tout de même comme si le 2 des unités avait été transformé en 12 et le 0 des dizaines transformé en 10. Dans les deux 159, un emprunt a été réalisé sur le 0 des dizaines qui a été ensuite transformé en 9. Pour les deux derniers 69, un double emprunt a été effectué sur le 2 des centaines qui a été distribué pour l'un sur le 0 des dizaines et pour l'autre sur le 2 des unités. Enfin, dans le cas du 009, un emprunt a été effectué sur le 2 des centaines et reporté sur le 2 des unités, la soustraction des deux chiffres des dizaines $0 - 4$ aboutissant ensuite à 0

Tableau n°24 - Erreurs relatives à l'emprunt dans la soustraction $202 - 143 =$

- on recense également quelques erreurs (cinq occurrences) consécutives à l'inversion de deux chiffres de l'opération (quand le second est supérieur au premier), de même que quelques substitutions d'opérations (l'addition au lieu de la soustraction) ; en revanche, les erreurs liées à l'égrenage des nombres dans les calculs n'apparaissent pratiquement pas.

Exercice n°3 : opérations dans N et D à l'oral

Description et analyse préalable

L'exercice demande d'effectuer par oral huit opérations mettant en jeu des termes usuels (à l'exception du dernier) relatifs au domaine des fractions :

<i>la moitié de 10</i>	<i>le double de 3</i>
<i>le quart de 20</i>	<i>la moitié de 15</i>
<i>le 50% de 18</i>	<i>le dixième de 100</i>
<i>le triple de 3</i>	<i>le 20% de 40</i>

L'intention est d'apprécier dans quelle mesure ces termes et leur usage respectif sont maîtrisés par les stagiaires ; puis, vis-à-vis de ceux qui ne le sont pas, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

La moitié de 10 et le double de 3 sont avant tout proposés pour favoriser une entrée adéquate dans la tâche. Il est donc attendu que l'ensemble des stagiaires parviennent à les résoudre.

Le triple de 3, le quart de 20 et le dixième (qui porte en lui la désignation générique à l'oral de l'ensemble des fractions) de 100 sont d'un usage moins courant que les précédents ; les nombres sur lesquels ils portent ont été choisis de façon à ce que les résultats restent dans l'ensemble des nombres naturels ; par ailleurs, le fait que le résultat du quart de 20 soit le même que celui de la moitié de 10 est susceptible d'entraîner une contradiction.

La moitié de 15 est le seul item dont le résultat impose une incursion dans l'ensemble des nombres décimaux.

Enfin, le 50% de 18 et le 20% de 40 proposent deux calculs de pourcentages dont les résultats se trouvent aussi dans l'ensemble des nombres naturels. Le second présente une ambiguïté dans le sens où 20 étant égal à la moitié de 40, la recherche du 20% de 40 pourrait être envisagée comme la recherche de la moitié de 40.

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°25) montre que :

- les notions de "moitié" et de "double" portant sur et produisant un naturel sont bien maîtrisées par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec des taux de réussite respectifs de 100 et 84 % ;
- les notions de "triple" portant sur et produisant un nombre naturel et de "moitié" portant sur un nombre naturel et produisant un nombre décimal sont partiellement maîtrisées par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec deux taux similaires de 58 % ;
- les notions de "quart" ou de "dixième", de même que les pourcentages portant sur et produisant un nombre naturel sont peu maîtrisées par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec des taux oscillant entre 7 et 42 % ;
- le nombre élevé de non-réponses dans le cas du "quart de 20" (n = 9, mais sur 31 fiches récoltées), du "dixième de 100" et des calculs de pourcentages (n ≥ 10) tend à désigner deux champs notionnels qui n'ont été que peu ou pas investis durant la scolarité antérieure des stagiaires.

Item	Nb de fiches récoltées ³⁰⁸	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
la moitié de 10	31	31	---	---	100 %
le double de 3	31	26	4	1	83,9 %
le triple de 3	31	18	7	6	58,1 %
le quart de 20	31	13	9	9	41,9 %
le dixième de 100	31	11	6	14	35,5 %
la moitié de 15	31	18	7	6	58,1 %
le 50% de 18	31	11	2	18	35,5 %
le 20% de 40	31	2	13	16	6,5 %

Tableau n°25 - Réussites à l'exercice "opérations dans N et D à l'oral"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- la grande majorité des erreurs sont le produit d'une substitution dans l'interprétation des termes utilisés pour désigner les fractions figurant dans l'exercice ; c'est le cas, par exemple, dans le "double" de 3 qui donne 9 (3 x 3) à deux reprises, le "triple de 3" qui donne 1 (3 ÷ 3) à trois reprises ou encore 27 (3 x 3 x 3) ; c'est le cas aussi dans le "quart de 20" qui donne 5 (moitié de 20) à quatre reprises, le "dixième de 100" qui donne 200 (double de 100) à deux reprises et 50 (moitié de 100) à deux autres reprises ; et c'est encore le cas dans la "moitié de 15" qui donne 30 (double de 15) et le "50%" de 18 qui donne 36 (double de 18), chacun à une reprise ; il est donc vraisemblable ici qu'ignorant la signification de tel ou tel terme, les stagiaires l'investissent d'une autre qu'elles connaissent - l'idée de "double" et celle de "moitié" étant les deux notions de substitution les plus fréquemment employées - de façon à pouvoir apporter une réponse à l'item proposé ;
- dans le cas particulier des 20% de 40, on observe, comme on pouvait s'y attendre, que la plupart des erreurs produisent 20 comme résultat, alors que deux erreurs³⁰⁹ donnant 5 ont sans doute été produites par la division de 100 par 20 ;

³⁰⁸ Il s'agit à nouveau de prendre en compte ici le fait que seulement trente-et-une stagiaires sur les cinquante-trois qui ont effectué un stage au CFPS durant l'année 2010-2011 ont pris part à cette deuxième partie de l'épreuve consacrée aux opérations.

³⁰⁹ On observe également un résultat égal à 36 au sujet duquel la stagiaire qui l'a proposé a donné l'explication suivante : « elle a dit qu'elle allait souvent faire les soldes et qu'elle savait que 20% correspondait à un petit rabais ; 4 francs, pour un montant total de 40 francs, paraissait donc bien convenir ». On peut rapprocher cette explication liée à l'expérience de vie de l'apprentie à celle donnée au chapitre 1 par une autre apprentie qui avançait que 100 grammes de fondue, pour quelqu'un qui n'avait pas trop faim, cela pouvait très bien aller.

- on se retrouve enfin à treize reprises avec des erreurs qui ne se laissent que difficilement soumettre à l'interprétation, ce qui signifie, sans qu'il ne soit possible d'en cerner l'exacte raison, que les savoirs mis en œuvre à l'occasion de cet exercice sont plus difficiles à reconnaître que ceux qui étaient en cours dans les exercices précédents.

Exercice n°4 : opérations dans N à l'écrit (2)

Description et analyse préalable

L'exercice demande d'effectuer deux multiplications et deux divisions par écrit :

$$\begin{array}{ll} 3 \times 44 = & 121 \div 11 = \\ 111 \times 111 = & 7141 \div 7 = \end{array}$$

L'intention est de déterminer les multiplications d'un nombre à un seul chiffre par un nombre à deux chiffres et de deux nombres à trois chiffres, ainsi que les divisions d'un nombre à trois chiffres par un nombre à deux chiffres et d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à un seul chiffre que les stagiaires savent effectuer par écrit ; puis, vis-à-vis de celles qu'elles ne savent pas résoudre, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

Dans $3 \times 44 =$, le fait que le nombre à un chiffre soit placé avant le nombre à deux chiffres, peut susciter auprès des stagiaires certaines précautions à prendre dans la pose du calcul³¹⁰ ; en outre, comme 44 comporte deux chiffres identiques, les deux sous-opérations à effectuer sont les mêmes. $111 \times 111 =$ comprend deux nombres de trois chiffres constitués uniquement de 1, ce qui fait que sa résolution n'entraîne aucune sous-opération autre que $1 \times 1 = 1$.

Dans $121 \div 11 =$, la proximité des deux nombres de l'opération avec ceux figurant dans les tables de multiplication de 1×1 à 10×10 fait que la division est également susceptible d'être résolue à l'oral. $7147 \div 7 =$ demande de considérer à deux reprises que 7 va bien une fois dans 7 ; il s'agit aussi d'inscrire un 0 au résultat après avoir remarqué que 7 ne va aucune fois dans 1 et ce, avant de prendre en compte le 4, qui formera avec lui 14, et dans lequel il sera possible d'inclure deux fois le 7 : la tentation est grande en effet, à l'écrit comme à l'oral, d'effectuer directement $7 \div 7 = 1$, $14 \div 7 = 2$ et $7 \div 7 = 1$ pour trouver 121 au lieu de 1021.

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°26) montre que :

- la multiplication d'un nombre à un chiffre par un nombre à deux chiffres est bien maîtrisée par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec un taux de réussite de 90 %
- la multiplication de deux nombres à trois chiffres et la division d'un nombre à trois chiffres par un nombre à deux chiffres est partiellement maîtrisée par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec deux taux respectifs de 55 et 68 % ;

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
$3 \times 44 =$	31	28	3	---	90,3 %
$111 \times 111 =$	31	17	14	---	54,8 %
$121 \div 11 =$	31	21	4	6	67,7 %
$7147 \div 7 =$	31	12	10	9	38,7 %

Tableau n°26 - Réussites à l'exercice "opérations dans N à l'écrit (2)"

³¹⁰ Même si, contrairement à l'addition et la soustraction, l'effectuation à l'écrit d'une multiplication comprenant des nombres naturels n'impose pas de précaution particulière lors de la pose en colonne concernant l'alignement des chiffres de chaque nombre.

- la division d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à un chiffre est peu maîtrisée les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec un taux de 40 % ;
- le nombre élevé de non-réponses ($n = 9$, mais avec 31 fiches récoltées) dans le cas de la division d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à un chiffre tend à désigner un champ notionnel qui n'a été que peu ou pas investi durant la scolarité antérieure des stagiaires.

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- dans la multiplication de $3 \times 44 =$, c'est le report de la retenue qui est à l'origine des trois seules erreurs, comme dans le résultat de 1212, où les deux nombres 12 produits par les deux sous-opérations $3 \times 4 =$ successives ont été accolés au lieu d'être combinés pour donner 132 ;

$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \\ + 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 2 \ 2 \ 1 \\ \hline 1 \ 2 \ 2 \ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 2 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 1 \ 10 \ 0 \\ \hline 2 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{array}$	

Quatre erreurs produisent 111 comme résultat. Dans trois cas (cf. premier exemple du tableau), elle provient de la multiplication terme à terme des chiffres des unités, des dizaines et des centaines des deux nombres, comme on le fait dans une addition ou d'une soustraction en colonne. Dans le quatrième (cf. deuxième exemple du tableau), le premier 111 a bien été multiplié successivement par le chiffre des unités, des dizaines et des centaines du deuxième 111, mais sans opérer le décalage des zéros (prise en compte partielle de la distributivité) ; on voit ensuite que même si le signe + figure dans l'opération, c'est la multiplication qui est venue se substituer à l'addition finale ($1 \times 1 \times 1 = 1$, au lieu de $1 + 1 + 1 = 3$).

On trouve ensuite deux résultats de 1221 relatifs au fait que le premier 111 n'a été multiplié que par le 1 des unités et le 1 des dizaines du second, ce qui fait que le développement en diagramme repose sur deux étages au lieu de trois. C'est également ce qu'il advient dans la réponse 1111, mais où, une nouvelle fois, alors que le signe + figure dans le diagramme, la multiplication vient se substituer à deux reprises à l'addition dans la dernière étape de l'algorithme ($1 \times 1 = 1$ au lieu de $1 + 1 = 2$).

Les deux réponses 2331 résultent, pour la première, d'un décalage du zéro qui a été fait d'un cran au lieu de deux, dans le cas de la multiplication du 1 des centaines et, pour la seconde, de l'alignement incorrect des chiffres, alors que le décalage des zéros était pourtant adéquat. En ce qui concerne enfin la réponse 14321, on voit que la mise en diagramme est entièrement correcte et que c'est durant l'addition finale que l'erreur a été produite, du fait peut-être de la prise en compte de la régularité qui apparaît dans la suite des chiffres du résultat : 1, 2, 3 et 4.

Tableau n°27 - Erreurs relatives à la multiplication de $111 \times 111 =$

- dans la multiplication $111 \times 111 =$, la majorité des erreurs ont trait à la distributivité de la multiplication par l'addition (cf. tableau n°27) : soit la distributivité (comme c'est le cas dans l'addition et la soustraction) n'apparaît pas ; soit elle apparaît partiellement : le

diagramme de la multiplication comporte alors deux étages au lieu de trois ou on assiste à des décalages erronés des zéros dans l'écriture des sous-produits partiels ou encore la multiplication vient se substituer à l'addition dans la dernière étape de l'algorithme ;

- dans la division $121 \div 11 =$, deux erreurs sur quatre sont le produit d'une substitution de la division par la soustraction ; un autre résultat, égal à 101, provient de l'insertion d'un 0 excédentaire au résultat (avant d'abaisser le 1 des unités dans le diagramme), tandis que un dernier résultat, égal à 12, provient d'une erreur de comptage du nombre de fois 11 qu'il est possible de contenir dans 121 ;
- dans la division $7147 \div 7 =$, la majorité des erreurs (six sur dix) aboutissent, comme on pouvait s'y attendre, au résultat 121 (au lieu de 1021) ; une autre erreur provient d'une substitution de la division par la soustraction lors d'une sous-opération ($14 \div 7$ donne 7 au lieu de 2, parce que $14 = 7 + 7$) et une autre encore de l'abaissement consécutif de deux fois le chiffre 4 dans le déroulement de l'algorithme ; tandis que les deux dernières demandent de plus amples développements pour en réaliser l'interprétation³¹¹.

311

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 6 \quad 1 \\
 7 \quad 1 \quad 4 \quad 7 \quad | \quad 7 \\
 - \quad 6 \quad 3 \\
 \hline
 0 \quad 8 \\
 - \quad 7 \\
 \hline
 1 \quad 4 \\
 - \quad 1 \quad 4 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 7 \\
 \quad \quad 7 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \quad \quad \quad 1 \\
 \quad 7 \quad 1 \quad 4 \quad 7 \\
 \div \quad \quad \quad 7 \\
 \hline
 1 \quad 4 \quad 7 \quad 5 \quad 4
 \end{array}
 \end{array}$$

En ce qui concerne 9121, on voit que la stagiaire n'a pas divisé 7 par 7 (il s'agit d'une erreur relevée à plusieurs reprises dans les recherches menées par Brun & al. (1994a, 1994b) au sujet de la division), mais qu'elle a directement pris en compte le 71 de 7147 pour démarrer l'opération ; elle trouve ensuite que 7 va neuf fois dans 71, ce qui génère un produit de 63 et un reste de 8 (reste qui devrait être invalidé, car supérieur au diviseur de 7) ; la suite de l'algorithme se poursuit sans encombre en produisant successivement les chiffres de 1, 2 et 1 au résultat pour donner 9121 (on remarque alors qu'il suffirait d'additionner le premier 1 au 9 qui précède pour obtenir la succession correcte des chiffres de 1021).

Pour 14754, c'est un échange verbal avec la stagiaire qui a donné le résultat qui m'a aidé à en réaliser l'interprétation. Après avoir posé la division en colonne (comme une addition ou une soustraction), elle a opéré de bas en haut (i.e. du diviseur vers le dividende), en commençant par la droite et en effectuant d'abord : « sept divisé par sept égale quatorze » qui lui a fait écrire 4 au résultat et retenir 1 ; pour sept divisé par quatre, elle m'a dit qu'elle ne savait pas et qu'elle a donc dessiné sept petits traits qu'elle a ensuite partagés en deux parties égales pour trouver : « trois et un petit trait qui restait tout seul », qu'elle a ajouté à chacun des deux ensembles de trois ce qui lui donnait quatre ; elle a ensuite additionné ce quatre au un qu'elle avait retenu dans son calcul pour trouver et inscrire 5 au résultat ; pour sept divisé par un, elle a trouvé sept et inscrit 7 ; pour sept divisé par sept, elle a à nouveau trouvé quatorze, inscrit 4 au résultat et 1 comme retenue, avant de l'abaisser et d'écrire 1 au résultat ; arrivée au terme de son explication, elle a soudain pris conscience de s'être trompée, du fait que : « sept divisé par sept ne donnait pas quatorze, mais sept » ; elle a donc modifié son résultat en conséquence, aboutissant finalement à 7747, après avoir opéré, toujours de droite à gauche, de la manière suivante : $7 \div 7 = 7$, $7 \div 4 = 4$, $7 \div 1 = 7$ et $7 \div 7 = 7$.

LES ÉPREUVES DE PROBLÈMES NUMÉRIQUES

Les épreuves de problèmes³¹² numériques en comprennent huit³¹³. Trois problèmes sont de structure additive, deux autres de structure multiplicative et les trois derniers de structure mixte (additive et multiplicative). Les domaines d'expérience auxquels ces problèmes réfèrent relèvent tous des secteurs professionnels présents au CFPS : blanchisserie, confection, commerce de détail, cuisine, horticulture et intendance. Tous les problèmes peuvent être situés au niveau des grandeurs mesurées.

Exercice n°1 : problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (1)

Description et analyse préalable

La première partie de l'épreuve comporte deux problèmes de structure additive, un problème de structure multiplicative et un problème de structure mixte :

- a) Une intendante a confectionné 3 tartes aux pommes, 6 tartes aux pruneaux et 5 tartes aux poires. Combien a-t-elle confectionné de tartes en tout ?
- b) Une blanchisseuse a déjà repassé 12 chemises. Elle doit en repasser 21 en tout. Combien de chemises doit-elle repasser encore ?
- c) Dans un magasin, 1 stylo coûte 3 francs. Combien devra-t-on payer pour acheter 5 stylos identiques ?
- d) A la boucherie, une pièce de bœuf coûte 72 francs. En fin de journée, le boucher offre un rabais de 25 %. Quel sera le nouveau prix de cette pièce de bœuf ?

L'intention est de déterminer les problèmes que les stagiaires parviennent à résoudre ; puis, vis-à-vis de ceux qu'elles ne savent pas résoudre, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

Le problème 1a est de structure de base additive, de type EEE, comprenant trois états initiaux, avec recherche de l'état final. Les nombres figurant dans l'énoncé sont des nombres naturels à un chiffre dont l'addition aboutit à un nombre naturel à deux chiffres. L'exercice est avant tout proposé pour favoriser une entrée adéquate dans la tâche. Il est donc attendu que l'ensemble des stagiaires parviennent à le résoudre.

Le problème 1b est de structure de base additive, de type ET^+E , avec recherche de la transformation (T^+). Les nombres figurant dans l'énoncé sont des nombres naturels à deux chiffres dont la soustraction aboutit à un nombre naturel à un chiffre. Le fait que la transformation soit positive et qu'il faille néanmoins passer par une soustraction pour la déterminer est susceptible d'entraîner une contradiction.

Le problème 1c est de structure de base multiplicative/M. Les nombres figurant dans l'énoncé sont des nombres naturels à un chiffre dont la multiplication aboutit à un nombre naturel à deux chiffres ; le rapport est également naturel. L'exercice est aussi proposé pour favoriser une entrée adéquate dans la tâche. Il est donc attendu que l'ensemble des stagiaires parviennent à le résoudre.

Le problème 1d est de structure mixte. La structure de base est additive de type ETE à laquelle vient se combiner une structure multiplicative/QP. Les nombres figurant dans l'énoncé comprennent un nombre naturel à deux chiffres et un nombre décimal exprimé en % ; le rapport

³¹² Le terme "problème" est à prendre ici, et tout au long des propos qui suivent, dans son acception courante d'exercice scolaire. S'il est utilisé dans cette perspective, c'est parce qu'il a servi auprès des stagiaires pour désigner le domaine mathématique dont cette partie des épreuves relève.

³¹³ Trois d'entre eux sont des problèmes qui avaient déjà été soumis à Ca durant l'année précédente (cf. chapitre 6).

est décimal. Le fait que l'exercice soit de structure mixte, comprenant un nombre et un rapport décimal, en accroît nettement la complexité cognitive. Il devrait donc générer un taux de réussite considérablement réduit vis-à-vis des trois autres.

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°28) montre que :

- la résolution d'un problème de structure additive, de type EEE avec recherche de l'état final (problème 1a), d'un problème de structure multiplicative/M (problème 1c) et d'un problème de structure additive, de type ET⁺E avec recherche de T⁺ (problème 1b), est bien maîtrisée par l'ensemble des stagiaires avec des taux de réussite allant de 85 à 94 % ;
- la résolution d'un problème de structure mixte intégrant un calcul de pourcentage (problème 1d) est peu maîtrisée par l'ensemble des stagiaires³¹⁴ avec un taux de 15 % ;
- associé au nombre élevé de non-réponses ($n \geq 10$) - les stagiaires renonçant à la vue du signe %, que certaines pourtant connaissent (elles savent lire "vingt-cinq pour cents"), mais dont elles disent ne pas savoir faire usage -, ce faible taux de réussite tend à désigner un champ notionnel qui n'a été que peu ou pas investi durant la scolarité antérieure des stagiaires.

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
Nombre de tartes	53	50	3	---	94,3%
Nombre de chemises	53	45	7	1	84,9%
Prix des cinq stylos	53	50	3	---	94,3%
Prix de la pièce de bœuf	53	8	34	11	15,1%

Tableau n°28 - Réussites à l'exercice " problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (1)"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- dans les problèmes 1a, 1b et 1c, les erreurs proviennent en majorité d'une substitution d'une opération par une autre et tout particulièrement de l'addition à la place de la soustraction dans l'exercice 1b ;
- dans l'exercice 1d, l'analyse permet de classer les erreurs³¹⁵ en cinq catégories :
 - dans la première catégorie, très largement majoritaire en nombre (quinze occurrences), l'idée de pourcentage n'est tout simplement pas prise en compte³¹⁶ : les apprenties soustraient 25 à 72 comme si le signe % n'existait pas et obtiennent le plus souvent 47 comme résultat ;
 - dans la deuxième catégorie (huit occurrences), le calcul du pourcentage se réalise par une division de 72 par 25 qui aboutit au résultat 2,88, sans que l'on ne puisse déterminer

³¹⁴ En ce qui concerne les réussites à ce quatrième problème, on observe que sur huit réponses correctes, cinq ont été produites par l'emploi des touches /7/2/-/2/5/%/=/ de la calculette qui aboutissent directement au résultat de 54 ; à deux reprises, les stagiaires ont divisé le nombre 72 par 4 (ou successivement deux fois par 2) pour trouver 18, avant de soustraire le résultat de 18 à 72 pour parvenir à 54 ; une seule stagiaire a utilisé la technique du produit en croix, en procédant ainsi : /7/2/x/2/5/÷/1/0/0/=/ donne 18, puis /7/2/-/1/8/=/ donne 54.

³¹⁵ Le grand nombre d'erreurs recensées dans ce problème sont rendues possible par l'usage de la calculette ; en son absence en effet, leur nombre et leur diversité des erreurs s'en seraient trouvés considérablement réduits.

³¹⁶ Ce qui, dans le cas du "pour cent", vient renforcer l'hypothèse d'un champ notionnel peu ou pas investi durant la scolarité antérieure des stagiaires.

s'il s'agit d'une application partielle et erronée d'une technique de type "produit en croix" ou plutôt de la proximité "perceptive" des deux signes % et $\div$ qui en est à l'origine (une stagiaire a ainsi tipé /7/2/%/2/5/ qui lui a donné 25) ; ce qu'on observe en revanche, c'est que plusieurs stagiaires ont retouché après coup le nombre obtenu par division sur la calculette, comme si elles souhaitaient le rendre mieux conforme à une quantité exprimable en francs et en centimes³¹⁷ ;

- la troisième catégorie (trois occurrences) résulte clairement d'un usage partiel et/ou erroné d'une technique apprise de type "produit en croix" ou "règle de trois" ; dans le premier cas (produit en croix), survenu à deux reprises, 72 a été multiplié par 25 et le résultat obtenu a ensuite été divisé par 100 pour aboutir à 18 (qui a été laissé tel quel) ; dans le second cas (règle de trois), 100 a été divisé par 72 (au lieu que 72 soit divisé par 100), puis le résultat obtenu a été multiplié par 25, ce qui a donné 34,7222, lequel a été transformé en 34,75, avant d'être soustrait à 72 pour donner 37,25 ;
- la quatrième catégorie (trois occurrences) regroupe des erreurs issues d'une estimation établie par la stagiaire vis-à-vis de ce que 25 % de 72 peuvent bien représenter ; ainsi une stagiaire donne-t-elle 50 comme résultat en précisant que : « cela doit faire à peu près cela » ;
- la cinquième catégorie erreurs (deux occurrences) relève enfin d'une tentative de prendre la moitié (et la moitié de la moitié) de 72 qui n'aboutit pas, mais qui donne à penser que c'est l'équivalence entre 25 % et un quart qui est à l'origine du procédé.

Exercice n°2 : problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (2)

Description et analyse préalable

La seconde partie de l'épreuve comporte un problème de structure additive, un problème de structure multiplicative et deux problèmes de structure mixte :

a) Pour préparer un gratin pour 100 invités, on a épluché des pommes de terre. On a obtenu 3 kg d'épluchures et 13 kg de pommes de terre épluchées. Quelle quantité de pommes de terre a-t-on épluchées ?

b) Dans un atelier de confection, on a payé 100 francs pour acheter 5 nappes. Combien devra-t-on payer pour acheter 8 nappes identiques ?

c) Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

d) L'horticulteur livre :

- 1 cageot de 20 kg de pruneaux à CHF 2.20/kg
- 1 caisse de salades comprenant 8 pièces à CHF 1.10 la pièce
- 5 radis blancs à CHF 0.90 la pièce
- 500 g de raisin à CHF 4.40 le kg

Quel sera le montant de la facture à payer ?

L'intention est à nouveau de déterminer les problèmes que les stagiaires parviennent à résoudre ; puis, vis-à-vis de ceux qu'elles ne savent pas résoudre, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

Le problème 2a est de structure de base additive, de type ET'E avec recherche de l'état initial. Les nombres figurant dans l'énoncé sont des nombres naturels à un et deux chiffres dont

³¹⁷ On a l'exemple de 2,88 qui est transformé à deux reprises en 28,80 ou celui encore plus manifeste de 0,1152 (où la stagiaire a par mégarde appuyé deux fois de suite sur le signe = de la calculette) qu'elle a d'abord transformé en 11,52, avant de "raboter" les chiffres 5 et 2 du nombre et inscrire 11 comme résultat final sur sa fiche.

l'addition aboutit à un nombre naturel à deux chiffres. Il comporte un élément distracteur - le nombre d'invités - susceptible d'interférer dans la résolution.

Le problème 2b est de structure de base multiplicative/QP. Les nombres figurant dans l'énoncé sont des nombres naturels à un et trois chiffres. Le rapport est naturel et le résultat l'est aussi. Le fait que le rapport unitaire ne soit pas connu devrait produire un taux de réussite nettement réduit par rapport à celui de l'exercice 1c.

Le problème 2c est de structure mixte. La structure de base est additive, de type EEE, comprenant six états initiaux, avec recherche de l'état final. Le fait que certaines mesures soient exprimées en grammes et d'autres en kilos associe à la structure de base une relation multiplicative/M ou multiplicative/DQ pour effectuer les conversions de mesures. Les nombres figurant dans l'énoncé sont naturels et décimaux. Les rapports kilos-grammes et grammes-kilos sont naturels. On peut s'attendre, comme chez Ca (cf. chapitre précédent), à des erreurs dans conversion des mesures (kg en g et g en kg).

Le problème 2d est également de structure mixte. Le calcul du coût des trois premiers ingrédients est de structure multiplicative/M, alors que celui du quatrième ingrédient implique la combinaison d'une relation multiplicative/DQ pour effectuer la conversion de mesures et une relation multiplicative/M pour obtenir, à partir de la mesure donnée en kilos, le prix de l'ingrédient³¹⁸. Le calcul du montant total de la facture à payer ajoute une structure additive, de type EEE, comprenant quatre états initiaux, avec recherche de l'état final. Les nombres figurant dans l'énoncé sont naturels et décimaux, alors que les rapports sont naturels ou décimaux. On peut prévoir que c'est le calcul du coût du quatrième ingrédient produira le plus d'erreurs.

Analyse quantitatives des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°29) montre que :

- la résolution d'un problème de de structure de base multiplicative/QP (problème 2b), est partiellement maîtrisée par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec un taux de réussite³¹⁹ de 55 % ;
- la résolution d'un problème de structure de base additive, de type ET-E avec recherche de l'état initial (problème 2a) et de deux problèmes de structure mixte (problèmes 2c et 2d) est peu maîtrisée par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec des taux de réussite³²⁰ allant de 11 à 30 % ;
- dans les deux derniers problèmes³²¹, le nombre élevé de non-réponses ($n = 7 / n = 6$, mais avec 27 fiches récoltées) associé au faible taux de réussite tend à nouveau à désigner des champs notionnels qui n'ont été que peu ou pas investis durant la scolarité antérieure des stagiaires.

³¹⁸ Sauf si l'on parvient à déterminer que 500 g représente la moitié de 1 kg et qu'il suffit donc de diviser 4,40 par 2 pour trouver le coût des 500 g de raisin.

³¹⁹ Dans le problème 2b, la majorité des réussites (six occurrences sur neuf) provient de l'usage correct de la technique de la "règle de trois", impliquant d'abord la recherche du prix d'une nappe, par division de 100 par 5, suivie de la recherche du prix de huit nappes, par multiplication de 20 par 8 qui aboutit à 160.

³²⁰ Dans le problème 2c, les trois réussites ne proviennent pas de l'usage d'un tableau de conversion ; dans l'un des cas, on retrouve une façon de procéder très proche de celle de Ca dans le chapitre précédent : les quantités données en grammes de l'énoncé ont été reprises telles quelles dans un calcul en ligne, tandis que, 1,2 kg a été transformé en 1,200 g (la virgule a été conservée, deux zéros ont été ajoutés et l'abréviation "g" remplace l'abréviation "kg"), 1,150 kg en 1 k 150 (la virgule a été remplacée par l'abréviation k) et 1 kg est devenu 1 k ; aucune erreur n'a cependant produite, du fait que la stagiaire n'a pas utilisé la calculette pour opérer : 800 g et 1,200 g, puis 850 g et 1 k 150 ont été associés pour donner deux fois 2 k, qui ont été ensuite additionnés à 1 k et 500 g pour donner 5 kg 5 g (qui signifiait manifestement 5,500 kg).

Dans le problème 2d, c'est bien la prise en compte du fait que 500 g correspond à la moitié des 1 kg de raisin du prix unitaire qui a permis aux stagiaires de diviser 4,40 par 2 pour trouver le résultat correct de 2,20.

³²¹ Dans le problème 2a, les non-réponses sont plutôt dues à la mécompréhension des termes "épluché" et "épluchures" de l'énoncé.

Item	Nb de fiches récoltées ³²²	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
Poids des pommes de terre	27	9	12	7	33,3%
Prix des huit nappes	27	15	10	2	55,6%
Poids du panier de légumes	27	3	17	7	11,1%
Montant de la facture	27	8	13	6	29,6%

Tableau n°29 - Réussites à l'exercice "problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (2)"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- dans le problème 2a, on observe trois substitutions de l'addition par la soustraction, mais aussi une substitution de l'addition par la multiplication ($3 \times 13 = 39$) et une par la division ($13 \div 3 = 4,33$) ; l'élément distracteur qui figure dans l'énoncé n'a produit que peu d'effets (trois occurrences), comme dans le cas de 1300 (produit de 13 par 100) ;
 - dans le problème 2b, quatre erreurs proviennent de la multiplication de deux nombres de l'énoncé, sans que l'on ne puisse déterminer s'il s'agit d'une application partielle et erronée d'une technique apprise (de type "produit en croix" ou "règle de trois"), alors que pour trois autres erreurs, c'est clairement le cas, comme dans 62,5 (avec d'abord $100 \times 5 =$ qui donne 500, puis $500 \div 8 =$ qui donne 62,5) ;
 - dans le problème 2c, les erreurs proviennent de deux origines distinctes :
 - les nombres de l'énoncé n'ont pas tous été pris en compte (dix occurrences) dans l'addition, comme dans 4,350, résultat $0,5 + 0,8 + 1,2 + 0,85 + 1 =$ (où il manque le nombre 1,150 représentant le poids du panier) ou ont été utilisés à contre-emploi, comme dans 3,200 (où 1,150 a été soustrait, plutôt qu'additionné au résultat de 4,350) ;
 - les nombres de l'énoncé n'ont pas donné lieu à des conversions (cinq occurrences) et l'addition a été effectuée sur la calculette, ce qui donne par exemple 2153,5 comme résultat de $500 + 800 + 1,2 + 850 + 1 + 1,150 =$, ou de façon erronée en colonne, ce qui donne par exemple 3313 lorsque les nombres ont été alignés par la droite ;
- les quelques conversions effectuées ont été réalisées pour la plupart de façon correcte, passant généralement des grammes en kilos, comme dans 800 g qui donne 0,8 kg ou 850 g qui donne 0,85 kg ; seules deux stagiaires ont eu recours à un tableau pour les réaliser, où l'on voit (cf. tableau n°30) que les abréviations d'unités marquées en tête ne correspondent pas aux quantités (des unités de longueurs dans le premier tableau et une suite non conforme des unités de poids dans le second) qu'elles sont supposées représenter, alors même que le tableau permet pourtant d'effectuer correctement les conversions attendues ;

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
2,	1	5	0			
0,	5	0	0			

Kg	da	g	mg
0,5	5	50	500
0,8	8	80	800
0,85	8,5	85	850

Le premier tableau comprend la suite complète et ordonnée des abréviations d'unités de longueurs (au lieu des unités de poids). Il a servi à transformer en kilos les quantités de 2150 g (somme de 500 g, 800 g et 850 g de l'énoncé) et de 500 g. Les nombres ont été placés dans le

³²² Il s'agit à nouveau de prendre en compte ici le fait que seulement vingt-sept stagiaires sur les cinquante-trois qui ont effectué un stage au CFPS durant l'année 2010-2011 ont pris part à cette deuxième partie de l'épreuve des problèmes numériques.

tableau à partir de la colonne des "m", de droite à gauche, en inscrivant un chiffre par colonne. La virgule n'a pas été tracée dans la case des "km" dans la première conversion, tandis que, dans la seconde, elle a été complétée d'un 0 et d'une virgule.

Le second tableau comprend des abréviations d'unités de poids, mais il est partiel, n'en comportant que quatre qui ne sont pas successives. Il a été utilisé pour transformer en kilos les quantités de 500 g, 800 g et 850 g de l'énoncé, mais d'une manière différente que dans le premier cas, puisque les nombres sont reportés en entier dans chaque case au fur et à mesure de leur conversion. Celle-ci procède de droite à gauche, pour remonter de la colonne des "mg" vers la colonne des "kg", en enlevant/rajoutant un zéro et/ou une virgule à chaque fois qu'on change de colonne.

Dans le second cas, l'usage du tableau ne sert qu'à baliser le nombre de conversions à effectuer, tandis que dans le premier, il les accompagne, en signifiant les cases qui devront être complétées d'un 0 et/ou d'une virgule.

Tableau n°30 - Fonctionnement de deux tableaux de conversion de mesures de poids

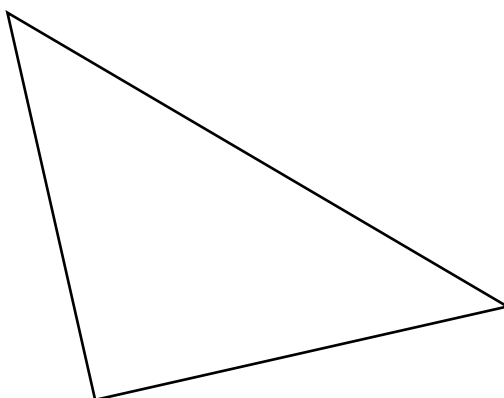
- dans le problème 2d, la moitié des erreurs provient de l'addition des quatre prix unitaires (qui n'ont pas été multipliés par la quantité de produits livrée), comme dans 8,60 (résultat de $2,20 + 1,10 + 0,90 + 4,40 =$), alors que deux autres erreurs proviennent de l'addition de prix unitaires mêlant des prix représentant des quantités livrées, comme dans 18,90 (résultat de $2,20 + 8,80 + 4,50 + 4,40 =$) ; seules deux erreurs sont explicitement le fait de la recherche du coût de la quantité de raisins qui échoue, comme dans 22000 (résultat de $500 \times 4,40 =$) ; on remarque aussi que tous les résultats de l'exercice sont soit des nombres naturels, soit des nombres décimaux comprenant deux décimales et dont la seconde est un 0 ; ce qui fait que, de la sorte, les nombres obtenus correspondent bien à l'usage que l'on en fait au quotidien pour exprimer des coûts en francs et en centimes.

LES ÉPREUVES DE MESURES

Les épreuves de mesures comportent quatre exercices. Le premier exercice concerne les mesures de longueurs, d'angles et d'aires dans le cadre du triangle rectangle isocèle³²³. Le deuxième exercice s'intéresse aux rapports qu'entretiennent certaines unités et sous-unités de mesures de longueur, de poids, de capacité, de durée et d'argent et le troisième aux conversions de mesures auxquelles ces rapports peuvent donner lieu.

Exercice n°1 : mesures décimales de longueurs, d'angles et d'aires dans un triangle

Description et analyse préalable



L'exercice demande tout d'abord de donner le nom de la forme (triangle ; triangle rectangle, triangle isocèle ou triangle rectangle isocèle) qui est dessinée sur la feuille ; il s'agit ensuite

³²³ Le choix du triangle rectangle isocèle vient du fait que le rapporteur, dont l'usage est requis dans l'exercice, est de forme identique et qu'il est donc possible de "rapporter" les propriétés (égalité des longueurs des côtés, égalités des grandeurs d'angles) de l'un sur les propriétés de l'autre.

d'en mesurer les côtés à l'aide d'un rapporteur (6,5cm, 6,5cm et 9,2cm) et d'en calculer le périmètre ; puis, toujours à l'aide d'un rapporteur, d'en mesurer les angles (45°, 45° et 90°) et d'en faire la somme ; enfin, d'en calculer l'aire.

L'intention est de déterminer si les stagiaires savent reconnaître et nommer un triangle, maîtrisent l'usage d'un rapporteur pour en mesurer les côtés et les angles, savent ce qu'est un périmètre, une somme d'angles et une aire, et parviennent à les établir ; puis, si ce n'est pas le cas, d'observer comment elles vont s'y prendre pour le faire.

Il est en principe attendu que l'ensemble des stagiaires sachent reconnaître un triangle (même si ce dernier ne se trouve pas dans sa position la plus courante) et qu'elles parviennent à en mesurer les deux cathètes à l'aide du rapporteur, partant du zéro médian, et en employant le centimètre (cm) comme unité de mesure.

La mesure de l'hypoténuse pose en revanche une difficulté supplémentaire, du fait qu'avec le rapporteur proposé³²⁴, il n'est pas possible de le faire d'un seul coup ; il est donc nécessaire de procéder à deux mesures successives, pour obtenir, par exemple 7 cm et 2,2 cm, qu'il s'agira ensuite d'additionner pour obtenir la longueur totale.

Le calcul de la longueur du périmètre correspond à un problème de structure additive, de type EEE, comprenant trois états initiaux, avec recherche de l'état final, les nombres figurant dans l'énoncé étant des nombres naturels et/ou décimaux (selon la mesure qui en a été faite).

La mesure des angles peut également s'effectuer à l'aide du rapporteur, en ayant recours au degré (°) comme unité de mesure. Il est toutefois aussi possible de reconnaître perceptivement l'angle droit et de s'assurer que c'est bien le cas, en apposant l'angle droit du rapporteur sur celui du triangle dessiné pour en déduire que l'angle mesure 90° ; et l'on peut faire de même avec les deux angles de 45° du triangle qui correspondent à ceux du rapporteur.

Le calcul de la somme des angles correspond à un problème de structure additive, de type EEE, comprenant trois états initiaux, avec recherche de l'état final, les nombres figurant dans l'énoncé étant des nombres naturels et/ou décimaux (selon la mesure qui en a été faite). Ce calcul constitue toutefois une tautologie si l'on sait que la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180° ; cette propriété peut également servir de contrôle des mesures effectuées au cas où la somme n'aboutit pas exactement à 180°.

Enfin le calcul de l'aire du triangle suppose connue la formule $a = b \times c / 2$. Dans le cas particulier, il est possible de multiplier les longueurs des deux cathètes, du fait que le triangle est rectangle et que les deux hauteurs leur sont confondues, mais on peut aussi chercher la longueur de la troisième hauteur et la multiplier par celle de l'hypoténuse pour y parvenir. Le calcul de l'aire correspond à un problème multiplicatif, de type "produit de mesures", ce qui fait que l'expression de l'aire implique l'usage d'une unité - le centimètre carré (cm²) - différente de celle - le centimètre (cm) - utilisée pour la mesure des cathètes. Les nombres figurant dans l'énoncé sont naturels et/ou décimaux (selon la mesure qui en a été faite).

Analyse quantitative des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°31) montre que :

- la reconnaissance d'un triangle³²⁵ est bien maîtrisée par l'ensemble des stagiaires avec un taux de réussite de 86 % ;

³²⁴ Le rapporteur mis à disposition permet de mesurer des longueurs de 7 cm au maximum de part et d'autre du 0 médian.

³²⁵ On y relève quatre fois la mention de "triangle rectangle", une fois celle de "triangle carré", une fois celle de "triangle isocèle" et une fois celle (erronée) de "triangle équilatéral".

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes ³²⁶	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
Désignation de la forme	51	44	6	1	86,3%
Mesure de l'hypoténuse	51	38	13	---	74,5%
Mesure des cathètes	51	39	12	---	76,5%
Calcul du périmètre	51	34	12	5	66,7%
Mesure de l'angle droit	51	19	13	19	37, 3%
Mesure des angles de 45°	51	5	20	27	9,8%
Calcul de la somme des angles	51	19 dont six ³²⁷ sont égales à 180°	8	24	37,3% (11,8%)
Calcul de l'aire	51	7	24	20	13,7%

Tableau n°31 - Réussites à l'exercice "mesures décimales de longueurs, d'angles et d'aires dans un triangle"

- la mesure de la longueur des côtés du triangle à l'aide d'un rapporteur est partiellement maîtrisée par l'ensemble des stagiaires avec un taux de 77 % ; les taux de réussite de 75 % et de 67 % liés à la mesure de l'hypoténuse et au calcul du périmètre doivent être fortement relativisés, certaines stagiaires s'étant aidées de la règle de 30 cm pour établir la mesure de la première et le terme "périmètre" ayant été parfois expliqué à celles qui n'en connaissaient pas la signification³²⁸ ;
- la mesure des angles d'un triangle à l'aide d'un rapporteur (même lorsqu'il s'agit d'un angle droit), la propriété de la somme de ses angles et le calcul de son aire sont peu maîtrisés par les stagiaires avec des taux allant de 10 à 37 % ;
- le nombre très élevé de non-réponses dans le cas de la mesure des angles et du calcul de l'aire désigne des champs notionnels qui n'ont été que peu ou pas investis durant la scolarité antérieure des stagiaires.

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs³²⁹ montre notamment que :

- la reconnaissance du triangle donne lieu à des substitutions du terme "triangle" par un autre terme désignant soit un objet de la même forme que le triangle, comme "équerre", soit une autre forme, comme "rectangle" ;

³²⁶ Une mesure de longueur est considérée comme correcte, lorsqu'elle est donnée avec une précision de ± 2 mm tout comme une mesure d'angle, lorsqu'elle est donnée avec une précision de $\pm 2^\circ$. Dans les deux cas, il n'est pas tenu compte de l'absence de l'unité, "cm" et "°", sur la fiche. On relèvera seulement que la mention de l'abréviation "cm" figure au moins une fois sur dix-neuf fiches récoltées et l'abréviation "°" à vingt reprises dont trois fois sous la forme de "°C" (!) ; dans le cas des angles, l'abréviation "cm" a été utilisée à quatre reprises à la place de l'abréviation "°" et l'abréviation "%" une seule fois ; en ce qui concerne les aires, on recense deux "cm²", deux "cm", un "cm³" et un "°".

³²⁷ Dans les treize autres occurrences, c'est la somme des trois angles mesurés qui est correcte, mais elle n'est pas égale à 180°.

³²⁸ Et cela été aussi le cas pour l'aire. Notons, à ce propos, que ces formes d'aménagements "à la baisse" des tâches proposées, que j'ai pourtant tenté de contrôler au mieux durant l'ensemble des épreuves, proviennent du fait que le rôle d'examineur que j'avais endossé, se doublait d'un rôle d'enseignant auquel il m'était parfois difficile d'échapper, quand, par exemple, les stagiaires m'interpellaient pour savoir ce que signifiait le terme "périmètre". Si je suis souvent parvenu à esquiver leurs demandes, je me suis aussi parfois retrouvé dans l'obligation d'y répondre.

³²⁹ Le fait que la somme des occurrences établies ne correspond pas dans tous les cas au nombre total d'erreurs recensées tient au fait que certaines d'entre elles n'ont pas pu faire l'objet d'une interprétation convenable.

- la mesure des cathètes à l'aide d'un rapporteur donne lieu à trois principaux types d'erreurs :
 - les premières (quatre occurrences) sont le fait d'une imprécision (qui ne vont pas au-delà de 5 mm) dans la mesure avec le rapporteur (sans qu'il ne soit donné de savoir à quoi est due cette imprécision) ;
 - les deuxièmes (trois occurrences) procèdent de la généralisation aux cathètes de la mesure de l'hypoténuse qui est reportée telle quelle pour donner des triplets de mesures identiques ;
 - les troisièmes (trois occurrences) comprennent à chaque fois une mesure correcte et une mesure incorrecte (sans qu'il ne soit donné de savoir d'où provient la mesure incorrecte) ;

on remarque à ce propos que la perception d'une similitude ou d'un écart des longueurs des côtés du triangle dessiné sur la fiche ne vient pas remettre en cause les mesures proposées ;
- pour la mesure de l'hypoténuse, c'est le fait qu'on ne puisse la mesurer d'un seul coup à l'aide du rapporteur qui se trouve à l'origine de la majorité des erreurs, soit lors de la mesure effective, soit dans l'addition des deux mesures qui ont été établies ;
- pour le calcul du périmètre, les erreurs proviennent en majorité (huit occurrences) de l'addition des nombres ; trois autres erreurs sont le fait de stagiaires qui ignoraient la signification du terme "périmètre" et qui, à la place, ont effectué une mesure de l'hypoténuse, d'un angle et d'une hauteur du triangle ;
- dans les mesures d'angles, un nombre conséquent d'erreurs sont consécutives au mauvais placement du rapporteur sur le triangle pour effectuer les mesures ; d'autres erreurs proviennent d'un simple report des mesures des longueurs des côtés qui avaient été effectuées précédemment, voire à de nouvelles mesures de longueurs des côtés ; quelques erreurs sont également dues à des imprécisions de mesures ou à des lectures inadéquates de signes figurant sur le rapporteur ; comme dans le cas des mesures des côtés, la perception sur le dessin du triangle d'une similitude ou d'un écart entre les grandeurs des angles ne vient pas invalider les similitudes ou les écarts, même consistants, qui peuvent apparaître dans les nombres qui en représentent la mesure ;
- pour la somme des angles, c'est la reprise des mesures des côtés pour en établir la somme qui a produit la majorité des erreurs ;
- enfin, dans le calcul de l'aire, six erreurs découlent du produit des longueurs de deux des côtés du triangle qui n'a pas fait ensuite l'objet d'une division par deux : dans trois cas, il s'agit de la multiplication des longueurs des deux cathètes et, dans trois autres cas, de la multiplication des longueurs de l'hypoténuse et d'un cathète ; cinq autres erreurs correspondent au produit des longueurs des trois côtés du triangle qui n'a pas non plus été divisé par deux ; six erreurs proviennent d'un simple report de la longueur du périmètre ; trois autres erreurs sont consécutives à la mesure en "cm" d'un trait que la stagiaire avait tracé au travers du triangle (il ne s'agissait pas d'une hauteur, mais d'un simple trait qui donnait à penser qu'elle voulait ainsi mesurer l'"intérieur" du triangle) ; on trouve enfin quatre erreurs isolées : la première où la longueur du périmètre a été multipliée par trois ; la deuxième où les longueurs des deux côtés ont été additionnées ; la troisième où la longueur de l'hypoténuse a été additionnée au produit des deux cathètes ; et la quatrième, enfin, où la stagiaire a repris, pour les additionner, l'ensemble des nombres qu'elle avait précédemment inscrits sur sa fiche.

Exercice n°2 : rapports entre unités de mesures d'un même domaine de grandeurs

Description et analyse préalable

L'exercice n°2 demande d'établir les rapports existant entre deux unités d'un même domaine de grandeurs. Deux items concernent le domaine des longueurs, deux items, le domaine de

l'argent, deux items, le domaine des durées, un item, le domaine des poids et un item, le domaine des capacités. Les questions des items sont construites de façon à ce que chaque rapport puisse s'exprimer à l'aide d'un nombre naturel.

Combien y a-t-il de centimes dans un franc ?

Combien y a-t-il de minutes dans une heure ?

Combien y a-t-il de décilitres dans un litre ?

Combien y a-t-il de jours dans une année ?

Combien y a-t-il de grammes dans un kilo ?

Combien y a-t-il de centimètres dans un mètre ?

Combien y a-t-il de millimètres dans un centimètre ?

Combien faut-il de pièces de 10 centimes pour avoir 2 francs ?

L'intention est de déterminer les rapports que les stagiaires maîtrisent ; puis, vis-à-vis de ceux qu'elles ne maîtrisent pas, d'observer comment elles vont s'y prendre pour tenter de les produire.

Dans chaque domaine, les unités choisies sont d'un usage courant dans le quotidien : les mètres les centimètres sont employés, par exemple, pour mesurer la taille d'une personne, les kilos et les grammes pour établir son poids ; les centimètres et les millimètres figurent sur les règles et les rapporteurs que l'on trouve dans les classes, les litres et les décilitres sont les unités que l'on utilise pour commander des boissons dans un restaurant ; tandis que les francs et les centimes, les heures et les minutes, ou encore les années et les jours font en principe partie des échanges verbaux que l'on est régulièrement amené à tenir en classe et/ou dans la vie de tous les jours. Il est donc attendu que ces unités et les rapports qui les lient soient maîtrisés par les stagiaires. Au besoin, il leur est même possible d'en reconstruire certains, en ayant par exemple recours au rapporteur mis à leur disposition pour la réalisation des épreuves dans le cas du rapport entre centimètre et millimètre, au cadran de la pendule de la classe dans celui des heures et des minutes ou à un tableau de conversion pour celui des kilos et des grammes.

Analyse quantitative des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°32) montre que :

- les rapports minutes/heure dans le domaine des durées et centimes/franc dans le domaine de l'argent, lorsqu'il s'agit de dénombrer un nombre de pièces pour déterminer une certaine somme, sont bien maîtrisés par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve avec des taux de réussite respectifs³³⁰ de 100 et de 81 % ;
- en revanche, contrairement à ce qui était attendu, les autres rapports sont pour certains partiellement maîtrisés par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve : c'est le cas des rapports centimètres/mètre dans le domaine des longueurs et centimes/franc dans le domaine de l'argent avec des taux identiques de 53 % ; et peu maîtrisés pour les autres, à savoir : les rapports grammes/kilo dans le domaine des poids, décilitres/litre dans le domaine des capacités, millimètres/centimètre dans le domaine des longueurs, jours/année dans le domaine des durées, avec des taux allant de 16 à 47 % ;
- un fait surprenant est en outre apparu dans le cas du rapport entre les francs et les centimes, la question ayant déconcerté plusieurs stagiaires qui n'en comprenaient manifestement pas la signification ; on peut à ce titre faire l'hypothèse que c'est l'absence de pièces de 1 centime dans le domaine des échanges d'argent qui est en à l'origine ; sept réponses correctes ont par ailleurs été données sous la forme 2 x 50 (et non pas) 100, un peu comme

³³⁰ En regard des autres résultats, le fait que soit le rapport non-décimal qui soit le mieux maîtrisé de tous est assez inattendu, ce d'autant que Rouche (2006) affirme que le domaine des durées est le plus complexe à appréhender.

si, pour envisager le rapport entre les centimes et les francs, il était nécessaire de partir des pièces en usage plutôt que des nombres qui les représentent³³¹ ;

- le nombre important de non-réponses dans le cas du rapport décilitres/litre dans le domaine des capacités tend à désigner un champ notionnel qui n'a été que peu ou pas investi durant la scolarité antérieure des stagiaires.

Item	Nb de fiches récoltées ³³²	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
Nb de centimes dans un franc	32	17	13	2	53,1%
Nb de grammes dans un kilo	32	10	15	7	31,3%
Nb de minutes dans une heure	32	32	---	---	100%
Nb de centimètres dans un mètre	32	17	8	7	53,1%
Nb de décilitres dans un litre	32	5	15	12	15,6%
Nb de millimètres dans un centimètre	32	12	13	7	37,5 %
Nb de jours dans une année	32	15	15	2	46,9%
Nb de pièces de 10 centimes pour avoir 2 francs	32	26	5	1	81,2%

Tableau n°32 - Réussites à l'exercice "rapports entre unités de mesures d'un même domaine de grandeurs"

Analyse qualitative des erreurs

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

- il existe une importante quantité d'erreurs qui se laissent difficilement soumettre à l'interprétation ; certaines d'entre elles semblent parfois procéder des préfixes des termes désignant les sous-unités mises en correspondance : ainsi, dans le cas du rapport entre millimètres et centimètres, les six réponses égales à 100 et les trois égales à 1000 (mille étant écrit à deux reprises en lettres) proviennent peut-être des préfixes "centi" et "milli" figurant dans "centimètre" et "millimètre" ; d'autres erreurs peuvent être aussi le fait du simple report d'un rapport relatif à des unités d'un autre domaine de grandeur : c'est peut-être le cas, par exemple, d'une partie des neuf résultats 100, proposés comme rapport entre kilos et grammes, où les stagiaires ont pu reporter le rapport de 100 liant les francs et les centimes qu'elles avaient identifié auparavant ; il est également possible que d'autres résultats qui prennent la forme d'une puissance de dix, aient été tout simplement proposés par défaut ;
- dans le rapport entre francs et centimes, les six réponses égales à 10 viennent probablement du fait d'avoir pris la pièce de 10 ct comme sous-unité de référence pour dénombrer combien il fallait en réunir pour obtenir un franc³³³ ; les cinq réponses égales à 50 sont

³³¹ Devant cette question, on me demandait par exemple : « si les centimes, c'étaient bien des pièces de cinq centimes ? ». Dans le même ordre d'idées, d'autres stagiaires ne parvenaient pas à considérer que la somme de deux pièces de 50 centimes puisse être égale à 100 centimes, vu que 50 centimes et 50 centimes : « cela fait un franc » !

³³² Il s'agit à nouveau de prendre en compte ici le fait que seulement trente-deux stagiaires sur les cinquante-trois qui ont effectué un stage au CFPS durant l'année 2010-2011 ont pris part à cette deuxième partie de l'épreuve de mesures.

³³³ On trouve le cas inverse dans l'item demandant le nombre de pièces de 10 centimes qu'il faut réunir pour obtenir 2 francs où les quatre réponses de 200 qu'on y rencontre traduisent le fait d'avoir pris en considération les centimes au lieu des pièces.

plus délicates à interpréter (j'ai tenté à plusieurs reprises d'interroger les stagiaires à ce sujet sans obtenir d'explications vraiment convaincantes) : c'est un peu comme si 50 centimes s'imposait parce que c'était la valeur de la pièce représentant les centimes qui avait la valeur la plus haute et qui s'approchait de fait le plus du franc³³⁴ ;

- dans le rapport entre jours et années, on recense une grande variété de réponses dont certaines, comme 367, 362, 356, 350, s'approchent de la réponse correcte, alors que d'autres, comme 250 et 165, en restent assez éloignées ; certains autres résultats, comme 360, ont pu faire l'objet d'une reconstruction (produit de 12 (mois) x 30 (jours)), alors que d'autres encore, comme 7, 30 et 31, correspondent à un autre rapport inter-unités dans le domaine des durées (jours/semaine et jours-mois) ;
- dans le rapport entre décilitres et litres, il est possible que certains des sept résultats 1000 proviennent d'un ustensile³³⁵ utilisé en cuisine pour mesurer des quantités de liquides et sur lequel figure l'équivalence 1 l = 1000 ml ;
- enfin, sur l'ensemble des fiches récoltées, on ne trouve que deux ébauches de tableaux de conversion qui n'ont pas été complétés par des nombres, mais qui ont pu être utilisés par les stagiaires : c'est ainsi que l'auteur du second tableau a proposé 100 comme nombre de grammes dans un kilo, un résultat qui a parfaitement pu être produit en plaçant le chiffre 1 sous la colonne des "Kg" et en complétant par deux chiffres 0 les colonnes "Dc" et "g" qui lui succèdent à sa droite.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Kg	Dc	g	Mg

Exercice n°3 : conversions de mesures

Description et analyse préalable

L'exercice n°3 demande d'établir des conversions de mesures. Deux items concernent le domaine des poids, deux items, celui des longueurs, un item, celui des capacités et un item, celui des durées. Les égalités ont été choisies de façon à ce que quatre réponses puissent s'exprimer à l'aide d'un nombre naturel et les deux autres à l'aide d'un nombre décimal³³⁶.

$$3 \text{ kg} = \dots\dots 3 \dots\dots \text{ g}$$

$$3 \text{ mm} = \dots\dots 3 \dots\dots \text{ cm}$$

$$3 \text{ m} = \dots\dots 3 \dots\dots \text{ cm}$$

$$3 \text{ g} = \dots\dots 3 \dots\dots \text{ kg}$$

$$3 \text{ l} = \dots\dots 3 \dots\dots \text{ dl}$$

$$5 \text{ h} = \dots\dots 3 \dots\dots \text{ min}$$

L'intention est de déterminer les conversions de mesures que les stagiaires savent effectuer et d'observer comment elles s'y prennent pour le faire.

La réussite à l'ensemble des six items dépend en principe³³⁷ de la connaissance du rapport liant les deux unités figurant de part et d'autre de l'égalité. Les trois conversions figurant dans la première colonne, de même que la dernière de la seconde correspondent à des problèmes de structure multiplicative/M dont le résultat est à chaque fois un nombre naturel ; tandis que les deux dernières sont de structure multiplicative/DQ, dont le résultat est un nombre décimal. Elles devraient donc en principe générer un taux de réussite inférieur.

³³⁴ Plus récemment, une stagiaire m'a dit qu'elle donnait 50 comme réponse, parce que c'était la moitié de 100 (cela semblait pour elle une évidence) ; deux autres stagiaires ont même proposé des successions de "moitiés" comme réponses aux questions de l'exercice : ½ pour le rapport centimes/francs, 500 g pour le rapport grammes/kilo, 50 m pour le rapport centimètres/mètres, et 5 mm pour le rapport millimètres/centimètre pour la première ; 50 centimes pour le rapport centimes/francs, 500 g pour le rapport grammes/kilo et 50 dl pour le rapport décilitres/litre, pour la seconde.

³³⁵ Une stagiaire m'a expliqué récemment que la réponse "12 décilitres" au rapport décilitres/litre qu'elle avait proposée provenait d'un doseur qu'elle employait chez elle et qui comprenait un 12 au sommet.

³³⁶ Chaque résultat comprenant un chiffre 3, il a déjà été placé dans la césure qui est prévue pour l'y inscrire.

³³⁷ L'usage d'un tableau de conversion de mesures fait toutefois que ce rapport peut rester implicite.

Analyse quantitative des réussites

L'analyse quantitative des réussites (cf. tableau n°33) montre que :

- d'un point de vue général, les conversions de mesures à établir sont peu maîtrisées par les stagiaires ayant réalisé l'épreuve, les taux de réussites n'atteignant en aucun cas les 50% ; il est par ailleurs assez surprenant d'observer que c'est la conversion des millimètres en centimètres qui obtient le meilleur taux (40 %), alors qu'elle constitue pourtant un problème multiplicatif de type "division" impliquant l'usage d'un nombre décimal ; il n'y a en l'état pas d'hypothèse qui vienne expliquer ce fait³³⁸ ;

Item	Nb de fiches récoltées	Nb de réponses correctes	Nb d'erreurs	Nb de non-réponses	% de réponses correctes
3 kg = ...3... g	32	12	12	8	37,5%
3 m = ...3... cm	32	12	14	6	37,5%
3 l = ...3... dl	32	8	13	11	25%
3 mm = ...3... cm	32	14	10	8	43,8%
3 g = ...3... kg	32	4	17	11	12,5%
5 h = ...3... min	32	13	5	14	40,6%

Tableau n°33 - Réussites à l'exercice "conversions de mesures"

- le nombre élevé de non-réponses dans plusieurs items tend à désigner un champ notionnel qui n'a été que peu ou pas investi durant la scolarité antérieure des stagiaires.

Analyse qualitative des erreurs

3 kg = ...3... g		3 m = ...3... cm		3 l = ...3... dl		3 mm = ...3... cm		3 g = ...3... kg		5 h = ...3... min	
erreurs	nb	erreurs	nb	erreurs	nb	erreurs	nb	erreurs	nb	erreurs	nb
300	6	30	7	0,3/0,300	3	30	4	300	3	30	2
30	4	3000	2	3000	2	300	3	30	3	355	1
0,003	1	0,3/0,300	2	300	2	1,3	1	0,3	3	3000	1
3k	1	0,003	1	13	1	0,03	1	3000	2	3,300	1
Total	12	10030	1	3,1	1	g3k	1	1,30	1	c3k	1
		3k	1	3,01	1	Total	10	0,300	1	Total	6
		Total	14	00,3	1			0,03	1		
				000,3	1			000,3	1		
				3c	1			0,0003	1		
				Total	13			k3c	1		
								Total	17		

Tableau n°34 - Erreurs relatives à l'exercice "conversions de mesures"

L'analyse qualitative des erreurs montre notamment que :

³³⁸ On voit de plus que ce taux est supérieur à celui obtenu dans l'exercice n°2 dans l'item correspondant (qui était de 38 %), ce qui veut dire que des stagiaires qui n'ont pas réussi à identifier un rapport correct entre millimètres et centimètres dans l'exercice n°2 sont malgré tout parvenues à effectuer la conversion des "mm" en "cm" dans l'exercice n°3. Ce constat tout aussi étonnant se répète dans le cas des conversions de poids où le taux de réussite à l'exercice n°3 est également supérieur à celui apparu à l'item correspondant dans l'exercice n°2 (38 % contre 31 % dans le cas poids, 25 % contre 16 % dans celui des capacités). L'analyse comparée des réussites recensées dans l'exercice n°2 et n°3 dans ces trois domaines ne permet pas de l'expliquer non plus. Ainsi dans le cas des poids par exemple, on observe que sur les dix stagiaires qui ont identifié un rapport correct de 1000 entre les kilos et les grammes dans l'exercice n°2, huit sont ensuite parvenues à effectuer une conversion correcte de 3 kg en 3000 g dans l'exercice n°3, alors qu'une stagiaire a donné une réponse incorrecte (300) et qu'une autre n'a pas proposé de réponse ; étant donné que l'on recense douze réponses correctes dans la transformation des kilos en grammes dans l'exercice n°3, on a donc bel et bien quatre stagiaires qui, ayant trouvé un rapport incorrect dans l'exercice n°2, ont néanmoins abouti à une réponse correcte dans l'exercice n°3.

- la grande majorité des erreurs recensées (cf. tableau n°34) restent très difficiles à interpréter, du fait qu'à l'exception des cas où la stagiaire a recouru à un tableau de conversion d'unités, il n'est pas possible d'inférer l'origine des 0 ou des virgules qui ont été ajoutés pour compléter le 3 figurant dans la réponse ; l'analyse comparative des résultats proposés dans l'exercice n°3 avec ceux figurant dans l'item correspondant de l'exercice n°2 n'y aide pas non plus, dans le sens où il n'est pas possible d'établir des liens de causalité entre les deux exercices : on voit, pour ne donner qu'un seul exemple particulièrement significatif, qu'aucune des sept réponses égales à 30 recensées à l'item 3 m = ...3... ne correspond à un rapport de 10 établi entre les centimètres et les mètres dans l'exercice n°2.
- en ce qui concerne les tableaux de conversion, on en comptabilise quatre en tout, ce qui montre que leur usage n'est pas fréquent, mais ce qui ne signifie pas pour autant que leur enseignement n'a pas été proposé durant la scolarité antérieure des stagiaires : plusieurs d'entre elles ont en effet demandé à ce que je leur en fournisse un déjà constitué, ce qui a fait que, face à la réponse négative qu'elles ont reçue, certaines ont cherché à le reconstruire de mémoire, d'autres s'en sont simplement passé pour effectuer les conversions, alors que d'autres encore ont renoncé à résoudre l'exercice ; on remarque par ailleurs que, dans trois cas sur quatre, la construction du tableau est incorrecte et que l'usage qui en est fait produit des erreurs au lieu d'aboutir à des conversions réussies :
 - un premier tableau de conversion est le fait d'une stagiaire qui a donné trois résultats à l'exercice : 3 m = 30 cm ; 3 mm = 0,3 cm et 5 h = 355 min et où seuls les deux premiers³³⁹ en sont issus ; un seul des deux résultats est correct (alors que les rapports centimètres/mètre et millimètres/centimètre de l'exercice n°2 étaient restés sans réponse) ;

km	dam	hm	m	cm	dm
			3	0	
				0,	3

on voit que ce sont les abréviations des unités de longueur qui ont été utilisées pour établir les conversions, qu'elles ne sont pas toutes présentes (il manque le "mm", ce qui est plutôt curieux vu que l'abréviation figure dans l'un des items considérés) et qu'elles n'ont pas été disposées dans le bon ordre ; en revanche, l'usage qui est fait du tableau - placement des 3, des 0 et de la virgule - est adéquat ;

- un deuxième tableau de conversion est le fait d'une stagiaire qui a donné cinq résultats à l'exercice : 3 kg = 30 g ; 3 m = 30 cm ; 3 l = 000,3 dl ; 3 g = 0,3 kg et 3 mm = 0,3 cm (la conversion minutes/heure n'a pas eu lieu) ; tous les résultats sont issus du tableau et un seul est correct, (alors que le rapport grammes/kilo de l'exercice n°2 était erroné, que les rapports centimètres/mètre et décilitres/litre étaient restés sans réponse et que les rapports millimètres/centimètre et minutes/heure étaient corrects) ;

kg	g	hg	min	h
dl	cl	ml	l	
m	cm	mm		
3	0			
3	0			
0	0	0,	3	
	0,	3		
0,	3			

³³⁹ Dans le troisième résultat, la stagiaire a soustrait le 5 de 5 heures au 60 de 60 minutes figurant dans l'exercice n°2 pour obtenir 55 qu'elle a ensuite écrit à côté du 3 figurant sur la fiche et aboutir à 355.

on voit que les abréviations d'unités de mesures changent pour chaque domaine de grandeur considéré ; elles ne sont pas toutes présentes (il y en a trois pour les poids, quatre pour les capacités, trois pour les longueurs et deux pour les durées), ni toutes disposées dans le bon ordre ; les 3 et les zéros sont placés de façon adéquate et on remarque que la position de la virgule dans le cas des capacités crée une forme de néologisme : le nombre 000,3 ;

- un troisième tableau de conversion est le fait d'une stagiaire qui a donné cinq résultats à l'exercice : $3 \text{ kg} = 3000 \text{ g}$; $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$; $3 \text{ l} = 30 \text{ dl}$; $3 \text{ mm} = 0,3 \text{ cm}$ et $3 \text{ g} = 0,003 \text{ kg}$; tous les résultats sont issus du tableau et sont corrects (alors que les rapports grammes/kilo, centimètres/mètre de l'exercice n°2 étaient erronés, que le rapport décilitres/litre était resté sans réponse et que les rapports millimètres/centimètre et minutes/heure étaient corrects) ;

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
3			3			3
			3			
			5			

on voit que ce sont les abréviations des unités de longueur qui ont été utilisées pour établir les cinq conversions, qu'elles sont toutes présentes et qu'elles ont été disposées dans le bon ordre ; l'usage du tableau est adéquat, même s'il n'y a que les chiffres 3 qui y ont été placés (le 5 de la conversion minutes/heure, non décimale, étant restée sans réponse) ;

- un quatrième tableau est le fait d'une stagiaire qui a donné six résultats à l'exercice : $3 \text{ kg} = 3000 \text{ g}$; $3 \text{ m} = 10030 \text{ cm}$; $3 \text{ l} = 0,300 \text{ dl}$; $3 \text{ mm} = 0,30 \text{ cm}$, $3 \text{ g} = 0,3 \text{ kg}$ et $5 \text{ h} = 300 \text{ min}$; il est difficile d'établir les résultats qui sont issus du tableau et dont trois sont corrects (alors que les rapports grammes/kilo, centimètres/mètre, décilitres/litre et millimètres/centimètre de l'exercice n°2 étaient tous égaux à 1000 et le rapport minutes/heure égal à 60) ;

m	mm	dc	cm	dl	l	ml

on voit que ce sont les abréviations des unités de longueur et des unités de capacité qui figurent en tête de colonnes et que les nombres ne figurent pas dans le tableau, ce qui rend l'interprétation des résultats délicate (excepté la conversion minutes/heures qui a fait l'objet d'un calcul spécifique figurant sur la fiche de la stagiaire : 60×5 , disposé en colonne qui donne 300).

SYNTHÈSE ET DISCUSSION CONCERNANT LES RÉSULTATS DES ÉPREUVES

Analyse des réussites

L'analyse des réussites des stagiaires dans les épreuves permet de distinguer - dans les domaines de la numération, des opérations, des problèmes numériques et des mesures - des notions qui sont en principe bien maîtrisées avant leur entrée au CFPS, de celles qui ne le sont que partiellement et celles qui le sont peu.

Le tableau n°35 récapitule, dans les quatre domaines considérés, les savoirs maîtrisés par les apprenties (n signifiant à chaque fois le nombre total de réponses récoltées) qui ont été mis à jour par les épreuves.

NUMERATION	Lecture de nb naturels de un à quatre chiffres	n = 52
	Lecture d'un nb décimal ne comprenant pas de zéro intercalaire	n = 52
	Transcription en chiffres de nb naturels écrits en mots de un à trois chiffres	n = 53
	Transcription en chiffres de nb naturels écrits en mots de quatre chiffres d'usage courant	n = 53
	Comptage et décomptage par 1, 5, 10, 11	n = 33
	Ordre des nb naturels de deux à six chiffres	n = 33
OPERATIONS	Addition orale dans N de deux nb à un ou deux chiffres avec ou sans retenue	n = 52
	Soustraction orale dans N de deux nb à un chiffre	n = 52
	Multiplication orale dans N de deux nb à un chiffre	n = 52
	Notions de "moitié" et de "double" à l'oral dans N	n = 31
	Addition écrite dans N de deux nb à deux chiffres avec retenue	n = 52
	Multiplication écrite dans N d'un nb à un chiffre par un nb à deux chiffres	n = 31
PROBLEMES	Résolution d'un problème additif, de type EEE, avec recherche de l'état final	n = 53
	Résolution d'un problème additif, de type ET ⁺ E, avec recherche de T ⁺	n = 53
	Résolution d'un problème multiplicatif, de type "multiplication"	n = 53
MESURES	Reconnaissance du triangle	n = 51
	Rapport minutes-heure	n = 32
	Détermin. du nb de pièces de 10 ct. nécessaires à l'obtention d'une somme de CHF 2.-	n = 32

Tableau n°35 - Savoirs maîtrisés par les apprenties mis à jour par les épreuves

Le tableau n°36 récapitule, dans les quatre domaines considérés, les savoirs partiellement maîtrisés par les apprenties qui ont été mis à jour par les épreuves.

NUMERATION	Lecture d'un nb décimal comprenant un zéro intercalaire	n = 52
	Lecture de fractions usuelles	n = 52
	Transcr. en chiffres de nb naturels écrits en mots de quatre chiffres d'usage non courant	n = 53
	Dénombrement des cases d'un réseau rectangulaire	n = 53
OPERATIONS	Soustraction orale dans N de deux nb à un chiffre et deux chiffres avec emprunt	n = 52
	Multiplication orale dans N de trois nombres à un ou deux chiffres	n = 52
	Division orale dans N de nb de un à trois chiffres, sans reste	n = 52
	Notions de "triple" dans N et de "moitié" dans D	n = 31
	Addition écrite dans N de trois nb de un à trois chiffres avec retenue	n = 52
	Soustraction écrite dans N de nb de trois chiffres avec emprunt	n = 31
	Division écrite dans N d'un nb à trois chiffres par un nb à deux chiffres, sans reste	n = 31
PROBLEMES	Résolution d'un problème multiplicatif, de type "quatrième proportionnelle"	n = 27
MESURES	Mesure de la longueur des côtés d'un triangle à l'aide d'un rapporteur	n = 51
	Rapport centimètre-mètre	n = 32
	Rapports centimes-franc	n = 32

Tableau n°36 - Savoirs partiellement maîtrisés par les apprenties mis à jour par les épreuves

Le tableau n°37 récapitule, dans les quatre domaines considérés, les savoirs peu maîtrisés par les apprenties qui ont été mis à jour par les épreuves.

NUMERATION	Lecture d'un nb naturel de sept chiffres avec zéros intercalaires	n = 52
	Lecture d'un nb fractionnaire non-usuel	n = 52
	Lecture de nb irrationnels usuels	n = 52
	Transcription en chiffres de nb naturels écrits en mots de six ou sept chiffres	n = 53
	Comptage par 0,1	n = 33
	Ordre des nb décimaux de deux ou trois chiffres	n = 33
OPERATIONS	Multiplication orale itérée du nb 1	n = 52
	Notions de de "quart" à l'oral dans N	n = 31
	Notions de de "dixième" et de "pour cent" à l'oral dans N dans N	n = 31
	Division écrite dans N d'un nb à quatre chiffres par un nb à un chiffre, sans reste	n = 31
PROBLEMES	Résolution d'un problème de structure mixte	n = 53
	Résolution d'un problème de structure mixte	n = 27
	Résolution d'un problème de structure mixte	n = 27
MESURES	Mesure des angles d'un triangle à l'aide d'un rapporteur	n = 51
	Notion et calcul du "périmètre" et de "l'aire" dans le cas du triangle	n = 51
	Propriété de la somme des angles d'un triangle	n = 51
	Rapport millimètres-centimètre	n = 32
	Rapport grammes-kilo	n = 32
	Rapport décilitres-litre	n = 32
	Rapport jours-année	n = 32
	Conversions de mesures de longueurs, de poids, de capacités et de durées	n = 32

Tableau n°37 - Savoirs peu maîtrisés par les apprenties mis à jour par les épreuves

Le tableau n°38, pointe enfin, dans les quatre domaines considérés, les champs notionnels qui, au vu de l'important nombre de non-réponses recensées, ont manifestement fait l'objet d'un sous-investissement durant la scolarité antérieure des stagiaires.

NUMERATION	OPERATIONS	PROBLEMES	MESURES
Nombres naturels supérieurs à six chiffres	Division dans N	Problèmes de structure mixte	Mesures d'angles
Fractions (inclus les "pour cent")			Mesures de capacités
Nombres irrationnels			Périmètre et aire (inclus leur calcul) dans le cas du triangle
			Conversions de mesures

Tableau n°38 - Champs notionnels sous-investis durant la scolarité des stagiaires mis à jour par les épreuves

Analyse des erreurs

L'analyse de l'ensemble des erreurs des apprenties recensées au cours des épreuves permet d'identifier les savoirs et les savoirs partiels qui ont été mobilisés à cette occasion et qui en sont à l'origine.

Dans le domaine de la numération.

La lecture des grands nombres donne lieu à *l'usage de mots* désignant des facteurs de mille et de puissances de la base dix et celle des fractions à l'usage de mots qui, pour la plupart, sont *empruntés aux mathématiques*. Dans la transcription en chiffres de nombres écrits en mots, la majorité des erreurs peuvent être interprétées soit comme *des tentatives de coordination de deux systèmes de désignation* des nombres (mots et chiffres) qui ne fonctionnent pas selon des règles identiques, soit comme le produit de *la rupture engendrée par le système* de désignation des nombres par des mots *qui change de règles* de constitution pour des nombres supérieurs à neuf mille neuf cent nonante-neuf. Dans le dénombrement d'un réseau rectangulaire de cases, la majorité des erreurs proviennent d'un *comptage par 1 inexact*, alors que la majorité des erreurs dans le comptage et le décomptage par n sont consécutives à *la prise en compte de certaines régularités des suites de nombres* qui s'engendrent au fil du comptage ou du décomptage. La majorité des erreurs dans l'ordre des nombres dans D peuvent être interprétées soit comme *le fait de règles* qui prennent en compte les chiffres qui constituent le nombre plutôt que leur position, soit comme *l'importation dans D de règles* de comparaison qui sont fonctionnelles dans N.

Dans le domaine des opérations.

A l'oral, comme à l'écrit, on trouve passablement d'erreurs qui sont produites par *l'égrenage des nombres dans le comptage et le décomptage* (surtout par un, mais aussi par n dans le cas de la multiplication) des nombres liés aux sous-opérations à réaliser dans le calcul. La majorité des autres erreurs sont liées à *l'apprêt des données* dans l'exécution des algorithmes : dans le cas de l'addition, c'est le report de la dizaine qui est particulièrement concerné ; dans celui de la soustraction, c'est tout à la fois la manière d'éviter (en intervertissant les chiffres de la sous-opération) et d'effectuer l'emprunt ; dans celui de la multiplication, c'est l'organisation du diagramme sur plusieurs étages ; dans le cas de la division, c'est le report du 0 dans la plage du résultat. On assiste également à *de nombreuses substitutions d'opérations* dont certaines interviennent manifestement lorsque celle qui est à réaliser n'est pas maîtrisée ou n'a pas fait l'objet d'un enseignement préalable.

Dans le domaine des problèmes numériques.

Dans les exercices de structure additive, la majorité des erreurs proviennent de *la substitution d'une opération* par une autre (l'addition par la soustraction et réciproquement). Dans les exercices de structure multiplicative, on observe également *des substitutions d'opérations*, par une autre et des multiplications de deux (voir trois) nombres qui ont été extraits de l'énoncé. Dans le premier exercice de structure mixte (calcul de pourcentage), la majorité des erreurs proviennent soit de *la non-prise compte du signe %*, soit de son interprétation comme signe $\div$; quelques erreurs résultent de *l'usage partiel d'une technique* de résolution de type "règle de trois" et d'autres d'*une simple estimation* du pourcentage considéré. Dans le deuxième exercice de structure mixte (calcul de poids), la majorité des erreurs proviennent de *l'absence de conversion de mesures* ou de *la prise en compte partielle des quantités* dont il s'agit d'établir la somme dans l'addition finale. Dans le troisième exercice de structure mixte (calcul de coûts), c'est la *prise en compte*, exclusive ou partielle, *des prix unitaires* figurant dans l'énoncé qui est à l'origine de la plupart des erreurs.

Dans le domaine des mesures.

Dans la mesure des côtés d'un triangle à l'aide d'un rapporteur, la majorité des erreurs sont dues à *des imprécisions de mesures* ; on observe également *des reports de la mesure* de l'hypoténuse sur les cathètes ou inversement et des erreurs produites par *la lecture des signes* figurant sur le rapporteur. Dans la mesure des angles d'un triangle à l'aide d'un rapporteur la

majorité des erreurs sont consécutives *au placement du rapporteur sur le triangle* pour effectuer les mesures ; quelques erreurs sont également dues à *des imprécisions de mesures* et par *la lecture des signes* figurant sur le rapporteur. Dans les deux cas, la perception d'une proximité ou d'un écart entre les grandeurs du triangle dessiné ne vient jamais invalider des similitudes ou des écarts contradictoires, même consistants, qui apparaissent dans leur mesure. Dans le calcul de l'aire, la plupart des erreurs proviennent du fait que *le produit des mesures* de deux (parfois trois) côtés du triangle *n'a pas été divisé par deux* ; la mesure du périmètre ou celle de la longueur d'un trait qui traverse le triangle ont été établies pour le calcul de l'aire. Dans les rapports entre unités de mesures d'un même domaine et les conversions de mesures, *un nombre très conséquent d'erreurs se laissent difficilement soumettre à l'interprétation* ; dans les rapports, celles qui le sont proviennent soit *du report d'un rapport* de deux unités de mesures d'un même domaine vers un autre domaine de grandeurs, soit *des préfixes des termes désignant les unités* mises en correspondance, soit encore de *quelques instruments* qui ont été rencontrés *au quotidien* (sur des objets comme des doseurs, par exemple). L'analyse ne montre pas de liens de causalité entre les rapports établis dans un exercice et les conversions effectuées dans un autre ; les tableaux de conversion de mesures sont peu utilisés dans les deux cas ; leur construction est la plupart du temps incertaine et leur usage crée des erreurs, plutôt que de favoriser l'identification d'un rapport ou la réalisation d'une conversion.

Discussion concernant la pertinence et la portée des analyses

La synthèse des analyses étant établie, il s'agit encore d'en discuter la *pertinence*, c'est-à-dire ce qu'elle peut bien valoir, ainsi que la *portée*, c'est-à-dire ce que l'on peut envisager d'en faire.

Pertinence de la synthèse.

En ce qui concerne tout d'abord la pertinence de la synthèse, on rapportera, pour le faire, trois éléments issus de la passation effective des épreuves, qui appellent à considérer avec passablement de prudence les résultats des analyses.

Premièrement, on peut dégager deux grands modes de faire quant à la manière dont les stagiaires s'y prennent pour appréhender les items des épreuves :

- soit la stagiaire sait (ou croit savoir) la réponse ou la façon dont elle pourrait la découvrir et cela la conduit à l'écrire directement sur sa fiche ou à mettre en œuvre un procédé de résolution qui permet d'y aboutir ;
- soit la stagiaire doute (ou croit ne pas savoir) la réponse ou la façon dont elle pourrait la découvrir, ce qui la conduit soit à ne rien répondre, soit à "inventer" une réponse ou un procédé de résolution qui permet d'y aboutir.

Or, si ces deux formes d'attitudes sont toutes deux susceptibles de produire des réussites et des erreurs qui feront ensuite l'objet de l'interprétation, on peut néanmoins penser que les réussites et les erreurs recensées dans les deux cas ne sont pas au même titre révélatrices des savoirs effectifs de la stagiaire : dans le premier cas en effet, les savoirs mobilisés permettent d'investir l'exercice pour le résoudre, tandis que dans le deuxième cas, les savoirs mobilisés permettent plutôt de ne pas investir l'exercice, et l'éviter - on retrouve l'idée d'expédient - tout en donnant le change à l'expérimentateur qui attend une réponse (une non-réponse pouvant être considérée comme une forme de non-investissement qui ne donne pas le change).

Cette distinction permet d'expliquer, en partie tout au moins, la forme de labilité de certaines réponses données par les apprenties dans les épreuves, qui pouvaient grandement varier d'une séance à une autre. Il m'a été particulièrement donné de m'en rendre compte à plusieurs reprises lors de la quatrième séance, quand je revenais sur certains items des épreuves et que les stagiaires proposaient d'autres réponses que celles qu'elles avaient apportées sur leur fiche. La

chose a même été patente dans un cas tout particulier où, par erreur(!), j'ai remis à deux reprises à une même stagiaire, la même fiche d'opérations à remplir ; du fait qu'elle n'a pas protesté et qu'elle a rempli une seconde fois la fiche, j'ai pu remarquer que les deux additions et les deux soustractions qu'elle avait correctement résolues la première fois aboutissaient cette fois-ci à trois erreurs et une seule réussite³⁴⁰. Il n'était dès lors plus possible d'attribuer une reconnaissance en termes de savoirs aux réussites produites dans la première séance et il n'était pas non plus possible de le faire en termes de savoirs partiels ou non-maîtrisés vis-à-vis des trois erreurs consécutives à la seconde.

Deuxièmement, j'ai pu remarquer, en cours de passation, que certaines stagiaires se plaignaient du fait que certains items référaient à des savoirs mathématiques qu'on ne leur avait pas enseignés à l'école (comme la division ou les fractions, par exemple), que d'autres se défendaient de ne pas avoir utilisé certains savoirs depuis longtemps (comme les conversions de mesures ou la mesure d'un angle avec le rapporteur, par exemple), tandis que d'autres encore s'étonnaient de l'absence, au sein des épreuves, de savoirs mathématiques qu'elles disaient pourtant maîtriser (comme certains éléments d'algèbre ou le calcul d'un volume, par exemple). A ce titre, on observe même dans certaines fiches que la stagiaire a investi des savoirs de complexité supérieure à ceux qui étaient en principe nécessaire à la résolution des items, comme c'est le cas, par exemple, dans la figure n°23, où la stagiaire a eu recours au théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'hypoténuse du triangle, alors qu'il s'agissait simplement de la mesurer avec un rapporteur.

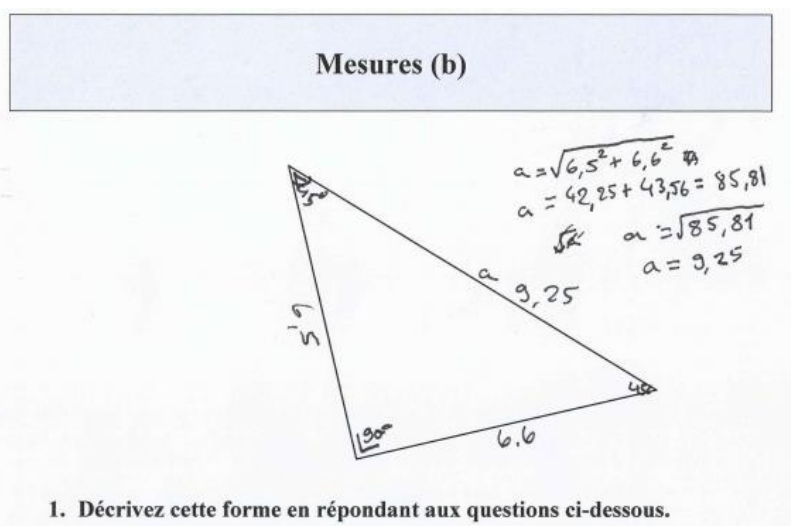


Figure n°23 - Calcul de la longueur de l'hypoténuse à l'aide du théorème de Pythagore

Ces diverses réactions montrent toute la difficulté qu'il peut y avoir, en l'absence d'un programme de référence sur lequel s'appuyer, à concevoir des épreuves qui se veulent un tant soit peu représentatives de l'enseignement préalable qui a été donné aux stagiaires et qui pourraient ainsi servir à une meilleure reconnaissance des savoirs mathématiques qu'elles sont parvenues à s'approprier durant leurs années d'école.

Troisièmement, les interactions de connaissances générées dans la quatrième séance du stage où l'on reprenait, pour en discuter, certains items des épreuves ont non seulement permis de montrer que certaines réponses étaient susceptibles de varier d'une séance à une autre, mais que certains procédés de résolution pouvaient apparaître, alors même qu'ils n'avaient pas du tout été mobilisés durant l'épreuve qui l'avait précédée. C'est le cas, par exemple, dans la très courte

³⁴⁰ 75 + 49 = donnait 124, puis 94 ; 7 + 18 + 126 = donnait 151, puis 51 ; enfin 202 – 143 donnait 59, puis 141.

interaction qui suit, avec une stagiaire dénommée "Me" aux prises avec le problème : "*Dans un atelier de confection, on a payé 100 francs pour acheter 5 nappes. Combien devra-t-on payer pour acheter 8 nappes identiques ?*" auquel elle avait répondu 500 (en ayant multiplié 100 par 5) sur sa fiche.

Après lecture de l'énoncé, Me commence par dire que pour huit nappes, cela fait 200 francs avant de se raviser et de dire : « Non, un peu moins de 200 francs ». Elle cherche, hésite, dit que ça doit faire 100 quelque chose, puis opte pour 160, en disant que : « ça doit être par-là ». Je lui demande si elle peut en être sûre et c'est alors qu'elle propose de faire 100×5 qui lui donne 500, puis 100×8 qui lui donne 800. Elle réfute tour à tour les deux résultats, en disant : « non, ça va pas » et se remet à chercher. Au bout de quelques instants, comme rien ne vient, je lui demande si elle pourrait trouver le prix d'une nappe. Me répond alors que « c'est justement la question qu'elle se posait ». Elle poursuit son idée et finit par trouver 20 pour le prix d'une nappe, avant d'itérer ce 20 à cinq reprises, retrouvant 100, le prix pour cinq nappes, puis itérant 20 encore trois fois, pour parvenir à 160 (qui vient ainsi confirmer son "intuition" du départ).

Ces observations, que l'on peut rapprocher de celles advenues dans le chapitre précédent, quand Ca faisait usage d'une technique qui occupait tout l'espace de l'interaction et que mes interventions l'amenaient par la suite à envisager d'autres procédés, tendent donc à montrer que *les résultats issus des épreuves en situation d'interaction cognitive ne sauraient manifestement préjuger de l'ensemble des savoirs qu'une stagiaire est susceptible de manifester en situation d'interactions de connaissances.*

Portée de la synthèse.

En ce qui concerne maintenant la portée de la synthèse, on voit tout d'abord qu'en se rapportant à l'analyse des réussites, la part des savoirs maîtrisés par les apprenties que l'on y trouve est excessivement ténue, tout spécialement si l'on rapporte ces savoirs à ceux engagés dans la résolution des exercices des épreuves d'examen des employées de cuisine AFP qui ont été considérés dans le chapitre précédent. Et ce qui frappe, en contrepartie, c'est bien plutôt l'ampleur des savoirs partiellement maîtrisés et peu maîtrisés qui ont été mis en évidence, vis-à-vis desquels il est même possible de penser que certains n'ont pas fait l'objet d'un enseignement dans la scolarité antérieure des stagiaires. L'analyse des erreurs qui lui succède, aussi bien lorsqu'elle permet d'identifier les savoirs partiels qui ont été mis en œuvre, que quand leur interprétation est rendue difficile, vient encore renforcer cette perception de non-maîtrise et confirmer l'attribution d'être "en difficulté d'apprentissage" qui est faite aux stagiaires à leur arrivée au CFPS.

D'un point de vue didactique, l'issue d'un tel état de fait semble alors immanquablement devoir passer par la reprise de l'enseignement des savoirs qui font défaut avant de pouvoir engager l'enseignement de nouveaux savoirs. Or, si l'on sait que la reprise des savoirs enseignés est déjà un phénomène - la *reconduction dans l'ignorance* (Conne, 1999) - que l'on rencontre dans l'Es et que l'on a pu établir au chapitre 5, au travers de l'analyse des programmes effectuée, que ce phénomène se poursuit plus avant dans le contexte la Fps, il est maintenant possible d'affirmer que *ce sont précisément les résultats de telles épreuves et les analyses auxquelles elles donnent lieu qui participent au transfert du phénomène du système Es vers le système Fps.*

Cependant, si l'on tient compte de la prudence avec laquelle il faut prendre la synthèse des analyses des épreuves qui émerge des propos qui précèdent, tout comme des difficultés que l'interprétation de certaines erreurs peuvent poser, on en vient plutôt à considérer que c'est la perspective même de vouloir établir un *savoir didactique* (Chevallard, 1988b) à partir de telles épreuves qui s'avère être un leurre. Les résultats auxquels ces dernières aboutissent ne peuvent

en effet constituer une forme de bilan des savoirs mathématiques que les stagiaires auraient su s'approprier durant leur scolarité. Tout au plus en constituent-ils des traces, que les épreuves sont à même de révéler, dans les conditions particulières qui président à leur réalisation. Il faut plus exactement parler de savoirs rendus disponibles par l'interaction cognitive, sans que l'on ne puisse pour autant préjuger du fait que d'autres savoirs ne sont pas susceptibles d'y suppléer, face aux mêmes exercices, dans d'autres conditions.

Au chapitre précédent, on a vu que d'autres savoirs pouvaient apparaître dans l'interaction de connaissances que ceux qui émergent dans l'interaction cognitive, en fonction des actions que l'enseignant était à même d'y porter, suivant les interprétations que, fort de ses propres savoirs, il était capable d'y mener. Il y a donc lieu maintenant de prendre comme une condition inhérente au développement des interactions dans la Fps, le fait que les savoirs des apprenties ne peuvent être entièrement déterminés à l'avance et à considérer au contraire ces interactions comme le lieu privilégié de leur révélation potentielle, dont il sera éventuellement possible de tirer parti pour conduire l'enseignement. Comme les deux chapitres qui suivent le montreront de manière encore plus nette, la dynamique qui les caractérise ne peut faire l'objet d'un contrôle très partiel impliquant d'assumer une posture qui va constamment osciller entre les savoirs de l'enseignant et son ignorance pour apprendre progressivement à s'y mouvoir.

CHAPITRE 8 LES COURS DE MATHÉMATIQUES DONNÉS À UN GROUPE D'APPRENTIES EMPLOYÉES DE CUISINE AFP DANS L'ENSEIGNEMENT DES BRANCHES PROFESSIONNELLES AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF

INTRODUCTION

Le chapitre rend compte d'une troisième incursion dans les investissements de savoirs et les interactions de connaissances dans la Fps, en prenant pour objet d'analyse les séances de cours de mathématiques qui ont été donnés au CFPS, durant l'année scolaire 2011-2012, à un groupe de sept apprenties employées de cuisine AFP - dénommées "Co", "Jac", "Jad", "Lou", "Mam", "Sa" et "Tiz" tout au long du chapitre - dont la formation se déroulait à l'interne du centre. La première partie du chapitre porte sur les investissements de savoirs relatifs aux séances de cours qui ont été répartis en trois catégories selon les déterminations dont ils relèvent. Elle examine la place respective que chaque catégorie de savoirs a pu y prendre, caractérise les contextualisations qui ont servi de support aux interactions - essentiellement, comme au chapitre 6, des exercices relatifs au travail en cuisine - et les met en lien avec les techniques enseignées pour les résoudre. La deuxième partie du chapitre s'intéresse aux interactions de connaissances qui ont spécifiquement porté sur la résolution d'exercices de transformation de quantités d'ingrédients d'une recette, en identifiant les procédés de résolution utilisés par les apprenties dans les séances de cours de septembre à décembre 2011, en analysant la dynamique d'une séance d'enseignement particulière et en procédant au suivi du parcours de trois apprenties tout au long de l'année. La troisième partie du chapitre concerne les interactions de connaissances qui ont porté sur l'établissement de conversions de mesures de poids. Elle reprend la structure en trois temps de la partie précédente, en décrivant les procédés utilisés par les apprenties dans deux séances de cours, en analysant la dynamique d'une séance d'enseignement particulière et en examinant les résultats obtenus par les apprenties à une épreuve d'évaluation consacrée à cet objet. Une synthèse des analyses est proposée en fin de chapitre.

INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS

Les déterminations des savoirs et des interactions

L'entretien préliminaire avec le maître socioprofessionnel responsable des cours

L'entretien préliminaire avec le MSP de cuisine qui s'est déroulé au mois de septembre 2011 a permis de déterminer les contenus des cours qui seraient traités avec le groupe de sept apprenties employées de cuisine AFP qui composaient la classe.

Une première catégorie de savoirs mathématiques a été évoquée par le MSP qui m'a indiqué les domaines d'expériences auxquels réfèrent les exercices qu'il avait pris pour habitude de traiter avec les apprenties les années précédentes.

Ces domaines d'expériences³⁴¹ correspondaient à ceux que j'avais déjà rencontrés dans le cadre du soutien avec Ca (cf. chapitre 6) : on retrouvait le remplissage de fiches d'inventaires (RFI), le calcul de poids (CP), la transformation des quantités

³⁴¹ Tout au long du chapitre, les décalages typographiques correspondent à ceux déjà effectués au chapitre 6.

d'ingrédients d'une recette (TQIR) et le calcul de coût (CC). Les tâches soumises aux apprenties prenaient également la forme d'exercices figurant dans les procédures de qualification des années précédentes, ce qui signifiait que le MSP procédait d'une manière semblable dont j'avais pu m'y prendre lors du soutien avec Ca. Ces exercices n'étaient pas non plus accompagnés des techniques qu'il enseignait aux apprenties pour les résoudre³⁴².

La chose n'était pas vraiment surprenante, vu que la formation était identique et que la seule différence tenait à ce que les cours de branches professionnelles étaient donnés à l'interne du CFPS, plutôt qu'à l'école professionnelle. Mais cela signifiait que les déterminations des savoirs étaient également les mêmes, c'est-à-dire que c'étaient également les épreuves d'examens proposées aux apprenties des volées précédentes qui officialisaient comme programme : l'ORTRA Gastro suisse, responsable de la conception et de l'édition des examens, constituait donc à nouveau le système externe qui déterminait les savoirs mathématiques en jeu dans le "système cours" du CFPS.

Les deux autres catégories de savoirs que j'ai également souhaité traiter en cours étaient relatives d'une part aux problèmes³⁴³ que les apprenties pouvaient rencontrer en cuisine et d'autre part aux notions mathématiques qu'elles avaient pu aborder (ou dont elles avaient entendu parler) durant leur scolarité obligatoire et qui pourraient les intéresser de (re)découvrir.

Ces deux catégories faisaient exclusivement l'objet de déterminations internes, la première étant à visée professionnelle, tandis que l'autre ne l'était pas. Les savoirs relatifs à ces deux catégories ne pouvaient pas être définis à l'avance, puisqu'ils allaient dépendre des besoins et/ou des intérêts particuliers manifestés par les apprenties.

Le cadre général des interventions arrêté durant l'entretien supposait, à mon point de vue tout au moins, que le MSP conserve une part d'enseignement des mathématiques auprès des apprenties, et plus particulièrement tout ce qui avait trait à l'évaluation des apprentissages, sans quoi la fréquence et la durée des cours prévues - une heure d'enseignement à quinzaine - allaient inmanquablement s'avérer insuffisantes pour y traiter les contenus définis. Ce n'est qu'un peu plus tard³⁴⁴ que je comprendrai que, du point de vue du MSP au contraire, c'est l'ensemble de l'enseignement des mathématiques devant être proposé aux apprenties qui m'était désormais dévolu.

Ce quiproquo³⁴⁵ initial agira comme une contrainte majeure sur le système, générant des répercussions importantes, tant sur l'agencement, que sur le contenu des séances de la deuxième partie du premier semestre, où je serai contraint de "courir" après les

³⁴² Il est bien certain que ma fonction de responsable pédagogique et l'attribution de "sachant enseigner les mathématiques" qui en résultait me donnait implicitement le feu vert pour employer les techniques que je souhaitais auprès des apprenties, dispensant, dans le même temps, le MSP de me faire part de celles qu'il employait habituellement. Ce sera incidemment, par le biais d'une fiche se trouvant dans le classeur d'une apprentie (voir plus avant) que, longtemps après ce premier entretien, j'aurai accès à l'une des techniques qu'il enseignait.

³⁴³ L'utilisation qui est faite ici du terme de *problème* est à prendre dans la perspective psychologique de Brun (1990), dans le sens où ce sont les apprenties qui sont supposées identifier des problèmes dans le cadre de la cuisine (et qu'elles ne savent en principe pas résoudre). L'appellation "problèmes" vise à les distinguer des exercices donnés en cours et/ou figurant dans les épreuves d'examens qui sont élaborés de toutes pièces par une instance externe.

³⁴⁴ La chose m'est apparue après les trois premières séances de cours, quand nous avons succinctement parlé avec le MSP de la question des notes à établir et que j'ai compris qu'il s'en remettait à moi pour le faire.

³⁴⁵ Le quiproquo tient sans doute au fait que mes expériences antérieures d'enseignant de mathématiques dans le contexte de l'Es, à l'interne d'un dispositif qui se voulait semblable (Favre, 2012 ; 2013), laissait à l'enseignant titulaire de la classe, sans qu'il ne soit besoin de l'explicitier, la responsabilité de l'enseignement de mathématiques donné aux élèves. Dans le cadre du CFPS en revanche, où la part des mathématiques est bien plus ténue et où ma fonction de responsable pédagogique m'adjoignait une "responsabilité partagée", la chose aurait nécessité d'être discutée de façon explicite, pour délimiter la part de l'enseignement qui me revenait, de celle qui restait entre les mains du MSP.

évaluations, de manière à obtenir un nombre de notes minimal (deux, voire trois dans le meilleur des cas) à l'établissement d'une moyenne au semestre.

Il entraînera aussi la mise sur pied des séances qui se sont déroulées durant le second semestre de l'année (et qui n'étaient nullement prévues dans le cadre de départ), les apprenties s'étant en quelque sorte jointes au MSP pour me déléguer l'entière responsabilité de l'enseignement des mathématiques devant leur être dispensé et à laquelle ma fonction de responsable pédagogique m'intimait dès lors de répondre.

Les séances de cours de septembre à décembre 2011 : un équilibre se crée entre les trois catégories de savoirs

Durant les sept séances qui ont eu lieu de septembre à décembre 2011, des tâches relatives aux trois catégories de savoirs - savoirs à détermination externe, savoirs à détermination interne et à visée professionnelle, savoirs à détermination interne et à visée non-professionnelle - ont été traitées en cours.

Les savoirs à détermination externe.

De septembre à novembre 2011, trois exercices extraits d'une épreuve d'examen conçue par Gastro suisse ont été soumis aux apprenties : le premier (TQIR), lors de la séance du 22 septembre 2011 et les deux autres (RFI et CP) durant celle du 3 novembre 2011. Les procédés utilisés par les apprenties pour résoudre l'exercice TQIR ont donné lieu à un travail de comparaison par groupes lors de la séance du 6 octobre 2011 et il a fait l'objet, avec l'exercice RFI, d'une correction, accompagnée de l'institutionnalisation d'une technique de résolution, le 17 novembre 2011. Une épreuve d'évaluation, comportant trois exercices TQIR et un exercice RFI³⁴⁶, s'est déroulée le 1^{er} décembre 2011 et deux exercices TQIR ont fait l'objet d'une correction et donné lieu à une nouvelle institutionnalisation durant la séance du 22 décembre 2011.

L'épreuve d'évaluation du 1^{er} décembre 2011 a donc eu lieu, alors même que seulement deux exercices comparables (TQIR et RFI) à ceux qui y figuraient avaient été préalablement traités en cours. La chose a évidemment de quoi surprendre, quand on sait que l'enseignement n'a pas été repris à d'autres moments de cours par le MSP et que l'on se trouve aux prises avec des apprenties déclarées en difficulté d'apprentissage, lesquelles seraient en principe supposées disposer d'un temps d'apprentissage conséquent pour s'approprier les savoirs enseignés.

La nécessité de mettre en place une épreuve d'évaluation avant Noël répondait à une contrainte externe au système - le fait de disposer de notes de mathématiques au semestre pour effectuer une moyenne - et la particularité du dispositif mis en place voulait que ces évaluations se déroulent durant les séances de cours qui le constituent. Mais il fallait pour cela que les apprenties aient quelque chance de répondre adéquatement (au moins en partie) aux questions qui leur y seraient soumises.

Or, cela n'aurait pas été le cas si les apprenties en avaient été à leur première rencontre avec de tels exercices et avec les techniques qui permettent de les résoudre. C'est donc le fait de se trouver dans un contrat de reprise qui a permis d'escompter que certaines d'entre elles³⁴⁷ avaient déjà rencontré antérieurement - au CFPS, voir même bien plus avant durant leurs années d'école obligatoire - d'autres exercices du même type et

³⁴⁶ L'épreuve comportait également un exercice de partage d'un carré en vingt-cinq parts égales qui était en lien avec l'un des problèmes que les apprenties avaient rapportés en cours et qui avait été traité lors de la séance du 6 octobre 2011.

³⁴⁷ On peut ici donner l'exemple de Lou qui, à plusieurs reprises durant les séances, a dit qu'elle en avait marre de refaire toujours les mêmes exercices et à qui j'essaierai dès lors, mais sans grand succès, de proposer d'autres types de tâches.

qu'elles en maîtrisaient tout ou partie de la résolution, ce qui assurait qu'elles puissent faire une relative bonne figure durant l'épreuve.

Les résultats issus des épreuves le montreront d'ailleurs de façon éclatante, puisque seules deux d'entre elles n'y obtiendront pas la moyenne de 4.

La contrainte externe, demandant des notes, a ainsi pu être honorée, validant du même coup la pertinence de l'épreuve et l'enseignement antérieur qu'elle était supposée sanctionner.

Ce processus d'auto-validation de l'enseignement donné qui, dans un contrat de reprise, vient s'appuyer sur les savoirs acquis antérieurement par les apprenties, constitue un paradoxe, si on se rappelle que c'est précisément par défaut de reconnaissance des savoirs acquis par les apprenties que l'enseignement a été reconduit. En d'autres termes, on pourrait dire que l'enseignement donné se légitime sur l'absence d'un savoir didactique (Chevallard, 1988b) reconnu (et qu'il est donc nécessaire de reprendre), alors même que l'évaluation qui en est faite repose sur la présence de ce savoir didactique non-reconnu pour en valider la pertinence.

On peut faire l'hypothèse que c'est bien un tel processus qui participe d'une part à la non-évolution des savoirs enseignés tout au long de la formation des apprenties mise en évidence au chapitre 5 : on reconduit l'enseignement du fait de l'absence de savoirs manifestés par certaines apprenties et on en atteste de ces effets par la présence des savoirs manifestés par d'autres³⁴⁸.

Les savoirs à détermination interne et à visée professionnelle.

De septembre à décembre, il a été possible de faire rapporter par les apprenties trois problèmes relatifs à leur travail en cuisine³⁴⁹ qui ont été respectivement intitulés : le "problème des quiches", le "problème des pâtes" et le "problème du plat à gratin". De mon côté, je leur en ai soumis deux, le premier inspiré par une expérience personnelle - le "problème de la fondue bressane" - et le second pour lequel un événement survenu au CFPS a été le prétexte, le "problème de la commande du repas pour la journée des parents". Enfin, un dernier problème, survenu en cours à l'occasion de la résolution d'un exercice d'examen, a fait l'objet d'une confrontation à la situation effective de cuisine à laquelle il référerait.

Les échanges rapportés dans les narrations montrent que s'il est possible de faire rapporter, par les apprenties, des problèmes rencontrés en cuisine qui requièrent des mathématiques pour les résoudre, afin de les traiter en cours, la chose reste toutefois très incertaine, pour trois raisons au moins :

- Premièrement, il est difficile d'établir une formulation complète du problème, c'est-à-dire une formulation qui tienne compte de l'ensemble des paramètres qui contribuent à sa détermination en cuisine. Il est en effet plus aisé de le ramener à un exercice des domaines RFI, CP, TQIR ou CC comme ceux figurant dans les épreuves d'examens qui ne font qu'évoquer cette réalité.
- Deuxièmement, certains problèmes de cuisine ne sont pas de la responsabilité directe des apprenties, car ils restent l'apanage des MSP. Il est donc difficile pour elles de se les approprier, afin d'en rendre compte en cours et les y traiter.
- Troisièmement, certains problèmes de cuisine, requérant des mathématiques pour être résolus, bénéficient d'autres moyens de résolution efficaces dans le cadre de

³⁴⁸ Rappelons à ce titre qu'une hypothèse explicative à la disparition (cf. chapitre 5) d'un enseignement des mathématiques de type organisé dans la plupart des secteurs professionnels du CFPS, alors même que certaines compétences professionnelles requièrent l'usage de mathématiques, s'appuyait sur la maîtrise de ces savoirs chez certaines apprenties.

³⁴⁹ A chaque cours, je demandais à une apprentie de se porter volontaire pour le faire.

la cuisine, ce qui fait qu'il n'est pas nécessaire de les rapporter en cours pour apprendre à (mieux) le faire.

De fait, si l'on veut pouvoir traiter en cours des problèmes qui apparaissent en cuisine, il apparaît nécessaire de passer par un autre canal que celui des seules apprenties, où leur est dévolu la totalité du processus de transposition, et qui implique les MSP³⁵⁰.

Les savoirs à détermination interne et à visée non-professionnelle.

De septembre à décembre, des activités relevant de savoirs à visée non-professionnelle ont eu lieu dans plusieurs séances. La première séance de cours du 8 septembre 2011 a été consacrée presque en entier à l'exploration des touches de la calculette, conduisant les apprenties à deux petites recherches :

- la première d'entre elles a porté, par l'usage des touches $\div$ et $\neq$, sur les inverses des nombres naturels et sur les formes, diverses et réglées, que prennent les écritures décimales de ces nombres à l'écran ;
- la seconde recherche s'est établie sur la création des mots qu'il est possible d'écrire sur la calculette à l'aide des dix chiffres du système de numération décimale de position, et qui a largement débordé le cadre du cours³⁵¹.

Lors de la séance cours du 22 septembre 2011, une troisième recherche a également pu être initiée auprès de quatre apprenties :

- celle-ci a pris pour objet le fonctionnement de la touche $\sqrt{}$ et une signification - inverse des nombres carrés - dont elle relève (Favre, 2000).

Ces trois petites recherches ont à chaque fois donné lieu à une mise en commun des découvertes et à la création d'une fiche-synthèse³⁵² qui a été distribuée en cours et lue aux apprenties. Par la suite, une apprentie s'est également lancée dans l'exploration d'une calculatrice scientifique et la résolution d'une fiche d'exercices consacrée aux fonctions linéaire et affine sans toutefois la terminer. Enfin, la séance du 22 décembre 2011 a encore donné lieu à une dernière recherche qui, il est important de le relever, a supplanté le visionnement d'un film prévu par le MSP, pour cette dernière séance de l'année :

- il s'agissait de créer des polygones étoilés à partir de n points ($n = 5$ à 12) placé sur la circonférence d'un cercle.

L'investissement conséquent que ces quatre recherches ont pu générer auprès des apprenties - dont les productions et les narrations témoignent - montre qu'il est bel et bien possible de donner corps, au sein des cours de branches professionnelles, à des savoirs mathématiques qui n'ont pas de visée professionnelle avérée. Mais il est nécessaire de disposer pour cela d'une détermination interne suffisamment forte pour résister à la pression exercée par les savoirs à détermination externe, qu'ils soient mathématiques ou professionnels. Dans le dispositif mis en place à l'occasion de cette quatrième investigation et des contraintes qui y prévalaient, on verra en effet qu'à partir de la rentrée de janvier 2012, ces savoirs seront irrémédiablement exclus des cours.

³⁵⁰ Le travail mené avec des cuisiniers par Kaiser (2011) propose un champ d'investigation qui vise à prendre en compte, dans le cadre des cours, des logiques, des règles et des expérimentations qui ont lieu en cuisine : il sera repris et discuté en conclusion dans le cadre des perspectives ouvertes pour enseigner les mathématiques dans le contexte de la Fps.

³⁵¹ L'enseignante qui accueillait les apprenties dans les cours de culture générale l'après-midi m'ayant signalé qu'elle s'était, bien malgré elle, largement poursuivie à cette occasion.

³⁵² La dernière conduisant, durant la séance de cours du 17 novembre 2011, à la présentation de trois ouvrages et d'un article de vulgarisation mathématique consacré à Pythagore

Les séances de cours de janvier à mai 2012 : l'équilibre rompt à l'avantage unique des savoirs à détermination externe

Les savoirs en jeu dans les séances de cours de janvier à février 2012.

De janvier à février 2012, six séances de cours ont été organisées, alors que, le dispositif conçu au départ, en prévoyait trois durant cette période. Cette augmentation³⁵³ du nombre de séances s'est opérée sous la contrainte du quiproquo initial mentionné en début de chapitre. Du point de vue des savoirs à détermination externe, il s'agissait en effet d'enseigner de nouveaux contenus, liés aux exercices CP et CC (qui n'avaient pas encore été pris en compte), qui devaient à leur tour donner lieu à au moins une épreuve d'évaluation.

La fin du premier semestre étant arrêtée au 10 février 2011, il était impératif d'aboutir, pour chaque apprentie, à l'obtention d'au moins deux notes nécessaires à la détermination d'une (bien maigre) moyenne. Par ailleurs, le fait que deux apprenties n'aient pas obtenu la note de 4 à l'évaluation du mois de décembre m'a conduit à mettre sur pied, à leur intention, deux séances d'appui consacrées aux exercices TQIR et à leur proposer une nouvelle épreuve d'évaluation pour leur permettre d'améliorer les résultats obtenus dans la première.

Du point de vue des savoirs à détermination interne, il aurait été nécessaire de poursuivre le travail amorcé autour des problèmes rencontrés en cuisine et des savoirs à visée non-professionnelle.

La chose n'a cependant pas été possible en raison de la pression exercée par les savoirs à détermination externe et ce, d'autant qu'une nouvelle contrainte a fait jour durant cette période : l'absence, pour raison de maladie, de certaines apprenties des séances de cours, qui a nécessité de répéter l'accomplissement d'une épreuve d'évaluation pour certaines et de reconduire l'enseignement dispensé pour d'autres³⁵⁴.

L'équilibre qui présidait dans les séances jusqu'à Noël entre les trois catégories de savoirs a donc entièrement basculé durant cette période allant de janvier à février 2012 (et alors même que la fréquence des cours s'était accrue) au profit d'une catégorie unique : celle des savoirs à détermination externe qui vont désormais y occuper tout l'espace des cours.

A y regarder rétrospectivement, un réaménagement du dispositif, invitant le MSP à reprendre une partie de l'enseignement des mathématiques dispensé, aurait peut-être pu contribuer à maintenir une part des savoirs à détermination interne dans le cadre des cours. Mais le fait que le nombre de séances consacrées aux mathématiques ait déjà doublé, absorbant une plus grande part du temps dévolu aux branches professionnelles, donne au contraire à penser que cela n'aurait pas vraiment pu être le cas. En revanche, la prise en compte du fait (mis en évidence au chapitre 6) que les résultats obtenus lors de l'examen de mathématiques n'ont qu'une incidence réduite sur la réussite globale des examens d'employée de cuisine AFP aurait assurément pu concourir à réduire la pression exercée par les savoirs à détermination externe³⁵⁵.

³⁵³ Le fait que l'on puisse sans autre doubler le nombre de séances de cours de mathématiques constitue une trace d'un phénomène déjà mis en évidence dans le cadre de l'Es, à savoir l'*extensibilité du temps d'enseignement* (Favre, 2004a).

³⁵⁴ D'un enseignement qui était jusqu'ici conduit de façon homogène à destination des sept apprenties de la classe, on est passé à un enseignement différencié qui porte, au sein d'une même séance, et selon les apprenties considérées, sur des tâches et donc des savoirs très différents. La séance du 2 février 2012 offre un exemple éloquent de cette diversification des savoirs en jeu, où Jad et Tiz ont effectué une épreuve d'évaluation consacrée aux conversions de mesures de poids, Jac et Mam réalisé une épreuve de rattrapage concernant les exercices TQIR, Ca et Sa résolu un exercice CC qui anticipait la suite de l'enseignement, alors que Lou, malade pour la deuxième séance consécutive, n'a jamais pu accomplir la seconde épreuve d'évaluation prévue.

³⁵⁵ Une apprentie s'en est d'ailleurs enquis en cours lors la séance du 22 septembre 2011, demandant au MSP si l'examen de mathématiques comptait beaucoup ou peu dans la réussite de la formation ; ce dernier lui a répondu que c'était

Les savoirs en jeu dans les séances de cours de mars à mai 2012.

Alors qu'elles n'étaient pas prévues dans le dispositif initial, de nouvelles séances de cours - dix en tout - ont été mises sur pied de mars à mai 2012. Deux raisons principales en sont à l'origine : il s'agissait d'abord de traiter les exercices CC qui n'avaient pu être abordés en cours durant le premier semestre ; ensuite c'est l'obtention soudaine et inattendue d'une nouvelle procédure de qualification qui a conduit à prendre en considération de nouveaux exercices.

Ce nouvel examen m'a été transmis par un MSP de cuisine du CFPS, qui l'avait reçu d'un collègue enseignant à l'école professionnelle. Edité par Gastro suisse et datant de 2010, il était plus récent³⁵⁶ que ceux auxquels j'avais référé jusqu'ici dans les cours. Il comprenait des exercices d'une plus grande complexité cognitive (voir l'analyse qui en est faite plus avant dans le chapitre) que les précédents : le nombre de relations en jeu dans leur structure était plus important et certaines d'entre elles étaient exprimées sous la forme de pourcentage. Il n'y avait par ailleurs plus aucune trace d'exercices RFI (alors que les trois autres domaines étaient tous bien présents), ni non plus de conversions de mesures, les quantités d'un même exercice étant à chaque fois exprimées à l'aide d'unités identiques³⁵⁷.

Etant donné que le programme des cours se constituait à partir des procédures de qualification, il a été nécessaire de conduire un enseignement fondé sur cette nouvelle épreuve, tout en continuant à attribuer des notes aux apprenties afin d'établir une moyenne pour le second semestre. Les dix séances de cours tenues de mars à mai 2012 y ont donc été entièrement consacrées. L'enseignement s'est presque exclusivement³⁵⁸ consacré à la présentation des nouveaux exercices, à l'institutionnalisation des techniques qui permettaient de les résoudre et à l'évaluation.

Ainsi, face aux contraintes (de détermination externe) constituées par l'obtention de cette nouvelle épreuve, c'est un peu comme si l'enseignement qui avait jusqu'ici prétention de relever du didactique organisé, se diluait maintenant dans l'évaluation, pour se transformer en didactique improvisé, destiné à répondre au coup par coup à chacun des exercices qui la constitue.

Les contextualisations de savoirs supports aux interactions et les algorithmisations de savoirs qui leur correspondent

Contextualisations et algorithmisations à l'œuvre durant le premier semestre de l'année

Les exercices en lien avec les épreuves d'examen.

Les exercices en lien avec les épreuves d'examen traités en cours durant le premier semestre sont similaires à ceux proposés à Ca au chapitre 6 et correspondent aux quatre mêmes domaines d'expérience. On retrouve donc :

avant tout l'examen pratique qui comptait le plus et que la note de mathématiques permettait surtout, quand elle était bonne, de relever sa moyenne.

³⁵⁶ Il faut comprendre que les épreuves d'examen qui ont été soumises aux apprentis au terme de leur formation nécessitent une autorisation de la part de l'organisation faîtière pour être utilisées dans les cours ; elles sont soumises à un délai de libération qui indique la date à partir de laquelle elles pourront y être employées.

³⁵⁷ Au vu des données récoltées dans la thèse, il ne m'est pas donné de savoir ce qui, au sein de Gastro suisse, participe aux modifications apportées, d'une année à l'autre, aux procédures de qualification. Dans le cas particulier, il semblait que les nouveaux exercices figurant dans les épreuves de 2010 tendaient à s'approcher à un peu plus, en termes de contenus et de complexité, de ceux figurant dans les épreuves d'évaluation destinées aux apprentis en formation CFC.

³⁵⁸ Exception faite de deux activités qui ont été effectuées à la demande d'une apprentie qui souhaitait savoir d'une part comment établir des conversions de francs en euros et d'autre part comment effectuer des conversions de mesures de capacités de poids, deux tâches qui lui avaient été soumises en cours durant sa première année de formation et qu'elle ne savait plus résoudre.

- a) les exercices RFI : ils sont de structure de base additive, de type ET^+E ou ET^-E avec recherche de l'état final ; ils comprennent plusieurs transformations à réaliser ; certaines transformations impliquent une conversion de mesures qui vient ajouter une relation multiplicative, de type multiplication (M) ou division-quotition (DQ) à la structure additive de base ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels ou décimaux ;
- b) les exercices CP : ils sont de structure de base additive, de type ET^+E ou ET^-E , avec recherche de l'état final ; ils comprennent une transformation ou une combinaison de deux transformations à réaliser ; certaines transformations impliquent une conversion de mesures qui vient ajouter une relation multiplicative/M ou multiplicative/DQ à la structure additive de base ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels ou décimaux ;
- c) les exercices TQIR : ils sont de structure de base multiplicative, de type quatrième proportionnelle (QP) ; ils comprennent plusieurs transformations à réaliser qui n'impliquent pas de conversions de mesures ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels ou décimaux ;
- d) les exercices CC : ils sont de structure de base multiplicative, pour la plupart de type M ; ils comprennent plusieurs transformations à réaliser ; certaines transformations impliquent une conversion de mesures qui vient ajouter une relation multiplicative/M ou multiplicative/DQ à la structure multiplicative de base ; une relation additive de type EEE avec recherche de l'état final rassemblant l'ensemble des coûts partiels pour obtenir le coût total vient s'y associer ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels ou décimaux.

Les techniques enseignées³⁵⁹ pour résoudre les exercices RFI, CP, TQIR et CC.

1. la "règle de trois" enseignée par le MSP de cuisine pour résoudre des exercices CC

La figure n°24, qui présente une fiche extraite du classeur d'une apprentie, montre que c'est la technique de la "règle de trois" qui, au CFPS, est privilégiée par le MSP en charge des cours pour résoudre des exercices de proportionnalité.

Dans le chapitre 6, c'était celle du "produit en croix", même si elle avait été intitulée "règle de trois", qui avait été enseignée à Ca à l'école professionnelle, ce qui veut dire que les deux techniques de résolution ont une existence propre dans la Fps et qu'elles sont donc matière à être confondues.

Le descriptif de la technique est motivé par un exercice de calcul de coût (multiplicatif/QP).

L'exercice qui se situe au niveau des grandeurs mesurées passe au niveau des nombres pour considérer le rapport existant entre le 5 (représentant, en kg, la première quantité de cerises dont on connaît le prix) et le 3 (représentant, en kg, la seconde quantité de cerises dont il s'agit de déterminer le prix).

Le fait qu'il soit précisé qu'il n'existe pas "d'opérateur entier" pour passer de 5 à 3 montre que, pour le MSP, c'est dans les cas où le rapport est décimal ou rationnel que la règle de trois doit être utilisée : elle ne serait dès lors envisagée comme technique de résolution que pour les exercices de proportionnalité, où le rapport interne n'est pas naturel³⁶⁰. Dans le cas contraire, l'usage de la règle de trois ne serait pas nécessaire, puisque le recours au rapport interne suffirait à la résolution de l'exercice.

³⁵⁹ La calculatrice étant mise à disposition des apprenties pour résoudre les exercices proposés, les additions, soustractions, multiplications et divisions qui devront être effectuées ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique.

³⁶⁰ Le rapport externe liant les grandeurs mesurées 5 kg et CHF 30.- (respectivement les nombres 5 et 30) n'est pas pris en compte, alors même qu'il est naturel, puisqu'égal à 6 CHF/kg (respectivement à 6). Le fait qu'au niveau des grandeurs mesurées, ce rapport externe comprenne une unité établie sous la forme de quotient, alors que le rapport interne permet de s'en passer peut expliquer qu'il soit ici ignoré.

Or il faut pour cela que la relation numérique sur laquelle se base le rapport soit disponible chez celui qui résout l'exercice, sinon ce dernier se retrouvera inmanquablement "en panne d'opérateur" pour effectuer la transformation, nécessitant le recours à une autre technique. On peut donc imaginer que l'usage restreint de la règle de trois prévue par le MSP aux cas des rapports internes non-naturels demande à être sensiblement élargi à tous ceux où ce rapport, qu'il soit naturel ou non, ne pourra être déterminé par les apprenties.

Une caissette de 5 kg de cerises coûte Fr.30.- Combien coûtent 3 kg?

Je n'ai pas d'opérateur entier pour passer de 5 à 3.

Je vais donc procéder par étapes (3, d'où le nom) et effectuer la règle de trois suivante:

1. On a les données suivantes de l'énoncé: 5kg de cerises coûtent Fr.30.-

2. On peut calculer le prix d'un kg: $Fr.30.- / 5 = Fr.6.-$ 1 kg de cerises coûte

3. On peut calculer le prix des 3 kg: $3 \text{ kg coûtent } (30 : 5) \times 3 = Fr.18.-$

Donc la règle de trois est un calcul par étapes(3).

On calcule la valeur de l'unité dans la deuxième étape (ici, prix du kg de cerises), puis ensuite on multiplie pour obtenir la situation recherchée (prix de 3 kg).

Figure n°24 - Fiche support à l'enseignement de la règle de trois établie par le MSP en charge des cours

Dans la suite de la fiche, on voit apparaître une ébauche de diagramme construit sur la base des trois étapes que requière l'exécution de la règle de trois.

La première étape se distingue des deux autres, dans le sens où elle n'implique pas de transformation à effectuer ; en rappelant les données de l'énoncé, il fait quitter le niveau des nombres pour ramener la résolution de l'exercice au niveau des grandeurs mesurées.

La deuxième étape comporte ensuite une grande ambiguïté, puisqu'elle est envisagée au niveau des grandeurs mesurées, alors que la transformation à effectuer ne peut se justifier qu'au niveau des nombres : on ne comprend en effet pas pourquoi au niveau des grandeurs mesurées, il faudrait calculer le prix d'un kilo, plutôt que le prix de deux, de sept ou encore de vingt kilos pour découvrir le prix des trois kilos de l'énoncé ; ce n'est en effet qu'au niveau des nombres, parce que le nombre 1 est l'élément neutre de la multiplication, que l'on pourra, à coup sûr, partant de 1 atteindre 3 par simple multiplication 3 (et que l'on pourra procéder de la même façon pour tout autre nombre).

La troisième étape, elle aussi considérée au niveau des grandeurs mesurées, réalise cette seconde transformation, partant du prix pour 1 kg pour obtenir le prix pour 3 kg et où il faut là aussi pouvoir identifier la relation numérique qui lie 1 et 3 pour être à même de le faire.

Dans la fiche, on voit encore que le MSP a encore veillé à intégrer, sur le plan numérique, le deuxième pas dans le troisième, en rappelant, entre deux parenthèses, la division $(30 \div 5)$ dans l'opération à effectuer sur la calculatrice³⁶¹.

³⁶¹ Une autre manière d'exprimer les choses consiste à dire que l'opérateur décimal $\times 3/5$ qui permet de transformer 5 en 3 au niveau numérique est décomposé, dans la règle de trois, en deux sous-opérateurs naturels que sont $\div 5$ et $\times 3$, qui permettent

2. la "règle de trois" enseignée aux apprenties pour résoudre des exercices TQIR.

La figure n°25 présente l'exercice TQIR qui a été corrigé lors de la séance du 17 novembre 2011 et la technique de résolution (recopiée par Tiz sur sa fiche) qui a été institutionnalisée auprès des apprenties.

À l'occasion de la fête de l'été, vous préparez pour les invités **5 litres** de potage froid au melon et à la mangue. Dans le manuel, vous trouvez la recette suivante:

Ingrédients pour 2 litres:

Eau	700 g	Sucre	125 g
Zeste de citron	10 g	Fécule de maïs	15 g
Jus de citron	50 g	Melon (pulpes de fruit)	450 g
Mangue (pulpes de fruit)	350 g	Vin blanc	100 g
Crème entière	200 g	Citronnelle	15 g

Exercice:

Calculez les ingrédients nécessaires pour **5 litres** de potage froid au melon et à la mangue:

Espace pour les calculs et les notes :

Ingrédient	Quantité (g)
Eau	1750
Zeste de citron	25
Jus de citron	125
Mangue (pulpes de fruit)	875
Crème entière	500
Sucre	312,5
Fécule de maïs	37,5
Melon (pulpes de fruit)	1125
Vin blanc	250
Citronnelle	37,5

Figure n°25 - Fiche synthèse à l'usage de la règle de trois pour résoudre un exercice TQIR complétée par Tiz

L'exercice se situe au niveau des grandeurs mesurées³⁶². Du fait qu'il contient plusieurs sortes d'ingrédients, il nécessite d'effectuer plusieurs transformations (dix dans le cas particulier). Ces transformations sont déterminées par un même rapport liant les quantités de la recette de base à celles de la recette transformée. Ce rapport est donné par la variation de la quantité du produit à préparer (cinq litres de potage à partir d'une recette prévue pour deux litres) : il est donc fondé sur une relation numérique décimale³⁶³.

Les transformations peuvent être accomplies en multipliant chaque quantité par 2,5. Il est également possible de recourir à la règle de trois : ainsi, partant du fait qu'il faut 700 g d'eau pour préparer 2 litres de potage, on cherchera le nombre de grammes d'eau nécessaire à la préparation de 1 litre, en divisant 700 par 2, puis on multipliera par 5 le résultat de 350 découvert pour obtenir 1750 qui représente, en grammes, la quantité d'eau pour 5 litre de potage ; et on procédera ensuite de la même manière pour les autres quantités de la recette.

ainsi de contourner l'usage de l'opérateur décimal (le produit en croix, procédant de même de la même manière, mais en inversant l'ordre d'emploi des deux sous-opérateurs entiers).

³⁶² Dans l'énoncé, toutes les quantités d'ingrédients sont données en grammes, alors même que les quantités totales de potage de la recette de base et de la recette transformée sont données en litres. La volonté des auteurs de l'épreuve d'uniformiser la désignation des quantités est ici manifeste, mais on ne peut éviter de s'interroger sur les questions que peuvent susciter, auprès des apprenties, le fait d'exprimer des capacités par des unités relevant du domaine des poids ou que la somme de ces poids soit ensuite désignées par des unités relevant du domaine des capacités.

³⁶³ Ce rapport de 5/2 peut toutefois être considéré comme proche d'un rapport entier, dans le sens où il permet de transformer les nombres de l'énoncé en les doublant et en y ajoutant leur moitié, du fait que $x \rightarrow 5/2x$ est équivalent à $x \rightarrow 2x + \frac{1}{2}x$; on se rappelle qu'au chapitre 6, cela avait l'expédient choisi par Ca pour effectuer certaines transformations, reprenant les quantités établies pour huit personnes, puis y ajoutant la moitié de celles prévues pour quatre.

La technique qui a été enseignée aux apprenties recourt à un diagramme composé de trois colonnes qui vise à réaliser les transformations de manière systématique.

La technique se situe au niveau des nombres. Chaque colonne correspond à l'une des étapes de la règle de trois. Les opérations à effectuer pour réaliser les opérations sont placées au-dessus et de part d'autre de chaque colonne. Il suffit de placer les nombres désignant les quantités d'ingrédients de la recette de base dans la première colonne, puis d'effectuer les opérations successives pour obtenir les nombres désignant les quantités d'ingrédients de la recette transformée.

Si le diagramme constitue, au niveau des nombres, un tableau de proportionnalité classique, mettant en relation trois ensembles de nombres strictement proportionnels, il n'en va pas de même au niveau des grandeurs mesurées. Les opérateurs qui figurent en tête de colonne désignent en effet les rapports internes de la proportion marquant la transformation de chaque quantité d'ingrédients spécifique (que celle-ci soit une mesure de poids ou de capacité) et ces rapports internes sont uniques ; tandis que les rapports, multiples, qui unissent à l'interne d'une même colonne les quantités qui y sont représentées sont externes, passant d'une sorte d'ingrédients à un autre.

Ainsi le fait de vouloir insérer au sein d'un même diagramme, numérique, les différentes transformations requises par la résolution d'un exercice TQIR inverse la fonction des rapports sur lesquels un tableau de proportionnalité classique repose et rend compte.

3. l'usage d'opérateurs numériques fondés sur les rapports kilos-grammes pour établir des conversions de mesures de poids.

La technique enseignée par le MSP de cuisine pour établir des conversions de mesures passait par la création du tableau (lequel sert de diagramme) que l'on trouve déjà dans le manuel de Roorda en 1917 (cf. annexe du chapitre 3).

Au chapitre 7, on a vu, dans le cadre des épreuves de stage, que ce tableau de conversion faisait déjà l'objet d'un enseignement antérieur à l'école obligatoire, mais que les stagiaires avaient beaucoup de peine à le reconstituer par elles-mêmes, parce qu'elles omettaient certaines abréviations d'unités figurant en tête de colonnes, qu'elles les plaçaient dans un ordre inadéquat, voire qu'elles mélangeaient des abréviations relatives à des domaines de grandeurs différents.

Kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
2		5	0			

Kg	g	cg	dg	mg

Figure n°26 - Tableaux de conversion de mesures de poids réalisés par Tiz et par Mam dans le cadre des cours

Les tentatives (cf. figure n°26) de reconstitution du tableau effectuées par Tiz lors de la séance du 12 janvier 2012 et par Mam durant celle du 26 janvier 2012 en apportent une nouvelle illustration dans le cadre des cours donnés au CFPS : au moment de créer son tableau, Tiz ne se souvenait plus s'il fallait mettre les "hg" avant les "dag" ou l'inverse ; tandis que Mam a produit un tableau comprenant cinq colonnes à partir de la succession des abréviations "kg", "g", "cg", "dg" et "mg".

On peut faire l'hypothèse que ces difficultés à reconstituer les tableaux de conversion de mesures tiennent au moins à trois facteurs :

- en premier lieu, le tableau est un donné qui, pour les apprenties, n'est pas construit sur la base des rapports décimaux qui existent entre unités et sous-unités de mesures d'un même domaine de grandeurs (certaines stagiaires m'ayant notamment confié que les tableaux leur étaient proposés par leur enseignant à chaque fois qu'elles en éprouvaient le besoin) ;
- en deuxième lieu, certaines des sous-unités qui apparaissent dans le tableau ne font pas l'objet d'un usage effectif hors des cours : c'est précisément le cas, par exemple, dans le domaine des poids des abréviations "hg" et "dag", correspondant respectivement à l'hectogramme et au décagramme, qui ne sont pas employés en cuisine (où les deux unités de référence, on l'a vu avec Ca au chapitre 6, sont le kilo et le gramme) ; les apprenties n'ont donc pas d'occasion de les réinvestir ailleurs, ce qui fait qu'elles ont de la peine à s'en souvenir ;
- en troisième lieu, les usages effectifs qui sont faits hors des cours des unités et des sous-unités varient grandement d'un domaine de grandeur à un autre - dans celui des longueurs, par exemple, le "m" et le "cm" qui sont dans un rapport de 100 seront souvent associés, alors que dans celui des poids, ce sera plutôt le "kg" et le "g" qui sont dans un rapport de 1000 ; de même, si le "cm" et le "mm" font l'objet d'un emploi régulier pour mesurer des longueurs, ce sera moins le cas de leur correspondants "cg" et "mg" dans le domaine des poids qui seront le plus souvent négligés ; les régularités d'un tableau de conversion rompent de fait avec les irrégularités d'usages des mesures qui en sont faits.

Ces difficultés m'ont amené à privilégier une autre technique de conversion des mesures de poids que j'ai enseignée aux apprenties durant les séances des 12 et 26 janvier 2012. Il s'agissait plus simplement d'établir un tableau de proportionnalité (qui officie comme diagramme), comprenant deux colonnes, la première comprenant les nombres désignant les quantités en kilos et la seconde les nombres désignant les quantités en grammes. Les abréviations "kg" et "g" figurent en tête de chaque colonne pour marquer que l'on se situait au niveau des grandeurs mesurées. Le rapport externe, qui permet de transformer chaque nombre de la première colonne en leur correspondant de la seconde, est égal au rapport des deux unités de mesures en jeu, à savoir 1000. Il suffisait dès lors de multiplier par 1000 la quantité en kilos de la première colonne pour obtenir, dans la seconde, la quantité en grammes correspondante ou, réciproquement, de diviser par 1000 la quantité en grammes de la seconde colonne pour obtenir dans la première la quantité en kilos correspondante.

La technique enseignée ne permet donc uniquement de transformer en grammes des quantités exprimées en kilos et, réciproquement, de transformer en kilos des quantités exprimées en grammes, mais elle présente en revanche l'avantage de relier les conversions à établir au rapport de 1000 qui lie les deux unités en jeu. Vis-à-vis d'un tableau de conversion classique, elle visait donc à gagner en signification, ce qu'elle perdait en généralité, ce qui, ne semblait pas trop dommageable, vu que les exercices des épreuves d'examens n'impliquaient pratiquement³⁶⁴ que des conversions kilos-grammes ou grammes-kilos.

Les problèmes rencontrés en cuisine et rapportés en cours.

Le tableau n°39 propose la version finale des trois problèmes que les apprenties ont rapportés de la cuisine en cours.

³⁶⁴ A l'exception de quelques cas de conversions litres-décilitres.

Le problème des quiches	Le problème des pâtes	Le problème du plat à gratin
<i>En cuisine, on a préparé 13 quiches pour 80 personnes.</i> <i>On a utilisé une recette pour 10 personnes.</i> <i>Pâte brisée : 0,4 kg Lait : 0,2 l.</i> <i>Oignons : 0,2 kg Crème : 0,1 l.</i> <i>Gruyère : 0,25 kg Œufs : 2 p.</i> <i>Beurre : 0,02 kg Farine : 0,02 kg</i> <i>Sel, poivre, muscade : 1x</i> <i>Comment faut-il s'y prendre pour préparer une quiche pour 2 personnes ?</i>	<i>70 apprenties et 50 g de pâtes par apprentie</i> <i>Quelle quantité de pâtes faudra-t-il cuire ?</i>	<i>100 apprenties et 5 plats à gratin</i> <i>Combien de parts de gratin faut-il découper dans chaque bac ?</i> <i>Comment faut-il s'y prendre pour découper les parts ?</i>

Tableau n°39 - Les trois problèmes de cuisine rapportés en cours par les apprenties

Au premier abord, ces trois problèmes ressemblent beaucoup aux exercices que l'on retrouve dans les épreuves d'examen. Ils s'en démarquent pourtant sensiblement, du fait qu'ils sont déterminés par un bien plus grand nombre de paramètres que ceux qui apparaissent dans l'énoncé et du fait que leur résolution en cuisine passe par des moyens qui ne relèvent pas du seul calcul.

1. le problème des quiches.

Ce problème répondait à une demande de Tiz, désireuse de pouvoir reproduire chez elle, et pour deux personnes, la recette des quiches dont elle avait participé à la réalisation, en cuisine, à destination de l'ensemble des apprenties du CFPS.

L'énoncé du problème³⁶⁵ fait apparaître un élément nouveau qui vient s'ajouter aux données que l'on trouve habituellement dans les exercices TQIR : le nombre de quiches (13) produites est relatif au nombre de plaques³⁶⁶ utilisées pour les fabriquer. Confectionner une quiche pour deux personnes, comme le souhaite Tiz, ne revient donc pas à transformer les quantités d'ingrédients de la recette pour dix à la recette pour deux personnes, mais à déterminer les quantités nécessaires à la constitution d'une plaque qui, chez elle, n'aura certainement pas les mêmes dimensions que celles qui ont été utilisées en cuisine.

La résolution du problème de Tiz passe donc par la détermination d'un élément qui ne figure pas dans l'énoncé : la plaque pour confectionner sa quiche et le nombre de personnes que ses dimensions à leur tour déterminent. Ce nombre de personnes peut par ailleurs être supérieur à deux, ce qui contraindra Tiz soit à s'acheter une nouvelle plaque, adaptée à la réalisation d'une quiche pour deux personnes, soit à s'accommoder du fait qu'il y aura des restes qu'elle pourra terminer le jour d'après...

2. le problème des pâtes.

Ce problème a été proposé par Mam en regard d'une tâche qu'elle avait dû réaliser en cuisine. L'énoncé auquel il a abouti s'apparente en tous points à un exercice d'examen, mais lors de la formulation qui en a été faite en cours sont apparus deux éléments qui en échappent, mais qui participent, néanmoins, à sa résolution.

³⁶⁵ Les quantités exactes d'ingrédients ont été ajoutées après que Tiz soit allée les rechercher en cuisine. On notera aussi que les quantités de sel, de poivre et de muscade, désignées par l'abréviation "1x" (signifiant "une fois"), rompent avec la proportionnalité en jeu dans les autres transformations.

³⁶⁶ La plaque constitue une nouvelle unité qui entre en concurrence avec celle qui est habituellement utilisée dans les exercices du même type pour constituer le corps des quantités d'ingrédients qui définissent la recette, à savoir le nombre de personnes qui est généralement arrêté à 4 ou à 10 (comme dans le cas particulier) ou la quantité du produit final.

Le MSP présent a d'abord dit que la quantité de pâtes par apprentie, arrêtée ici à 50 g, n'était pas toujours la même et qu'elle dépendait du menu dont elle faisait partie (la quantité n'est pas la même s'il s'agit de pâtes comme plat principal ou comme accompagnement).

La détermination de la quantité totale de pâtes à cuire ne se réduit pas, en cuisine, à un seul calcul, puisqu'il faut également en réaliser la pesée sur des balances qui, pour certaines, demandent de soustraire le poids du récipient contenant les pâtes, alors que d'autres permettent de l'intégrer à la pesée.

3. le problème du partage du plat à gratin.

Ce problème a été évoqué par Jad à propos d'une tâche qu'elle avait dû réaliser en cuisine. Il s'agit d'un problème de partage qui n'entre pas dans les quatre domaines d'expérience recensés dans les procédures de qualification.

Si la détermination du nombre de parts par plat de gratin se réalise à l'aide d'une simple³⁶⁷ division ($100 \div 5$ qui donne 20), il n'en sera pas de même du partage effectif des vingt parts. Il faut en effet d'abord tenir compte du fait qu'il y a en principe deux partages possibles - $4 \times 5/5 \times 4$ parts, comme l'a proposé Sa durant la séance, ou $2 \times 10/10 \times 2$ parts - le premier étant plus économique dans le sens où il nécessite sept coups de couteau, alors que le second en appelle dix.

Jad, en cours de séance, montrera également qu'un partage en 3×7 parts (après avoir tenté 3×6 qui échoue), qui demande huit coups de couteaux, s'avère tout aussi opérationnel, puisqu'il permet d'obtenir les vingt parts demandées et d'en conserver une pour le second service.

Face aux essais de découpe réalisés (au stylo sur le rétroprojecteur) par les apprenties, le MSP précisera qu'un autre paramètre est à prendre en compte : la taille des parts doivent toutes être semblables.

Son intervention fait surgir un nouveau problème (qui vient se rajouter au problème initial de partage), consistant à réaliser un partage en n parts égales à l'aide d'un couteau, c'est-à-dire sans passer par la mesure. Or si la chose s'avère relativement aisée lorsque $n = 2$ (partage par la moitié) ou $n = 4$ (partage par la moitié, puis par la moitié de chacune des deux moitiés), elle est bien plus délicate avec $n = 5$, $n = 7$ ou encore $n = 10$.

Les deux problèmes que j'ai amenés en cours pour pallier au fait que les apprenties n'en rapportaient plus de la cuisine ont également permis de mettre à jour des paramètres qui n'apparaissent pas dans leur énoncé.

4. le problème de la fondue bressane et le problème de de la commande du repas pour la journée des parents³⁶⁸.

Le premier problème a permis d'aboutir à une formulation très simple : *quelle quantité de poulet faut-il prévoir pour réaliser une fondue bressane pour 30 personnes ?*

³⁶⁷ Notons que le nombre 100 est déjà le fruit d'une approximation faite pour simplifier la division par 5 (les apprenties présentes au repas n'étant jamais si nombreuses) ; elle a de plus un aspect fonctionnel en cuisine, prévoyant des parts supplémentaires qui pourront être proposées lors d'un second service (cf. les propos Jad juste après).

³⁶⁸ Le problème de la fondue bressane faisait suite à une expérience que nous avons réalisée, ma femme et moi, à l'occasion de l'anniversaire de nos deux filles, où nous avons commandé une quantité de filet de poulet beaucoup trop conséquente par rapport au nombre de personnes invitées : il s'agissait donc de déterminer comment l'on pouvait s'y prendre pour effectuer une commande plus adéquate. Le problème de la commande du repas pour la journée des parents visait lui aussi à considérer comment il était possible de s'y prendre pour effectuer une commande lorsqu'on devait organiser tout un repas pour un grand nombre de personnes (supérieur à 300 dans le cas particulier).

Les échanges auxquels il a donné lieu ont permis d'entrevoir que la quantité de poulet à définir dépendait là encore d'éléments qui ne figuraient pas dans l'énoncé, à savoir tous les accompagnements (apéritifs, sauces, salades, desserts,...) qui avaient été prévus à l'occasion du repas³⁶⁹.

Quant à la formulation du second problème, elle s'est avérée impossible à réaliser.

Le nombre de produits à prendre en compte pour la confection du repas étant trop importante, les apprenties ne parvenaient pas à s'en souvenir.

La discussion sur la façon d'établir la commande de la viande (il s'agissait de rôtis) a été d'ailleurs été menée par le MSP présent en cours, qui a déclaré que l'on passait bien par la multiplication du nombre de personnes par un nombre de grammes par personne pour le faire, mais qu'il fallait également tenir compte de la perte de poids de la viande à la cuisson. Il était également important, lors de la découpe de la viande, d'estimer le poids d'une tranche, de façon à déterminer combien il fallait en découper par rôti.

Cette intervention du MSP a aussi permis d'attester que ces deux tâches - la commande de la viande et l'estimation du poids d'une tranche - n'étaient manifestement pas de la responsabilité des apprenties et qu'elles ne sauraient de fait constituer pour elles des problèmes rencontrés en cuisine.

5. le problème des carottes.

On évoquera encore pour l'anecdote, ce qu'il est advenu du sixième problème rencontré et formulé par Tiz, alors qu'elle était en train de résoudre un exercice CC.

Il s'agissait d'estimer le nombre de carottes nécessaires à l'obtention d'un poids de 5 kg. Les apprenties et le MSP se sont tous prêtés au jeu des prévisions qui oscillaient entre 10 et 50 carottes, à l'exception de Co qui a dit qu'il en fallait 100 et qui s'est fait railler par tout le monde. Or, la validation des prévisions qui a eu lieu un mois plus tard par le MSP en cuisine a abouti au nombre de 101, ce dernier expliquant que les carottes qui lui avaient été apportées par le fournisseur étaient pour une fois particulièrement petites...

Contextualisations et algorithmisations à l'œuvre dans le second semestre de l'année

Les exercices en lien avec les épreuves d'examen.

La nouvelle procédure de qualification en provenance de l'école professionnelle qui a servi de "programme" aux dix séances de cours ayant eu lieu durant le deuxième semestre était composée de six exercices (cf. tableau n°40).

Les exercices se situent tous au niveau des grandeurs mesurées et réfèrent à trois domaines d'expériences distincts : 2 exercices TQIR, 2 exercices CP et deux exercices CC qui sont précisés en tête de chaque fiche : TQIR est désigné par la formule "adapter une recette", CP par "calcul du poids" et CC par "coûts des marchandises".

TQIR	1° Pour un banquet vous avez besoin de crème brûlée. Votre formateur vous donne la recette pour 25 personnes. Ingrédients³⁷⁰ : sucre (312 g), eau (200 g), lait entier (775 g), sucre (113 g), poudre de crème (35 g), jaunes d'œufs pasteurisés (113 g), lait entier (187 g), crème entière (775 g). Combien de grammes de crème pouvez-vous servir par personne ?

³⁶⁹ On relèvera également le bon conseil donné par Jad me disant de veiller à ne pas avoir faim au moment de se rendre à la boucherie pour passer la commande de poulet...

³⁷⁰ La recette donnait deux fois comme ingrédients le sucre et le lait entier en les associant à deux quantités différentes : il s'agit certainement là d'une erreur de traduction, les épreuves étant d'abord rédigées en allemand avant d'être traduites en français.

	2° Pour la préparation de 2,5 litres de potage bâlois, les ingrédients suivants doivent être préparés : Ingrédients : beurre (100 g), oignons épluchés (1200 g), farine blanche (330 g), bouillon (5000 g) vin rouge (340 g), sbrinz râpé (150 g) ; pour assaisonner, sel et poivre blanc du moulin a) Adaptez la recette pour 4 litres. b) 2,5 litres de potage suffisent pour 10 portions. Combien de portions pouvez-vous servir avec 4 litres potages ?																								
CP	3° Vous préparez un mets avec 8,2 kg de courgettes fraîches. Perte à l'épluchage : 2 % Perte au tournage : 25 % Combien de portions à 0,120 kg pouvez-vous servir ?																								
	4° Pour un banquet de 75 personnes, vous avez besoin de 0,150 kg de pommes de terre³⁷¹. Perte à l'épluchage : 22 % Combien de kilogramme de pommes de terre non pelées avez-vous besoin ?																								
CC	5° Pour une portion de gratin de pommes de terre, vous avez besoin de 0,200 kg de pommes de terre épluchées. Perte à l'épluchage : 25 % Prix d'achat pour 1 kg de pommes de terre CHF 1.20 Autres ingrédients pour la préparation de la portion de gratin = CHF 0.60 Calculez le coût des marchandises pour 1 portion de gratin de pommes de terre. 6° Le mélange de légumes est composé des ingrédients et des prix suivants : <table><tr><th>Légumes</th><th>Poids</th><th>Prix d'achat par CHF/kg</th><th>Coût des marchandises</th></tr><tr><td>Carottes</td><td>3,500 kg</td><td>1.80</td><td></td></tr><tr><td>Petits pois</td><td>4,300 kg</td><td>2.30</td><td></td></tr><tr><td>Haricots</td><td>3,800 kg</td><td>3.80</td><td></td></tr><tr><td>Petits oignons</td><td>4,440 kg</td><td>3.50</td><td></td></tr><tr><td>Total du poids</td><td>16,000 kg</td><td>Total du coût des marchandises</td><td></td></tr></table> a) Calculez le poids³⁷² et le coût des marchandises pour ce mélange de légumes. b) A combien s'élève le coût des marchandises pour 1 portion de mélange de légumes à 0,140 kg ?	Légumes	Poids	Prix d'achat par CHF/kg	Coût des marchandises	Carottes	3,500 kg	1.80		Petits pois	4,300 kg	2.30		Haricots	3,800 kg	3.80		Petits oignons	4,440 kg	3.50		Total du poids	16,000 kg	Total du coût des marchandises	
Légumes	Poids	Prix d'achat par CHF/kg	Coût des marchandises																						
Carottes	3,500 kg	1.80																							
Petits pois	4,300 kg	2.30																							
Haricots	3,800 kg	3.80																							
Petits oignons	4,440 kg	3.50																							
Total du poids	16,000 kg	Total du coût des marchandises																							

Tableau n°40 - Les six exercices figurant dans la procédure de qualification de 2010

1. les exercices TQIR :

- le premier exercice figurant sous la désignation "adapter une recette" demande en fait de calculer un poids³⁷³... ; il est de structure de base multiplicative, de type division-partition (DP) à laquelle vient s'ajouter une relation additive de type EEE avec recherche de l'état final comprenant sept états initiaux ; les nombres en jeu sont naturels et décimaux (la division de 2510 par 25 donnant 100,4 comme résultat final) ;
- le deuxième exercice demande bel et bien de transformer les quantités d'ingrédients d'une recette ; il est de structure de base multiplicative/QP, comprenant plusieurs transformations à réaliser ; les nombres sont naturels et décimaux (2,5) et le rapport interne décimal (8/5) ; une question supplémentaire a été jointe à l'énoncé qui préside

³⁷¹ Il manque ici la mention "par personne" qui est sans doute aussi la conséquence d'une erreur de traduction

³⁷² Relevons que la première partie de la question (calcul du poids) est plutôt étonnante, vu que le poids (16,000 kg) figure déjà dans l'énoncé.

³⁷³ La chose, à nouveau surprenante, reste difficile à expliquer. Contrairement aux deux exercices de calcul de poids qui suivent, il n'est par ailleurs fait aucun cas de l'éventuelle perte engendrée lors de la réalisation de la crème ou de la préparation des portions. Cela veut dire que, d'un exercice à l'autre, les évocations prises en compte ne sont pas les mêmes, ce qui aurait, en principe, de quoi interroger des apprenties employées en cuisine. L'énoncé présente en outre une ambiguïté : on parle de nombre de grammes de crème que l'on peut servir par personne, en référant au nombre de grammes de crème brûlée ; or, une apprentie a considéré qu'il s'agissait de la crème entière dont il était question, ce qui l'a conduite à diviser 775 par 25 pour aboutir à 31.

habituellement à ce type d'exercices qui relève d'un nouveau domaine d'expérience : le calcul du nombre de portions ; elle forme un nouvel exercice à résoudre qui est lui aussi de structure de base multiplicative/QP, incluant des nombres naturels et décimaux (2,5) et un rapport interne décimal (8/5) ;

2. les exercices CP :

- le premier exercice est de structure de base additive, de type ET-E, avec recherche de l'état final, demandant de réaliser deux transformations successives ; les deux transformations à réaliser étant données en %, ce sont deux relations multiplicatives/QP qui viennent s'associer à la structure de base ; l'exercice demandant encore de rechercher le nombre de portions de 0,120 kg qu'il est possible de servir, c'est une relation multiplicative/DP supplémentaire qui y est encore associée ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels et décimaux ;
- le deuxième exercice est de structure de base additive, de type ET-E avec recherche de l'état initial ; l'état final n'étant pas directement disponible dans l'énoncé, il s'agit d'abord de l'établir, ce qui ajoute une première relation multiplicative/M à l'exercice ; la transformation à réaliser étant donnée en %, c'est une relation multiplicative/QP qui vient s'associer à la structure de base, dans laquelle il faut prêter garde au fait d'attribuer les 100% à l'état initial qui est inconnu et non à l'état final qui a été déterminé³⁷⁴ ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels, décimaux et rationnels ;

3. les exercices CC :

- le premier exercice est de structure de base additive, de type ET-E, avec recherche de l'état initial ; la transformation à réaliser étant donnée en %, c'est une relation multiplicative/QP qui vient s'associer à la structure de base ; le fait qu'il faille rechercher l'état initial nécessite à nouveau (comme dans l'exercice précédent) de lui attribuer les 100% et non à l'état final (égal à 0,200 kg) ; une fois l'état initial découvert, il s'agit ensuite de calculer son coût ce qui ajoute une relation multiplicative/M à l'exercice ; enfin, la prise en compte du "coût des autres ingrédients" implique l'adjonction d'une relation de type EEE avec recherche de l'état final ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels, décimaux rationnels (dans le cas des 75 % qui correspondent à 0,200 kg) ;
- le second exercice, qui est donné sous la forme d'un tableau, est de structure de base multiplicative/M ; il comprend cinq multiplications à réaliser ; une question supplémentaire a été jointe qui relève d'un nouveau domaine d'expérience : le calcul du prix d'une portion ; elle détermine un nouvel exercice de structure de base multiplicative/DP ; les nombres et les rapports en jeu sont naturels et décimaux³⁷⁵.

L'analyse conceptuelle des six exercices figurant dans la nouvelle épreuve d'examen montre qu'à l'exception du premier, leur complexité cognitive s'est singulièrement accrue, impliquant pour trois d'entre eux des calculs de pourcentage qu'aucune

³⁷⁴ La question a été discutée dans l'annexe du chapitre 3 dans la partie consacrée aux pourcentages, où l'on a pu montrer avec Rouche que la soustraction d'un certain pourcentage à une grandeur mesurée n'est pas l'opération réciproque de l'ajout du même pourcentage. Dans le cas particulier, cela signifie qu'on ne peut ajouter 22 % à la quantité de 11,25 kg (qui correspond à la quantité de pommes de terre épluchées) prise comme 100 % pour trouver la quantité de pommes de terre non pelées (ce qui donne 13,725 kg), mais qu'il est au contraire nécessaire de considérer la quantité de 11,25 kg comme les 78 % de la quantité de pommes de terre non pelées (ce qui donne ~14,423 kg).

³⁷⁵ On remarque dans l'énoncé des deux derniers exercices que les prix sont donnés par des nombres décimaux dont les parties entière et décimale sont séparées par un point et que la partie décimale comporte deux chiffres, alors que les poids sont rendus par des nombres décimaux dont les parties entière et décimale sont séparées par une virgule et que la partie décimale comporte trois chiffres. Cela signifie que l'usage des grandeurs mesurées fait en cuisine a des incidences directes sur la façon dont on "écrit" les nombres décimaux dans l'énoncé des exercices de cours ; cet usage n'est pourtant pas systématique dans l'épreuve, puisqu'une quantité entière de kilos peut tout aussi bien être représentée par un nombre naturel (comme 5000 dans l'exercice 2) suivi de l'abréviation "g", que par un nombre à virgule (comme 16,000 dans l'exercice 6) suivi de l'abréviation "kg".

apprentissage ne maîtrisait³⁷⁶ et nécessitant dorénavant d'associer plus de deux techniques à leur résolution.

Cet accroissement manifeste de la complexité cognitive des exercices laisse évidemment perplexe sur les intentions des auteurs qui, de la sorte, les rendent encore un peu moins accessibles aux apprenties ; la seule hypothèse plausible³⁷⁷ permettant de l'expliquer tenant au fait de vouloir à tout prix rapprocher les exercices de la formation AFP de ceux que l'on trouve dans la formation CFC.

A l'enseignant en charge de leur enseigner des mathématiques pour les résoudre, il pose à nouveau et de surcroît la délicate question du choix des techniques pouvant leur être raisonnablement proposées et dont elles puissent être à même de s'emparer.

Les techniques enseignées pour résoudre les exercices des épreuves d'examen.

Afin de montrer aux apprenties comment il était possible de résoudre les exercices impliquant des calculs de pourcentage figurant dans l'épreuve, trois techniques spécifiques leur ont été présentées³⁷⁸, de façon à ce qu'elles puissent s'essayer à les employer.

La première technique a pris comme support l'exercice 3 de l'épreuve qui demande, à partir d'une quantité initiale (on parle de poids brut) de 8,2 kg de courgettes, de calculer leur poids final (on parle de poids net) après deux pertes consécutives de 2 % et de 25 %, la première suite à leur épluchage et la seconde consécutive à leur tournage. Elle consiste à recourir à la calculette et à l'usage successif des touches $/2/\%/-/25/\%$ qui donne directement le résultat escompté.

En vue de réussir un exercice de ce type lors de l'épreuve d'examen, elle semblait, avec l'usage exclusif de la soustraction qu'elle implique, la plus proche de l'idée de perte contenue dans l'énoncé³⁷⁹ et la plus simple à réaliser en termes de calculs à effectuer (la calculette prenant en charge l'entier du calcul du pour cent).

Cependant, si cette première technique permet de résoudre n'importe quel exercice où le poids brut d'un produit et la/les pertes signifiées en pour cent sont donnés, elle est en revanche mise à défaut dans le cas inverse - comme dans les exercices 4 et 5 - où ce sont le poids net du produit et la/les pertes signifiées en pour cent qui sont connus et où il s'agit de retrouver son poids brut. Si l'on tente en effet, dans le cas de l'exercice 4, de partir du poids net (11,25 kg) et d'utiliser successivement les touches $/1/1/,/2/5/+/2/2/\%$ pour déterminer le poids brut, on obtient le résultat de 13,275 qui est erroné (78 % de 13,275 ne donne pas 11,25, mais un résultat sensiblement inférieur : 10,7055).

Ce sont donc les techniques de la "règle de trois" et du "produit en croix" qui ont été proposées aux apprenties pour résoudre ce type d'exercices, en prenant comme support un diagramme qui distingue en abscisse les quantités exprimées en kilos de celles exprimées en pour cent et en ordonnée les pommes de terre non-pelées des pommes de terre épluchées.

³⁷⁶ Lou, qui l'apprentie à avoir révélé le plus de savoirs mathématiques tout au long des séances, a voulu effectuer seule, dans un local à part, les six exercices de l'épreuve. A l'exercice n°3, elle calculera les pertes successives de 2 % et de 25 % en soustrayant 2, puis 25 à la quantité de 8200 (g) de départ pour aboutir à 8173 et renoncera à résoudre les exercices 4 et 5, en disant : qu'elle ne « sait plus faire les pour cent » et qu'elle souhaite les « répéter » avec moi.

³⁷⁷ L'hypothèse repose notamment sur le fait que, dans nombreux corps de métiers, la formation de type AFP constitue une voie d'accès à une formation de type CFC permettant d'y entrer directement en deuxième année ; ce lien entre les deux types de formation tend ainsi irrémédiablement à faire dépendre les contenus de la première à ceux de la seconde.

³⁷⁸ L'usage du terme "présenté" en lieu et place du terme "enseigné" marque le fait que l'on est passé d'un enseignement de type didactique organisé à un enseignement de type didactique improvisé : dans les conditions où les cours se déroulaient - une séance d'une heure hebdomadaire, assortie de la nécessité de proposer de nouvelles épreuves d'évaluation notées, etc. - il était entièrement exclu d'envisager un enseignement qui aurait pris les "pour cent" comme objet d'enseignement.

³⁷⁹ On peut rappeler ici que, selon Rouche (2006), la soustraction : « est d'abord une opération en soi, sans rapport avec l'addition : elle traduit l'idée d'enlever une quantité à une autre » (p.9).

La figure n°27 montre le fonctionnement du diagramme pour résoudre l'exercice 4.

Le 11,25 désigne la quantité totale de pommes de terre épluchées qui a dû être calculée au préalable ($75 \times 0,150$) et le 78 sa représentation en % qui a dû aussi faire l'objet d'un calcul antérieur ($100 - 22$). Le 100, quant à lui, signifie la quantité en % de pommes de terre non-pelées.

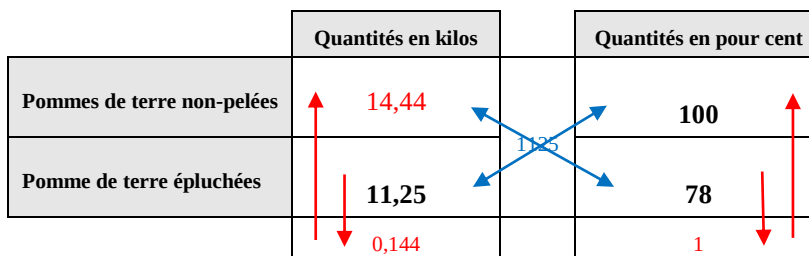


Figure n°27 - Diagramme support à l'usage de la règle de trois/du produit en croix dans un calcul de pour cent

1. la règle de trois (en rouge).

Sachant que 11,25 kg correspond à 78 % de la quantité de pommes de terre non-pelées, la règle de trois demande de calculer d'abord le 1 % de cette quantité en divisant 11,25 par 78, ce qui donne $\sim 0,144$, puis de trouver les 100 % en multipliant par 100 les 0,144 pour aboutir à 14,4.

2. le produit en croix (en bleu).

Le produit en croix, qui s'appuie sur la proportion $x/11,25 = 100/78$ demande de multiplier 11,25 par 100, ce qui donne 1125, puis de trouver x en divisant 1125 par 78, ce qui donne $\sim 14,4$.

La comparaison des deux techniques qui reposent sur deux propriétés différentes montre qu'elles opèrent toutes deux à un niveau numérique, produisant à chaque fois un nombre - 0,144 dans le cas de la règle de trois et 1125 dans celui du produit croisé - qui ne représente pas une quantité de pommes de terre (non pelées ou épluchées) effective. C'est donc à ce niveau, numérique, que s'établit le contrôle de l'ordre des opérations à effectuer - qui est ici pris en charge par le diagramme - lequel s'inverse entre les deux techniques, la division précédant la multiplication dans la première, alors que c'est la multiplication qui précède la division dans la seconde³⁸⁰.

La description de ces techniques ne préjuge pas bien entendu de tout ce qui sera nécessaire à leur éventuelle appropriation et à leur contrôle de la part des apprenties. A l'image de ce qu'avait tenté l'enseignant de Ca au chapitre 6 (qui avait lui aussi cherché à enseigner le produit croisé aux apprentis de sa classe pour effectuer des calculs de coût), on pourrait imaginer une forme de marche à suivre détaillant, pour chaque exercice, les pas à suivre pour constituer au préalable les nombres qu'il s'agira d'entrer dans le diagramme, indiquer l'endroit exact où les placer et faire usage d'un système de flèches pour faire fonctionner la technique proposée et aboutir au résultat attendu.

Ce serait toutefois faire fi des propos de Conne (1997) qui affirme que l'apprentissage d'un calcul assisté par un diagramme ne relève pas d'une genèse, mais bien de l'exploration d'un système d'explications d'une part et d'un système de règles d'autre part dans la confrontation avec des situations de calcul particulières. Cette exploration demandant du temps, les conditions qui prévalaient au déroulement du cours n'en donnaient pas ou en tous les cas pas suffisamment.

³⁸⁰ On peut rappeler à ce propos les multiples hésitations de Ca dans le chapitre 6 concernant l'ordre des opérations à effectuer lorsqu'elle tentait d'opérer, sans recours à un diagramme, directement sur la calculette.

Or, c'est pourtant bien cette idée de successions de pas qu'il suffirait de suivre qui semble rendre possible la pérennisation d'exercices de complexité si importante dans la formation des apprenties employées de cuisine AFP. La "feuille d'aide" constituée tout récemment par Gastro suisse (2014) à l'attention des formations AFP procède de la même illusion.

L'extrait³⁸¹ qui en est donné à la figure n° 28 présente tout à la fois les deux techniques³⁸² qui sont envisagées pour résoudre des exercices demandant le calcul d'un poids brut à partir d'un poids net et de deux pertes successives exprimées en pour cent, les diagrammes qui servent de support à leur réalisation et le déroulement pas à pas selon lequel il s'agit de procéder.

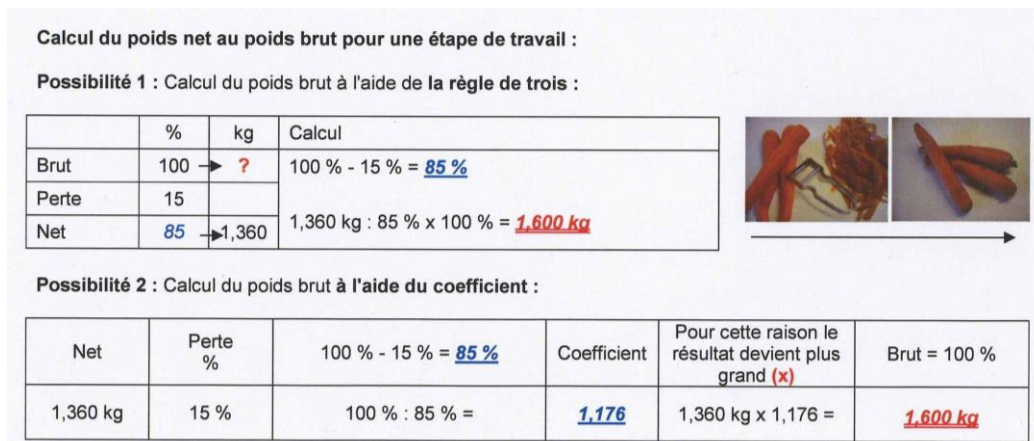


Figure n°28 - Extrait de la "feuille d'aide" donnée aux apprenties employée de cuisine AFP pour leur examen

³⁸¹ Il s'agit, partant d'un poids net de 1,360 kg de carottes épluchées (selon la photo), de déterminer le poids de brut sachant que la perte est égale à 15 %. Le titre précise que les techniques fonctionnent pour « une étape de travail », ce qui veut dire qu'on ne considère le cas d'une seule transformation, et donc d'une seule perte apportée au produit brut : le cas de « deux étapes de travail » correspondant à deux transformations/pertes (épluchage et découpage en dés) successives est décrit au verso de la feuille.

La première technique est intitulée "règle de trois", alors qu'il s'agit en fait d'un "produit en croix" (il n'y a pas de réduction à l'unité). Le diagramme comporte en abscisse la distinction % et kg et en ordonnée la distinction poids brut, perte, poids net. Il demande d'abord d'entrer les données connues : nombres 100 (100 %), 15 (perte de 15 %) et 1,360 (poids net en kg) dans le diagramme ; puis de déterminer (par soustraction) le poids net en % et d'y inscrire le nombre correspondant (85) ; enfin d'exécuter le produit en croix sous forme de $1,360\text{ kg} : 85\% \times 100\%$ qui permet, en principe, d'aboutir au résultat escompté. Les abréviations d'unités (kg et %) qui sont sans doute laissées dans le calcul pour montrer à quoi les nombres réfèrent portent par ailleurs à de grandes confusions si l'on fait usage de la touche % sur la calculette : $1,360 : 85\% \times 100\%$ = donne 2,56 et non pas 1,6.

La seconde technique est intitulée "à l'aide du coefficient". Elle demande de déterminer un opérateur permettant d'établir directement, par multiplication, le poids brut à partir du poids net. L'opérateur s'obtient par division de 100 % par 85 % (dans chaque calcul, l'usage de la touche % sur la calculette est à nouveau susceptible de créer une confusion). Le diagramme est linéaire. Il demande d'entrer les données connues : nombres 1,360 (accompagné de l'abréviation kg) et 15 (accompagné de l'abréviation %) ; il s'agit ensuite d'effectuer deux calculs : $100\% - 15\%$ pour obtenir 85 %, puis $100\% : 85\%$ = pour obtenir le coefficient de 1,176 (qui est un résultat approché, le résultat étant rationnel) ; enfin on multiplie le poids net par le coefficient : $1,360\text{ kg} \times 1,176$ = qui donne, en principe ($1,360 \times 1,176$ donne 1,59936 et pas 1,600), le résultat escompté.

Dans l'avant-dernière case du diagramme, apparaît de plus un élément tout à fait singulier qui cherche à justifier le recours à la multiplication pour obtenir un résultat plus grand. La présence de cet élément est due au fait que la technique "à l'aide du coefficient" appliquée à la recherche du poids net à partir du poids brut et de la perte qui figure juste auparavant sur la feuille implique au contraire le recours à la division et dont l'emploi est justifié par le fait qu'elle permet d'obtenir un nombre plus petit ! La présence, à l'intérieur d'un diagramme, d'une explication visant à justifier l'opération que l'on doit y effectuer est déjà assez insolite en soi, mais l'emploi qui est fait de la multiplication comme opération qui augmente (et de la division comme opération qui réduit) les nombres sur lesquels elle porte pour légitimer leur usage est encore plus invraisemblable, quand on sait que ces deux représentations constituent précisément un obstacle (Brousseau, 1980b) à leur fonctionnement dans l'ensemble des rationnels.

³⁸² La deuxième technique "à l'aide du coefficient" provient du texte de Kaiser (2015) : « Le calcul/les mathématiques en situation professionnelle : apports théoriques ». Destinée à des apprentis en formation CFC, elle constitue, selon l'auteur, un *outil situé* permettant de résoudre des situations pratiques, évitant, par l'usage d'une liste de multiples, les fastidieux calculs de pourcentages. La transposition qui en est faite ici pour des apprentis en formation AFP, qui la met en rapport avec le calcul de pourcentages, fait que l'intention de départ est totalement manquée. Elle illustre néanmoins le lien de subordination de la formation AFP à la formation CFC venant étayer l'hypothèse effectuée plus haut.

INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : TRANSFORMER LES QUANTITÉS D'INGRÉDIENTS D'UNE RECETTE

A la suite de l'examen des investissements de savoirs relatifs aux cours donnés aux apprenties, l'analyse des interactions de connaissances va d'abord porter sur celles qui ont pris pour objet la résolution des exercices TQIR à l'aide de la règle de trois.

Transformer les quantités d'ingrédients d'une recette : les procédés employés par les apprenties lors des séances de cours de septembre à décembre 2011

L'analyse des productions récoltées dans les séances de cours de septembre à décembre 2011 vise à rendre compte des procédés que les apprenties emploient pour résoudre des exercices TQIR et à montrer en quoi la technique de la règle de trois enseignée en cours est/n'est pas utilisée pour le faire.

Les séances de cours des 22 septembre, 6 octobre et 17 novembre 2011

Séance du 22 septembre.

L'exercice TQIR soumis aux apprenties lors de la séance de cours du 22 septembre (cf. figure n°29) est de structure de base multiplicative/QP, comprenant des nombres naturels inférieurs à 1000 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique décimale ($2 \times 2,5 = 5$).

Exercice 1 3 pts/

À l'occasion de la fête de l'été, vous préparez pour les invités **5 litres** de potage froid au melon et à la mangue. Dans le manuel, vous trouvez la recette suivante:

Ingrédients pour 2 litres:

Eau	700 g	Sucre	125 g
Zeste de citron	10 g	Fécule de maïs	15 g
Jus de citron	50 g	Melon (pulpe de fruit)	450 g
Mangue (pulpe de fruit)	350 g	Vin blanc	100 g
Crème entière	200 g	Citronnelle	15 g

Exercice:

Calculez les ingrédients nécessaires pour **5 litres** de potage froid au melon et à la mangue:

Espace pour les calculs et les notes :

Eau	$700 \text{ g} \times 5 = 3500 \text{ g}$	Sucre	$125 \text{ g} \times 5 = 625$
Zeste de citron	$10 \text{ g} \times 5 = 50 \text{ g}$	Fécule de maïs	$15 \text{ g} \times 5 = 75 \text{ g}$
Jus de citron	$50 \text{ g} \times 5 = 250 \text{ g}$	Melon (pulpe de fruit)	$450 \text{ g} \times 5 = 2250 \text{ g}$
Mangue	$350 \text{ g} \times 5 = 1750 \text{ g}$	Vin blanc	$100 \text{ g} \times 5 = 500 \text{ g}$
Crème entière	$200 \text{ g} \times 5 = 1000 \text{ g}$	Citronnelle	$15 \text{ g} \times 5 = 75 \text{ g}$

Solution: Ingrédients pour **5 litres** de potage froid au melon et à la mangue:

Eau	3500 g	Sucre	625 g
Zeste de citron	50 g	Fécule de maïs	75 g
Jus de citron	250 g	Melon (pulpe de fruit)	2250 g
Mangue (pulpe de fruit)	1750 g	Vin blanc	500 g
Crème entière	1000 g	Citronnelle	75 g

Report 3 pts/

Report 3 pts/

Figure n°29 - L'exercice TQIR résolu par Tiz le 22.09.11

4 apprenties ont recouru à la règle de trois pour résoudre l'exercice :

- Co et Sa ont divisé par 2 chaque quantité d'ingrédients figurant dans l'énoncé, puis ont multiplié par 5 le quotient de chaque division ; tous les résultats obtenus sont corrects ;
- Jad et Lou ont également divisé par 2 chaque quantité d'ingrédients figurant dans l'énoncé, puis ont multiplié par 5 le quotient chaque division ; tous les résultats sont corrects sauf un : pour la fécule, Lou a écrit $15 \div 2 = 7,5$, puis $7,5 \times 5 = 35'025$; alors que pour le sucre, Jad a écrit $125 \div 2 = 62,5$, puis $62,5 \times 5 = 3'125$.

Chez Lou, le résultat de 35'025 auquel elle aboutit, provient sans doute du produit de 7005 x 5 qui a été accompli en lieu et place du $7,5 \times 5$ qui était attendu ($15 \div 2 = 7,5$; $7,5 \times 5 = 37,5$). Il est bien sûr délicat d'interpréter cette utilisation de 7005 (est-ce que 7,5 a été lu "sept kilos cinq", puis tipé /7/0/0/5/ pour "sept mille grammes et cinq grammes" ?) au vu des données figurant dans l'énoncé, mais ce qu'on remarque c'est que l'erreur n'a pas été détectée par Lou, puisqu'elle a inscrit le résultat dans le tableau des solutions figurant sur sa fiche. Or, la chose a de quoi surprendre, non seulement au vu de la taille du nombre obtenu, mais également parce qu'il diffère largement du résultat auquel elle est parvenue pour la citronnelle (37,5 qui est correct) établi à partir du même nombre de départ (15).

Chez Jad, le résultat de 3'125 (au lieu de 312,5) advient probablement d'une omission de virgule (625×5 , au lieu de $62,5 \times 5$), dont elle ne s'est pas rendu compte en effectuant ses calculs. A la différence de Lou, Jad a toutefois pris conscience du fait que 3'125 était incorrect au moment de devoir retranscrire 3'125 dans le tableau des solutions, interrompant la retranscription des autres résultats qu'elle avait découverts, en disant que cela ne servait à rien d'aller plus loin, puisqu'elle s'était trompée.

La réaction de Jad montre que, tout comme Ca dans le chapitre 6, elle exerce une forme de contrôle (dont on ne connaît pas ici l'origine) sur le résultat produit par l'exécution de la règle de trois ; ce qui n'est pas le cas de Lou qui, malgré les éléments du milieu qui permettent de lui faire remarquer que son résultat est aberrant, parvient à néanmoins s'en satisfaire.

2 apprenties n'ont eu recours qu'à une partie de la règle de trois pour résoudre l'exercice :

- Jac a divisé chaque quantité d'ingrédients figurant dans l'énoncé par 2, alors que Tiz (cf. figure n°29) les a toutes multipliées par 5.

Les deux apprenties n'ont donc utilisé qu'une seule des deux opérations requises pour effectuer les transformations et les résultats obtenus n'ont pas été invalidés.

1 apprentie n'a rien écrit sur sa fiche, même si elle a pourtant affirmé avoir cherché à résoudre l'exercice.

Il est donc manifeste qu'un enseignement préalable³⁸³ de la règle de trois pour résoudre des exercices TQIR a bel et bien eu lieu et que ce dernier a eu des effets, puisque 6 apprenties sur 7 sont parvenues à en faire usage, entièrement ou partiellement, et de façon systématique (i.e. à toutes les quantités d'ingrédients et indépendamment des nombres qui les représentent³⁸⁴), lors de la résolution de ce premier exercice.

³⁸³ La réaction d'une apprentie à l'entame de la résolution, affirmant qu'elle avait déjà résolu cet exercice et la réponse du MSP qui lui a dit que ce n'était pas exactement le même montre que l'on est bel et bien dans un contrat de reprise.

³⁸⁴ On se souvient que ce n'était pas toujours le cas pour Ca au chapitre 6 où l'usage d'un procédé pouvait varier selon les nombres en jeu.

Aucun procédé de substitution - comme, par exemple, le fait de multiplier chaque quantité par 2,5 - n'est en revanche apparu

Séance du 6 octobre.

Dans la séance du 6 octobre, le travail visant à comparer 6 procédés de résolution de l'exercice (dont 3 avaient été employés par les apprenties dans la séance précédente) :

- division par 2
- division par 2, suivie de multiplication par 5
- multiplication par 5
- multiplication par 5, suivie de division par 2
- division par 5, suivie de multiplication par 2
- multiplication par 2,5

n'a pas permis d'atteindre les objectifs escomptés qui étaient d'une part d'exclure les trois procédés inadaptés et d'autre part de considérer l'équivalence des trois autres.

Dans le groupe de Tiz et Sa (placé sous l'égide de l'enseignante spécialisée qui se chargeait de la traduction en langue des signes pour Sa), chaque procédé a été envisagé tour à tour, mais ils n'ont pas donné lieu à une véritable comparaison pour déterminer ce que, du point de vue des nombres et des opérations, ils pouvaient avoir de commun ou au contraire différaient : retenir la multiplication par 2,5 comme procédé adéquat tenait au fait qu'elle aboutissait aux mêmes résultats que la division par 2, suivie de la multiplication par 5 et non pas, parce qu'une éventuelle relation liait la multiplication par 2,5 à la division par 2, suivie de la multiplication par 5.

Dans le groupe de Co, Jac et Lou, le travail s'est arrêté à l'identification d'un seul procédé fonctionnel - soit la division par 2, suivie de la multiplication par 5 - qui était celui employée par Co et Lou lors de la séance précédente : les autres n'ont pas été explorés.

Dans le groupe de Jad et Mam, les apprenties ne sont pas parvenues à travailler ensemble, même si toutes deux ont opté pour la division par 5, suivie de la multiplication par 2. Dans les deux cas, la chose a d'ailleurs été plutôt surprenante :

- chez Mam, parce qu'au lieu d'effectuer la comparaison des procédés, elle s'est appliquée à utiliser celui qu'elle avait choisi, en l'appliquant de manière systématique, pour résoudre l'exercice qu'elle n'avait pu appréhender la fois dernière;
- chez Jad (qui avait pourtant utilisé correctement la règle de trois la fois dernière), parce que tout en se révélant capable d'exprimer qu'il s'agissait de rechercher les quantités correspondant à un litre de potage, elle proposait néanmoins de commencer à diviser chaque quantité par 5, avant de multiplier les résultats obtenus par 2.

Séance du 17 novembre.

La reprise de la comparaison effectuée de manière collective lors de la séance du 17 novembre n'a pas fait beaucoup mieux.

Les apprenties ont commencé par protester du fait que l'exercice avait déjà été résolu.

Le contrat de reprise fait que l'exercice ayant déjà été traité à deux reprises, il n'y avait donc pas lieu d'y revenir ; alors que l'enseignant, de son côté, y accordait encore un enjeu : l'institutionnalisation d'une technique pour résoudre les exercices TQIR.

Le travail de comparaison s'est d'abord réduit à la désignation du procédé qui demandait de diviser par 2, avant de multiplier par 5. Grâce à la contre-proposition formulée par Mam, un examen des autres procédés a malgré tout pu avoir lieu.

Mam a en effet affirmé qu'il valait mieux commencer en multipliant par 5 avant de diviser par 2, ce qui a permis de constater que les résultats étaient identiques.

L'argument est manifestement de nature didactique, édictant que la multiplication "doit" précéder la division. C'est lui qui engage un début d'exploration des procédés, qui va montrer le contraire, à savoir que, dans ce cas particulier, l'ordre ne compte pas (du fait de la commutativité des deux opérateurs).

La division par 2 et la multiplication par 5 ont ensuite été directement écartés par les apprenties. La division par 5, suivie de multiplication par 2 l'a été aussi, dès lors que le premier résultat produit s'est avéré différent de celui qui avait été établi par les deux précédents procédés : $(700 \div 5) \times 2$ a donné 280 et non pas 1750, comme $(700 \div 2) \times 5$ ou $(700 \times 5) \div 2$.

Le fait que la multiplication par 2,5 convenait également a surpris plusieurs apprenties, mais aucune d'elles ne pourra en donner la raison qui sera en fin de compte fournie par le MSP.

La composée des deux opérateurs $\times 5$ et $\div 2$ qui repose sur la relation numérique $5 \div 2 = 2,5$ n'était donc pas disponible chez elles.

La séance de cours du 1^{er} décembre 2011

L'épreuve d'évaluation proposée aux apprenties le 1^{er} décembre 2011 comportait trois exercices TQIR.

1^{er} exercice TQIR.

Le premier exercice de l'épreuve (cf. tableau n°41) est de structure de base multiplicative/QP, comprenant des nombres naturels inférieurs à 100 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique naturelle ($4 \times 3 = 12$).

Le tableau n°41 recense l'ensemble des réponses apportées par les apprenties à cet exercice.

1. Pour préparer un cocktail pour une soirée karaoké, vous disposez de la recette suivante : Cocktail tropical (4 personnes) 2 verres de jus de pamplemousse 6 verres de jus d'abricot 2 cuillères à café de sirop de grenadine Bien mélanger le tout et servir très frais Vous attendez 12 participants à cette soirée. Quelle quantité de jus de pamplemousse, de jus d'abricot et de sirop de grenadine devez-vous prévoir pour réussir votre cocktail ?			
Appr.	Jus de pamplemousse	Jus d'abricot	Sirop de grenadine
Co	6 verres	18 verres	6 verres
Jad	24 cuillères	18 verres	24 cuillères
Jac	14	18	14
Lou	6 verres	18 verres	9 cuillères
Mam	4 verres	12 verres	4 cuillères à café
Sa	6 verres	18 verres	6 cuillères
Tiz	6	18	6 c.c

Tableau n°41 - Résultats donnés par les apprenties à l'exercice n°1 de l'épreuve d'évaluation

3 apprenties - Co, Sa et Tiz - ont utilisé un procédé (les productions récoltées ne permettent pas de dire lequel) qui leur ont permis d'obtenir trois résultats corrects (6 - 18 - 6).

Le fait que Co ait écrit "6 verres" au lieu de "6 cuillères" pour la quantité transformée de sirop de grenadine donne à penser qu'elle s'est épargné la transformation des cuillères à café, en reprenant le résultat découvert pour le jus de pamplemousse.

1 apprentie - Lou - a utilisé un procédé lui permettant d'aboutir à seulement deux résultats corrects (6 et 18).

Dans le cas des cuillères à café de grenadine, elle a sans doute transformé un 3, plutôt qu'un 2, ce qui lui a donné 9 comme résultat au lieu de 6.

2 apprenties - Jad et Jac - n'ont obtenu qu'un seul résultat correct (18).

Pour Jad (qui avait utilisé adéquatement la règle de trois pour résoudre l'exercice TQIR du potage en septembre), les résultats de 24, 18, et 24 qu'elle a trouvés laissent supposer qu'elle a tenté d'en faire un nouvel usage : les deux 24 seraient ainsi le produit de $(4 \div 2) \times 12$ et 18, celui de $(6 \div 4) \times 12 =$. L'inversion des deux termes de la division, dans le cas du 24 proviendrait du fait qu'elle ait voulu faire en sorte de commencer par le plus grand nombre.

Cette règle, *d'origine didactique* (Brousseau, 1983), sera mise en œuvre et formulée plus avant par Mam dans la séance du 5 janvier 2011.

De son côté, Jac a visiblement recouru à un procédé additif (on le retrouvera dans les trois exercices de l'épreuve), par ajout de 12 à chaque nombre représentant les quantités de la recette de base, pour obtenir successivement les résultats de 14, 18 et encore 14.

La chose a évidemment de quoi de surprendre si l'on se rappelle qu'en septembre, dans l'exercice TQIR du potage, elle avait procédé par division de chaque quantité de la recette de base par 2.

1 apprentie - Mam - n'a obtenu aucun résultat correct.

Dans le cas de Mam, les résultats 4, 12 et 4 montrent que c'est à la multiplication par 2 qu'elle a eu recours : l'inscription "4 x 2 la recette pour 12 personnes" qui figure au verso de sa fiche vient d'ailleurs l'attester.

L'origine du facteur 2 pourrait provenir de ce que Mam, partant de 4 (le nombre de personnes de la recette de base), ait cherché à itérer ce nombre pour obtenir 12 (le nombre de personnes de la recette) et, qu'ayant pu le faire deux fois (4 ; 8, 12), elle ait repris ce nombre 2 pour effectuer les transformations

La relation $4 \times 3 = 12$ n'étant pas disponible, elle aurait ainsi cherché à la déterminer de façon à pouvoir faire usage du rapport interne pour obtenir les quantités transformées.

2^{ème} exercice TQIR.

Le deuxième exercice de l'épreuve (cf. tableau n°42) se décline en deux recettes différentes qui comprennent chacune une seule quantité d'ingrédient à transformer.

L'exercice 3.a est de structure de base multiplicative/QP, comprenant des nombres naturels inférieurs à 1000 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique naturelle³⁸⁵ ($10 \div 2 = 5$). L'exercice 3.b est de structure de base multiplicative/QP,

³⁸⁵ La relation est naturelle seulement si l'on consent à faire usage de la division ; avec la multiplication, la relation est décimale, puisque $10 \times 1/5 = 2$.

comprenant des nombres naturels inférieurs à 1000 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique rationnelle³⁸⁶ ($6 \times 4/6 = 4$).

Le tableau n°42 recense l'ensemble des réponses apportées par les apprenties à cet exercice.

3.a Pour préparer une quiche pour 10 personnes, il faut prévoir 400 grammes de pâte brisée. Quelle quantité de pâte brisée faut-il prévoir pour 2 personnes ?		3.b Pour faire une fondue, il faut compter 1200 grammes de fromage pour 6 personnes. Quelle quantité de fromage faut-il compter pour 4 personnes ?	
Ca	80 gr		800 gr
Jad	0,05 g		800 g
Jac	398		1196
Lou	80 gr		800 gr
Mam	20		---
Sa	80		800
Tiz	80 g		800 g

Tableau n°42 - Résultats donnés par les apprenties à l'exercice n°3 de l'épreuve d'évaluation

4 apprenties - Co, Lou, Sa et Tiz - ont utilisé un procédé qui leur ont permis d'obtenir deux résultats corrects (80 - 800).

1 apprentie - Jad - a trouvé un seul résultat correct.

Les résultats 0,05 g et de 800 g semblent à nouveau consécutifs l'usage de la règle de trois, mais, contrairement à ce qui est advenu dans l'exercice précédent, ce n'est pas cette fois la taille des nombres en jeu qui président à l'ordre dans lesquels Jad les utilise, mais l'ordre selon lequel ils apparaissent dans l'énoncé de l'exercice.

Ainsi, dans l'exercice 3a, le fait que 10 soit suivi de 400 qui est à son tour suivi de 2 a pu lui faire calculer $(10 \div 400) \times 2$ qui donne 0,05, tandis que dans l'exercice 3b, c'est le fait que 1200 soit suivi de 6 qui est à son tour suivi de 4 qui lui a fait calculer $(1200 \div 6 \times 4)$ et qui aboutit à 800.

La manière de procéder de Jad fait beaucoup penser ici à celle de Ca dans le chapitre 6 quand celle-ci s'employait, en situation d'interaction cognitive, à faire usage des formules apprises en cours.

2 apprenties - Jac et Mam - n'ont obtenu aucun résultat correct.

Jac a poursuivi dans une perspective additive, en soustrayant les nombres de personnes de la recette transformée (2 et 4) aux nombres représentant les quantités d'ingrédients de la recette de base (400 et 1200) pour obtenir respectivement 398 et 1196.

Le troc de l'addition par la soustraction est probablement lié au fait qu'il s'agit, dans les deux cas, de réduire les quantités d'ingrédients à prévoir (puisque le nombre de personnes de la recette transformée est inférieur à celui de la recette de base).

Les traces laissées par Mam au verso de sa feuille - " $400 \div 2 = 200 \times 10 = 20$ " pour l'exercice 3a et " $1200 \div 4 = 300$ " pour l'exercice 3b - portent à supposer qu'elle ait voulu cette fois-ci recourir à la règle de trois pour résoudre les deux exercices. Cependant, il est aussi possible de penser que c'est le fait d'avoir à réduire la quantité

³⁸⁶ Pour les apprenties qui ne maîtrisent pas l'usage des rationnels, le recours à la règle de trois s'avère incontournable, sauf si l'on passe par le rapport externe qui lie 6 personnes à 1200 grammes qui est fondé sur une relation numérique naturelle $6 \times 200 = 1200$. Rappelons toutefois, qu'au niveau des grandeurs mesurées, celui-ci implique l'usage d'un opérateur accompagné d'une unité-quotient : des grammes par personne.

Cela voudrait dire que, comme chez Jac, le fait de passer d'un accroissement à une réduction vient modifier l'opération - une addition pour une soustraction, respectivement une multiplication pour une division - à effectuer ; alors que l'usage de la règle de trois est, quant à elle, insensible à cette variation dans les exercices TQIR : on démarre d'abord par la division, même quand le nombre de personnes ou les quantités du produit à réaliser augmentent.

Le troisième exercice de l'épreuve (cf. tableau n°43) est de structure de base multiplicative/QP, comprenant des nombres naturels inférieurs à 100 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique décimale³⁸⁷ ($4 \times 15/4 = 15$).

4. Dans un livre, on trouve la recette suivante :

Fabrication de la pâte à crêpes (4 personnes)

6 œufs	20 grammes de beurre
10 cuillères à soupe de farine	16 grammes de sucre ordinaire
8 verres de lait	6 cuillères à café de sucre vanillé

Cherchez les quantités d'œufs, de farine, de lait, de beurre, de sucre ordinaire et de sucre vanillé qu'il faut pour préparer des crêpes pour 15 personnes.

Tableau n°43 - Résultats donnés par les apprenties à l'exercice n°4 de l'épreuve d'évaluation

Dans le tableau, on voit par ailleurs que Jad a utilisé de manière systématique l'abréviation "g" pour toutes les quantités qui relèvent des mesures de poids (seules les quantités d'œufs qui s'envisagent par pièces et les quantités de lait qui relèvent des mesures de capacité font exception), alors que Co a eu recours à l'abréviation "lt" dans le cas du lait pour désigner des litres.

Jac a continué dans une perspective additive, en additionnant le nombre de personnes de la recette de base (15) à chacun des nombres représentant les quantités d'ingrédients de cette même recette³⁸⁹ pour aboutir respectivement à 25, 21, 23, 35, 31 et 21.

³⁸⁹ Il faut tenir compte du fait que les deux premières réponses ont été interverties.

L'addition a été à nouveau préférée à la soustraction et il est bien certain, maintenant que c'est pour répondre au fait que le nombre de personnes et donc les quantités augmentent.

Mam a repris la multiplication (par 4) qu'elle a appliquée (excepté dans le cas des œufs) à chacun des nombres représentant les quantités d'ingrédients de la recette de base pour aboutir à 40, 32, 80, 64 et 24.

Le choix du facteur 4 peut évidemment provenir du nombre de personnes de la recette de base figurant dans l'énoncé, mais il est aussi possible de penser qu'il a été établi par Mam, en cherchant la relation unissant le nombre de personnes de la recette de base (4) et celui de la recette transformée (15) qui est "presque" de 4. Comme chez Jac, la multiplication a probablement été préférée à la soustraction du fait que le nombre de personnes (et donc les quantités) augmentent.

La séance de cours du 22 décembre 2011

La correction de l'épreuve d'évaluation qui s'est déroulée, de façon collective, durant la séance de cours du 22 décembre 2011 a apporté deux exemples de cas où l'usage de la règle de trois pour résoudre un exercice TQIR se faisait supplanter par l'usage direct du rapport interne.

Les deux événements surviennent en situation d'interaction de connaissances, qui, comme cela avait été le cas pour Ca au chapitre 6, semble ouvrir à l'usage d'autres procédés.

1^{er} événement.

Le premier événement est apparu lors de la correction de l'exercice n°1 (cf. tableau n°40).

Lou a expliqué aux autres apprenties que, comme la recette de cocktail était donnée pour 4 personnes et qu'il fallait déterminer des quantités pour 12 personnes, il suffisait de multiplier les quantités d'ingrédients de la recette de base par 3 pour obtenir quantités de recette transformée³⁹⁰.

La disponibilité d'une relation numérique - $4 \times 3 = 12$ - faisait que la règle de trois (que Lou a reprise correctement plus avant dans la séance), était "préférée" à un procédé plus efficace, car plus direct (une opération au lieu de deux) et ne faisant appel qu'à des nombres naturels.

L'explication apportée par Lou n'a toutefois pas convaincu la plupart de ses collègues (il s'agissait aussi bien des apprenties, comme Co et Tiz, qui avaient trouvé une réponse correcte à l'exercice, que Jac qui n'y était pas parvenue) qui lui ont demandé d'où pouvait bien provenir ce "mystérieux" trois.

La relation $4 \times 3 = 12$ n'était pas disponible pour elles, d'où l'impossibilité manifeste de s'approprier le procédé emprunté par Lou.

Les tentatives ultérieures de nouvelles explications données successivement par :

- Lou, qui se rend au tableau pour dessiner trois grands ronds représentant trois tables et quatre petits ronds autour de chaque table représentant des personnes,
- l'enseignant, qui, cherchant à s'appuyer sur le dessin de Lou, montre que la nouvelle recette étant "pour quatre et quatre et quatre personnes », c'est de ces "trois quatre" que provient le 3 de Lou,

³⁹⁰ Et c'est ici qu'elle s'aperçoit qu'elle s'est trompée sur sa fiche, ayant trouvé 9 au lieu de 6 pour le nombre de cuillères à café de sirop de grenadine.

- l'enseignante spécialisée (présente pour Sa), qui intervient soudain dans le cours de la séance, pour suggérer d'utiliser des cartes afin de mieux "visualiser" ce 3,
- l'enseignant encore, qui recourt au dessin de 3 "shakers" pour y placer les nombres 2, 6, 2 et le faire apparaître

n'y changeront pas grand-chose.

La relation $4 \times 3 = 12$ demeure inaccessible aux apprenties, ce qui montre la vanité des explications, aussi diverses soit elles, qui ont été avancées sur le vif pour tenter de "concrétiser", que ce soit à l'aide de mots, de dessins ou d'objets, une relation numérique indisponible.

2^{ème} événement.

Le second événement est apparu lors de la correction de l'exercice n°3a (cf. tableau n°41).

Contre toute attente en effet - elle avait trouvé 0,05 g comme réponse lors de l'épreuve d'évaluation, Jad a suggéré de diviser les 400 g de pâte brisée par 5 pour passer de la recette pour 10 à la recette pour 2 personnes.

La situation d'interactions de connaissances ouvre à la mise en œuvre d'un autre procédé qui n'était pas apparu en situation d'interaction cognitive, quand Jad se retrouvait seule aux prises avec l'épreuve d'évaluation.

C'est la disponibilité d'une relation numérique - $10 \div 5 = 2$ - liant les nombres de personnes des deux recettes qui rend possible l'évitement de la règle de trois au profit de cet autre procédé.

Et comme précédemment dans le cas de Lou, les autres apprenties du groupe ne parviennent pas à s'en saisir.

L'origine du 2 ne sera toutefois pas questionnée, du fait que Lou a proposé d'utiliser la règle de trois comme technique de résolution alternative qu'elle explicitera en déclarant avoir divisé par 10 les 400 grammes de pâte brisée pour chercher ce qu'il fallait compter pour une personne, puis en ayant multiplié par 2 le résultat obtenu pour parvenir aux 80 grammes de la recette pour 2 personnes.

3^{ème} événement.

Un troisième événement survenu durant cette séance mérite encore d'être relaté.

Au moment où l'enseignant s'est apprêté à reprendre à son compte la règle de trois énoncée par Lou pour la traduire sous la forme d'un diagramme au tableau, Mam est intervenue pour déclarer que la division de 10 par 10 donnait 0 et non pas 1.

Ici, c'est la disponibilité d'une relation numérique erronée qui vient contrecarrer l'usage de la règle de trois.

Or si, dans les deux cas précédents, ce sont des relations numériques disponibles chez une apprentie qui permette d'en contourner l'emploi, on voit que l'usage même de la règle de trois nécessite de pouvoir s'appuyer sur d'autres relations numériques spécifiques qui soient disponibles chez les apprenties, à savoir que $10 \div 10 = 1$ dans le cas présent.

Et plus généralement, quand l'enseignant s'est essayé, en fin de séance, à déclarer aux apprenties que le grand avantage de la technique énoncée par Lou résidait dans ce qu'elle permettait, après avoir déterminé la quantité d'ingrédients pour une personne, de déterminer, grâce à la multiplication, les quantités nécessaires pour quinze, vingt, trente ou autant de personnes que l'on

souhaitait, c'est à des propriétés algébriques, relatives à la structure opératoire de N qu'il fait appel, à savoir que, quels que soient n et m appartenant à N , $n \div n = 1$ et $1 \times m = m$ sont toujours vraies. Il n'est donc pas certain que les apprenties soient parvenues à s'en convaincre.

Transformer les quantités d'ingrédients d'une recette : l'analyse d'une séance consacrée à l'enseignement de la règle de trois

L'analyse des interactions qui suit vise à caractériser la dynamique d'une séance³⁹¹ consacrée à l'enseignement de la règle de trois pour résoudre des exercices TQIR. Il s'agit de montrer comment l'activité du couple enseignant-enseigné s'y développe à partir des *prises* et des *pertes de contrôle* successives qui s'y déroulent (Conne, 2003). L'analyse porte tout à la fois sur ce qui advient en amont de la séance (lors de sa préparation) qu'en cours de celle-ci (durant les interactions).

Prises de contrôle en amont de la séance de cours

Les prises de contrôle réalisées en amont de la séance visent à anticiper son déroulement pour déterminer a priori ce qu'en principe elle devra être et baliser ainsi le développement de l'activité du couple enseignant-enseigné.

a) 1^{ère} prise de contrôle : prise en compte des éléments de mémoire didactique.

Le fait que l'on se trouve dans une séance d'appui indique clairement que le cadre de séance est celui d'un *contrat de reprise* (Brousseau, 1995 ; Bloch & Salin, 2004), puisqu'il s'agit de reconduire un enseignement de la règle de trois que les deux apprenties n'ont pas encore réussi à s'approprier pour résoudre des exercices TQIR.

Une différence importante apparaît entre la position qui était celle du couple enseignant-enseigné en septembre 2011 et la position qui est maintenant la sienne, du fait qu'il s'est constitué une histoire commune au fil des sept séances de cours qui ont précédé.

Cette histoire, compilée au travers des narrations rédigées au terme de chaque séance, et relatant notamment les exercices qui ont été résolus et les procédés utilisés par les deux apprenties pour le faire, constituent désormais une *mémoire didactique* (Brousseau & Centeno, 1991) à partir de laquelle l'enseignant peut élaborer son enseignement.

Cette mémoire agit donc comme une première prise de contrôle sur le déroulement de la séance, dans le sens où elle va pouvoir être mise à contribution pour organiser sa préparation.

Ainsi, l'enseignant sait que, dans les quatre exercices TQIR qui leur ont été proposés, les deux apprenties ne sont jamais parvenues, malgré l'enseignement donné, à faire usage d'une règle de trois de façon appropriée :

- dans l'exercice proposé en septembre, Jac avait divisé chaque quantité d'ingrédients par le nombre de personnes de la recette de base, alors que Mam n'avait rien écrit sur sa feuille ;
- dans l'épreuve d'évaluation du mois de décembre Jac avait additionné ou soustrait - selon que les quantités devaient augmenter ou diminuer - le nombre de personnes

³⁹¹ C'est la séance d'appui du 5 janvier 2012 qui a été choisie, parce qu'elle comportait un objet d'enseignement clairement identifié : la règle de trois pour résoudre des exercices TQIR et qu'elle était destinée à deux apprenties - Jac et Mam - qui n'en avait pas la maîtrise (c'est l'épreuve d'évaluation réalisée au mois de décembre qui l'avait révélé). L'enjeu didactique y est donc important, tant pour l'enseignant qui souhaite que les deux apprenties parviennent à s'approprier cet objet, que pour les deux apprenties qui, jusqu'ici, ont échoué à pouvoir le faire.

C'est donc tout à la fois à partir et contre ces procédés que le nouvel enseignement va être appelé à devoir s'accomplir.

La deuxième prise de contrôle qui opère en amont de la séance réside dans le choix de la technique et des exercices (et donc des variables qui les caractérisent) qui serviront de support l'enseignement.

En ce qui concerne la technique, c'est la règle de trois qui sera proposée selon la forme sous laquelle elle avait été donnée aux apprenties en novembre (cf. figure n°25), mais en complétant le diagramme avec des en-têtes de colonnes : recette pour x personnes - recette pour 1 personne - recette pour y personnes (avec x désignant le nombre de personnes de la recette de base et y le nombre de personnes de la recette transformée).

Les exercices 1 et 3 de l'épreuve d'évaluation (cf. tableaux n°40 et 41), ainsi que deux autres exercices TQIR ont été mis en réserve pour permettre aux apprenties, une fois l'enseignement dispensé, de reconduire l'application de la règle de trois à leur rencontre.

1. Exposé de l'objectif de la séance : parvenir à effectuer des exercices de transformation de quantités d'ingrédients d'une recette
2. Relecture de l'exercice n°4 de l'épreuve de l'évaluation et élaboration par les apprenties d'un procédé de résolution
3. Enseignement de la règle de trois avec le diagramme prévu comme support

Cherchez les quantités d'œufs, de farine, de lait, de beurre, de sucre ordinaire et de sucre vanillé qu'il faut pour préparer des crêpes pour 15 personnes.

4. Copie de du diagramme par les apprenties
5. Application de la règle de trois par les apprenties sur d'autres exercices TQIR

Pertes et prises de contrôle durant la séance de cours

Les prises et pertes de contrôle identifiées durant de la séance visent à rendre compte de son déroulement effectif au travers du développement de l'activité du couple enseignant-enseigné.

a) 1^{ère} prise de contrôle : un début de séance conforme au scénario prévu.

Le début de la séance s'est déroulé selon le scénario prévu. Tour à tour, l'enseignant a :

- noté au tableau le thème de la séance ;
- précisé que pour résoudre un exercice TQIR, il s'agissait, dans la plupart des cas, de partir d'une recette prévue pour un certain nombre de personnes et de l'adapter pour un autre nombre de personnes ;
- fait lecture de l'énoncé de l'exercice 4 de l'épreuve d'évaluation (après avoir remis les fiches comprenant l'énoncé aux apprenties) ;
- inscrit au tableau les mentions - "recette pour 4 personnes" et "recette pour 15 personnes" - que les apprenties sont bien parvenues à identifier ;
- et demandé comme on pouvait s'y prendre pour effectuer la transformation de la quantité d'œufs.

Le début de la séance est donc entièrement sous son contrôle.

b) 1^{ère} perte de contrôle : les apprenties ne reprennent pas les procédés attendus.

Jac a proposé de "faire six fois quatre" pour transformer la quantité d'œufs.

Mam a d'abord tenté de "faire fois deux" (en partant du 6 correspondant à la quantité d'œufs) pour aboutir à 12, qu'elle a réfuté, en disant que "ce n'était pas assez" ; puis, elle a "fait fois trois" (toujours en partant du 6), pour parvenir à 18, qu'elle a également refusé en affirmant que "c'était trop", juste avant de se raviser en disant : "non, je crois que ça va" ; enfin, elle a poursuivi la résolution de l'exercice en transformant la quantité de farine, "faisant trois fois dix" pour obtenir 30.

Jac lui a alors répondu que 30, "cela faisait beaucoup".

La première perte de contrôle qui advient dans la séance provient du fait que les deux apprenties ne reprennent pas les procédés attendus, soit ceux qu'elles avaient utilisés dans les séances précédentes.

Ainsi, Jac n'a pas fait usage de l'addition/soustraction du nombre de personnes de la recette de base (4) qu'elle avait utilisée dans l'épreuve d'évaluation en décembre et n'a pas non plus reconduit la division par ce même nombre de personnes, comme elle l'avait fait lors de la résolution du premier exercice TQIR en septembre : elle a cette fois-ci choisi d'utiliser la multiplication par le nombre de personnes de la recette de base pour effectuer la transformation de la quantité d'œufs.

De son côté, Mam a bien à nouveau cherché à établir une relation numérique pour transformer les quantités de la recette de base à l'aide de la multiplication, mais elle ne l'a pas fait entre le nombre de personnes de la recette de base (4) et celui de la recette transformée (15), mais entre le nombre représentant la quantité d'œufs (6) et le nombre de personnes de la recette transformée (15).

Par ailleurs, le facteur 3 auquel elle a abouti a d'abord été rejeté, avant d'être validé et utilisé pour procéder à la transformation du deuxième ingrédient de la recette (3×10), dont le résultat (30) sera à son tour invalidé par Jac.

La validation du facteur 3 par Mam, tout comme l'invalidation du résultat 30 par Jac font penser à ce qui était déjà advenu au chapitre 6 pour Ca quand, à partir d'une estimation à vue, elle avait réduit un résultat qui ne convenait pas pour le rendre mieux compatible à ses prévisions ; une façon de procéder que l'on avait déjà pu rapporter à un geste qui a parfois cours en cuisine. Dans le cas présent, il semble en effet que ce soit aussi sur la base d'une estimation du même ordre que Mam (cela ira quand même) et que Jac (cela fait un peu trop) en viennent à fonder leur jugement.

c) 2^{ème} prise et deuxième perte de contrôle : l'enseignant formule ce qu'il a interprété de ce que les apprenties ont proposé, mais ces dernières évoquent d'autres alternatives.

L'enseignant s'est essayé à dire aux apprenties qu'il avait saisi qu'elles avaient toutes deux eu recours à la multiplication, puisqu'il s'agissait d'augmenter la quantité d'ingrédients de la recette de base.

Pourtant, Jac a répondu qu'il était aussi parfois possible de "faire des divisés", en donnant l'exemple de $15 \div 6$ et Mam a déclaré qu'au lieu de la multiplication, on pouvait aussi employer l'addition.

L'intervention de Jac donne à penser qu'elle ne savait précisément pas quand choisir une opération plutôt qu'une autre, alors que l'addition évoquée par Mam correspondait bien aux tentatives d'itération qu'elle avait précédemment accomplies pour définir la relation numérique permettant d'effectuer les transformations attendues.

L'interprétation faite à chaud par l'enseignant se voit ainsi nuancée par les propos des apprenties qui montrent que le choix du procédé à utiliser reste peu sous leur contrôle.

d) 3^{ème} prise de contrôle : l'enseignant expose la technique qu'il compte enseigner aux apprenties.

L'enseignant a présenté la règle de trois aux apprenties en indiquant que celle-ci passait par une étape intermédiaire entre la recette pour quatre personnes et la recette pour quinze personnes : la recette pour une personne. Dans le même temps, il a inscrit au tableau les en-têtes du diagramme : "recette pour 4 personnes", "recette pour 1 personne" et "recette pour 15 personnes".

Mam est intervenue pour dire qu'on lui avait déjà montré cette technique, ce qui a permis à l'enseignant de poursuivre, en affirmant que lorsque l'on connaît la quantité pour une personne, il est possible, à l'aide de la multiplication, d'obtenir la quantité pour n'importe quel nombre de personnes.

Le contrôle est repris par l'enseignant.

L'intervention de Mam l'enjoint à une généralisation de la technique enseignée, avant même que celle-ci ait pu être appliquée à l'exercice en cours.

On peut toutefois penser que ce sont les apprenties qui se retrouvent ici en perte de contrôle, puisque la généralisation effectuée suppose la maîtrise de la propriété algébrique voulant que quel que soit n appartenant à $\mathbb{N}$, $1 \times n = n$.

e) 3^{ème} perte de contrôle : la relation $4 \div 4 = 1$ n'est pas disponible chez les apprenties.

Au moment où l'enseignant a demandé aux apprenties comment il était possible de passer de la recette pour 4 à la recette pour 1 personne, Jac a proposé d'utiliser la division (sans toutefois préciser laquelle), mais Mam a avancé qu'il était aussi possible de recourir à la soustraction.

Ne sachant dès lors comment s'y prendre pour discriminer les deux opérations (et faire opter pour la première), l'enseignant a imposé la division, en la justifiant par l'idée de partage, qu'il a cherché à illustrer au tableau par l'évocation d'un partage en quatre d'une quantité d'œufs et d'une pizza.

La relation numérique $4 \div 4 = 1$ n'étant pas disponible chez les deux apprenties, l'enseignant a donc procédé par une double tentative de "concrétisation" visant à en rendre compte.

On se retrouve ici dans un cas de figure semblable à celui qui était advenu lors de la séance du 22 décembre 2011, quand il s'était agi de concrétiser la relation $4 \times 3 = 12$ servant de support au procédé employé par Lou, ce qui était resté sans effet.

La suggestion de Mam, au cours des explications données par l'enseignant, qui demande de diviser 4 par 1 pour parvenir à 4 (au lieu de diviser 4 par 4 pour aboutir à 1) apporte une nouvelle illustration de l'inanité de cette façon de faire, entraînant les deux apprenties dans une nouvelle perte de contrôle.

d) 4^{ème} prise de contrôle : l'enseignant complète le diagramme servant de support à l'exécution de la règle de trois.

La séance s'est poursuivie par l'inscription au tableau des opérateurs [$\div 4$] et [$\times 15$] à l'intersection des mentions "recette pour 4 personnes" et "recette pour 1 personne" et "recette pour 1 personne" et "recette pour 15 personnes" du diagramme et des six nombres représentant les quantités d'ingrédients de la recette pour 4 personnes (cf. figure n°30).

L'enseignant en a profité pour expliquer qu'il en allait de façon similaire - il suffisait de remplacer les opérateurs [$\div 4$] et [$\times 15$] par les opérateurs [$\div 10$] et [$\times 80$] - si l'on voulait effectuer la transformation d'une recette prévue pour dix personnes en une recette pour huitante personnes³⁹³ et pour montrer encore une fois qu'il en allait de même pour n'importe quel nombre de personnes (ce qui a permis d'ajouter les inscriptions "recette pour x personnes" et "recette pour y personnes" en tête de colonne).

Recette pour x personnes	Recette pour 1 personne	Recette pour y personnes
Recette pour 4 personnes ³⁹⁴		Recette pour 15 personnes
	$\div 4$	$\times 15$
6 o		
10 c		
8 v		
20 g		
16 g		
6 c		

Figure n°30 - Diagramme support à l'usage de la règle de trois dans l'exercice 4 de l'épreuve d'évaluation

Si le contrôle a été repris par l'enseignant, les deux essais de généralisation de la technique qu'il effectue aboutissent là encore très certainement à une perte de contrôle de la part des apprenties du fait que les relations numériques et les propriétés qu'elles impliquent n'étaient manifestement pas maîtrisées.

³⁹³ Le choix de 10 était lié aux recettes que l'on trouve dans un livre utilisé en cuisine par les apprenties et celui de 80 parce qu'il pouvait correspondre à celui dont on devait tenir quand il s'agissait de préparer un repas au CFPS.

³⁹⁴ Les nombres sont accompagnés des abréviations d'unités des quantités qu'ils représentent : la chose n'était pas prévue dans la préparation, mais elle est apparue dans le cours de la séance.

f) 4^{ème} perte de contrôle : une règle d'origine didactique intervient dans le placement des nombres dans la division.

Avec l'appui du diagramme et la calculette à disposition, les deux apprenties ont en principe tout en main pour réaliser les transformations attendues et aboutir aux bons résultats.

Au moment d'effectuer le premier calcul, Jac a toutefois demandé s'il fallait faire $6 \div 4 =$ ou $4 \div 6 =$; et Mam lui a répondu que c'était $6 \div 4 =$ parce que lorsqu'on divisait, il fallait mettre le plus grand nombre devant.

L'intervention de Jac laisse penser qu'elle savait que la division ne pouvait être effectuée dans n'importe quel ordre.

La réponse donnée par Mam révèle qu'il en était de même pour elle, mais qu'elle disposait d'une règle à laquelle se raccrocher pour le déterminer.

Cette règle, d'origine didactique, avait déjà pu être inférée des productions de Jad lors de la résolution de l'exercice n°1 de l'épreuve d'évaluation.

Son apparition inattendue a conduit l'enseignant à faire éprouver (pour le confirmer) aux deux apprenties le fait que les résultats des deux divisions $/6 \div 4 =$ et $/4 \div 6 =$ obtenus sur la calculette étaient bel et bien différents ; puis, à leur expliquer que, dans le cas particulier, c'était la première qu'il fallait choisir, non pas parce que 6 était plus grand que 4, mais bien parce que 6 correspondait à la quantité d'œufs que l'on devait transformer.

Cette intervention n'a eu aucun effet chez Mam qui, comme on le verra plus loin, s'en est tenue à l'application de la même règle au cours de l'exercice qui lui a été donné à résoudre en fin de séance.

g) 5^{ème} perte de contrôle : un nombre décimal ne peut représenter la quantité qu'il désigne.

Durant le remplissage du diagramme, Jac a manifesté son étonnement devant le résultat de 22,5, représentant la quantité d'œufs pour 15 personnes.

Il semblait difficile pour elle de considérer qu'un nombre décimal puisse représenter une grandeur - que peut bien signifier "0,5" en terme d'œufs ? - à laquelle il était censé correspondre.

Une contradiction apparaît donc ici entre le niveau des nombres (décimaux) et celui des grandeurs mesurées (Rouche, 2006).

L'enseignant s'en est "tiré" par une forme de pirouette, en disant à Jac qu'il ne devait pas être pratique de partager des œufs en cuisine et qu'il n'y avait qu'en cours que l'on en venait à imaginer des "trucs pareils".

Une pirouette qui ne correspond certainement pas à la réalité de la cuisine, où si l'on obtient, par calcul, un nombre décimal représentant la quantité transformée, il faudra l'accommoder, dans le cas de la réalisation effective de la recette, en optant soit pour 22, soit pour 23 œufs.

h) 6^{ème} perte de contrôle : deux opérations sont nécessaires pour accomplir une seule transformation.

Au cours du remplissage du diagramme, Mam a fait part d'un autre étonnement, quand, après avoir accompli les six divisions par 4 des quantités de la recette de base, elle s'est rendu compte qu'elle devait encore multiplier chaque résultat obtenu par 15 pour trouver les quantités de la recette transformée.

Il semblait pour qu'elle une seule opération devait suffire, ce qui se comprend fort bien si l'on se rappelle des diverses tentatives qu'elle avait précédemment accomplies pour rechercher la relation numérique manquante à l'usage direct du rapport interne.

Grâce à l'interprétation qu'il en a faite, l'enseignant a pu lui montrer que cette opération unique existait bel et bien, mais qu'il fallait passer pour le faire, par l'usage d'un opérateur décimal ($\times 3,75$), quotient de la division $15 \div 4$.

i) 5^{ème} prise de contrôle : l'enseignant propose aux apprenties deux nouveaux exercices TQIR à résoudre.

Une fois que toutes les transformations ont été réalisées, l'enseignant a invité les deux apprenties à reproduire la technique enseignée pour résoudre, par elles-mêmes, deux autres exercices TQIR, ce qu'elles ont accepté de faire.

Le premier était l'exercice n°1 de l'épreuve d'évaluation³⁹⁵ qu'elles ont eu le temps de résoudre durant la séance (cf. figure n°31) et le second, un exercice³⁹⁶ qu'elles ont emporté comme devoir.

Le contrôle est à nouveau entre les mains de l'enseignant, ce qui lui permet de conclure la séance selon le scénario prévu en amont.

h) 7^{ème} et ultime perte de contrôle : la règle d'origine didactique refait surface dans le placement des nombres dans la division.

Les productions de Jac et Mam de la figure n°31 montrent que les deux apprenties sont parvenues à reproduire le diagramme et faire fonctionner la technique pour résoudre l'exercice 1 de l'épreuve d'évaluation.

Dans celle de Mam, la division de 2 par 4 a toutefois été dans un premier temps inversée au profit de la division de 4 par 2 (les résultats 2 et 24 ont été tracés, après l'intervention de l'enseignant, et remplacés respectivement par 0,5 et par 6).

La règle d'origine didactique dictant l'ordre des nombres dans l'effectuation d'une division refait donc surface, ce qui implique le part de l'enseignant une correction assortie d'une nouvelle explication.

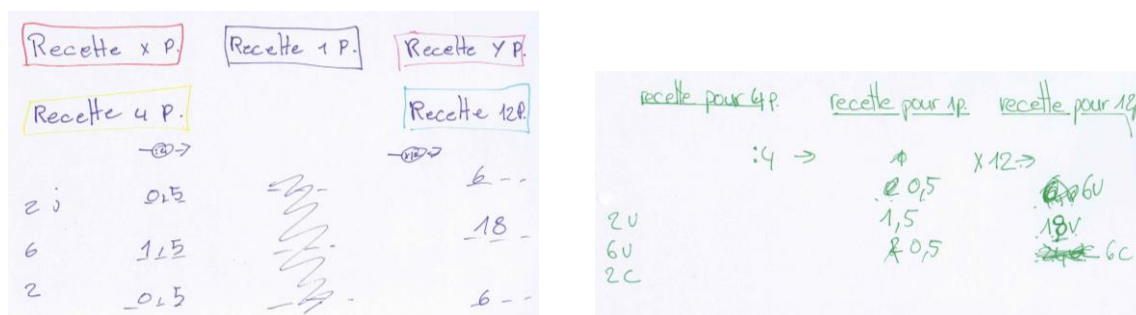


Figure n°31 - Exercice TQIR résolu par Jac et par Mam le 5.01.12

³⁹⁵ Pour rappel, l'exercice 4 de l'épreuve d'évaluation était le suivant :

1. Pour préparer un cocktail pour une soirée karaoké, vous disposez de la recette suivante :

Cocktail tropical (4 personnes)

2 verres de jus de pamplemousse

6 verres de jus d'abricot

2 cuillères à café de sirop de grenadine

Bien mélanger le tout et servir très frais

Vous attendez 12 participants à cette soirée. Quelle quantité de jus de pamplemousse, de jus d'abricot et de sirop de grenadine devez-vous prévoir pour réussir votre cocktail ?

³⁹⁶ Il s'agissait de l'exercice qui a été ultérieurement traité dans la séance du 19 janvier 2011 (cf. figure n°33)

Résoudre des exercices TQIR avec la règle de trois : le parcours de trois apprenties durant l'année 2011-2012

L'analyse des productions de trois apprenties³⁹⁷ issues des exercices TQIR qu'elles ont eu à résoudre durant l'ensemble des séances de cours de l'année 2011-2012 vise à montrer comment, sur une période plus longue, elles parviennent à s'emparer de la règle de trois qui leur a été enseignée en cours pour le faire³⁹⁸.

Le parcours stable de Co durant l'année 2011-2012

Le parcours de Co peut être qualifié de stable du fait que cette apprentie a fait un usage régulier et contrôlé de la règle de trois, indépendamment des variables constitutives des exercices TQIR qu'elle a dû résoudre.

Dès le premier exercice soumis aux apprenties dans la séance du 22 septembre 2011, Co a recouru à la règle de trois pour effectuer les dix transformations d'ingrédients à réaliser. L'inscription "pour un litre" figurant sur sa fiche et les calculs qui l'accompagnaient montre qu'elle a d'abord réduit à un litre, en les divisant par 2, les quantités d'ingrédients de la recette pour deux litres de potage, avant de multiplier chaque résultat par 5 et trouver les quantités pour cinq litres. Durant la séance du 6 octobre 2011, elle s'est jointe à l'avis de Lou qui a choisi, parmi les six procédés à comparer, la règle de trois pour résoudre le même exercice. Dans la séance du 17 novembre 2011, elle a également fait partie des apprenties qui l'ont élue comme technique à retenir pour résoudre n'importe quel exercice TQIR.

Au cours de l'épreuve d'évaluation du 1^{er} décembre 2011, elle a été l'une des deux trois apprenties qui a obtenu toutes les réponses correctes aux trois exercices TQIR qui s'y trouvaient et il est très vraisemblable que ce soit en recourant à la règle de trois qu'elle y est parvenue. Lors de la séance du 19 janvier 2012, Co a fait de même pour résoudre deux nouveaux exercices TQIR, m'interpelant même à deux reprises, durant la mise en commun qui s'en est suivie, pour m'inviter à corriger une erreur qu'elle avait repérée au tableau. Cela a encore été le cas dans l'épreuve d'évaluation du 29 mars 2012, où elle a à nouveau trouvé les six bons résultats au seul exercice TQIR qui y figurait. Et ce n'est que dans le dernier exercice figurant dans l'ultime épreuve d'évaluation de l'année, en date du 3 mai 2012, que la règle de trois ne lui a pas permis d'obtenir les résultats attendus (cf. figure n°32).

L'exercice est de structure de base multiplicative/QP, comprenant des nombres naturels et décimaux inférieurs à 100 et impliquant un rapport fondé sur une relation numérique rationnelle ($1,3 \times 30/13 = 3$).

Empruntant la règle de trois, Co a commencé par diviser de façon systématique chaque quantité de la recette de base par 1,3.

Du fait de la spécificité des nombres en jeu (le diviseur égal à 1,3 et les dividendes non-multiples de 13), les résultats produits sur la calculatrice comportaient tous une partie décimale qui ne se terminaient pas. Co s'est donc appliquée à "arrondir" les nombres obtenus en procédant de la manière suivante :

- lorsque le quotient obtenu était supérieur à 1 (autrement dit quand sa partie entière était différente de zéro), Co, à deux reprises (dans le cas du sucre et de la poudre à crème vanille), n'a retenu que la partie entière du nombre (153 et 30) ; tandis qu'à

³⁹⁷ Le choix des apprenties provient du fait que leur parcours respectif tout au long des séances est fort contrasté : Co a fait un usage régulier de la règle de trois dès la première séance de cours en septembre ; Jac s'en est progressivement approprié l'usage et le contrôle ; tandis que Jad y a eu recours de façon plus incertaine.

³⁹⁸ Sur l'ensemble de l'année 2011-2012, Co et Jad ont résolu neuf exercices TQIR, en majorité dans le cadre d'épreuves d'évaluation ; de son côté, Jac en a accompli une douze, du fait qu'elle a participé, le 2 février 2012, à une épreuve d'évaluation de rattrapage qui en comportait trois et à laquelle Co et Jad n'ont pas pris part.

deux autres reprises (dans le cas des jaunes d'œufs en vrac et de la gélatine), elle en a conservé la partie entière et la première décimale (169,2 et 11,5) ;

- lorsque le quotient obtenu était inférieur à 1 (autrement dit quand sa partie entière était égale à zéro), Co a extrait le ou les deux premiers chiffres différents de zéro de la partie décimale pour en faire un nombre naturel supérieur à 1 : dans le cas du lait, le quotient 0,30769231 de la division de 0,4 par 1,3 a été remplacé par 30 ; dans le cas du jus de citron, le quotient 0,07692308 de la division de 0,1 par 1,3 a été remplacé par 7 ; et dans le cas du zeste de citron, le quotient 0,76923077 de la division de 1 par 1,3 a été également remplacé par 7.

Exercice n° 6 : adapter une recette

Pour la préparation de 1,3 litre de crème au citron, voici la liste des ingrédients à prévoir :

Ingrédients (pour 1,3 litre de crème au citron)	Quantités
Lait	0,4 l $\div 1,3 = 30$
Sucre	200 g $\div 1,3 = 153$ g
Poudre à crème vanille	40 g $\div 1,3 = 30$ g
Jaunes d'œufs en vrac	220 g $\div 1,3 = 169,2$ g
Jus de citron	0,1 l $\div 1,3 = 7$ l
Citron (zeste)	1 pièce $\div 1,3 = 7$ p
Gélatine	15 g $\div 1,3 = 11,5$ g

Cherchez les quantités d'ingrédients qu'il faut prévoir pour préparer 3 litres de crème au citron.

Ingrédients (pour 3 litres de crème au citron)	Quantités
Lait	90l
Sucre	253g
Poudre à crème vanille	90g
Jaunes d'œufs en vrac	507,6g
Jus de citron	21l
Citron (zeste)	21p
Gélatine	34,5g

Figure n°32 - Exercice TQIR résolu par Co le 03.05.12

Ce seront ensuite ces nombres modifiés qui seront utilisés pour accomplir la seconde partie de la règle de trois qui sera appliquée de manière systématique en multipliant chacun d'entre eux par 3.

L'usage de la technique n'est donc pas remis en question du fait des nombres rationnels que celle-ci produit sur la calculette et que Co ne parvient pas à valider, mais ce sont les nombres rationnels produits par la calculette qui sont "naturalisés" par Co pour permettre d'achever l'exécution de la seconde partie de la règle de trois.

Le parcours progressif de Jac durant l'année 2011-2012

Le parcours de Jac peut être qualifié de progressif du fait qu'il marque une évolution graduelle de l'apprentie dans l'appropriation de la règle de trois pour résoudre des exercices TQIR.

Lors de la résolution du premier exercice soumis aux apprenties dans la séance du 22 septembre 2011, Jac a fait un usage partiel de la règle de trois, en divisant par 2 chaque quantité d'ingrédients de la recette de base. Dans l'épreuve d'évaluation du 1^{er} décembre 2011, elle a recouru à l'addition quand les quantités d'ingrédients devaient s'accroître et à la soustraction quand ils devaient diminuer. La séance³⁹⁹ d'appui du 5 janvier 2012 lui a permis de faire fonctionner la règle de trois, en s'appuyant sur le diagramme enseigné (cf. figure n°30) pour corriger deux exercices de l'épreuve de l'évaluation.

³⁹⁹ Voir plus loin, l'analyse détaillée de la séance.

Dans la séance du 19 janvier 2012, deux nouveaux exercices TQIR lui ont été soumis (cf. figure n°33).

Pour préparer un flan pour 4 personnes, il faut 4 dl de lait, 4 œufs, 100 g de sucre, 120 g de farine et 20 g de beurre. 1° Cherchez les quantités de lait, d'œufs, de sucre, de farine et de beurre qu'il faut pour préparer un flan pour 6 personnes. 2° Cherchez les quantités de lait, d'œufs, de sucre, de farine et de beurre qu'il faut pour préparer un flan pour 80 personnes.		

Figure n°33 - Exercices TQIR résolus par Jac le 19.01.12

Jac a utilisé la règle de trois qui lui avait été enseignée lors de la séance d'appui du 5 janvier, sans toutefois compléter les en-têtes des colonnes du diagramme.

Dans le premier exercice, elle a divisé par 1 chaque quantité d'ingrédients de la recette de base (au lieu de les diviser par 4), puis elle a multiplié chaque résultat obtenu par 6 pour aboutir aux quantités de la recette transformée.

Dans le second exercice, elle a divisé par 4 chaque quantité d'ingrédients de la recette de base, puis elle a multiplié chaque résultat obtenu par 80 pour aboutir aux quantités de la recette transformée.

Il y a donc une inversion des nombres au diviseur (1 au lieu de 4) dans la première de la règle (Jac en a souri lors de la mise en commun) dans le premier exercice dont il est difficile d'interpréter l'origine (présence du 4 au dividende ?), qui ne sera pas répétée dans le second.

L'usage de la règle de trois avec le support du diagramme est encore fragile et il sera possible de le remarquer encore une fois en fin de séance, quand Jac, à l'entame de la résolution d'un troisième exercice demandant de transformer les ingrédients d'une recette pour 10 personnes en une recette pour 25 personnes, a repris la division par 4 (au lieu de la division par 10) qu'elle avait employée dans le précédent.

Durant l'épreuve d'évaluation de rattrapage proposée dans la séance du 2 février 2012, Jac est parvenue à faire un usage adéquat et systématique de la règle de trois pour résoudre les trois exercices TQIR qui y figuraient à une exception près (cf. figure n°34).

6 dl	5	1,2 dl	15x	18 dl
4 dl		~~1,25~~ 1,25 dl		~~18,75~~ 18,75 dl
1 dl		0,2 dl		3 dl

Figure n°34 - Exercice TQIR résolu par Jac le 02.02.12

L'exception apparaît au moment où il s'est agi de réduire à 1 des quantités - 6 dl, 4 dl et 1 dl - prévues pour 5 personnes, avant de les transformer pour 15 personnes.

Les ratures relatives à la transformation des 4 dl témoignent des hésitations de Jac : on trouve à la fois le résultat 0,8 qui est tracé, le résultat 1,25 qui est lui aussi tracé et une seconde fois le résultat de 1,25 qui est laissé tel quel.

On peut penser que l'interversion des termes de la division a été produite par la règle didactique disant que, dans une division, le plus grand nombre doit être placé en premier. L'obtention du 1,25, puis du 18,75 aurait été ensuite invalidée parce que les deux nombres étaient supérieurs à ceux figurant juste en-dessus, alors que la quantité de la recette à transformer était inférieure. Jac se serait ainsi résolue à diviser 4 par 5, obtenant 0,8, qui n'a pu être non plus validé, sans qu'il soit donné d'en déterminer la raison. Elle aurait finalement repris la division de 5 par 4 et s'en serait finalement contentée.

L'interprétation reste très incertaine, vu que la chose n'est pas réapparue lors de la transformation de la quantité de 1 dl.

Dans l'exercice TQIR⁴⁰⁰ de l'épreuve d'évaluation du 29 mars 2012, c'est une nouvelle fois à la règle de trois que Jac a eu recours (cf. figure n°35).

Les en-têtes des colonnes du diagramme ont été cette fois-ci complétés avec les abréviations "p" signifiant probablement des "personnes" (alors même que les unités sur lesquelles porte la transformation sont des litres).

La référence à des domaines de grandeurs différents ne vient toutefois pas contrecarrer l'usage de la règle de trois qui est reproduite avec les abréviations d'unités qui prévalaient dans les exercices précédents.

Recette 2,5 p	Opération	Recette 4 p
100 g	: 2,5	40
1'200 g		0,48
330 g		132
5'000 g		2
340 g		136
150 g		60
	x 4	160 g
		192 g
		528 g
		544 g
		240 g

Figure n°35 - Exercice TQIR résolu par Jac le 29.03.12

L'usage de la règle des trois achoppe les deux fois où elle doit être appliquée à des nombres de quatre chiffres : la division de 1'200 par 2,5 aboutit à 0,48 et celle de 5'000 par 2,5 à 2 (au lieu de respectivement 480 et 2000).

Cela laisse supposer que, dans les deux cas, Jac a tapé /1/,/2/0/0/ (au lieu de 1'200) et /5/,/0/0/0/ (au lieu de 5'000) sur la calculette et qu'elle aurait donc procédé à une conversion avant d'effectuer les divisions.

La conversion pourrait être le produit d'une lecture des deux quantités comme "un kilo deux" et "cinq kilos", comme Ca avait pu le faire au chapitre 6.

Les résultats obtenus n'entrent pas en contradiction avec ceux qui les entourent ce qui laisse supposer qu'il n'y a pas de contrôle exercé par Jac à leur rencontre.

⁴⁰⁰ L'exercice demandait de transformer les ingrédients d'une recette prévue pour 2,5 litres de potage en une recette pour 4 litres.

On observe par ailleurs que lors de l'application de la deuxième partie de la règle de trois au quotient de 0,48, la virgule qui devait figurer dans le nombre 1,92 (produit de $0,48 \times 4$) n'a pas été reprise.

En tenant compte du fait qu'il est assez improbable que Jac ait pu omettre le 0 et la virgule du 0,48 au moment de le taper sur la calculette, cette nouvelle conversion pourrait donc correspondre, comme chez Co précédemment, à une forme de "naturalisation" d'un nombre décimal, de façon à ce qu'il puisse être ici mieux à même de représenter une quantité en grammes⁴⁰¹.

Enfin, dans l'exercice TQIR (cf. figure n°36) de l'épreuve d'évaluation de la séance du 3 mai 2012, Jac a encore une fois utilisé la règle de trois pour le résoudre.

Exercice n° 6 : adapter une recette

Pour la préparation de 1,3 litre de crème au citron, voici la liste des ingrédients à prévoir :

Ingrédients (pour 1,3 litre de crème au citron)	Quantités	1,3	$\times 3$
Lait	0,4 l	0,31	0,93
Sucre	200 g	153,84	461,52
Poudre à crème vanille	40 g	30,76	92,28
Jaunes d'œufs en vrac	220 g	169,23	507,69
Jus de citron	0,1 l	0,08	0,24
Citron (zeste)	1 pièce	0,76	2,34
Gélatine	15 g	11,53	34,59

Cherchez les quantités d'ingrédients qu'il faut prévoir pour préparer 3 litres de crème au citron.

Figure n°36 - Exercice TQIR résolu par Jac le 03.05.12

Toutes les transformations ont été accomplies correctement si l'on excepte le fait que l'abréviation "l", désignant des litres, a été prise pour le chiffre "l" (qui se traduit par exactement le même signe dans la police Times New Roman) dans les deux items de l'exercice correspondant à des mesures de capacité. Et les décimales de chaque nombre produit par la division par 1,3 ont toutes été "arrêtées" à deux chiffres après la virgule.

Le parcours incertain de Jad durant l'année 2011-2012

Le parcours de Jad enfin peut être qualifié d'incertain. Si cette apprentie a fait un usage régulier de la règle de trois pour résoudre les exercices TQIR, le contrôle de l'ordre des nombres et/ou des opérations (multiplication et division) qu'elle implique ne semblait jamais vraiment être totalement assuré pour elle.

Le parcours de Jad ressemble à celui de Ca au chapitre 6 quand celle-ci tentait de recourir aux "formules" apprises en cours pour résoudre des exercices TQIR.

L'imprévisibilité qui caractérise ce parcours pourrait assurément être prise comme argument justifiant la répétition de l'enseignement autour de mêmes savoirs mise en évidence au chapitre 5. Il permet aussi de mieux comprendre ce qui, au chapitre 6, a pu conduire l'enseignant de l'école professionnelle à concevoir un algorithme pour contrôler la pose des données dans le diagramme qui servait de support à l'exécution du produit en croix.

⁴⁰¹ Dans la séance du 8 mars 2012, Tiz m'avait demandé, face au résultat de 100,4 qu'elle avait obtenu sur la calculette pour représenter une quantité en grammes, ce que pouvait bien signifier ce "virgule 4", en m'expliquant qu'il n'avait raison d'être en cuisine, où les balances n'allaient jamais plus bas que le gramme dans la succession des sous-unités de poids.

Dans la séance du 22 septembre 2011, Jad était fort bien parvenue à faire usage de la règle de trois pour résoudre l'exercice proposé. Cependant, dans celle du 6 octobre 2011, c'était le procédé comprenant les deux opérateurs inversés qu'elle avait choisi, en arguant néanmoins qu'il fallait réduire les quantités pour une personne.

Dans la séance du 17 novembre 2011, c'est à nouveau sur la règle de trois que son choix a porté.

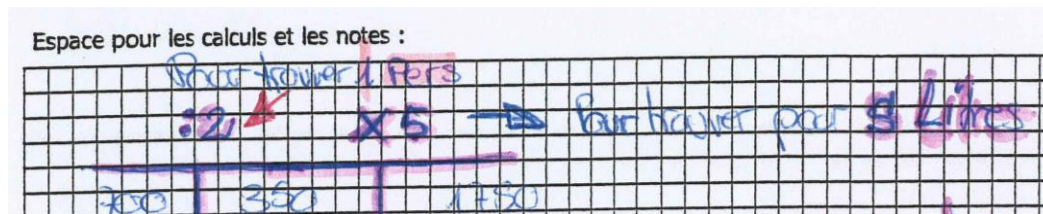


Figure n°37 - Inscriptions complémentaires notées par Jad en recopiant la règle de trois le 17.11.11

Au moment d'en prendre note sur sa feuille, elle a inscrit deux informations complémentaires (qui ne figuraient pas au tableau) en tête de diagramme (cf. figure n°37) : "pour trouver 1 pers" et "pour trouver pour 5 litres".

C'était un peu comme si elle cherchait précisément à établir un contrôle sur les données à prendre en compte pour effectuer les opérations dans le bon ordre.

Lors de la résolution des trois exercices figurant dans l'épreuve d'évaluation du 1er décembre 2011, c'est à nouveau à la règle de trois que Jad a eu recours.

On se rappelle toutefois que, si l'ordre des opérations à accomplir (d'abord la division, ensuite la multiplication) était bien correct, celui des nombres à prendre en compte variait d'un exercice à l'autre :

- dans le premier exercice, Jad avait interverti les termes de la division dans la première partie de la règle ($4 \div 2$ au lieu de $2 \div 4$) ;
- dans le deuxième exercice, il semblait qu'elle ait suivi l'ordre des nombres qui figuraient dans l'énoncé de l'exercice ;
- dans le troisième, elle était parvenue à effectuer correctement les six transformations requises, mais en assortissant sa résolution de deux nouvelles inscriptions (cf. figure n°38) : "pour 1 pers" et "après je fais x 15 pers et sa me donne la rep"

Les inscriptions paraissent à nouveau là pour contrôler l'ordre des nombres à utiliser.

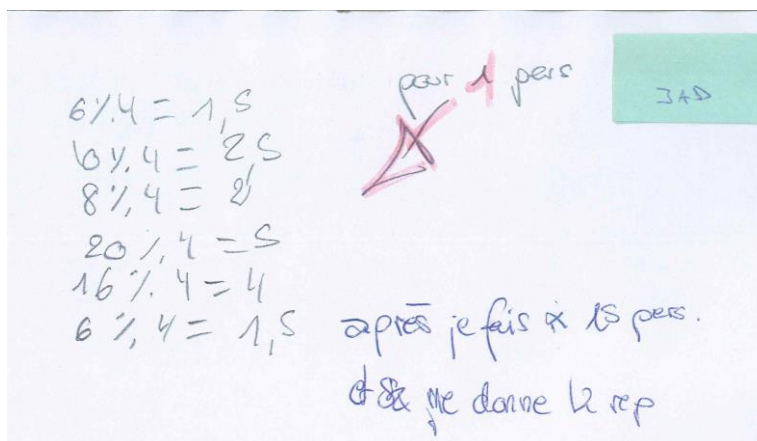


Figure n°38 - Inscriptions complémentaires notées par Jad lors de la résolution d'un exercice TQIR durant l'épreuve d'évaluation du 01.12.11

Dans la séance de correction du 22 décembre 2011, on se souvient aussi que Jad, de façon totalement inattendue, avait contourné l'usage de la règle de trois.

Lors de la résolution de l'exercice qui demandait de transformer 400 g de pâte brisée d'une recette de quiche prévue pour 10 personnes en une recette pour 2 personnes, elle avait suggéré de passer directement par la division par 5 (soit de diviser 400 par 5 pour trouver 80), en s'appuyant sur la relation numérique $10 \div 5 = 2$ qui était soudainement disponible.

C'est la seule fois durant l'année, et en situation d'interaction de connaissances, que Jad a eu recours à un autre procédé que la règle de trois pour résoudre un exercice TQIR.

Au cours de la résolution du premier des deux nouveaux exercices TQIR qui lui ont été donnés à résoudre lors de la séance du 19 janvier 2011, un événement étonnant est survenu (cf. figure n°39).

Jad a commencé par noter (en rose) la première opération à effectuer : " $4 \div 4 = 1$ pers nobres 1", ce qui lui a permis d'effectuer correctement les transformations pour les quantités de lait et les quantités d'œufs. En revanche, pour le sucre, la farine et le beurre, c'est comme si elle avait soudain suspendu l'usage de la règle de trois, vu que les quantités de la recette transformée sont exactement les mêmes que celles de la recette de base.

Quelques problèmes de recettes pour s'entraîner...

$4 \div 4 = 1$ pers nobres 1.

Pour préparer un flan pour 4 personnes, il faut 4 dl de lait, 4 œufs, 100 g de sucre, 120 g de farine et 20 g de beurre.

1° Cherchez les quantités de lait, d'œufs, de sucre, de farine et de beurre qu'il faut pour préparer un flan pour 6 personnes :

Lait : 6 dl Œufs : 6 œufs Sucre : 100 g
Farine : 120 g Beurre : 20 g

2° Cherchez les quantités de lait, d'œufs, de sucre, de farine et de beurre qu'il faut pour préparer un flan pour 80 personnes :

Lait : 80 dl Œufs : 80 œufs Sucre : 200 g
Farine : 200 g Beurre : 40 g

Figure n°39 - Exercices TQIR résolus par Jad le 19.01.12

Les données récoltées ne permettent pas de déterminer si Jad a accompli un simple report des nombres figurant dans l'énoncé ou si, au contraire, elle a poursuivi avec la règle de trois, mais en multipliant les résultats obtenus pour une personne par 4 au lieu de les multiplier par 6, ce qui relèverait à nouveau d'une question d'ordre et de choix des nombres dans l'usage de la règle.

La chose s'avère d'autant plus surprenante, lorsqu'on observe que toutes les transformations du deuxième exercice (cf. figure n°39) ont été accomplies sans erreur.

A partir de cette séance, Jad a encore eu deux occasions de résoudre un exercice TQIR, à savoir dans le cadre des deux épreuves d'évaluation qui se sont déroulées les 29 mars et 3 mai 2012.

A chaque fois, elle est parvenue à appliquer correctement la règle de trois de façon systématique, sans avoir besoin d'inscrire de nouvelles indications sur sa feuille pour respecter l'ordre des nombres, et ce, à une exception près.

Dans l'exercice de l'épreuve du mois de mars (cf. figure n°40), la transformation des 5'000 g de bouillon de la recette de base n'aboutit pas à 2'000 g, mais à 200.

Il peut évidemment s'agir d'un simple oubli d'un zéro, mais il est également possible que le nombre 2000 ait fait l'objet d'une correction volontaire pour le rendre conforme à ceux qui l'entourent (et qui ne comportent que trois chiffres) ou parce que la quantité de bouillon a été jugée trop importante.

Exercice n° 4 : adapter une recette

Pour la préparation de 2,5 litres de potage, voici la liste des ingrédients à prévoir :

Ingrédients (pour 2,5 litres de potage)	Quantités
Beurre	100 g 40
Oignons épluchés	1'200 g 480
Farine blanche	330 g 132
Bouillon	5'000 g 200
Vin rouge	340 g 136
Sbrinz râpé	150 g 60

Cherchez les quantités d'ingrédients qu'il faut prévoir pour préparer 4 litres de potage.

Ingrédients (pour 4 litres de potage)	Quantités
Beurre	160 g ✓
Oignons épluchés	1'920 g ✓
Farine blanche	528 g ✓
Bouillon	600 g x
Vin rouge	544 g ✓
Sbrinz râpé	240 g ✓

3

Figure n°40 - Exercice TQIR résolu par Jad le 29.03.12

INTERACTIONS DE CONNAISSANCES : ÉTABLIR DES CONVERSIONS DE MESURES DE POIDS

Après l'analyse des interactions de connaissances ayant pris pour objet la résolution des exercices TQIR avec la règle de trois, c'est maintenant au tour de celles portant sur les conversions de mesures de poids d'y être soumises.

Etablir des conversions de mesures de poids : les procédés employés par les apprenties lors des séances de cours des 3 et 17 novembre 2011

L'analyse des productions récoltées dans les séances de cours des 3 et 17 novembre 2011 vise à mettre en évidence les procédés que les apprenties emploient pour effectuer des conversions de mesures de poids quand les exercices qui leur sont proposés nécessitent en principe de le faire.

La séance de cours du 3 novembre 2011

Deux exercices impliquant des conversions de mesures de poids ont été soumis aux apprenties lors de la séance du 3 novembre 2011.

1^{er} exercice.

Le premier d'entre eux est un exercice RFI où un seul item implique une conversion de mesures : on a 2,300 kg de crème en poudre en stock, on en prélève 500 g et on doit trouver la quantité qu'il restera après le prélèvement.

L'exercice est de structure de base additive, de type ET-E avec recherche de l'état final comprenant un nombre naturel et un nombre décimal inférieur à 1000. Une relation multiplicative/M ou multiplicative/DQ, impliquant un rapport fondé sur une relation numérique entière ($1 \times 1000 = 1000$ ou $1000 \div 1000 = 1$), y est associée pour réaliser la conversion.

5 apprenties⁴⁰² ont procédé par écrit, en colonne (alors qu'elles avaient pourtant la calculette à disposition), pour résoudre l'exercice.

La figure n°41 présente les productions de Jad, Jac et Sa (Co et Tiz ayant procédé exactement de la même manière que Jad) :

- Jad, Co et Tiz ont posé $2,300 - 500$ (sans unités) en colonne, puis ont effectué l'opération pour trouver 1,800 comme résultat.
- Jac s'y est prise d'une façon identique, mais en incluant les abréviations d'unités de poids ("kg" et "g") dans son calcul pour aboutir à 1,800 g.
- Sa a posé $2'300 - 500$ à deux reprises et cherché à faire de même obtenant d'abord 1,799, puis 1,700.
- Co et Sa ont ensuite vérifié sur la calculette les résultats qu'elles avaient obtenus par écrit, en tapant $12/300/-500/=$, et l'une comme l'autre ont, à leur grande surprise, vu apparaître $- 497,7$ sur l'écran.

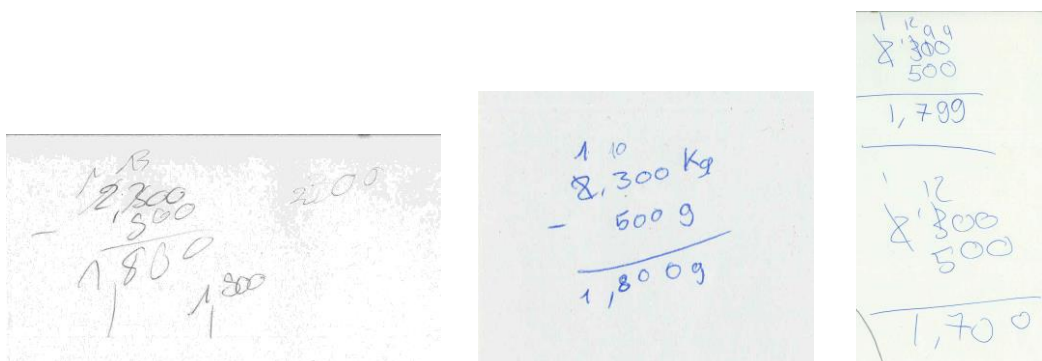


Figure n°41 - Exercice RFI résolu par Jad, Jac et Sa le 03.11.11

A l'exception de Sa (et peut-être Lou), les apprenties n'ont pas passé par l'établissement d'une conversion de mesures de poids avant d'effectuer la soustraction.

Comme on avait déjà pu l'observer chez Ca au chapitre 6, la disposition en colonnes, avec le 500 qui vient se placer juste en-dessous de la partie décimale de 2,300, permet, en effet, de parvenir sans encombre au bon résultat de 1,800.

La chose se révèle d'ailleurs possible dans tous les cas d'addition et de soustraction de quantités représentées en grammes à des quantités représentées en kilos, quand la partie décimale de la quantité mesurée en kilos comporte trois chiffres et que l'on veille à aligner à partir de la droite (comme il convient de le faire avec des nombres naturels) les chiffres de la quantité mesurée en grammes.

Les traces figurant sur la fiche de Sa ne permettent pas de déterminer comment elle a établi la conversion de 2,300 en 2'300 (c'était peut-être à l'aide de l'enseignante spécialisée qui l'accompagnait). La conversion ne tient toutefois que pour l'inscription du premier terme de la soustraction, puisque l'on retrouve une virgule dans les deux résultats de 1,799 et de 1,700 qu'elle a obtenus.

⁴⁰² La fiche de Lou ne comprenait que 1,800 - sans unité - comme résultat et Mam n'était pas présente.

Le fait de substituer à l'écrit une apostrophe à une virgule dans le nombre représentant des kilos n'exerce aucune incidence sur le déroulement du calcul, ni sur l'appréhension du résultat qui, avec une virgule comme avec une apostrophe, pourra être lu de la même manière comme "un kilo huit cents"

Il n'est en revanche pas possible de procéder ainsi lorsque l'on a recours à la calculatrice, qui impose une conversion de mesures, afin que les nombres pris en compte dans les calculs relèvent de la même unité. C'est ce qu'ont découvert Co et Sa, à leur surprise et à leur insu, en voyant $(-497,7)$ - résultat de $/2/,3/0/0/-5/0/0/=$ - s'afficher sur l'écran.

On se souvient que pareille mésaventure était aussi arrivée à Ca au chapitre 6.

Lors du report des résultats obtenus par écrit en colonne sur leur fiche⁴⁰³ :

- Co et Tiz ont écrit 1,800 kg,
- Lou et Jac (qui avait écrit 1,800 g dans son calcul) ont écrit 1,800, sans unité,
- Sa a écrit 1'800 g,
- Jad a écrit 1,800 g.

Comme chez Ca au chapitre 6, les abréviations d'unités pour désigner les mesures de poids ne paraissent pas significatives pour la majorité des apprenties.

2^{ème} exercice.

Le deuxième exercice est un exercice CP, où, partant d'un sac de carottes de 5 kg, il faut trouver ce qu'il adviendra de ce poids, après épluchage des carottes (qui entraîne une perte de 450 g), puis après découpage (qui entraîne une nouvelle perte de 0,2 kg).

L'exercice est de structure de base additive, de type ET'E avec recherche de l'état final comprenant deux nombres naturel et un nombre décimal inférieur à 1000. Il implique deux transformations successives auxquelles viennent s'associer une relation multiplicative/M multiplicative/DQ impliquant un rapport fondé sur une relation numérique entière ($1 \times 1000 = 1000$ ou $1000 \div 1000 = 1$).

3 apprenties ont commencé par établir une conversion du nombre 5, mesurant des kilos, avant d'effectuer leur calcul par écrit en colonne (la calculatrice est toujours à disposition des apprenties) :

- Lou et Tiz ont transformé 5 en 5000 (Tiz a écrit l'abréviation "g" à côté de 5000, ce qui n'est pas le cas de Lou) ;
- Jad a transformé 5 en 500.

Lou est la seule des trois apprenties à avoir apporté une réponse correcte à cet exercice.

Après avoir transformé le nombre 5 en 5000, elle a soustrait 450 à 5000 en colonne pour trouver 4550 ; ensuite, elle vérifié son résultat en procédant, toujours en colonne, à l'addition inverse ($4550 + 450$) pour retrouver 5000 ; Lou a poursuivi en transformant 0,2 en 200, avant de calculer $4550 - 200$, toujours en colonnes, pour trouver 4,350 (elle a donc ajouté une virgule au résultat) ; elle a à nouveau vérifié son résultat en procédant (toujours en colonnes) à l'addition inverse (4350 (sans virgule) $+ 200$) pour retrouver 4550.

Les conversions établies par Lou - kilo/grammes et grammes/kilos - s'effectuent de façon correcte, mentalement, et sans recours à une technique supportée par un diagramme.

⁴⁰³ Après que j'ai succinctement montré à Co et à Sa comment établir une conversion de manière à ce que la calculatrice produise l'un des deux résultats attendus : 1,8 dans le cas de la soustraction $2,300 - 0,500$ ou 1800 dans celui de $2'300 - 500$.

Les résultats de chaque calcul sont vérifiés en recourant à l'addition, en tant qu'opération inverse de la soustraction

De son côté, Tiz a inscrit deux calculs en colonnes sur sa fiche : $5000 \text{ g} \div 450 \text{ g}$ et $5000 - 450$; elle a écrit 11,11 comme résultat au premier et 4550 comme résultat au second ; à plusieurs reprises, elle s'est plainte du fait qu'il s'agissait d'un problème impossible ; et ce n'est qu'après avoir discuté avec elle, et passant par un dessin au tableau, que j'ai cru comprendre qu'elle cherchait⁴⁰⁴ en fait à déterminer le nombre de carottes épluchées nécessaires à l'obtention d'une quantité de 5 kg.

Tiz n'a pas entamé la résolution de la deuxième partie de l'exercice.

Comme chez Lou, la conversion kilos/grammes établie correctement par Tiz (5 kg $\rightarrow$ 5000 g) ne s'est pas faite à l'aide d'une technique explicite, supportée par un diagramme.

Par ailleurs, il est difficile d'interpréter ce qui a bien pu être à l'origine de cette forme de substitution d'exercice qui a fait passer l'apprentie de la recherche du poids de 5 kg de carottes après épluchage et découpage à celle du nombre de carottes épluchées nécessaires à l'obtention de 5 kg.

On peut tout au plus constater que de telles substitutions peuvent avoir lieu.

Quant à Jad, la transformation de 5 en 500 lui a permis de calculer $500 - 450$ en colonne et de trouver 350 comme résultat ; elle a ensuite écrit 350 carottes et 3,50 kg sur sa feuille et s'est arrêtée.

La première conversion établie par Jad laisse supposer que celle-ci a été faite, à nouveau sans recours à une technique spécifique, de façon à ce que son calcul en colonne puisse se dérouler (Ca, au chapitre 6, avait également transformé 5 en 500) : en ajoutant deux zéros à 5, cela lui permet d'aligner le 450 sur le nombre 500 qu'elle va ensuite lui soustraire.

La conversion est donc liée à la fonctionnalité du calcul à accomplir et non au rapport liant les deux unités de poids respectives.

En outre, s'il est difficile d'interpréter l'origine du 3 de 350 (produit par la soustraction $500 - 450$), on voit qu'une nouvelle conversion a eu lieu entre le nombre 350 obtenu par calcul et le 3,50 kg inscrit sur la fiche.

La présence de la virgule à côté placée entre le premier et le deuxième chiffre du nombre pourrait de nouveau être associée à la fonctionnalité du nouveau calcul à accomplir, lequel demande la soustraction du nombre 0,2 qui possède lui aussi une virgule après le premier chiffre : le fait que Jad n'ait pas mené ce second calcul à terme ne permet cependant pas de le confirmer.

2 apprenties ont inversé les termes de la soustraction à accomplir (au lieu d'établir une conversion) pour effectuer leur calcul par écrit en colonne (la calculette est toujours à disposition des apprenties) :

- Jac (cf. figure n°42) a effectué $450 \text{ g} - 5 \text{ kg}$ et a trouvé 445 g ; puis elle a poursuivi en soustrayant, toujours en colonne, 0,2 à 445 (mais sans unités cette fois-ci) pour aboutir⁴⁰⁵ à 445,2.

⁴⁰⁴ Ce qui a finalement abouti à la formulation du "problème des carottes" (voir plus haut).

⁴⁰⁵ En comparant les deux calculs effectués par Jac, on remarque, dans le premier, que la présence du 0 de 450 au-dessus du 5 conduit à l'emprunt pour effectuer la soustraction, alors que dans le second, l'absence d'un 0 au-dessus du 2 fait que l'emprunt n'a pas lieu et que le 2 est simplement reporté au résultat.

- Sa a effectué $450 - 5$ (sans mention des unités) et a également trouvé 445 ; contrairement à Jac, elle s'est interrompue et n'a pas mené à terme la deuxième partie de l'exercice.

Dans les deux cas, il semble que ce soit, comme chez Jad, la fonctionnalité du calcul à accomplir qui prime, sur la relation unissant les quantités en jeu de l'exercice.

Co n'a pu entamer la résolution de l'exercice, déclarant qu'elle ne savait comment s'y prendre.

Là encore, il est possible de penser que l'impasse dans laquelle s'est retrouvée Co est liée l'impossibilité d'exécuter le calcul $5 - 450$.

Exercice 3 3 pts/

Vous épluchez un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, vous découpez les carottes en dés.

Exercice A:

Calculez combien de **carottes épluchées** vous avez:

4	5	0	g
-	5		kg
4	4	5	g

Le découpage en dés entraîne 0,2 kg de déchets supplémentaires.

Exercice B:

Calculez combien de **carottes découpées en dés** vous obtenez:

4	4	5
-	0	2
4	4	5,2



Figure n°42 - Exercice de calcul de poids résolu par Jac le 03.11.11

En outre, si l'on compare les productions issues de la résolution des deux exercices (RFI et CP), d'une complexité très proche d'un point de vue conceptuel, il est frappant de constater combien le deuxième a été moins "réussi" que le premier.

On peut faire l'hypothèse que c'est la façon dont est écrit le nombre dans l'énoncé - 2,300 dans le premier et 5 dans le second - qui explique cette différence :

- dans le premier cas, vu qu'il possède quatre chiffres, le nombre fonctionne comme diagramme rendant possible l'effectuation du calcul, en déterminant l'alignement des chiffres du second nombre à soustraire ;
- dans le second cas, vu qu'il ne possède qu'un chiffre, le calcul ne peut démarrer : il faut dès lors soit se résoudre à transformer le nombre en réalisant une conversion, ce qu'ont fait Lou, Tiz et Jad ; soit, comme chez Jac et chez Sa, inverser les deux termes de la soustraction, pour que le second endosse la fonction de diagramme et rende ainsi son effectuation possible.

La séance de cours du 17 novembre 2011

Lors de la séance du 17 novembre qui a suivi, seul le premier exercice a pu être repris en collectif. La confrontation aux trois résultats 1800, 1,800 et - 497, 7 qui avaient été trouvés dans la séance précédente a donné l'occasion à trois apprenties d'expliquer comment ces derniers avaient pu être obtenus.

Tiz a d'abord dit que pour obtenir 1800, il fallait transformer les 2,300 kg en grammes, ce qui donnait 2'300, puis soustraire 500 à 2'300, ce qui donnait 1800 (ce n'était pourtant pas ainsi qu'elle avait procédé, puisqu'elle avait soustrait 500 à 2,300 en colonne et abouti à 1,800 comme résultat auquel elle avait associé l'abréviation "g").

Tiz montre à nouveau qu'elle est capable d'établir mentalement (par simple retrait de la virgule) une conversion kilos/grammes (2,300 kg $\rightarrow$ 2'300 g).

Lou a ensuite indiqué que, pour trouver 1,800 (elle avait, quant à elle, bel et bien trouvé 1,800), il suffisait d'ajouter un 0 et une virgule à 500, puis de soustraire, 0,500 à 2,300, ce qui permettait d'obtenir 1,800.

Tout comme Tiz, Lou produit mentalement (par ajout d'un zéro et d'une virgule) une conversion grammes/kilos (500 g $\rightarrow$ 0,500 kg)

Enfin, c'est Co qui s'est souvenue avoir obtenu 497,7 en tipant $/2./3/0/0/-/5/0/0/=/$ sur la calculatrice, sans pouvoir en expliquer la raison.

Une discussion s'en est suivie, mais elle a été exclusivement soutenue par Lou.

Elle a porté sur la façon de réfuter le résultat produit par la calculatrice, plutôt que sur la comparaison des trois résultats, les uns vis-à-vis des autres.

Le premier argument donné par Lou tenait au fait que, dans le calcul tipé sur la calculatrice par Co, un nombre contenait une virgule et l'autre n'en contenait pas, alors que dans les deux calculs qui aboutissaient à 1,800 et 1800, soit les deux nombres comprenaient une virgule, soit les deux nombres n'en contenaient pas.

L'argument porte donc sur la forme que prennent les nombres dans les calculs (avec ou sans virgule) et non pas sur le fait d'avoir à distinguer des grandeurs mesurées en grammes et de celles mesurées en kilos.

Le second argument énoncé par Lou disait que le calcul effectué sur la calculatrice ne pouvait pas fonctionner, parce que, dans une soustraction, le premier nombre devait toujours être plus grand que le second, sinon, cela devenait impossible à faire.

Cet argument ne porte pas non plus sur la nécessité de distinguer les quantités en grammes des quantités en kilos, mais sur la taille relative des nombres et leur placement lors de l'effectuation de la soustraction⁴⁰⁶.

C'est ici une règle, d'origine didactique, très semblable à celle utilisée par Mam dans l'effectuation d'une division (voir plus haut l'analyse de la séance du 5 janvier 2012) qui est ainsi mise à jour.

Il semble donc bien que ce soit, sur la forme prise par les nombres décimaux, que vient porter la question des conversions de mesures de poids à entreprendre et non pas, comme on pourrait le penser, sur la nécessité d'opérer avec des nombres représentant des quantités mesurées à l'aide d'unités identiques.

La longue explication que l'enseignant a donné aux apprenties dans la suite de cette séance pour tenter de leur montrer en quoi il pouvait être important avant d'opérer de distinguer les quantités données en grammes de celles proposées en kilos a donc dû rester bien vaine. On en trouve le condensé à la figure n°43 qui rend compte de ce qu'en a conservé l'enseignante spécialisée présente en classe qu'elle a rédigé à l'intention de Sa.

⁴⁰⁶ Un argument qu'il aurait par ailleurs été facile de réfuter en demandant à Lou d'effectuer $500 - 2,300 =$ sur la calculatrice au lieu de $2,300 - 500 =$, ce qui, à un signe près, aurait donné le même résultat de 497,7 !

L'injonction "on ne peut pas mélanger kg et g" qui se trouve sur la fiche apparaît ici bien stérile, lorsqu'on se souvient que, dans la séance précédente, quatre apprenties sur six étaient précisément parvenues à résoudre l'exercice RFI impliquant une conversion, en conservant les quantités exprimées en kilo et en grammes.

Fiche d'inventaire		Crème en poudre
Stock précédent	Prélevé aujourd'hui	Nouveau stock
2,300 Kg	500g	1800g

on ne peut pas mélanger kg et g ! Il faut changer pour avoir la même chose

si je choisis les grammes :

① je transforme 2,3 kg en g
 $2,3 \text{ kg} = 2300 \text{ g}$

② je garde les g la même chose
 500 g

③ j'enlève ce que j'ai pris aujourd'hui
 $2300 \text{ g} - 500 \text{ g} = 1800 \text{ g}$
 ⇒ il reste 1800 g

si je choisis les kg :

① je garde les kg
 $2,3 \text{ kg}$

② je transforme 500 g en kg
 $500 \text{ g} = 0,5 \text{ kg}$

③ j'enlève ce que j'ai pris aujourd'hui
 $2,3 \text{ kg} - 0,5 \text{ kg} = 1,8 \text{ kg}$
 ⇒ il reste 1,8 kg

Figure n°43 - Fiches synthèses établies par l'enseignante spécialisée à l'intention de Sa le 03.11.11

Etablir des conversions de mesures de poids : l'analyse d'une séance consacrée à l'enseignement d'un tableau de conversion fondé sur le rapport kilo-grammes

L'analyse des interactions qui suit vise à caractériser la dynamique d'une seconde séance⁴⁰⁷ consacrée à l'enseignement d'un tableau de conversion fondé sur le rapport kilo-grammes pour établir des conversions de mesures de poids. Il s'agit une nouvelle fois de montrer comment l'activité du couple enseignant-enseigné s'y développe à partir des prises et des pertes de contrôle successives qui s'y déroulent (Conne, 2003). L'analyse porte tout à la fois sur ce qui advient en amont de la séance (lors de sa préparation) qu'en cours de celle-ci (durant les interactions).

Prises de contrôle en amont de la séance de cours

Les prises de contrôle réalisées en amont de la séance visent à nouveau à anticiper son déroulement pour déterminer a priori ce qu'en principe elle devra être et baliser ainsi le développement de l'activité du couple enseignant-enseigné.

a) 1^{ère} prise de contrôle : prise en compte des éléments de mémoire didactique.

La séance va se dérouler dans le cadre d'un *contrat de reprise* (Brousseau, 1995 ; Bloch & Salin, 2004) dans le sens où les apprenties ont déjà été confrontées à des exercices impliquant des conversions de mesure. En revanche, l'objet d'enseignement lui-même sera nouveau pour la plupart d'entre elles, puisque c'est à un tableau de conversion classique, déclinant l'ensemble des sous-unités de mesures (allant du kilogramme au milligramme) qu'elles ont généralement été initiées.

Les choix effectués se sont tout à la fois fondés sur la connaissance des exercices des épreuves d'examen que les apprenties sont appelées à résoudre, les interactions qui ont été précédemment

⁴⁰⁷ C'est la séance d'appui du 12 janvier 2012 qui a été choisie, parce qu'elle comportait à nouveau un objet d'enseignement clairement identifié : un tableau de conversion des mesures de poids fondé sur le rapport kilo/grammes et qu'elle était spécifiquement destinée à des apprenties - Co, Jad, Jac, Sa - qui, lors des séances des 3 et 17 novembre 2011, avaient montré qu'elles ne rencontraient pas la nécessité d'établir des conversions et/ou qu'elles ne savaient pas trop comment s'y prendre pour le faire.

nouées avec Ca (chapitre 6) et avec les stagiaires (chapitre 7), de même que celles qui se sont déroulées lors des séances des 3 et 17 novembre 2017.

Ainsi les exercices des épreuves avaient montré que c'étaient, pour l'essentiel, des conversions kilos-grammes et grammes-kilos (avec parfois, mais plus rarement, des conversions litres-décilitres et décilitres-litres) qu'il s'agissait de parvenir à établir.

Les épreuves proposées aux stagiaires avaient révélé que le tableau de conversion classique qui leur était enseigné était peu maîtrisé.

Les interactions qui avaient eu lieu avec Ca avaient permis de remarquer d'une part que l'usage des mesures de poids à l'écrit présentait la spécificité d'impliquer des nombres naturels et des nombres décimaux comportant généralement trois chiffres après la décimale : on écrivait 3,500 kg, plus rarement 3,5 kg, mais jamais 3,50 kg ; et d'autre part que leur désignation à l'oral n'était pas isomorphe à leur écriture : pour 3,500 kg, on disait "trois kilos cinq cents", plus rarement "trois kilos cinq", mais jamais "trois kilos virgule cinq cents" ou "trois kilos virgule cinq".

Tandis que les séances des 3 et 17 novembre 2011 avaient montré que la majorité des apprenties évitaient d'établir des conversions ou alors que lorsqu'elles le faisaient, c'était pour répondre la fonctionnalité du calcul à entreprendre, plutôt que sur le rapport des unités de mesures en jeu.

Une ébauche de *mémoire didactique* (Brousseau & Centeno, 1991) s'est donc établie et elle constitue dès lors une première prise de contrôle sur le déroulement de la séance.

b) 2^{ème} prise de contrôle : choix de la technique et des exercices supports à l'enseignement.

La deuxième prise de contrôle qui opère en amont de la séance réside dans le choix de la technique et des exercices (et donc des variables qui les caractérisent) qui vont servir de support à son enseignement⁴⁰⁸.

En ce qui concerne la technique, c'est un tableau de proportionnalité fondé sur le rapport 1000 qui unit les deux unités en jeu (les kilos et les grammes) qui va se substituer au tableau de conversion habituel.

En ce qui concerne les supports, c'est à des poids effectifs (1 kg, 500 g, 200 g, 100 g, 50 g, 20 g, 10 g, 5 g, 2 g et 1 g) et à une balance à deux plateaux qu'il sera fait appel, de manière à fonder au niveau des grandeurs et des grandeurs mesurées le rapport existant entre les deux unités. Ensuite, diverses grandeurs mesurées données sous la forme "x kilo y" (un kilo cinq cent, par exemple) seront proposées pour être transformées en grammes ; alors que, réciproquement, diverses grandeurs mesurées données sous la forme "z grammes" (quatre cent grammes, par exemple) devront être transformées en kilos, afin de constituer collectivement deux tableaux de conversions fondés sur les opérateurs $[\times 1000]$ et $[\div 1000]$

Une fiche d'application proposant d'autres conversions kilos/grammes et grammes/kilos sera proposée en guise d'entraînement.

c) élaboration d'un scénario.

Ces deux prises de contrôle aboutissent à l'élaboration d'un scénario de la séance qui, cette fois-ci, devait se dérouler de la manière suivante :

⁴⁰⁸ Le choix dépend à nouveau conjointement des savoirs de l'enseignant en matière de mathématiques et de didactique et des contraintes relatives au système.

1. Exposé de l'objectif de la séance : parvenir à effectuer des conversions de mesures de poids
2. Découverte de la balance, pesée d'un poids d'un gramme, d'un poids d'un kilo, recherche d'objets dans la classe qui pèsent un gramme/un kilo (vérification sur la balance), établissement à l'aide de la balance de la relation 1 kilo = 1000 grammes
3. Conversion en grammes de quantités mesurées en kilos, puis conversion en kilos de quantités mesurées en grammes
4. Institutionnalisation de la technique de conversion de mesures de poids à l'aide du tableau de proportionnalité et des deux opérateurs réciproques : $\times 1000$ et $\div 1000$
5. Application de la technique sur une fiche d'exercice

Pertes et prises de contrôle durant la séance de cours

Les prises et pertes de contrôle identifiées durant de la séance visent à rendre compte de son déroulement effectif au travers du développement de l'activité du couple enseignant-enseigné.

a) première prise de contrôle : un début de séance conforme au scénario prévu.

Le début de la séance s'est déroulé selon le scénario prévu. Tour à tour, l'enseignant a :

- noté au tableau le thème de la séance ;
- indiqué aux apprenties que les conversions de mesures de poids pouvait leur être utile conjointement en cuisine et dans les épreuves d'examen ;
- découvert la balance à plateaux en demandant aux apprenties les unités utilisées pour peser des quantités ;
le kilo, le gramme et le kilogramme sont explicités tour à tour, mais aucune autre sous-unité n'est apparue ;
- fait soupeser un poids d'un kilo à chaque apprentie, montre comment réaliser des pesées à l'aide de la balance et des poids d'un kilo ;
- fait soupeser le poids d'un gramme ;
- demandé de désigner des objets de la classe qui ont le poids d'un gramme et fait vérifier les propositions sur la balance.

b) 1^{ère} perte de contrôle : l'enseignant prend conscience qu'une seule conversion est nécessaire lorsqu'on effectue des pesées sur une balance à plateaux.

Une fois ces premières pesées accomplies, l'enseignant a déclaré que, comme il était possible de peser des quantités aussi bien avec des kilos qu'avec des grammes (en précisant que l'on utilise les abréviations "kg" et "g" pour les désigner), il était donc important d'apprendre à établir des conversions kilos-grammes et grammes-kilos.

Cette assertion est toutefois sujette à caution, si l'on se rappelle notamment que Ca au chapitre 6 parvenait très bien à se passer de conversions de mesures, dès lors qu'elle renonçait à faire usage de la calculatrice pour effectuer ses calculs.

Mais l'enseignant s'est également rendu compte que les seules conversions de mesures qui sont à réaliser lorsque l'on effectue des pesées sur une balance à plateaux sont celles qu'il y a lieu d'effectuer pour transformer 1000 grammes en 1 kilo. En revanche, il n'est jamais besoin de transformer en kilos d'autres quantités exprimées en grammes, ni non plus de transformer en grammes des quantités exprimées en kilos : ce sont en effet le total des kilos (quand il existe) et le total des grammes mis côte à côte qui donnent le poids effectif de l'objet pesé⁴⁰⁹.

⁴⁰⁹ 1° Les pesées effectuées sur la balance à plateaux viennent infirmer les propos de Rouche (2006), lorsqu'il dit que : « pour exprimer un poids P, il suffit de choisir une unité dans le tableau, par exemple le gramme et ensuite d'écrire une expression

c) 2^{ème} perte de contrôle : une apprentie dit qu'elle sait déjà établir des conversions de mesures

Tiz est intervenue pour dire qu'elle savait déjà établir des conversions de mesures à l'aide d'un tableau de conversion.

Comme l'enseignant savait que ce n'était pas celui vers lequel il souhaitait aboutir, il a repoussé l'examen du tableau de Tiz à plus tard.

C'est le contrat de reprise qui est à l'origine de la perte de contrôle, puisque une apprentie s'est déjà approprié un savoir de substitution à celui qui est l'enjeu de la séance.

d) 2^{ème} prise et 3^{ème} perte de contrôle : l'enseignant vise à établir le rapport kilo/grammes, mais se rend compte qu'il ne peut le faire avec les poids à sa disposition.

Après avoir déposé un poids d'un kilo sur un plateau de la balance et un poids d'un gramme sur l'autre, l'enseignant a demandé aux apprenties combien de poids de 1 gramme permettrait d'équilibrer la balance.

L'enseignant s'est alors rendu compte que le rapport kilo/grammes ne pouvait être qu'évoqué à l'aide de la balance : on ne disposait pas en effet de mille poids d'un gramme pour établir l'équilibre et même si cela avait été le cas, il aurait été impossible à définir au vu de la difficulté qu'il y aurait eu à accomplir un décompte rigoureux des 1000 poids et de l'imprécision inhérente à la balance pour déterminer quand la situation d'équilibre était effectivement advenue ; l'utilisation des poids de 500 g, de 200 g, 100 g, 50 g, 20 g, 10 g, 5 g et 2 g, à cause des calculs qu'ils impliquaient pour aboutir à un poids de 1000 g, ne permettait pas non plus de parvenir à une "concrétisation directe et sans faille" de l'équivalence $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$

Fort heureusement, Jac a répondu qu'il fallait 1000 poids de 1 gramme pour établir l'équilibre, ce qui a permis à l'enseignant d'inscrire la relation $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ au tableau.

Ici, le contrat de reprise vient au secours de l'enseignant : le rapport kilo/grammes étant déjà su par une apprentie, il peut s'y appuyer pour l'institutionnaliser au tableau.

d) 3^{ème} prise de contrôle : l'enseignant demande aux apprenties d'établir six conversions en grammes de quantités exprimées en kilos.

L'enseignant a demandé aux apprenties d'établir six conversions successives en grammes de quantités exprimées en kilos⁴¹⁰ qui ont été inscrites au tableau sur une colonne. Ces six quantités étaient : 2 kg, 3 kg, 1 kg 500, 2 kg 300, 3 kg 1 et 3 kg 100.

telle que $P = 23 \text{ g} + 5 \text{ dg} + 7 \text{ cg}$ ou plus commodément $P = 23,57 \text{ g}$ » (p.140). En effet, on ne commence par opter pour une unité parmi les sous-unités de poids définies dans le système décimal des poids et mesures, mais on choisit parmi les poids à disposition qui sont établis en kilos et en grammes. On ne choisit pas non plus le poids au hasard, mais en fonction d'une approximation perceptive de l'objet à peser : s'il semble lourd, on commencera par un poids en kilos, s'il paraît plus léger on essaiera plutôt avec un poids en grammes. La détermination du poids exact ne se fait par ailleurs pas de façon linéaire, allant de l'usage du poids le plus lourd à celui le plus léger, mais bien par essais et erreurs, qui se régulent en fonction du mouvement des plateaux de la balance (montrant tantôt que c'est trop lourd et tantôt que c'est trop léger). Une fois l'équilibre atteint, on additionne les poids en kilos d'une part et les poids en grammes d'autre part et au cas où le nombre de grammes atteint mille, on le remplace par un kilo (ce qui, en principe, n'arrive jamais, parce qu'il si tel était le cas, il aurait déjà été remplacé par un poids d'un kilo durant la pesée) ; on obtient donc un poids exprimés par deux nombres (ou un seul nombre si le poids est inférieur à 1 kg ou qu'il correspond à un nombre entier de kilos), associés à deux unités distinctes : des kilos, d'une part et des grammes d'autre part. La pesée sur une balance à plateaux exclut donc l'usage des nombres décimaux, et ce n'est qu'avec l'usage des balances électroniques actuelles que ceux-ci sont susceptibles d'apparaître au cours d'une pesée.

⁴¹⁰ Les quantités sont données en kilos et en grammes pour tenter de coller à la façon que l'on a de les désigner à l'oral : pour un poids de 3,100 kg, prononcé "trois kilos cent" et écrit 3 kg 100 au tableau. Cette option, qui contourne l'usage des nombres décimaux, aura des répercussions notables sur les conversions à réaliser dans la suite de la séance.

Le tableau n°44 présente l'ensemble des réponses proposées par les apprenties aux six conversions demandées⁴¹¹.

Transformer en grammes des quantités exprimées en kilos					
	Co	Jac	Lou	Sa	Tiz
2 kg	2000 g	2000 g	2000 g	2000 g	2000 g
3 kg	3000 g	3000 g	3000 g	3000 g	3000 g
1 kg 500	1500 g	1000 g 500	1500 g	15000 g	1500 g
2 kg 300	2300 g	3000 g 300	2300 g	2300 g	2300 g
3 kg 1	3001 g	---	3001 g	3100 g	3100 g
3 kg 100	3100 g	3100 g	3100 g	3100 g	3100 g

Tableau n°44 - Réponses des apprenties aux conversions en grammes de quantités en kilos

Il tend à montrer que les apprenties maîtrisaient plutôt bien les conversions à effectuer.

Les résultats "1000 g 500" et "3000 g 300" (elle avait noté 3 kg 300 au lieu de 2 kg 300 sur sa feuille) de Jac ont facilement pu être transformés, par addition des deux nombres, en 1500 g (1000 + 500) et 2300 g (2000 + 300).

Le 15000 g de Sa n'est pas apparu dans l'échange et n'a donc pas été pris en compte.

Les résultats divergents de 3001 g et 3100 g pour la conversion de 3 kg 1 avaient été anticipés : ce qui a fait que l'enseignant est passé directement à la transformation des 3 kg 100 en 3100 g, de façon à exclure les deux résultats de 3100 g proposés par Sa et Tiz pour la conversion de 3 kg 1, arguant que l'on ne pouvait pas faire appel à deux désignations identiques pour deux poids différents.

Il n'est évidemment pas certain que l'argument ait porté auprès des deux apprenties et il n'expliquait nullement non plus pourquoi la configuration du nombre 3001 proposée par Co et par Lou s'avérait pertinente pour désigner en grammes un poids de 3 kg 1.

d) 4^{ème} prise de contrôle : l'enseignant demande aux apprenties d'établir sept conversions en kilos de quantités exprimées en grammes.

La séance s'est poursuivie selon le scénario prévu, avec la conversion en kilos de sept quantités exprimées en grammes qui ont été également inscrites au tableau sur une colonne, avec la mention de l'équivalence 1000 g = 1 kg. Ces sept quantités étaient : 2000 g, 3000 g, 900 g, 200 g, 20 g, 2g et 1g.

Tiz est une nouvelle fois intervenu pour dire qu'elle avait appris à effectuer de telles conversions à l'aide d'un tableau et l'enseignant lui a encore répondu qu'il s'y intéresserait plus tard dans la séance.

Une perte de contrôle a ainsi été évitée.

Le tableau n°45 présente l'ensemble des réponses proposées par les apprenties aux sept conversions à accomplir⁴¹².

Les conversions de 2000 g en 2 kg et 3000 g en 3 kg ont été effectuées correctement par toutes les apprenties.

⁴¹¹ Il faut bien comprendre que le moment se déroule en collectif et qu'une mise en commun des résultats a lieu après chaque prévision, ce qui fait les apprenties peuvent à chaque fois utiliser les résultats qui précèdent pour effectuer la prévision qui suit.

⁴¹² Il faut bien comprendre que le moment se déroule en collectifs qu'une mise en commun des résultats a lieu après chaque prévision, ce qui fait les apprenties peuvent à chaque fois utiliser les résultats qui précèdent pour effectuer la prévision qui suit.

Les cinq autres conversions effectuées par Jac, Lou et Tiz laissent supposer qu'elles maîtrisaient une technique pour le faire, mais il n'en a pas été retrouvé la trace dans leurs productions (il n'y avait pas de tableau chez Tiz).

Transformer en kilos des quantités exprimées en grammes					
	Co	Jac	Lou	Sa	Tiz
2000 g	2 kg	2 kg	2 kg	2 kg	2 kg
3000 g	3 kg	3 kg	3 kg	3 kg	3 kg
900 g	0,900 kg	0,9 kg	0,9 kg	90 kg	0,9 kg
200 g	0,200 kg	0,2 kg	0,2 kg	0,200 kg	0,2 kg
20 g	0,20 kg	0,02 kg	0,02 kg	0,20 kg	0,02 kg
2 g	0,02 kg	0,002 kg	0,002 kg	0,2 kg	0,002 kg
1 g	0,001 kg	0,001 kg	0,001 kg	0,001 kg	0,001 kg

Tableau n°45 - Réponses des apprenties aux conversions en kilos de quantités en grammes

e) 4^{ème} perte de contrôle : le résultat proposé par une apprentie à la conversion de 900 g résiste à l'interprétation de l'enseignant

Lors de la conversion en kilos de la quantité de 900 g, Sa a proposé 90 kg comme solution.

Ce résultat a généré une perte de contrôle en ce sens que, sur l'instant, l'enseignant n'est pas parvenu, à travers les propos rapportés par l'enseignante de soutien qui traduisait les propos de Sa, la justification qu'elle donnait au résultat qu'elle avait proposé (et auquel elle avait manifestement l'air de tenir).

En l'analysant après coup, l'hypothèse que l'on peut en faire est que Sa a voulu dire que, comme le kilo représente une quantité plus lourde que le gramme, il faut que le nombre qui désigne la quantité en kilos soit inférieur à celui qui désigne la quantité en grammes ; sauf qu'au lieu de diminuer le nombre de grammes d'un facteur 10 (en ôtant un zéro), il faudrait le faire d'un facteur 1000.

L'interprétation s'applique en effet au résultat de 15000 g qu'elle avait trouvé auparavant lors de la conversion de 1 kg 500 (ajout d'un zéro pour passer des kilos aux grammes).

Partant de l'équivalence 9000 g = 9 kg, l'enseignant a donc montré à Sa qu'au moment où l'on se trouvait en présence d'un nombre de grammes inférieur à 1000, il fallait passer par un nombre de kilos inférieur à 1 et que ce nombre, représentant 0 kg et 900 g, s'écrivait 0,900.

De cette explication Sa ne retiendra que le fait de devoir ajouter un zéro et une virgule au nombre de grammes, puisqu'au moment d'établir la conversion en kilos de la quantité de 20 g, elle a proposé 0,20 kg.

Il en est d'ailleurs allé de même pour Co - ce qui n'était nullement lisible dans les résultats de 0,900 kg et 0,200 kg auxquels elle était parvenue lors des deux conversions préalables - qui a elle aussi donné 0,20 kg comme conversion de la quantité de 20 g.

Et l'on se rappelle à ce sujet que c'est également ainsi que Ca, au chapitre 6, effectuait les conversions en kilos de quantités exprimées en grammes.

Les explications auxquelles s'est livré l'enseignant pour montrer la nécessité d'insérer un 0 entre la virgule et le 2 du nombre pour le discriminer des 0,2/0,200 qui précèdent n'y ont en outre rien changé, puisque Sa a reconduit le même procédé à l'occasion de la conversion des 2 g qui suivait en aboutissant à 0,2 kg, alors que Co a visiblement repris l'idée du 0 intercalaire pour aboutir à 0,02 kg.

La reprise de contrôle par l'enseignant aura néanmoins lieu lors de la dernière conversion où toutes les apprenties, par association avec le résultat de 0,002 kg qui avait finalement été institué lors de la conversion des 2 g, parviendront toutes à produire le résultat de 0,001 kg.

e) 5^{ème} prise de contrôle : l'enseignant institutionnalise le tableau de conversion et les deux opérateurs qui y président

L'institutionnalisation qui a suivi visait à établir, sur la base des deux tableaux de proportionnalité constitués, les deux règles réciproques :

- pour transformer en grammes des quantités mesurées en kilos, il suffit de multiplier par 1000 chaque nombre représentant les kilos ;
- pour transformer en kilos des quantités mesurées en grammes, il suffit de diviser par 1000 chaque nombre représentant les grammes.

Les apprenties sont ainsi parvenues, à partir des deux tableaux constitués, à établir les opérateurs numériques - $\times 1000$ et $\div 1000$ - permettant d'effectuer les conversions attendues.

f) 5^{ème} perte de contrôle : au cours de la vérification des résultats obtenus à l'aide la technique enseignée surgissent deux écueils à son utilisation.

Le premier écueil a surgi quand Co a obtenu 1'500'000 comme résultat à la transformation en grammes de 1 kg 500.

Ce résultat a en effet permis de montrer que pour établir sur la calculette les conversions en grammes de quantités exprimées en kilos à l'aide de l'opérateur $\times 1000$, il était nécessaire de passer par l'expression de la quantité en kilos à l'aide d'un nombre décimal quand celle-ci ne comprenait pas un nombre entier de kilos (comme dans 1 kg 500, par exemple).

Alors qu'il avait été possible d'éviter le recours aux décimaux lors de la constitution du tableau, il devenait dès lors incontournable de transformer les quantités de 1 kg 500, 2 kg 300, 3 kg 1 et 3 kg 100, respectivement 1,500 kg, 2,300 kg, 3,001 kg et 3,100 kg pour être à même d'utiliser efficacement l'opérateur $\times 1000$ sur la calculette.

Le deuxième écueil est apparu quand les apprenties étaient en train d'établir leurs conversions et que l'enseignant a soudain réalisé que les opérateurs $\times 1000$ et $\div 1000$ auxquels on avait recours pour les établir étaient utilisés de manière contre-intuitive en regard des conceptions premières que l'on se fait de la multiplication (vue comme une opération qui accroît) et de la division (vue comme une opération qui réduit).

Dans le premier tableau de conversion, c'était en effet la multiplication par 1000 qui permettait de passer de l'unité la plus grande, le kilo, à l'unité la plus petite, le gramme, alors que dans le second tableau, c'était exactement l'inverse, la division permettant de passer de l'unité la plus petite, le gramme, à l'unité la plus grande le kilo.

L'enseignant redécouvre ici l'idée de Rouche (2006) - et qui était aussi probablement celle défendue plus haut par Sa lors de la conversion de 900 g en 90 kg - lorsqu'il affirme que ce n'est pas la proportionnalité, mais : « la proportionnalité inverse (qui) se retrouve d'une certaine façon dans les changements d'unités de mesures » (p.250), quand les nombres utilisés pour exprimer une grandeur augmentent/diminuent de façon inversement proportionnelle à la taille des unités de mesures qui les accompagnent. La perte de contrôle se concrétise au moment où il tente de faire part de sa découverte

aux apprenties, leur disant que, pour sa part, c'est ce qu'il retiendra de cette séance ; les apprenties ne semblant manifestement pas comprendre de quoi il voulait parler et Tiz lui rétorquant que c'était assurément faux, parce que, tous ces "trucs", ils les connaissaient avant de les leur proposer.

e) 6^{ème} prise de contrôle : l'enseignant propose aux apprenties de compléter la fiche d'application à partir de la technique qu'il leur a enseignée.

La fiche d'application préparée en amont (cf. figure n° 44) a été donnée aux apprenties⁴¹³ en fin de séance pour qu'elles puissent s'entraîner à établir des conversions suivant la technique qui leur a été enseignée.

Le contrôle est à nouveau entre les mains de l'enseignant, ce qui lui permet de conclure la séance selon le scénario prévu.

Des grammes et des kilogrammes...

1° Transforme en grammes des quantités mesurées en kilogrammes...

1 kg = 1000 g

0 kg = ...0g	1 kg = ...1000g	2 kg = ...2000g
10 kg = ...10000g	11 kg = ...11000g	12 kg = ...12000g
1 kg 200 = ...1200g	2 kg 300 = ...2300g	3 kg 400 = ...3400g
0 kg 100 = ...100g	5 kg 600 = ...5600g	8 kg 900 = ...8900g
1 kg 230 = ...1230g	2 kg 340 = ...2340g	3 kg 450 = ...3450g

2° Transforme en kilogrammes des quantités mesurées en grammes...

1000 g = 1 kg

1000 g = ...1kg	2000 g = ...2kg	3000 g = ...3kg
100 g = ...0,1kg	200 g = ...0,2kg	300 g = ...0,3kg
10 g = ...0,01kg	20 g = ...0,02kg	30 g = ...0,03kg
1 g = ...0,001kg	2 g = ...0,002kg	3 g = ...0,003kg
1200 g = ...1,2kg	2340 g = ...2,34kg	3456 g = ...3,456kg
120 g = ...0,12kg	234 g = ...0,234kg	345 g = ...0,345kg
12 g = ...0,012kg	23 g = ...0,023kg	34 g = ...0,034kg
2 g = ...0,002kg	3 g = ...0,003kg	4 g = ...0,004kg

1 g = 0,001 kg

Figure n°44 - Fiche d'entraînement aux conversions de mesures de poids complétée par Co le 12.01.12

L'analyse des productions issues des fiches montrera toutefois qu'aucune apprentie n'a repris le tableau de conversion durant la séance pour le faire.

Lou et Tiz sont parvenues, à l'aide de la calculatrice, à effectuer sans aucune erreur la plupart des conversions attendues⁴¹⁴.

Sa, qui a travaillé avec le MSP présent en classe, s'en est également très bien sortie, s'appuyant sur un tableau de conversion classique, constitué de quatre colonnes surmontées des abréviations "kg", "hg", "dag" et "g", que le MSP l'a aidée à reconstruire⁴¹⁵.

Quant à Co, qui a travaillé seule, elle y est également plutôt bien parvenue (cf. figure n°44), mais sans s'appuyer non plus sur un tableau.

⁴¹³ Excepté Jac, qui n'a pu compléter la sienne, ayant dû s'absenter pour reprendre son service en cuisine.

⁴¹⁴ Tiz n'a pas eu recours au tableau de conversion classique dont elle avait mention à deux reprises durant la séance. Lorsque l'enseignant s'est approché d'elle en fin de séance pour qu'elle le lui montre, il a pu observer qu'elle en construisait un comportant sept colonnes (allant des kilos jusqu'aux milligrammes), mais qu'elle avait besoin d'aide pour y placer les abréviations "hg" et "dag" au bon endroit ; elle savait en revanche très bien le faire fonctionner pour réaliser les deux conversions qu'il lui a proposées.

⁴¹⁵ Cela signifie, qu'à l'image des apprenties, le MSP ne s'était pas non plus laissé convaincre par l'efficacité de la technique enseignée en cours.

L'échange qui a eu lieu avec elle en fin de séance a montré qu'elle avait veillé, pour chaque conversion requise (excepté celles de 0 kg et de 10 kg dans la première partie de l'exercice et celles de 1000 g, 2000 g et 3000 g dans le second), à faire en sorte que la partie du nombre désignant les grammes comporte toujours trois chiffres et, en cas de défaut, de compléter les chiffres manquant par des zéros.

De fait, dans le premier exercice, la conversion de 1 kg 230 en 1230 g est immédiate, alors que celle de 11 kg en 11000 g implique l'ajout de trois zéros ; tandis que dans le deuxième exercice, c'est la conversion de 200 g en 0,200 kg qui est immédiate (avec l'ajout du zéro et de la virgule), alors que celle de 34 g nécessite l'ajout d'un zéro intercalaire, pour faire en sorte qu'il y ait à nouveau trois chiffres pour représenter les grammes.

Le procédé inventé par Co constitue ainsi une forme d'expédient qui lui permet de se jouer de la plupart des conversions kilos-grammes et grammes-kilos figurant sur sa fiche.

Etablir des conversions de mesures de poids : les procédés employés par les apprenties lors de l'épreuve d'évaluation des séances des 26 janvier et 2 février 2012

L'analyse des productions issues de l'épreuve d'évaluation consacrée aux conversions de mesures de poids que Co, Jac et Sa ont effectué durant la séance du 26 janvier 2012, puis Jad et Tiz (malades le 26), durant celle du 2 février 2012 vise à montrer comment, peu de temps (2 et 3 semaines) après la séance du 12, ces apprenties⁴¹⁶, placées en situation d'interaction cognitive, vont s'y prendre pour établir les conversions demandées.

L'épreuve d'évaluation comprend trois exercices (cf. figure n°45). Les deux premiers exercices sont très semblables⁴¹⁷ à ceux figurant sur la fiche d'application (cf. figure n°44) donnée en cours dans la séance du 12 janvier 2012.

L'exercice n°1 demande de transformer en grammes des quantités mesurées en kilos, tandis que l'exercice n°2 demande de transformer en kilos des quantités mesurées en grammes.

Le troisième est l'exercice CP qui avait été donné en cours dans la séance du 3 novembre 2011 et qui n'avait fait l'objet d'aucune correction jusqu'ici. Pour rappel, il demande, partant d'un sac de carottes de 5 kg, de trouver ce qu'il en advient après épluchage des carottes (qui entraîne une perte de 450 g), puis après découpage (qui entraîne une nouvelle perte de 0,2 kg).

Lou était alors la seule apprentie à l'avoir correctement résolu.

L'épreuve d'évaluation de Co du 26 janvier 2012

Dans l'exercice n°1 (cf. figure n°45), on observe que tous les résultats proposés par Co comportent quatre chiffres :

- quand le nombre(ou les deux nombres) de l'item comporte(nt) quatre chiffres, il(s) est(sont) reporté(s) tel(s) quel(s), en ôtant la virgule quand elle est présente ;
- quand le nombre(ou les deux nombres) de l'item comporte(nt) cinq chiffres(nt), il(s) a(ont) été amputé(s) d'un zéro pour le ramener à quatre chiffres ;
- enfin, quand le nombre de l'item est inférieur à quatre chiffres, il lui a été ajouté le nombre de zéros nécessaires (à gauche ou à droite, selon que le nombre commence ou non par un zéro) pour qu'il en ait quatre.

⁴¹⁶ Lou et Mam, en raison de maladie, n'ont pas participé à l'épreuve.

⁴¹⁷ Avec une différence manifeste toutefois : quatre quantités exprimées en kilos y étaient désignées par un nombre décimal.

Dans l'exercice n°2, il en est à nouveau de même (à l'exception des trois items en tête de colonnes) : des zéros ont été ajoutés à la gauche du nombre jusqu'à ce qu'il comporte quatre chiffres et une virgule a été placée entre le dernier zéro et le premier chiffre différent de zéro du nombre, ce qui fait que l'on aboutit à des néologismes comme 00,17 ou 000,8 que l'on avait déjà rencontrés au chapitre 7 dans les épreuves de stage.

Co n'a donc manifestement pas repris le procédé qu'elle avait utilisé dans la séance du 12 janvier, mais qu'elle paraît plutôt avoir recouru à un tableau de conversion classique comprenant quatre colonnes et que c'est ce tableau qui a "borné" tous les résultats produits à quatre chiffres (excepté les trois en tête de colonne de l'exercice n°2 qu'elle a sans doute réussi à obtenir sans en faire usage) et créé ces néologismes.

Mathématiques		Evaluation n°2	
Exercice n° 1 : transformer en grammes des quantités mesurées			
Transformer en grammes les quantités suivantes :			
4 kg = ...4000g	12 kg = ...12000g	100 kg = ...0100g	
3 kg 100 = ...3100g	7 kg 800 = ...7800g	11 kg 700 = ...11700g	
0 kg 500 = ...0500g	0 kg 50 = ...0050g	0 kg 5 = ...0005g	
0,700 kg = ...0700g	1,200 kg = ...1200g	3,050 kg = ...3050g	
2,7 kg = ...2700g	0,9 kg = ...0009g	0,004 kg = ...0004g	
			5
Exercice n° 2 : transformer en kilogrammes des quantités mesurées en grammes			
Transformer en kilogrammes les quantités suivantes :			
7000 g = ...7kg	25000 g = ...25kg	3000 g = ...3kg	
900 g = ...0,900kg	270 g = ...0,270kg	325 g = ...0,325kg	
40 g = ...0,040kg	72 g = ...0,072kg	17 g = ...0,017kg	
3 g = ...0,003kg	8 g = ...0,008kg	1 g = ...0,001kg	
121 g = ...0,121kg	426 g = ...0,426kg	700 g = ...0,700kg	
			5
Exercice n° 3 : résoudre un problème comprenant des quantités mesurées en kg et en g			
Vous épluchez un sac de 4 kg de pommes de terre. Les épluchures pèsent 550 g.			
Calculez la quantité de pommes de terre épluchées que vous obtenez.			
quantité de pommes de terre épluchées : ...3'450kg.....			
Vous découpez ensuite les pommes de terre en dés. Le découpage entraîne 0,2 kg de déchets supplémentaires.			
Calculez la quantité de pommes de terre découpées en dés que vous obtenez.			
quantité de pommes de terre découpées en dés : ...3'449kg.....			
			4

App. CU FPI 2ans - Evaluation maths - Année 2011-2012 - jmf

Figure n°45 - Epreuve d'évaluation réalisée par Co le 26.02.12

Dans l'exercice n°3, Co a pu transformer le nombre 4 en 4000 pour procéder à la soustraction de 550 qui lui a donné 3'450 kg.

Une conversion a donc eu lieu ce qui marque une évolution vis-à-vis de la séance du mois de novembre où elle n'avait pas pu entrer en matière dans la résolution de l'exercice.

L'abréviation "kg" qui accompagne le résultat de 3'450 tend à montrer que la conversion en resté à un niveau numérique (les kilos ne sont pas devenus des grammes) ou alors que c'est la taille du nombre obtenu (comme chez Ca au chapitre 6) qui l'engage, parce qu'il comporte quatre chiffres, à l'accompagner de cette unité.

La résolution de la deuxième partie de l'exercice n'a en revanche pas impliqué de conversion : Co a soustrait 0,2 à 3'450 est obtenu 3499. On ne sait pas toutefois si c'est parce que les unités rattachées aux deux nombres étaient les mêmes que Co y a renoncé ou bien si c'est plus simplement parce que 3450 était un nombre suffisamment grand pour qu'il soit possible de lui soustraire 0,2 (ce qui n'était pas le cas du 4, auparavant, pour lui soustraire 550).

On voit encore que Co a effacé le 8 de la partie décimale du nombre apparus sur la calculatrice qu'elle avait inscrit dans un premier temps sur sa fiche.

Il s'agit là d'une façon de faire qu'elle avait déjà utilisée à l'occasion de la résolution du dernier exercice TQIR de l'année, quand elle avait "naturalisé" les résultats, correspondant à des nombres rationnels, qui étaient apparus sur l'écran de la calculatrice.

L'épreuve d'évaluation de Sa du 26 janvier 2012

Dans l'exercice n°1 (cf. figure n°46), les résultats de 1200 g pour 12 kg, de 1000 g pour 100 kg et de 1170 g pour 11 kg 700 proposé par Sa tendent à montrer qu'elle a, tout comme Co, eu recours à un tableau de conversion classique à quatre colonnes⁴¹⁸ pour effectuer les conversions : il semble bien en effet qu'ils aient été produits par un diagramme interdisant la production de nombres de plus de quatre chiffres.

Mathématiques Evaluation n°2

Exercice n°1 : transformer en grammes des quantités mesurées en kilogrammes

Transformer en grammes les quantités suivantes :

4 kg = 4000 g	12 kg = 12000 g	100 kg = 100000 g
3 kg 100 = 3100 g	7 kg 800 = 7800 g	11 kg 700 = 11700 g
0 kg 500 = 500 g	0 kg 50 = 50 g	0 kg 5 = 5 g
0,700 kg = 700 g	1,200 kg = 1200 g	3,050 kg = 3050 g
2,7 kg = 2700 g	0,9 kg = 900 g	0,004 kg = 4 g

Exercice n°2 : transformer en kilogrammes des quantités mesurées en grammes

Transformer en kilogrammes les quantités suivantes :

7000 g = 7 kg	25000 g = 25 kg	3000 g = 3 kg
900 g = 0,9 kg	270 g = 0,27 kg	325 g = 0,325 kg
40 g = 0,04 kg	72 g = 0,072 kg	17 g = 0,017 kg
3 g = 0,003 kg	8 g = 0,008 kg	1 g = 0,001 kg
121 g = 0,121 kg	426 g = 0,426 kg	700 g = 0,7 kg

Exercice n°3 : résoudre un problème comprenant des quantités mesurées en kg et en g

Vous épluchez un sac de 4 kg de pommes de terre. Les épluchures pèsent 550 g.

Calculez la quantité de pommes de terre épluchées que vous obtenez.

quantité de pommes de terre épluchées : 4000 g - 550 g = 3450 g

Vous découpez ensuite les pommes de terre en dés. Le découpage entraîne 0,2 kg de déchets supplémentaires.

Calculez la quantité de pommes de terre découpées en dés que vous obtenez.

quantité de pommes de terre découpées en dés : 3450 g - 200 g = 3250 g

Figure n°46 - Epreuve d'évaluation réalisée par Sa le 26.02.12

Les résultats de 0,500 g, 500 g et encore 500 g aux conversions de 0 kg 500, 0 kg 50 et 0 kg 5 peuvent également avoir été générés par un tableau à quatre colonnes, si les suites de chiffres 0500, 050 et 05 y ont été introduites à partir de la gauche, et qu'elles ont ensuite été complétées avec des zéros.

kg	hg	dag	g
0	5	0	0
0	5	0	0
0	5	0	0

Dans l'exercice n°2, ce serait aussi un tableau à quatre colonnes qui aurait permis à Sa d'exécuter correctement toutes les conversions.

Et c'est également lui qui, dans l'exercice n°3, serait à l'origine des conversions de 4 kg en 4000 g et de 0,2 kg en 200 g aboutissant aux deux soustractions 4000 g – 450 g = 3550 g et 3550 g – 2000 g = 1550 g.

⁴¹⁸ Rappelons que le MSP l'avait aidée à en créer un dans la séance du 12 janvier.

Jad a fait du tableau de conversion montre bien comment celui-ci rend impossible la production de nombres de plus de quatre chiffres (comme il a déjà été possible de l'inférer précédemment chez Co et chez Sa) A l'exercice n°1, il va produire 1200 g (au lieu de 12000 g) pour 12 kg, 1000 g (au lieu de 100000 g) pour 100 kg et 1170 g (au lieu de 11700 g) pour 11 kg 700 : les nombres étant "entrés" dans le tableau par la gauche et "arrêtés" sur la droite à la colonne des grammes, les zéros subséquents ne peuvent être pris en compte.

Dans le dernier item de l'exercice n°1 et dans les trois premiers de l'exercice n°2, le report des zéros figurant dans le diagramme au terme de la conversion semble avoir fait hésiter Jad : si elle les a reportés à chaque fois, alors qu'il n'était pas nécessaire de le faire, elle a pourtant fini par les effacer (avec du tipex) dans 7,000 kg et 2,5000 kg. Des zéros ont également été effacés dans les trois dernières conversions de l'exercice n°2, lesquelles aboutissent à des résultats plutôt surprenants (celles qui précèdent ayant toutes abouti à des résultats corrects) : 17 g -> 17 kg ; 1 g -> 1 kg ; 700 g -> 7 kg ; on peut néanmoins penser que Jad a interverti le sens de l'entrée des nombres dans le tableau, en les plaçant à partir de la gauche comme s'il s'était agi de quantités représentant des kilos, alors qu'il fallait le faire par la droite du fait qu'elles désignaient des grammes.

Dans l'exercice n°3, on voit encore que Jad est bien parvenue à effectuer les conversions et les soustractions attendues pour obtenir les bons résultats.

Ce qui marque une évolution vis-à-vis de la séance du mois de novembre où elle avait converti 4 en 400, effectué en colonne la soustraction $400 - 350$ pour aboutir au résultat de 350 qu'elle avait reconverti en 3,50, avant d'interrompre la résolution de la seconde partie de l'exercice.

L'épreuve d'évaluation de Tiz du 2 février 2012

Tiz s'est également appuyée sur un tableau de conversion de mesures classique pour effectuer les trois exercices de l'épreuve (cf. figure n°49).

Mathématiques		Evaluation n°2	
Exercice n° 1 : transformer en grammes des quantités mesurées en kilogrammes			
Transformer en grammes les quantités suivantes :			
4 kg = ...	12 kg = ...	100 kg = ...	
3 kg 100 = ...	7 kg 800 = ...	11 kg 700 = ...	
0 kg 500 = ...	0 kg 50 = ...	0 kg 5 = ...	
0,700 kg = ...	1,200 kg = ...	3,050 kg = ...	
2,7 kg = ...	0,9 kg = ...	0,004 kg = ...	
			5
Exercice n° 2 : transformer en kilogrammes des quantités mesurées en grammes			
Transformer en kilogrammes les quantités suivantes :			
7000 g = ...	25000 g = ...	3000 g = ...	
900 g = ...	270 g = ...	325 g = ...	
40 g = ...	72 g = ...	17 g = ...	
3 g = ...	8 g = ...	1 g = ...	
121 g = ...	426 g = ...	700 g = ...	
			5
Exercice n° 3 : résoudre un problème comprenant des quantités mesurées en kg et en g			
Vous épluchez un sac de 4 kg de pommes de terre. Les épluchures pèsent 550 g.			
Calculez la quantité de pommes de terre épluchées que vous obtenez.			
quantité de pommes de terre épluchées : ...			
Vous découpez ensuite les pommes de terre en dés. Le découpage entraîne 0,2 kg de déchets supplémentaires.			
Calculez la quantité de pommes de terre découpées en dés que vous obtenez.			
quantité de pommes de terre découpées en dés : ...			
			4

App. CU FPI 2ans - Evaluation maths - Année 2011-2012 - jinf

Figure n°49 - Epreuve d'évaluation réalisée par Tiz le 02.02.12

A l'exception des conversions de 0 kg 50 et 0 kg 5 qui ont toutes deux abouti à 500 g (ce qui est très cohérent si elle a entré la succession des chiffres par la gauche), elle n'a pas fait d'erreurs dans les trois exercices de l'épreuve.

Ceci témoigne d'une bonne maîtrise du tableau de conversion, qui était déjà apparue au terme de la séance du 12 janvier.

La résolution de l'exercice n°3 marque elle aussi une évolution vis-à-vis de la séance de novembre où, après avoir déjà réalisé une conversion correcte (4 kg - > 4000 g), elle avait hésité entre la division et la soustraction, puis renoncé à résoudre la seconde partie de l'exercice.

Le fait que Tiz n'ait jamais reporté de zéro superflu dans l'écriture des nombres laisse par ailleurs supposer que, contrairement aux apprenties qui précèdent, elle fait également preuve d'une bonne maîtrise des nombres décimaux.

Il est même possible d'avancer l'hypothèse que c'est précisément cette maîtrise des nombres décimaux qui occasionne de la part de Tiz une forme de contrôle sur le tableau de conversion et en assure le bon fonctionnement.

SYNTHÈSE DES ANALYSES

Les analyses effectuées dans ce chapitre viennent confirmer les enseignements concernant les investissements de savoirs et les interactions de connaissances à l'œuvre dans le contexte de la Fps mis en évidence au chapitre 6 et permettent d'en tirer de nouveaux.

Investissements de savoir dans le système cours

Les savoirs en jeu dans les cours de mathématiques donnés aux apprenties employées de cuisine AFP sont à nouveau entièrement déterminés par les procédures de qualification qu'elles ont à accomplir au terme de leur formation. L'enseignement consiste essentiellement à leur proposer des techniques de résolution devant leur permettre de résoudre des exercices numériques qui relèvent à nouveau des quatre domaines d'expériences RFI, CP, TQIR, CC, tous en lien avec le secteur de la cuisine. Ces exercices ne correspondent toutefois pas aux tâches effectives que les apprenties ont la responsabilité de réaliser en cuisine. Le travail en cours et le travail en secteur constituent de fait deux lieux disjoints dont le rapport est tout au plus symbolique : il faut apprendre à résoudre les exercices des cours pour obtenir des notes suffisantes et réussir les examens, mais pas vraiment pour s'approprier des moyens directement utilisables dans le secteur.

La complexité cognitive des exercices figurant dans les procédures de qualification ne fait pas non plus l'objet d'une analyse spécifique, ce qui la rend très variable. Les apprenties se trouvent ainsi en passe de résoudre des exercices d'une complexité très importante (surtout si on les met en regard des savoirs maîtrisés par les stagiaires rapportés au chapitre 7) dont la détermination provient sans doute des procédures de qualification destinées aux formations de type CFC. Cette grande variabilité fait que l'enseignement dispensé ne peut être organisé comme à l'école obligatoire, en tenant compte de la complexité des situations et des savoirs, relativement au développement et aux compétences des élèves. Et c'est donc aux techniques enseignées qu'est dévolue la réduction du décalage entre la complexité d'un exercice et les compétences qui sont attribuées aux apprenties, ceci expliquant notamment les velléités de vouloir intégrer à la technique elle-même des éléments en passe d'en assurer le fonctionnement et le contrôle (ce qui la complexifie à son tour).

L'apprentissage des techniques enseignées ne va pas de soi pour les apprenties et les interactions de connaissances révèlent un certain nombre d'écueils (voir plus loin ce qui en est dit pour le cas particulier de la règle de trois) auxquels elles se heurtent. Elles sont par ailleurs susceptibles de varier d'un enseignant à un autre, ce qui délègue aux apprenties - implicitement, puisque la chose n'est pas contrôlée par le système - la charge d'en assurer la coordination.

Outre la résolution d'exercices et l'appréhension de techniques appropriées pour le faire, il est également possible de faire exister en cours d'autres enjeux de savoirs. Ainsi des savoirs à visée non-professionnelle ont pu être proposés aux apprenties sous la forme de petites recherches, et il a été également possible⁴¹⁹, par leur intermédiaire, de faire remonter et traiter en cours quelques problèmes rencontrés en cuisine. Ces deux enjeux de savoirs nécessitent toutefois d'être appuyés par une détermination interne forte, sous peine d'être irrémédiablement exclus des cours, au profit de la résolution des exercices par les techniques. Elle requiert donc de lever quelque peu la double contrainte, externe, constituée par les évaluations et les examens, ce qui relève du possible, lorsque l'on sait d'une part que, dans un contrat de reprise, l'évaluation est susceptible de se passer d'enseignement ; et que, d'autre part, un échec en mathématiques à l'examen n'entraîne manifestement pas un échec de la formation.

Interactions de connaissances dans le couple enseignant-enseigné

Les interactions qui se sont nouées entre l'enseignant et les apprenties ont donné lieu à un enseignement de type organisé durant le premier semestre de l'année. Les contraintes institutionnelles, internes et externes au CFPS, et plus particulièrement celle consécutive au surgissement d'une nouvelle épreuve d'examen ont fait que, durant le second semestre, ce dernier a basculé vers un enseignement de type improvisé qui a consisté, pour l'essentiel, à présenter des techniques susceptibles de résoudre les exercices figurant dans cette épreuve et qui a été entrecoupé par des évaluations ponctuelles.

L'usage de la règle de trois pour résoudre des exercices TQIR.

L'enseignement fondé sur la résolution d'exercices TQIR par la technique de la règle de la trois a permis de révéler plusieurs écueils relatifs à son usage qui reprennent et viennent compléter ceux déjà mis en évidence avec Ca au chapitre 6.

1. Le premier écueil tient au fait que l'usage de la règle de trois se heurte à celui d'une technique alternative - l'usage direct du rapport interne qui lie le nombre de personnes (la quantité de produit) des deux recettes - qui est à la fois plus intuitive, parce que elle suit les variations (augmentation ou diminution) des quantités, et plus efficace, parce qu'elle n'implique qu'une opération à effectuer (une multiplication ou une division), alors que la règle de trois en compte deux (une division et une multiplication). Cet écueil est particulièrement manifeste chez Mam qui, dans la plupart des exercices proposés, cherche à déterminer la relation numérique permettant d'utiliser ce rapport d'interne, mais qui lui fait défaut.
2. Le deuxième écueil tient au fait que l'usage de la règle de trois est statique dans le sens où que l'on soit aux prises avec une augmentation ou une diminution de quantités, c'est toujours la division qui devra être accomplie en premier, suivie de la multiplication⁴²⁰. Or, les conceptions premières de la multiplication dans N tendent à l'envisager comme une opération qui accroît et celle de la division comme une opération qui décroît. Il est donc

⁴¹⁹ Rappelons que la chose a été délicate pour au moins trois raisons distinctes : les problèmes rencontrés en cuisine sont difficiles à circonscrire et à formuler ; ils peuvent être traités en cuisine par des moyens adaptés et circonstanciés ; et ils ne sont pas sous la responsabilité effective des apprenties. Il est donc indispensable, pour mieux y parvenir, d'intégrer les MSP dans la démarche.

⁴²⁰ L'assertion n'est évidemment vraie que lorsqu'on est aux prises avec des quantités représentées par des nombres supérieurs à 1, ce qui est toujours le cas lorsque la recette est établie pour un nombre entier de personnes.

difficile pour certaines apprenties de considérer qu'il faille commencer par effectuer une division pour réaliser les transformations quand les quantités de la recette doivent augmenter.

3. Le troisième écueil tient à la disponibilité/indisponibilité de certaines relations numériques chez les apprenties. L'usage de la règle de trois repose en effet sur deux relations numériques qui varient dans chaque exercice : celle qui lie le nombre de personnes (ou la quantité de produit) de la recette de base à 1 et qui est de type $n \div n = 1$; et celle qui lie 1 et le nombre de personnes (ou la quantité de produit) de la recette transformée qui est de type $1 \times m = m$. A plusieurs reprises, la non-disponibilité de l'une ou l'autre de ces relations est venue contrecarrer l'exécution de la règle de trois. A l'inverse, la disponibilité soudaine d'une relation numérique est susceptible de contourner l'usage de la règle de trois - cela été le cas par exemple chez Lou et chez Jad lors de la correction d'un exercice - au profit de l'usage direct du rapport interne.
4. Le quatrième écueil tient à la présence d'une règle, d'origine didactique, lié à la définition de l'ordre des nombres dans l'effectuation d'une division. Cette règle veut que le nombre le plus grand soit pris en premier, c'est-à-dire comme dividende, et le nombre le plus petit en second, c'est-à-dire comme diviseur. Très présente chez Mam, mais aussi chez Jac et chez Jad, elle participe à ce que dans l'exécution de la première partie de la règle, les deux termes de l'opération soient inversés.
5. Le cinquième écueil surgit au détour de la mise en relation qui est faite entre le nombre décimal ou rationnel qui est produit en cours ou au terme de l'exécution de la règle de trois et la grandeur qu'il est supposé représenter. On a pu l'observer chez Jac, surprise que le résultat 22,5 puisse correspondre à une quantité d'œufs ou chez Ca qui "arrangeait" les nombres obtenus, de façon à les rendre mieux compatible avec les grandeurs qu'ils représentent.
6. Le sixième écueil enfin procède lui aussi du contrôle des résultats produits par la règle, mais il relève d'estimations à vue, faites par les apprenties, qui évaluent leur vraisemblance et, le cas échéant, les modifient. Cette forme de contrôle, que l'on a pu associer à certaines gestes de cuisine, avait déjà été décelée chez Ca au chapitre 6, et même plus avant, au chapitre 1, lorsqu'une apprentie, lors de la résolution d'un exercice de proportionnalité, affirmait qu'une quantité de 100 g de fondue pour quelqu'un qui n'avait pas très faim pouvait très bien suffire.

L'analyse des parcours réalisés par trois apprenties tout au long de l'année montre en outre que ces écueils ne les empêchent pas de s'approprier progressivement le fonctionnement de la règle de trois pour résoudre des exercices TQIR, mais que le contrôle de son exécution reste très fragile, en étant continûment la proie de l'éventuel surgissement d'un aléa du milieu⁴²¹.

L'établissement de conversions de mesures de poids.

Dans les exercices RFI et CP qui impliquent des conversions de mesures de poids, la majorité des apprenties ne les prennent pas en compte (c'était déjà le cas de Ca au chapitre 6), sauf quand le calcul à effectuer par écrit ne peut être exécuté directement, parce les chiffres qui composent les nombres à additionner et à soustraire les en empêchent. Par ailleurs, lorsque le calcul est effectué sur la calculatrice, les conversions n'ont pas lieu non plus, ce qui produit des résultats aberrants dont les apprenties ne peuvent expliquer l'origine. La conversion de mesure intervient donc non pas pour faire en sorte que deux quantités soient rapportées à une même unité, mais bien pour faire en sorte de rendre le calcul fonctionnel. La façon de désigner un nombre dans l'énoncé d'un exercice, qui peut être établie de diverses manières dès lors que l'on se trouve

⁴²¹ Ce qui fait qu'il est impossible de déterminer comment les apprenties ont effectivement pu l'utiliser lors des procédures de qualification qui se sont déroulées en fin d'année et qu'elles ont toutes réussies !

aux prises avec des nombres décimaux (ce qui n'est pas le cas des nombres naturels), exerce de fait une influence significative sur l'établissement des conversions.

L'enseignement d'un tableau basé sur les opérateurs $\times 1000$ et $\div 1000$, fondés sur le rapport kilo/gramme s'est heurté au fait que la conversion en gramme d'une quantité comme 2 kg 300, au moyen de la multiplication par 1000 sur la calculatrice, nécessite un détour par l'usage d'un décimal et donc d'effectuer une conversion préalable de 2 kg 300 en 2,300 kg. Il a par ailleurs été remarqué que de telles conversions relèvent de la proportionnalité inverse, ce qui rend contre-intuitifs l'usage des deux opérateurs⁴²². Cet enseignement n'a par ailleurs eu aucun effet manifeste auprès des apprenties, puisque dans l'épreuve d'évaluation qui a suivi, elles ont, selon l'interprétation des productions qui ont été faites, toutes eu recours à un tableau de conversion classique⁴²³. A ce titre, si la construction du tableau était maîtrisée par la majorité des apprenties (comportant 4 ou 7 colonnes, avec ou sans en-têtes), son fonctionnement et son contrôle achoppaient notamment : à l'entrée des nombres dans le diagramme, à la gestion du report des zéros, au placement de la virgule, ainsi qu'à ce que le nombre de colonnes qui le constitue vient borner les résultats obtenus à des nombres de quatre chiffres au maximum. L'apprentie qui en a fait l'usage le plus approprié, étant aussi celle qui semblait avoir la meilleure maîtrise des nombres décimaux, cela signifierait que l'usage raisonné et contrôlé du tableau de conversion classique implique la maîtrise des nombres décimaux, alors qu'il est plutôt considéré comme un outil qui permet de pallier à leur non-maîtrise.

La dynamique des interactions dans les séances.

L'analyse en termes de pertes et prises de contrôle du développement de l'activité du couple enseignant-enseigné dans deux séances particulières a permis de caractériser leur dynamique. En amont de la séance, l'enseignant peut s'appuyer sur deux prises de contrôle pour prévoir l'enseignement qu'il va donner et échafauder un scénario qui en servira de cadre :

- la première prise de contrôle se constitue des savoirs engrangés dans les séances qui ont précédé, lesquels se sont notamment constitués à partir de l'interprétation qu'il a pu établir des productions des apprenties et qui forme une mémoire didactique ; dans l'interaction, cette mémoire est toutefois régulièrement susceptible d'être prise à défaut, parce que les savoirs qui s'y révèlent diffèrent sensiblement de ceux qui avaient servi à l'établir ;
- la deuxième prise de contrôle se réalise dans le choix des techniques et des supports retenus pour en réaliser l'enseignement - lesquels se fondent sur ses propres savoirs mathématiques et didactiques et dépendent des contraintes relatives au système - qui formeront le milieu à partir duquel il va réaliser l'enseignement.

En cours de la séance, le scénario établi va servir de repères à l'enseignant pour mener à bien son enseignement ; mais ce dernier va nécessairement s'accompagner de pertes de contrôles qu'il devra affronter. Ces pertes de contrôle sont produites par deux vecteurs principaux :

- le premier vecteur relève de l'activité des apprenties et des écueils successifs auxquels la technique qu'il cherche à enseigner va venir se heurter ; ces écueils l'obligent à des accommodations du scénario prévu et à des reprises de contrôle, sous forme d'explications, d'illustrations, de concrétisations, etc., qui, à leur tour, entraînent des pertes de contrôle de la part des apprenties ;

⁴²² Rappelons à ce titre qu'en ce qui concerne l'usage du tableau de conversion classique, une contradiction pouvant apparaître dans son fonctionnement avait également été mise en évidence dans le cadre théorique (cf. annexe du chapitre 3) : soit entre le passage uniforme d'une colonne à l'autre du tableau à l'aide de la division ou de la multiplication par 10 et la désignation des sous-unités par les préfixes "kilo", "hecto", "déca", "déci", "centi" et "milli" qui paraît "diminuer" vers l'unité de référence (le mètre ou la gramme, par exemple), puis augmenter par la suite.

⁴²³ Ce qui, en contrepartie, a montré qu'un enseignement préalable de ce tableau avait bel et bien eu lieu chez chaque apprentie, alors qu'une seule d'entre elles en avait fait explicitement la mention.

- le deuxième vecteur relève de la propre activité de l'enseignant, qui exerce lui aussi une interaction propre avec le milieu, quand il prend soudain conscience d'éléments qu'il n'avait pas prévu dans le scénario ; ceux-ci constituent pour lui des formes d'apprentissage dont il pourra, à terme, tirer parti, mais qui, dans la situation, tendent inévitablement à déstabiliser l'enseignement qu'il est en train de mener.

Ces prises et pertes de contrôles successives qui scandent le développement de l'activité du couple enseignant-enseigné font que les interactions ne peuvent pas être menées de façon linéaire suivant un scénario prévu à l'avance. Irrémédiablement, elles entraînent l'enseignant et les apprenties dans un *jeu* (Conne, 1999) dont l'issue, dans le meilleur des cas, sera un gain dans l'exécution et le contrôle de la technique enseignée pour les secondes et un gain de significations sur le fonctionnement de la technique aux mains des apprenties pour le premier, dont il pourra chercher à tirer parti lors de la conception et du pilotage d'interactions ultérieures.

Le chapitre 9 de la thèse apporte une illustration de cette idée de jeu, tel qu'il a pu être conduit au travers de dix séances de soutien proposées à une autre apprentie.

CHAPITRE 9 LE SOUTIEN APORTE A EL, APPRENTIE PRATICIENNE EN INTENDANCE AU CFPS DU CHÂTEAU DE SEEDORF, POUR FAIRE DES PROGRÈS EN MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

Le chapitre relate une quatrième et dernière incursion dans les investissements de savoirs et les interactions de connaissances dans la Fps, en prenant pour objet d'analyse dix séances de soutien qui, durant l'année 2012-2013, ont été proposées à une apprentie praticienne en intendance - dénommée El tout au long du chapitre - qui accomplissait sa formation à l'interne du CFPS, et qui en avait expressément fait la demande. Il est structuré par les dix séances de soutien et proposé sous une forme exclusivement narrative, intégrant dans un texte continu⁴²⁴, des éléments descriptifs issus des narrations récoltées après chaque séance et des éléments d'analyse, interprétant les productions récoltées d'une part, et considérant le développement de l'activité du couple enseignant-enseigné en termes de prises et pertes de contrôles d'autre part. Une synthèse des analyses est proposée en fin de chapitre.

NARRATION DES DIX SÉANCES DE SOUTIEN AVEC EL

1^{ère} séance avec El (05.12.2012) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette par l'usage direct du rapport interne

Après avoir passé quelques séances autour du thème des fractions, c'est à la demande explicite de l'apprentie que nous nous sommes retrouvés à examiner la question des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette. Lors de la séance précédente, El avait en effet déclaré qu'elle ne "savait pas toujours" effectuer de telles transformations, ce qui laissait supposer qu'elle connaissait (au moins) un procédé pour le faire, mais que celui-ci ne s'avérait pas fonctionnel dans tous les cas de figure. Mon intention, durant cette première séance, consistait donc avant tout à découvrir le ou les procédés qu'El savait utiliser pour effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette et, dans la mesure du possible, à identifier les écueils auxquels il achoppait. On peut donc la considérer comme une forme de prise de contrôle accomplie en amont, destinée à déterminer les savoirs à partir desquels l'enseignement pourrait être réalisé en aval.

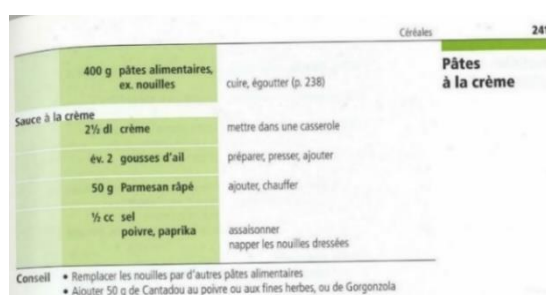


Figure n°50 - Recette des "pâtes à la crème" extraite du livre de cuisine appartenant à El

El avait amené son livre de cuisine⁴²⁵ pour cette séance, alors que, de mon côté, j'avais apporté deux exercices que j'avais utilisés, l'an passé, avec les apprenties employées de cuisine AFP. L'interaction s'est amorcée à partir d'une recette du livre, intitulée : « Pâtes à la crème » (cf.

⁴²⁴ Les décalages typographiques utilisés aux chapitres 6 et 8 ont donc été supprimés.

⁴²⁵ Il s'agissait du livre : « Croqu'menus : manger, boire, valoriser sa santé » (Affolter & al., 2009), qu'El utilisait dans le cadre de sa formation de praticienne en intendance.

figure n°50), qui, comme toutes les recettes que l'on y trouvait, était prévue pour quatre personnes. Lorsque j'ai demandé à El de transformer les quantités d'ingrédients pour douze personnes, elle a de suite commencé par transformer les 400 g de pâtes et les 50 g de parmesan, en opérant mentalement, pour trouver respectivement 1200 g de pâtes et 150 g de parmesan. Il ne faisait donc aucun doute qu'El avait bien pu identifier la relation numérique $4 \times 3 = 12$ qui liait le nombre de personnes de la recette de base au nombre de personnes de la recette transformée et qu'elle avait eu recours à l'usage direct du rapport interne pour effectuer ces deux premières transformations.

L'usage de cette technique s'est toutefois heurté à un premier écueil, dès l'instant où les quantités de la recette étaient exprimées à l'aide d'une fraction, comme c'était le cas pour les $2\frac{1}{2}$ dl de lait et les $\frac{1}{2}$ cc de sel : El ne savait pas comment s'y prendre mentalement pour effectuer les calculs correspondants et il n'était pas non plus possible de le faire en recourant la calculatrice à sa disposition, parce que celle-ci ne comprenait pas de touches pour taper des fractions. Cet écueil, qui a provoqué chez l'apprentie une perte de contrôle eu égard à la technique qu'elle employait, a généré en contrepartie une prise de contrôle de ma part, consistant à lui exposer, par écrit, comment il était possible de multiplier $\frac{1}{2}$ par 3 pour aboutir à $\frac{3}{2}$, puis comment on pouvait aussi transformer $\frac{1}{2}$ en 0,5, afin de pouvoir ensuite utiliser la calculatrice pour multiplier 0,5 par 3 et obtenir 1,5. L'idée était de lui montrer que la technique qu'elle avait employée pouvait bel et bien être reconduite sur toutes les quantités d'ingrédients de la recette, dès lors que l'on savait opérer avec les nombres qui les représentaient.

La résolution du premier exercice⁴²⁶ que j'avais emporté avec moi, qui demandait également de transformer les quantités d'ingrédients d'une recette pour quatre en une recette pour douze personnes, a été réalisée tout aussi facilement par El. Il a été à nouveau possible d'inférer que la relation $4 \times 3 = 12$ avait bien été identifiée par l'apprentie et que c'était l'usage direct du rapport interne qui avait été employé pour effectuer les transformations requises. Dans le second exercice que je lui ai proposé (cf. figure n°51), qui impliquait cette fois-ci la transformation d'une recette pour quatre en une recette pour quinze personnes, El n'a en revanche pas pu engager de procédé pour le résoudre, mais elle a néanmoins précisé que s'il avait fallu le faire pour seize personnes elle aurait eu une idée. C'était donc très clairement ici la présence du rapport décimal ($\frac{15}{4}$), et donc l'indisponibilité de la relation $4 \times \frac{15}{4} = 15$, qui constituait un second écueil à l'usage direct du rapport interne, alors même que, manifestement, cette technique aurait pu être envisagée, dans le cas où la transformation aurait porté sur seize personnes (plutôt que 15) et où le rapport aurait été égal à 4.

Dans un livre, on trouve la recette suivante :

Fabrication de la pâte à crêpes (4 personnes)

6 œufs	20 grammes de beurre
10 cuillères à soupe de farine	16 grammes de sucre ordinaire
8 verres de lait	6 cuillères à café de sucre vanillé

Cherchez les quantités d'œufs, de farine, de lait, de beurre, de sucre ordinaire et de sucre vanillé qu'il faut pour préparer des crêpes pour 15 personnes.

Figure n°51 - Recette de la pâte à crêpes reprise d'une épreuve d'évaluation de l'année précédente

La séance, qui n'est pas allée plus avant, El emportant avec elle l'exercice comme devoir, avait donc montré que c'était l'usage direct du rapport interne que l'apprentie utilisait pour effectuer des transformations d'ingrédients d'une recette. Elle avait aussi contribué à mettre à jour deux écueils où cette technique achoppait : la désignation d'une quantité d'ingrédients par un nombre fractionnaire et la présence d'un rapport interne décimal.

⁴²⁶ Il s'agissait de la recette du "cocktail tropical" (cf. chapitre 8, tableau n°40).

2^{ème} séance avec El (12.12.2012) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide de la règle de trois

A l'entame de cette deuxième séance, j'avais comme intention d'enseigner à El la règle de trois comme technique pour effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette lorsque le rapport interne était décimal. Pour ce faire, je comptais reprendre la résolution du second exercice que je lui avais soumis la fois dernière (cf. figure n°51) et qu'elle avait emporté comme devoir. Auparavant, je souhaitais cependant lui permettre d'éprouver l'idée qu'elle avait succinctement évoquée de transformer les quantités de la recette pour seize au lieu de quinze personnes.

A son arrivée en classe, El n'avait pas repris l'exercice avec elle et je n'ai pas su ce qu'elle avait pu en faire. Après avoir relu l'énoncé, elle se rappelait pourtant fort bien du fait qu'il fallait trouver une manière de "faire fois" pour passer de quatre à quinze personnes, mais sans pour autant savoir comment y parvenir. L'usage direct du rapport interne était donc à nouveau bien présent, tout comme l'écueil qui empêchait de l'employer. Lorsque j'ai proposé à El de reprendre son idée de déterminer les quantités pour seize personnes, en cherchant d'abord celles qu'il fallait pour huit, elle a très bien su le faire en commençant par doubler - elle disait à chaque fois : « deux fois six, douze ; deux fois vingt, quarante ; etc. » - celles qui étaient prévues pour quatre, puis en doublant, une nouvelle fois, les quantités pour huit qu'elle venait d'établir. A ma demande, elle est également très bien parvenue à désigner la relation multiplicative - $\times 4$ - qui unissait quatre à seize. Du fait que les relations numériques étaient disponibles, l'usage direct du rapport interne s'accomplissait sans heurts.

Revenant à l'énoncé de l'exercice, j'ai demandé à El si elle n'avait toujours pas d'idée sur la façon d'établir les quantités d'ingrédients pour quinze personnes. Elle a suggéré d'enlever 1 (œuf) à 24 (œufs) pour parvenir à 23, ce que l'on peut comprendre comme une tentative d'utiliser la relation $16 - 1 = 15$ unissant les nombres de personnes des deux recettes pour effectuer les transformations sur les œufs. Cette proposition a entraîné une première perte de contrôle, débouchant sur un essai d'invalidation sa proposition - soustraire huit fois 1 à 24 pour montrer que le résultat de 16 ne correspondait pas au résultat 12 qu'elle avait précédemment trouvé lors de la recherche des quantités pour huit personnes - qui a échoué (El ne comprenant manifestement pas où je voulais en venir). Et c'est finalement en lui indiquant que j'allais lui enseigner un procédé qui permettrait de déterminer les quantités d'ingrédients de la recette pour quinze personnes que j'ai repris le contrôle de l'interaction.

L'enseignement de la règle de trois auquel je me suis alors livré s'est déroulé en trois étapes. La première étape⁴²⁷ a consisté, partant des quantités d'ingrédients de la recette pour quatre personnes, à déterminer celles qui étaient nécessaires à la réalisation d'une recette pour deux personnes ; et c'est sans difficulté qu'El est parvenue à trouver les moitiés de chaque nombre représentant les quantités de la recette de base⁴²⁸. La deuxième étape a demandé, partant des quantités d'ingrédients de la recette pour deux personnes, de déterminer celles qui étaient nécessaires à la réalisation d'une recette pour une personne. Mais cette fois-ci, la recherche de la moitié de chaque nombre s'est heurtée au fait que trois d'entre eux (3 pour les œufs et le sucre vanillé et 5 pour la farine) n'étaient pas pairs (alors qu'ils l'étaient tous dans la première étape) : ainsi pour la moitié de 3 (œufs), El a tout d'abord proposé 2 comme moitié, tout en

⁴²⁷ Ce passage par une étape supplémentaire (au lieu de réduire directement les quantités à une personne) m'avait été dicté par une intervention de l'apprentie qui, lors de la séance précédente, m'avait avoué qu'elle ne savait pas "faire" les divisions ; j'imaginai cependant qu'elle saurait peut-être établir des moitiés, ce qui a bel et bien été le cas.

⁴²⁸ La question que j'ai adressée à El lui demandant si, à partir des quantités de la recette pour deux personnes, elle voyait comment aboutir aux quantités pour quinze personnes a produit un fait surprenant (générant une nouvelle perte de contrôle) : elle a proposé de "faire fois cinq", puisque que le 3, représentant la quantité d'œufs pour deux personnes, multiplié par 5 donnait bel et bien 15 !

avouant n'être pas trop certaine du résultat, ce qui m'a amené lui montrer comment il était possible, avec et sans calculatrice à prendre la moitié des nombres 3 et 5. La troisième étape enfin a consisté, partant des quantités d'ingrédients de la recette pour une personne, à déterminer celles qui étaient nécessaires à la réalisation d'une recette pour quinze personnes ; celle-ci a généré une nouvelle perte de contrôle, dans le sens où, contrairement à ce que j'avais pu m'imaginer, El ne voyait pas comment s'y prendre pour le faire : la relation $1 \times 15 = 15$ qui supportait la deuxième partie de la règle de trois n'était manifestement pas disponible (alors que jusqu'ici toutes les relations naturelles entre deux nombres avaient pu être aisément identifiées) et les encouragements que j'ai pu apporter à El pour chercher à la découvrir sur la calculatrice ne lui ont pas non plus permis d'y parvenir. Je me suis donc retrouvé contraint de lui montrer comment elle devait s'y prendre pour réaliser cette troisième étape, ce qui dévoilait une fois encore, que le fait d'avoir déterminé les quantités d'ingrédients de la recette pour une personne n'impliquait nullement ensuite de trouver facilement, par simple multiplication, les quantités d'ingrédients de la recette transformée.

Tandis qu'El était en train, à sa demande, de prendre note de la technique que je venais de lui présenter, trois nouveaux écueils à l'exécution de la règle de trois ont encore fait jour. Ces trois écueils, qui ont généré trois nouvelles pertes de contrôle dans le déroulement de la séance, étaient tous liés à l'usage de la division qu'El disait ne pas "savoir faire". Un premier écueil a surgi, lorsque je lui ai demandé comment l'on pouvait passer directement de la recette pour quatre personnes à la recette pour une personne : s'il avait bien été possible, auparavant, d'effectuer les transformations en prenant successivement deux fois la moitié des quantités d'ingrédients, il n'en découlait pas pour autant que ces deux opérations pouvaient être remplacées par la division par 4 ; et ce n'est pas non plus ma demande de rechercher sur la calculatrice la relation numérique qui unissait 4 à 1 qui a permis de la déterminer. Le deuxième écueil s'est manifesté au moment où je lui ai montré que l'on pouvait utiliser la division par 4 pour passer de la recette pour quatre à la recette pour une personne en tapant $/4 \div 4 = /$ sur la calculatrice. Lorsque je l'ai encouragée à le faire pour transformer les quantités d'ingrédients de la recette (voulant ainsi attester de son équivalence avec la succession des deux moitiés), El s'est mise à taper $/6 \div 6 = /$, puis $/1/0 \div 1/0 = /$ (au lieu de $/6 \div 4 = /$ et $/1/0 \div 4 = /$) avant que je ne doive l'interrompre. Enfin, le troisième écueil est advenu, après de nouvelles explications de ma part, quand El a tapé successivement $/4 \div 6 = /$, $/4 \div 1/0 = /$ (au lieu de $/6 \div 4 = /$ et $/1/0 \div 4 = /$), ce qui m'a conduit à lui montrer que, contrairement à la multiplication, l'ordre des termes d'une division avait une incidence sur le résultat produit et que, dans le cas particulier, il était nécessaire de commencer par le nombre qui représentait la quantité d'ingrédients à transformer.

La séance, qui s'est terminée par la fin de la copie de la technique par El (qui à nouveau emporté comme devoir la fiche comprenant l'exercice de la figure n°51), avait donc permis de confirmer que, lorsque la relation numérique sur laquelle se fondait le rapport interne était disponible chez l'apprentie, l'usage qu'elle en faisait pour transformer des quantités d'ingrédients d'une recette était bien maîtrisé. L'utilisation de la règle de trois comme technique de substitution quand le rapport était égal à $15/4$ s'était en revanche heurtée au fait que les relations $4 \div 4 = 1$ et $1 \times 15 = 15$ n'étaient pas disponibles chez El. La présence de nombres fractionnaires dans l'énoncé et la non-maîtrise de quelques propriétés de la division avaient également représenté d'autres écueils à son usage.

3^{ème} séance (16.01.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité

Pour cette troisième séance qui survenait un mois après la précédente, j'avais prévu de partir d'un exercice TQIR pour construire avec El un tableau de proportionnalité. L'idée était de lui

faire rencontrer, sur la base de ce tableau, les différentes propriétés - correspondance des sommes, correspondances des rapports internes et existence d'un rapport externe (Rouche, 2006) - de la proportionnalité. Il s'agissait ensuite d'envisager avec elle comment il était possible d'employer le tableau et les propriétés de la proportionnalité pour résoudre des exercices de transformation de recettes lorsque l'usage direct du rapport interne ne pouvait être emprunté du fait qu'il était décimal.

Le 26.12.2012

Mathématiques **Evaluation n°1**

Exercice n° 3 : adapter une recette

Pour préparer une quiche pour 10 personnes, il faut prévoir 400 grammes de pâte brisée. Quelle quantité de pâte brisée faut-il prévoir pour 2 personnes ?

quantité de pâte brisée pour 2 personnes : 80g

Pour faire une fondue, il faut compter 1200 grammes de fromage pour 6 personnes. Quelle quantité de fromage faut-il compter pour 4 personnes ?

quantité de fromage pour 4 personnes : 300g

2

Exercice n° 4 : adapter une recette

Dans un livre, on trouve la recette suivante :

Fabrication de la pâte à crêpes (4 personnes)

2⁴ œufs
4⁹0 cuillères à soupe farine
3²8 verres de lait,
20 grammes de beurre
16 grammes de sucre ordinaire
2⁴6 cuillères à café de sucre vanillé

Cherchez les quantités d'œufs, de farine, de lait, de beurre, de sucre ordinaire et de sucre vanillé qu'il faut pour préparer des crêpes pour 15 personnes.

X3
+3

œufs : 30 farine : 45
lait : 30 beurre : 45
sucre ordinaire : 60 sucre vanillé : 30

6

Exercice n° 5 : question bonus

Découpez 25 parts égales dans ce plat à gratin.

diviser pour une personne
faire x le nombre donné

1

Figure n°52 - Fiche-devoirs complétée par El durant les vacances de Noël 2012

A son arrivée en classe, El avait apporté la fiche prise comme devoirs (cf. figure n°52) qu'elle avait soigneusement⁴²⁹ complétée, avouant cependant que la tâche n'avait pas été facile à réaliser et qu'elle avait dû se faire aider par sa maman et par des copines. Après avoir succinctement examiné sa fiche, je lui ai proposé, ce qui a constitué une première perte de contrôle sur le déroulement de la séance, de se rendre au tableau, afin de m'expliquer comment elle s'y était prise pour résoudre les deux premiers exercices qui s'y trouvaient. Ainsi, j'ai pu apprendre que pour résoudre l'exercice 3a, c'était sa maman qui lui avait montré - El s'en rappelait et a fort bien pu l'expliquer - que l'on pouvait multiplier les 400 grammes de pâte brisée par 2 afin d'obtenir la quantité pour 20 personnes, puis qu'il suffisait d'enlever un zéro au nombre 800 pour trouver la quantité pour 2 personnes qui était donc égale à 80 grammes. Pour l'exercice 3b, El a déclaré, après avoir relu l'énoncé, qu'elle avait "divisé par quatre", avant d'écrire $1200 \div 4 = 300$ au tableau. D'un certain point de vue, ce choix paraissait assez

⁴²⁹ On observe en haut à droite de la fiche, la date du 26 décembre 2012 (soit le jour après Noël) qui marque encore une fois l'investissement conséquent dont El fait preuve.

étonnant, puisque elle avait déclaré à plusieurs reprises ne pas savoir faire des divisions ; mais d'un autre point de vue, il s'avérait assez compréhensible, puisque la division avait bel et bien été utilisée en décembre à l'occasion de l'enseignement de la règle de trois ; en outre, le résultat de 300 g obtenu par cette division, en se révélant inférieur à la quantité de la recette de base (1200 g), était bien conforme au fait que dans cet exercice, le nombre de personnes diminuait, passant de six à quatre personnes. Du reste, lorsque je lui ai demandé laquelle des deux méthodes de résolution lui paraissait la meilleure, El a répondu que c'était sans doute la seconde (la division par 4) puisque "quand il faut diminuer, il faut diviser" et que c'était d'ailleurs moi qui le lui avais montré la fois dernière.

Si El ne s'est pas exprimée sur les résultats qu'elle avait produits à l'exercice n°4, les traces que l'on découvrait sur sa fiche permettaient d'inférer qu'elle avait procédé au moins de deux manières distinctes (c'était sans doute ici qu'étaient intervenues les copines) : les nombres inscrits à côté de chaque quantité d'ingrédients (cf. figure n°52) montraient en effet que, dans un premier temps, elle avait multiplié chaque quantité par 4, ce qui pouvait être interprété comme une reprise du procédé utilisé dans l'exercice 3b, mais en substituant la multiplication à la division puisque le nombre de personnes augmentait (passage de quatre à quinze personnes) ; tandis que les nombres qu'elle avait inscrits comme résultats au bas de l'exercice relevaient de l'exécution de la règle de trois⁴³⁰ qui avait été rappelée au bas de sa fiche : "diviser pour une personne, faire x (fois) le nombre donné". Les inscriptions $\times 3$ et $+ 3$ dans la marge à gauche de la fiche pouvaient en outre faire état d'une tentative de déterminer la relation numérique unissant 4 et 15 ($4 \times 3 = 12$ et $12 + 3 = 15$), afin de recourir à l'usage direct du rapport interne.

Selon l'interprétation qu'il était donné d'en faire, El avait donc employé pas moins de quatre procédés pour effectuer les exercices figurant sur sa fiche de devoirs. Ceux-ci lui avaient été proposés par trois personnes différentes : sa maman, ses copines et son enseignant, ce qui marquait la variété des sollicitations dont elle avait fait l'objet et vis-à-vis desquelles il lui était sans doute difficile de se retrouver. Ce d'autant que, dans trois cas sur quatre, la procédure était dépendant d'un élément de l'exercice à résoudre, soit : les relations numériques qui liaient 10 à 20 et 20 à 2 dans le premier et la variation du nombre de personnes qui décroissait ou qui croissait dans la deuxième et la troisième.

Une fois que les échanges autour de la fiche de devoirs ont été terminés, j'ai repris le contrôle du fil de la séance en cherchant à construire avec El un tableau de proportionnalité à partir de l'exercice 3a. J'ai commencé par lui demander d'établir les quantités de pâte brisée nécessaires pour 20, 30 et 100 personnes, ce qu'elle a très bien su faire en multipliant 400 par 2, par 3 et par 10 pour obtenir respectivement 800, 1200 et 4000, me permettant d'organiser les résultats qu'elle avait produits dans un tableau :

				10	20	30	100				
				400	800	1200	4000				

Je m'attendais alors à ce qu'El soit en mesure d'utiliser les régularités numériques qui apparaissaient dans les nombres ainsi mis en correspondance pour compléter les autres cases du tableau. Je lui ai ainsi demandé si, partant des correspondances 10/400 et 100/4000, elle pouvait trouver le nombre qui serait le correspondant de 1 dans la partie inférieure du tableau, mais elle n'a pas pu le faire. Je pensais aussi qu'en observant les régularités de la suite 10, 20, 30 de la partie supérieure du tableau auxquels correspondaient les régularités de la suite 400, 800, 1200 de la partie inférieure, elle pourrait ensuite déterminer les correspondances 40/1600,

⁴³⁰ Cela fonctionne également pour les deux premières réponses, si l'on tient compte du fait que les résultats de la division par 4, qui donnent des nombres décimaux/rationnels ont été "arrondis" en 2 pour 1,5 et en 3 pour 3,333.

50/2000,..., mais cela n'a pas été le cas. J'ai également essayé de lui faire "trouver" la correspondance 5/200 à partir de la correspondance 10/400, en pensant qu'elle pourrait chercher la moitié de 400 après avoir compris que 5 était la moitié de 10, mais cela n'a pas non plus été possible. Les impasses successives dans lesquelles nous nous sommes retrouvés, lesquelles ont constitué autant de pertes de contrôle successives, ont conduit à ce que ce soit moi qui me retrouve en charge de le compléter : j'ai donc montré à El comment je m'y prenais pour le faire, en découvrant tour à tour les régularités numériques ou les propriétés de la proportionnalité sur lesquelles je m'appuyais, cherchant à ce qu'à son tour elle puisse en faire usage pour remplir de nouvelles cases. Tout cela a été bien laborieux et ce n'est qu'après coup, que j'ai pris conscience que j'avais proposé une tâche bien difficile à El, dans le sens où les régularités numériques et les propriétés de la proportionnalité qui me permettaient facilement de compléter le tableau étaient précisément celles que j'avais l'intention de lui faire découvrir à partir d'un tableau de proportionnalité déjà constitué. Or, dès le moment où j'avais rompu avec l'exercice qui avait permis à El de produire les premières correspondances, il était bien normal qu'elle ne soit plus en mesure d'aller plus loin, à moins de disposer déjà des régularités et des propriétés qui permettaient de le faire.

La séance, qui s'est conclue tout entière sur l'achèvement du tableau de proportionnalité, avait donc permis, dans un premier temps, de mettre en évidence la diversité des personnes et des procédés que l'apprentie était susceptible de rencontrer pour effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette et que, de façon totalement implicite (aucune des personnes sollicitées n'ayant en principe connaissance de ce qu'avaient proposé les autres), elle était appelée à devoir gérer. Dans un second temps, l'essai de constitution du tableau de proportionnalité avait montré que celui-ci n'avait pas pu être établi à un niveau exclusivement numérique, c'est-à-dire en étant détaché des grandeurs mesurées figurant dans l'exercice auquel il était supposé référer.

4^{ème} séance (23.01.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité, puis du produit en croix

Dans cette quatrième séance, j'avais à nouveau l'intention d'aboutir à la rencontre des propriétés relatives à la proportionnalité par l'entremise d'un tableau, mais, au vu de ce qui s'était passé dans la troisième séance, je souhaitais le faire cette fois-ci à partir d'un exercice qu'El maîtrisait bien. De fait, je me suis appuyé sur celui qu'elle avait résolu en décembre et qui mettait en jeu un rapport interne égal à 3, à partir duquel j'avais constitué trois tableaux de proportionnalité (cf. figure n°53).

Recette pour 4 personnes	4	8	12	2	10	1	100	7		20		21
Recette pour 12 personnes	12								18		9	

Recette pour 4 personnes	4	8	12	2	10	1	100	7	6	20	3	21
Recette pour 12 personnes	12	24	36	6	30	3	300	21	18	60	9	63

Recette pour 4 personnes	4	8	12	2	10	1	100			20		21
Recette pour 12 personnes	12		36		30		300	21	18	60	9	63

Figure n°53 - Tableaux de proportionnalité constitués à partir d'un exercice TQIR de rapport interne égal à 3

Le premier tableau, qui comprenait de nombreuses lacunes, devait en principe être aisément complété par El (à l'exception peut-être des deux cases où c'étaient les nombres représentant les quantités de la recette pour 12 personnes qui étaient donnés), en utilisant systématiquement le rapport interne fondé sur la relation $4 \times 3 = 12$. Le deuxième tableau, entièrement rempli, permettrait de contrôler les résultats établis dans le premier. Il serait alors possible de dégager les propriétés de la proportionnalité à partir des relations qu'El serait capable de trouver par elle-même (la relation $\times 2$ qui unit 4 à 8 et 12 et 24, par exemple) ou partant de celles que je pourrais lui montrer. Parmi ces propriétés, il y avait notamment celle des produits croisés que je comptais lui faire rencontrer en deux temps ; d'abord en découpant le deuxième tableau en carrés de quatre nombres, pour lui montrer que, quel que soit le carré considéré, le produit des extrêmes était toujours égal au produit des moyens ; ensuite, en découpant également le troisième tableau en carrés de quatre nombres, dont l'un serait systématiquement manquant, pour lui montrer qu'il était toujours possible de retrouver ce nombre (on pourrait le vérifier sur le premier tableau) par l'entremise de la technique du produit en croix : c'est-à-dire en multipliant les deux nombres figurant dans la même diagonale du carré, puis en divisant le produit obtenu par le troisième.

A ma grande surprise - de tout mon parcours d'enseignant spécialisé, je n'ai pas souvenir d'avoir jamais rencontré un élève qui s'était inventé des devoirs pour soi-même - El est arrivée en classe avec des exercices TQIR (cf. figure n°54) qu'elle avait créés par elle-même à partir de son livre de cuisine et qu'elle avait résolus. Cette irruption inopinée d'exercices inventés par El a fait que l'on s'y est arrêté pour qu'elle puisse me raconter comment elle s'y était prise pour effectuer ces exercices, ce qui a produit, tout comme au début de la séance précédente, une première perte de contrôle

Emmencé de bœuf à la tessinoise
Pour 16 pers.

4 Pers.
50 g lardons
1-2 cs huile = 16-8 cs
400 g émincé de bœuf = 1600 g
1 oignon = 16
1 cs farine = 16 cs
2 dl eau = 8 dl
1/2 cc sel = 15,5 cc
4 tomates = 4

Solution:
 $4 \times 4 = 16$
 $5 \times 3.5 = 16$
 $400 \times 4 = 1600$
 $1 \times 16 = 16$
 $2 \times 8 = 16$

Pain Pizza pour 15 pers.

4 Pers.
2 baguettes = 7.5 baguettes
2 tomates = 7.5 tomates
300 g mozzarella = 500 g mozza.
assaisonnement
4 cs parmesan râpé =

• $2 \times 7.5 = 15$
~ $2 \times 7.5 = 15$
✓ $5 \times 3 = 15$
x 4x

Doublé une Recette

$40 \times 10 = 400$
 $40 \times 30 = 1200 \text{ g} = 1 \text{ kg } 2$
 $40 \times 50 = 2000 \text{ g} = 2 \text{ kg}$
 $40 \times 60 = 2400$
 $40 \times 20 = 800$
 $40 \times 40 = 1600 \text{ g}$
 $40 \times 70 = 2800 = 2 \text{ kg } 8$
 $40 \times 80 = 3200 \text{ g} = 3 \text{ kg } 2$
 $40 \times 90 = 3600 \text{ g} = 3 \text{ kg } 6$
 $40 \times 100 = 4000 \text{ g} = 4 \text{ kg}$

Figure n°54 - Trois exercices créés et résolus par El hors classe

Les deux premiers exercices créés par El étaient très semblables à ceux que nous avons traités auparavant en classe. Il s'agissait de transformer les quantités d'une recette prévue pour quatre personnes en une recette prévue respectivement pour seize et pour quinze personnes. Ce qu'il y avait par contre de tout à fait singulier, c'est qu'El n'avait pas repris l'un des procédés utilisés dans les séances précédentes, mais qu'elle en avait élaboré un nouveau que l'on peut assurément qualifier, au vu du travail mathématique qu'elle a pu générer, de *conduite atypique* (Giroux, 2008).

Dans les deux cas, El était partie des nombres désignant les quantités d'ingrédients figurant dans la recette de base et avait cherché, par multiplication⁴³¹, à atteindre le nombre de personnes de la recette transformée (16 ou 15 selon l'exercice). L'opérateur qu'elle avait à chaque fois découvert avait alors été repris pour désigner la quantité d'ingrédients transformée : ainsi pour les 2 dl d'eau de la première recette, comme c'était l'opérateur $\times 8$ qui permettait d'aboutir à 16 ($2 \times 8 = 16$), cela donnait donc 8 (dl) comme quantité de la recette transformée.

Le procédé utilisé par El était cependant mis à défaut quand le nombre désignant la quantité de base était supérieur à 16 ou 15 et qu'elle ne voyait pas comme trouver un opérateur multiplicatif - il fallait en effet qu'il soit décimal⁴³² et inférieur à 1 - permettant de réduire ce nombre pour aboutir à 15 ou 16. C'était le cas, par exemple, dans la transformation des 50 g de lardons - comment, partant de 50, parvenir à 16 ? - qu'elle n'était pas parvenue à transformer. Dans les deux autres cas où le procédé était mis à défaut - les 400 g d'émincé de bœuf de la première recette et des 300 g de mozzarella de la seconde - El avait cependant trouvé un expédient, puisqu'au lieu de chercher à atteindre 16 ou 15, elle avait plutôt pris 1600 et 1500 comme cible, ce qui lui avait permis de trouver $400 \times 4 = 1600$ dans le premier cas et sans doute (même s'il n'est pas inscrit sur la fiche) $300 \times 5 = 1500$ dans le second. Cela étant, El n'avait pas repris, comme auparavant, les deux opérateurs obtenus ($\times 4$ et $\times 5$) pour désigner les quantités d'ingrédients de la recette transformée, puisqu'elle leur avait respectivement préféré 1600 (au lieu de 4) et 500 (au lieu de 5) ; mais il est possible de penser que ces deux choix visaient à faire en sorte que la quantité de la recette transformée soit bel et bien supérieure à celle de la recette de base (de manière à correspondre au fait que, dans les deux transformations, le nombre de personnes augmentait).

Le troisième exercice élaboré par El était en revanche assez différent, malgré son titre : « doubler une recette » qui permettait de le relier aux deux précédents. Il procédait d'une systématique, explorant l'ensemble des multiplications de type $40 \times n$, avec $n \in \{10, 20, \dots, 100\}$ et dont les résultats avaient été à chaque fois accompagnés de l'abréviation "g", signifiant des grammes. Tous les résultats (sauf 1600 g) comprenant des nombres de quatre chiffres avaient été transformés, de façon à nouveau systématique, en séparant le premier et le deuxième chiffre du nombre par l'abréviation "kg" (signifiant des kilos) et en supprimant tous les zéros. El m'a expliqué qu'elle avait effectué ces transformations à l'aide de sa sœur qui lui avait montré que 1200 g ("mille deux cent grammes") correspondait à une quantité de 1 kg 2 ("un kilo deux"), ce qui lui avait permis de transformer tous les autres résultats de la même manière. Le procédé consistait donc à établir des conversions en kilos de grandeurs mesurées en grammes, à partir d'un mode de désignation⁴³³ oral des mesures de poids qui veut qu'au lieu d'énoncer entièrement la mesure de "un kilo et deux cent grammes", on se limite à dire "un kilo deux" qui est ensuite retranscrit sous la forme de "1 kg 2". L'échange généré par ce troisième exercice qui visait à ce qu'El puisse éprouver cette technique sur d'autres quantités a montré que celle-ci se transférait très bien sur des nombres à cinq chiffres : 12500 g était facilement associé à 12 kg 5 ; qu'elle n'avait pas de signification pour des nombres à trois chiffres : 800 g ne pouvait pas être associé à 0 kg 8 ; et qu'elle ne crée manifestement pas d'ambiguïté : 2 kg 1 correspondait bien à 2100 g et non pas à 2010 g ou encore 2001 g.

⁴³¹ Une seule transformation y échappait : celle des $\frac{1}{2}$ cc de sel qui semblait plutôt bizarrement (?) être le fait d'une addition lacunaire : $0,5 + 15,5 = 16$.

⁴³² Il est très probable que c'était aussi le fait que l'opérateur ait été décimal (elle se heurtait à nouveau au 15/4 qui l'avait déjà empêchée de recourir à l'usage direct du rapport interne dans les deux premières séances) qui n'a pas permis à El de mener à bien cette technique pour transformer les 4 cs de parmesan (dernier ingrédient de la deuxième recette) qui est restée sans réponse.

⁴³³ Ce mode de désignation des grandeurs de poids qui contourne l'usage des nombres décimaux a été discuté au chapitre 8 lors de l'analyse de la séance consacrée aux conversions de mesures de poids. Le fait qu'il réapparaisse ici au travers de l'exercice élaboré par El et par sa sœur témoigne une nouvelle fois de sa présence au sein de la Fps.

Lorsque l'examen des trois exercices élaborés par El a été terminé, j'ai dévoilé le premier tableau de proportionnalité (cf. figure n°53) et lui ai demandé de le remplir. Après une hésitation pour savoir s'il fallait multiplier chaque nombre de la première ligne par 3 ou par 4 pour obtenir ceux de la seconde, c'est sans difficulté (en multipliant chaque nombre par 3 sans recourir à la calculatrice) qu'elle est parvenue à établir les sept premières correspondances du tableau : 8/24-12/36-2/6-10/30-1/3-100/300-7/21. A mon étonnement (je m'attendais plutôt à ce qu'elle continue en multipliant par 3 de la même manière ou bien qu'elle dise qu'elle ne savait pas comment s'y prendre pour le faire), El est également très bien parvenue à trouver celles où c'était le nombre de la partie supérieure du tableau qui était manquant : ainsi pour 18, je l'ai vue compter silencieusement par trois : « trois, six, neuf, douze, quinze, dix-huit », retenir le nombre de "fois trois" sur ses doigts et aboutir à 6 ; alors que cela a été instantané pour 9 où elle a inscrit directement 3 dans la case correspondante du tableau. Il en a été de même pour 20, directement transformé en 60, alors que le 21 final avait donné 61 (au lieu de 63).

La découverte du deuxième tableau a ensuite permis de confirmer, à la satisfaction d'El, que les résultats qu'elle avait produits étaient presque tous corrects (et de corriger le dernier), puis, contrairement à ce qui s'était passé dans la séance précédente, d'identifier plusieurs cas de correspondances de sommes et de rapports. Et c'est au cours de ce travail d'identification qui se déroulait à un niveau numérique qu'El m'a soudain interrompu pour me demander à quoi cela pouvait bien servir de faire tout cela. Cette interrogation⁴³⁴, générant une seconde perte de contrôle, marquait bien le fait que le travail mené relevait pour l'apprentie d'un paradoxe, le tableau ayant été correctement rempli, il n'y avait dès lors plus lieu de s'y attarder pour considérer les nombres et les relations entre nombres qui le composaient. En guise de réponse, j'ai donc expliqué à El qu'il s'agissait d'explorer d'autres chemins que celui qui procédait de la seule multiplication par 3, afin d'y avoir recours dans les exercices où il ne serait pas possible de procéder de la sorte.

La fin de la séance s'est déroulée selon le scénario prévu (et donc sans nouvelles pertes de contrôle) par la découpe du deuxième tableau en carrés de quatre nombres pour faire apparaître dans chacun la propriété des produits croisés ; puis par la découpe du troisième tableau en carrés de quatre nombres dont l'un était manquant et le recours au produit en croix pour permettre à chaque fois de le retrouver (la comparaison avec les nombres figurant dans le premier tableau permettant de le valider).

La séance avait révélé la création spontanée d'exercices TQIR de la part de l'apprentie qui, pour deux d'entre eux, avaient généré l'invention d'un procédé original. L'usage d'un tel procédé s'était heurté à des écueils par défaut de relations numériques disponibles, qu'elle avait dans deux cas réussi à contourner par accommodation des nombres de l'énoncé ; la prise en compte d'un élément de l'exercice - le nombre de personnes qui augmente - avait également produit une accommodation du procédé (dans le choix du résultat à prendre en compte). Un troisième exercice avait par ailleurs mis à jour un autre procédé permettant d'établir des conversions de mesures de poids (transformation en kilos de quantités mesurées en grammes) fondé sur le mode de désignation oral de ces mesures (cf. chapitres 6 et 8) et qui n'avait recours qu'à des nombres naturels. L'identification des propriétés de la proportionnalité au sein d'un tableau de proportionnalité préalablement complété par l'apprentie avait généré un paradoxe du fait que celles-ci étaient déterminées après coup et qu'elles ne s'avéraient dès lors pas fonctionnelles à son remplissage ou à sa constitution.

⁴³⁴ On retrouvait ici quelque chose de similaire à ce qui s'était passé lors de l'enseignement des fractions quand El avait déclaré qu'elle en savait maintenant assez.

5^{ème} séance (06.02.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité, puis du produit en croix

Pour cette nouvelle séance, j'avais prévu de revenir sur le tableau que nous avons complété la fois précédente, afin d'institutionnaliser les propriétés de la proportionnalité qui avaient pu être mises en évidence. Je comptais ensuite proposer à El un nouveau tableau de proportionnalité à compléter, établi à partir d'un exercice TQIR de rapport 15/4 (cf. figure n°55), en l'invitant à faire usage des propriétés de la proportionnalité qui avaient été institutionnalisées (l'ordre des nombres dans le tableau permettant, entre autres, de doubler 15 pour obtenir 30, d'additionner 15 et 30 pour trouver 45, de diviser 15 par 2 pour trouver 7,5, de multiplier 7,5 par 10 pour trouver 75, etc.).

Recette pour 4 personnes	4	8	12	2	10	1	100	7		20		21
Recette pour 15 personnes	15								60		150	

Figure n°55 - Tableau de proportionnalité constitué à partir d'un exercice TQIR de rapport interne égal à 15/4

Je comptais enfin montrer à El que le produit en croix, quels que soit les duos de couples de nombres du tableau envisagés, était bel et bien toujours valable, afin de pouvoir l'utiliser ensuite pour revisiter les fiches de devoirs qu'elle avait apportées en cours dans les séances précédentes.

La rencontre n'a cependant pu avoir lieu, El m'ayant averti le jour même par téléphone qu'elle ne pourrait y participer, parce qu'elle était trop occupée. Durant ce même téléphone, elle m'a également prévenu que nous n'aurions vraisemblablement pas la possibilité de nous revoir avant plusieurs semaines, puisqu'elle partait en stage et qu'elle ne serait plus présente au CFPS le jour de la semaine où avaient lieu nos rencontres. Avant de terminer, El m'a dit encore qu'elle avait créé de nouveaux exercices durant la semaine pour s'entraîner et je lui ai donc demandé de les faire déposer dans mon casier : le lendemain, j'ai ainsi trouvé un exercice (cf. figure n°56) qu'El avait à nouveau créé à partir de son livre de cuisine.

À transmettre pour
Meam-Michel Faivre.

Nouilles Chinoises

Doubler pour 15 pers.

4 pers.	
3 litres d'eau	45 litre d'eau
1 1/2 c. à soupe de sel	18 c. à soupe de sel
50 g de nouilles chinoises	5 kg et 250 g. nouilles chinoises
1 c. à café d'huile	15 c. à café d'huile
1 c. à soupe d'huile	15 c. à soupe d'huile
poivrons rouges	30 poivrons rouges
petite laitue romaine	15 petite laitue romaine
50 g de germes de soja	3 kg et 750g de germes de soja
1 cuillère d'huile	
1 c. à café de sésame	30 c. à café de sésame
100 g de cacahuètes	1 kg et 500 g. de cacahuètes
1 c. à café de sel	18 c. à café de sel
1 c. à soupe de sauce soja	30 c. à soupe de sauce soja

Solution :

3 x 15

1,2 x 15

350 x 15

1 x 15

2 x 15

350 x 15

Figure n°56 - Un nouvel exercice créé et résolu par El hors classe

Il s'agissait d'un exercice à nouveau très semblable à ceux que nous avons traités en classe : la recette était prévue pour quatre personnes et les quantités d'ingrédients devaient être transformées pour quinze personnes. Le procédé utilisé était encore une fois différent de tous ceux qu'elle avait employés jusqu'ici : il s'agissait de multiplier chaque quantité d'ingrédients de la recette de base par le nombre de personnes (15) de la recette transformée. Il n'était toutefois pas possible de déterminer si ce dernier pouvait être considéré comme une réplique partielle du produit en croix (il suffisait en effet de diviser par 4 chaque résultat obtenu pour aboutir aux bons résultats) ou si la multiplication avait été utilisée par El de façon à rendre compte de l'accroissement du nombre de personnes, passant de quatre à quinze, qui était en jeu dans l'exercice. On remarquait en outre que le nombre $1\frac{1}{2}$ qui représentait les quantités de sel de la recette avait été envisagé comme 1,2 (au lieu de 1,5) par El et que les quantités d'ingrédients qui, après transformation, étaient représentées par un nombre de quatre chiffres avaient été systématiquement transformées en kilos et en grammes ; la désignation des mesures en kilos, qui ne recourait à nouveau qu'à des nombres naturels, était cependant légèrement différente (sans que l'on ne sache d'où cela pouvait bien provenir) de celle que lui avait proposé sa sœur : si le premier chiffre du nombre était à nouveau suivi de l'abréviation "kg", les trois derniers chiffres étaient à chaque fois présents (les zéros n'avaient donc pas été supprimés) et accompagnés de l'abréviation "g", les deux parties étant encore reliées par le mot "et".

Le fait que la séance n'avait pu avoir lieu et qu'aucune autre rencontre ne pouvait être mise sur pied avant plusieurs semaines pouvait être assimilé à une nouvelle perte de contrôle, générée cette fois-ci, par une contrainte institutionnelle - la nécessité d'accomplir des stages - du CFPS. La question qui s'est alors posée était de savoir si une reprise de contrôle, ne serait-ce que partielle, était envisageable, pour faire en sorte qu'un travail avec l'apprentie puisse néanmoins se poursuivre en son absence. La réponse à cette question est venue d'El qui m'en a soufflé l'idée, par l'entremise des fiches de devoirs qu'elle réclamait et qu'elle avait commencé à créer par elle-même : je me suis dit que j'allais moi aussi tenter de passer par cet intermédiaire pour chercher à poursuivre le travail entrepris durant cette période d'interruption des cours.

Les fiches de devoirs complétées par El (06.02-27.03.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide de divers procédés

Durant la période allant du 6 février 2013 au 27 mars 2013, El a complété huit fiches de devoirs : elle a été l'auteure de deux fiches, alors que je lui en ai de mon côté proposé six.

La première fiche que j'ai fait parvenir à El (cf. figure n°57) comprenait un exercice de calcul de coût⁴³⁵ qui demandait de calculer le prix de deux quantités de farine données en kilos à partir de leur prix au kilo et il était accompagné d'un tableau de proportionnalité à compléter. Les calculs qu'El avait inscrits au verso de la fiche ($1,20 \times 3 = 3,60$; $1,20 \times 6 = 7,20$; $7 \times 1,20 = 8,40$) tendaient à montrer qu'elle avait commencé par chercher les résultats aux deux questions posées en multipliant le nombre représentant le prix au kilo par le nombre représentant la quantité de farine et qu'elle avait ensuite complété le tableau de proportionnalité en faisant un usage systématique (on le remarque à la mention de "e.c.t" et au fait que les résultats aient débordé du tableau) du rapport externe ($\times 1,20$ a été inscrit à la droite du tableau). Cela signifiait donc qu'El maîtrisait bien ce type d'exercice et l'on pouvait interpréter l'inscription figurant sur le feuillet jaune qui accompagnait la fiche ("je suis toujours intéressée d'avoir des devoirs sur les quantités de recettes") comme un rappel qui m'était adressé que ce n'était clairement pas ceux qu'elle souhaitait apprendre à résoudre.

⁴³⁵ Il s'agit de l'exercice que Rouche (2006, p.205) utilise dans l'introduction à son chapitre concernant la proportionnalité. La structure de base de l'exercice est multiplicative/M ; les nombres désignant les quantités de farine sont naturels, alors que celui qui représente le prix au kilo est décimal.

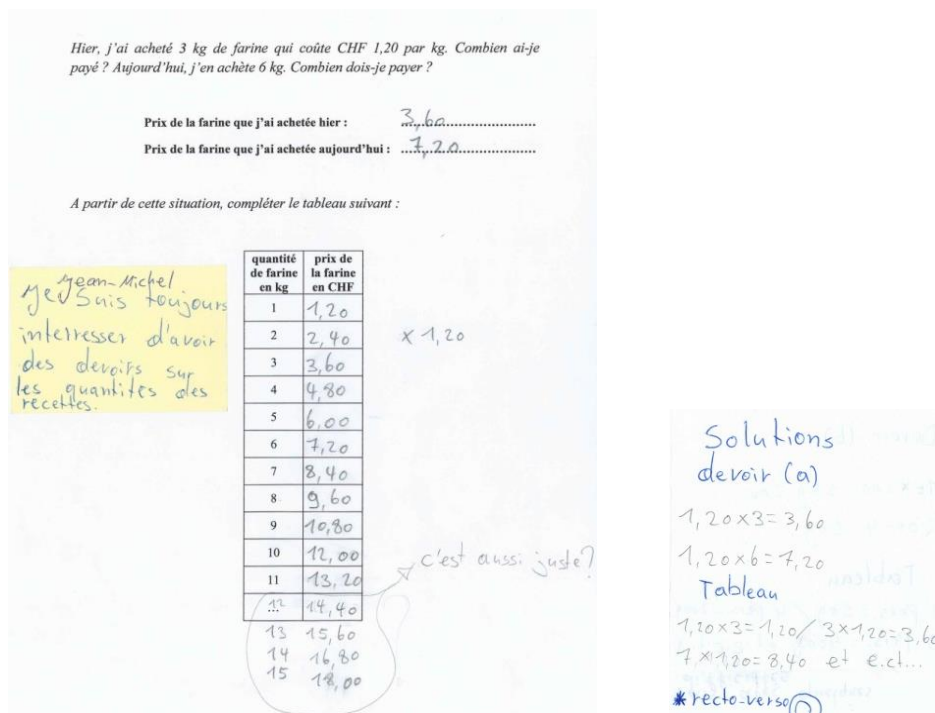


Figure n°57 - Première fiche de devoirs complétée par El hors classe

La deuxième fiche comportait un exercice (cf. figure n°58) demandant de transformer la quantité de riz d'une recette prévue pour quatre personnes en une recette prévue pour seize personnes, puis en une recette pour une personne. Il était aussi accompagné d'un tableau de proportionnalité à compléter. Les calculs figurant au verso de la fiche montraient qu'El avait à nouveau commencé par chercher les résultats des deux questions posées, avant de compléter le tableau.

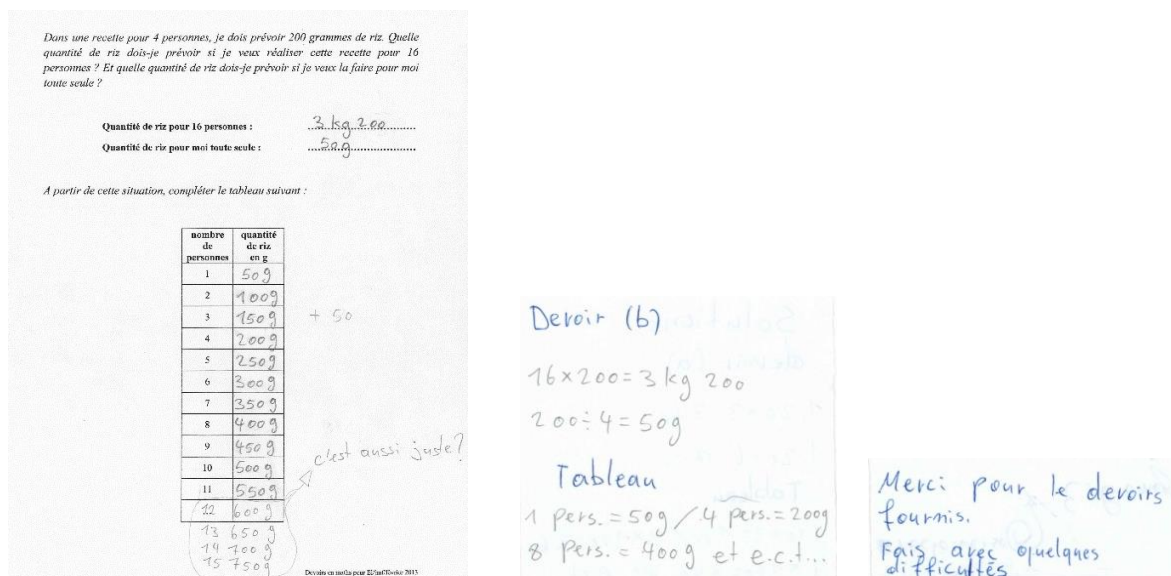


Figure n°58 - Deuxième fiche de devoirs complétée par El hors classe

De façon assez surprenante, El n'avait pas identifié la relation $4 \times 4 = 16$ (qu'elle maîtrisait pourtant) permettant de recourir à l'usage direct du rapport interne comme technique de résolution pour répondre à la première question. Elle avait reconduit le procédé utilisé dans le dernier exercice qu'elle s'était créé comme devoirs (cf. 5^{ème} séance) : en multipliant la quantité

d'ingrédients de la recette de base (200) par le nombre de personnes (16) de la recette transformée pour aboutir à 3200 (à nouveau transformé, cette fois-ci en 3 kg 200) ; en revanche, elle avait bien passé par la division par 4 pour obtenir la quantité d'ingrédients pour une personne. Il semblait donc que c'était ici avant tout la double correspondance "accroissement du nombre de personnes/multiplication" et "diminution du nombre de personnes/division" qui avait été prise en compte par El pour opérer. Par ailleurs, El avait à nouveau complété le tableau de manière systématique (on retrouve la mention de "e.c.t" et les résultats ont à nouveau débordé du tableau), mais en procédant par addition (voir le + 50 inscrit à droite) plutôt que par multiplication.

Les troisième et quatrième fiches de devoirs (cf. figure n°59) avaient entièrement été conçues et résolues par El. On y trouvait deux exercices TQIR (les recettes étaient à nouveau tirées de son livre de cuisine) demandant de transformer une recette pour quatre personnes en une recette pour seize personnes. La relation $4 \times 4 = 16$ avait ici bien été prise en compte et c'était l'usage direct du rapport interne qui avait été systématiquement employé. Les résultats comprenant un nombre à quatre chiffres accompagnés de l'abréviation "g" (1200 g et 1600 g à deux reprises) n'avaient en revanche pas été transformés en kilos, alors que les quantités exprimées à l'aide de la fraction $\frac{1}{2}$ avaient été prises pour le nombre 1,2 (comme cela avait été le cas précédemment pour $1\frac{1}{2}$) dans les calculs.

Boeuf à la chinoise

4 pers.	16 pers.
1 c.s sauce soja 1	4 c.s sauce soja
1 c.c vinaigre 2	4 c.c vinaigre
400 g boeuf 3	1600 g boeuf
1-2 cs huile 4	4-8 c.s huile
1 cc huile 5	4 c.c huile
4-5 champignon 6	16-20 champignon
1 oignon 7	4 oignon
1 poivron 8	4 poivron
1 petite courgette 9	4 petites courgettes
100 g germes de soja 10	400 g germes de soja
1-2 dl eau 11	4-8 dl eau
1/2 cc bouillon 12	4,8 cc bouillon
1 cc fécule 13	4 c.c fécule

Solution

$1 \times 4 = 4$ 1	$4 \times 4 = 16$ 6
$400 \times 4 = 1600$ 3	$4 \times 5 = 20$ 6
$2 \times 4 = 8$ 4	$100 \times 4 = 400$ 10
	$1\frac{1}{2} \times 4 = 4,8$ 12

Recette recto
fixer du verso
croq'menu

Chili Con Carne

4 pers.	16 pers.
150 g graine haricots 1	600 g graine haricots
1 cs huile 2	4 c.s huile
300 g boeuf 3	1200 g boeuf
400 g tomates 4	1600 g tomates
3 dl eau 5	12 dl eau
1-2 cc piments 6	4-8 cc piments
1/2 sel 7	4,8 sel

Solutions

$150 \times 4 = 600$	$3 \times 4 = 12$
$1 \times 4 = 4$	$2 \times 4 = 8$
$300 \times 4 = 1200$	$1\frac{1}{2} \times 4 = 4,8$
$400 \times 4 = 1600$	

Figure n°59 - Troisième et quatrième fiches de devoirs créées et complétées par El hors classe

Les cinquième et sixième fiches (cf. figure n°60) présentaient deux exercices TQIR extraits de Rouche (2006, p.251). Le premier exercice demandait de transformer la quantité d'œufs d'une recette prévue pour quatre personnes en une recette prévue pour douze personnes, puis en une recette pour cinq personnes et il était accompagné d'un tableau de proportionnalité à compléter. Le fait que le rapport en jeu dans la deuxième question soit décimal (égal à $\frac{5}{4}$) supposait que le tableau soit utilisé pour y répondre. Le second exercice demandait de transformer les cinq quantités d'ingrédients d'une recette (farine, levure, eau, beurre, œufs et sucre) prévue pour réaliser un nombre (50) de brioches (au lieu d'un nombre de personnes) en un autre nombre de brioches (30) et il était également accompagné d'un tableau de proportionnalité. Le rapport, à

nouveau décimal (égal à $3/5$), impliquait également en principe l'usage du tableau pour déterminer les quantités d'ingrédients transformées.

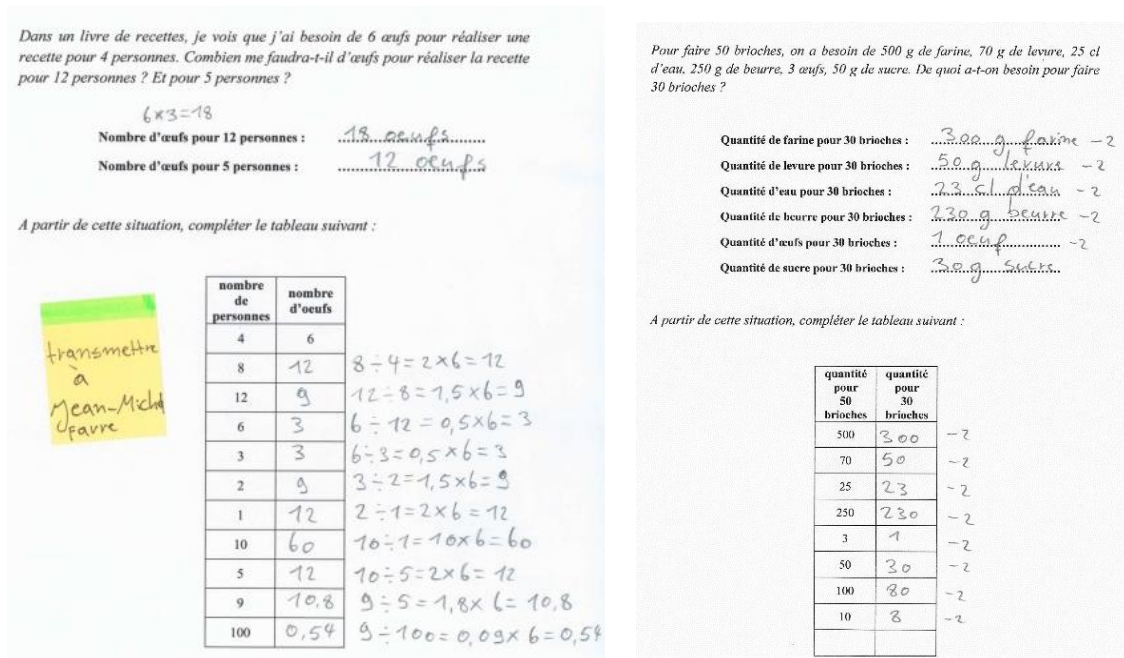


Figure n°60 - Cinquième et sixième fiches de devoirs complétées par El hors classe

Dans la cinquième fiche, El avait pu faire usage du rapport interne (elle avait écrit $6 \times 3 = 18$ en haut de sa fiche) pour trouver la quantité d'œufs de la recette pour douze personnes en s'appuyant sur la relation $4 \times 3 = 12$ qu'elle avait identifiée. En revanche, elle n'avait, comme attendu (puisque le rapport était décimal), pas pu faire de même dans le cas de la recette pour cinq personnes, ce qui l'avait manifestement contrainte à devoir commencer par remplir le tableau pour déterminer la nouvelle quantité d'œufs (le 12 figurant dans le tableau en face du 5 correspondait bien au résultat qu'elle avait écrit comme résultat en haut de sa fiche). Les calculs qu'El avait écrits à droite du tableau montraient qu'elle avait probablement tenté d'utiliser le produit en croix pour compléter tour à tour les cases vides, mais au lieu de multiplier les deux nombres figurant en diagonale d'un carré de quatre nombres et de diviser le produit par le nombre restant, elle avait divisé les deux nombres figurant dans la colonne de gauche avant de multiplier le quotient par le nombre restant dans la colonne droite. La technique à laquelle El avait recouru pour compléter le tableau avait été utilisée de façon systématique, sauf que les deux termes de la division avaient parfois été inversés (dans les cas de $3 \div 2$, $2 \div 1$ et $10 \div 5$), vraisemblablement pour faire en sorte de commencer par le nombre le plus grand. Les résultats décimaux, comme 10,8 ou 0,54 n'avaient pas été réfutés par El au motif que ces nombres pouvaient difficilement représenter une quantité d'œufs, ce qui donnait à penser qu'El évoluait bel et bien à un niveau numérique quand elle remplissait son tableau. Le nombre 12 qu'elle avait finalement inscrit comme résultat de la transformation n'avait pas non plus été remis en cause, alors même qu'il correspondait au doublement de la quantité d'œufs initiale et que le nombre de personnes était seulement passé de quatre à cinq.

Dans la sixième fiche, El avait eu recours à un nouveau procédé, utilisé là encore de façon systématique, par soustraction de 2 (- 2 est explicitement noté à treize reprises sur la fiche). La relation numérique sur laquelle il reposait avait sans doute été identifiée entre les deux nombres (50 et 30) qui représentaient les quantités de brioches de la recette de base et de la recette transformée, en excluant, ce qui est plutôt surprenant, le zéro de chaque nombre. C'était d'ailleurs de cette façon qu'El avait ensuite procédé pour établir chacune des cinq

transformations à réaliser, la soustraction de 2 portant sur la partie gauche de chaque nombre sans prendre en compte les zéros finaux : $500 - 2 = 300$, $70 - 2 = 50$, $25 - 2 = 23$, etc.

Les septième et huitième fiches (cf. figures n°61 et 62) proposaient encore deux exercices TQIR à partir de recettes extraites du livre de cuisine d'El. Le premier demandait de réaliser la transformation d'une recette pour quatre personnes en une recette pour six personnes et comprenait un tableau de proportionnalité à compléter. Le rapport décimal (égal à $6/4$) impliquait en principe l'usage du tableau, sauf s'il était considéré comme la reprise de la quantité initiale et l'ajout de sa moitié ($6/4$ étant égal à $1 + 1/2$). Le deuxième exercice, qui proposait la transformation d'une recette pour trente personnes en une recette pour dix personnes, permettait de recourir à la division par 3 si la relation $30 \div 3 = 10$ était disponible.

Dans mon livre de recettes « Croqu'menus », je découvre la recette des spaghettis carbonara qui est prévue pour 4 personnes :

Quantité	Préparation
400 g spaghetti	cuire, égoutter (p. 238)
100 g tranches de lard ou de jambon	émincer, rissoler
1 cr. huile	ajouter
1-2 gousses d'ail	préparer, émincer, ajouter, réduire la chaleur, faire revenir à feu doux, ajouter les spaghetti cuits, chauffer
2 dl crème	
2 œufs frais	
50 g Parmesan râpé	
1/2 cr. sel	
poivre	fouetter dans une terrine, ajouter, mélanger, servir immédiatement

Ce soir, j'ai invité 5 copines à dîner. Quelles quantités de spaghetti, de lard, d'ail, de crème, d'œufs et de parmesan dois-je prévoir ?

Spaghetti :	500 g	Lard :	125 g
Ail :	1,25 g ou 2,5 g	Crème :	2,5 g
Œufs :	2,5 g	Parmesan :	62,5 g

A partir de cette situation, compléter le tableau suivant :

Quantités pour 4 personnes	4 kg	1 kg	10 cs	10 dl	20 œufs	500 g
Quantités pour ... personnes						

$$\begin{aligned}
 400 \div 4 &= 100 \times 5 = 500 \\
 1 \div 4 &= 0,25 \times 5 = 1,25 \\
 2 \div 4 &= 0,5 \times 5 = 2,5 \\
 1 \div 4 &= 0,25 \times 5 = 1,25 \\
 100 \div 4 &= 25 \times 5 = 125 \\
 2 \div 4 &= 0,5 \times 2,5 \\
 50 \div 4 &= 12,5 \times 5 = 62,5
 \end{aligned}$$

Figure n°61 - Septième fiche de devoirs complétée par El hors classe

Dans le livre de recettes des cuisinières, je vois que pour préparer du jambon en croûte pour 30 personnes, je dois prévoir :

Ingrédients	Quantités
Jambon à l'os fumé	8 kg $\div 3$
Pâte	
Farine bise	2,5 kg $\div 3$
Levure	0,1 kg $\div 3$
Malt en poudre	0,04 kg $\div 3$
Sel	0,01 kg $\div 3$
Eau	1,5 l $\div 3$

Combien dois-je prévoir de quantités d'ingrédients pour 10 personnes ?

Ingrédients	Quantités
Jambon à l'os fumé	2,6 kg $\div 3$
Pâte	
Farine bise	830 g $\div 3$
Levure	33 g $\div 3$
Malt en poudre	13 g $\div 3$
Sel	3,3 g $\div 3$
Eau	5 dl $\div 3$

$$30 \div 8 = 3,75 \times 2 =$$

Figure n°62 - Huitième fiche de devoirs complétée par El hors classe

Lorsqu'El m'a rendu ces fiches dans la séance du 27 mars (voir plus avant), elle m'a informé qu'elle les avait complétées avec son éducatrice et qu'elle avait eu recours à un tableau pour déplacer les virgules (j'ai compris, même si elle n'avait pu le reconstituer en cours, qu'il s'agissait d'un tableau de conversion classique). Dans la première fiche (cf. figure n°61), c'était la règle de trois qui avait été utilisée de façon systématique par El pour effectuer les transformations. Le tableau de proportionnalité avait donc été laissé de côté et El l'avait plutôt employé après coup pour accomplir une autre transformation - passage de la recette pour quatre à une recette pour dix - où elle avait reconduit un procédé déjà employé à deux reprises : la multiplication des quantités d'ingrédients de la recette de base par le nombre de personnes de la recette transformée.

Dans la deuxième fiche (cf. figure n°62), le calcul figurant au verso montrait qu'El avait commencé par entreprendre la division de 30 par 8 pour effectuer la transformation des 8 kg de jambon de la recette de base et qu'elle avait ensuite voulu multiplier le résultat obtenu (3,75) par 2 (on pouvait penser qu'elle avait voulu répéter la règle de trois utilisée dans la fiche précédente, et qu'elle avait inversé les termes de la division pour faire en sorte de commencer par le plus grand nombre, mais on ne savait pas très bien par contre d'où elle avait pu tirer le facteur 2 de la multiplication). Et c'était probablement l'éducatrice qui, tout en lui montrant comment établir des conversions en grammes des quantités mesurées en kilos, lui avait indiqué qu'il était possible de recourir à la division par 3 qu'El a ensuite utilisé de façon systématique pour effectuer l'ensemble des transformations requises.

L'examen des huit fiches de devoirs complétées par El tout au long de sa période de stage montrait ainsi que si celles-ci lui avaient permis, à défaut des cours, de conserver un lien avec la tâche qu'elle souhaitait maîtriser - la transformation de quantités d'ingrédients d'une recette -, la question de savoir comment elle pourrait y parvenir (c'est-à-dire sur la base de quelle technique), lorsque la relation entre le nombre de personnes de la recette de base et celui de la recette transformée n'était pas disponible, restait, et pour elle et pour moi, encore toute entière.

6^{ème} séance (27.03.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide d'un tableau de proportionnalité, puis du produit en croix

Lors de la séance qui s'est déroulée au retour de stage, j'avais pris parti de m'appuyer sur la première fiche de devoirs (le calcul du prix de la farine) qu'El avait complétée en son absence pour procéder à l'institutionnalisation des propriétés de la proportionnalité qui n'avait pu avoir lieu au mois de février quand la séance avait été annulée. Il s'agissait ensuite de reprendre le produit en croix⁴³⁶, comme technique permettant de résoudre n'importe quel exercice TQIR et d'œuvrer à ce qu'elle puisse s'en emparer.

El est arrivée en cours avec les deux dernières fiches de devoirs (cf. figures n°61 et 62) qu'elle avait complétées et que, pour un temps, nous avons laissées de côté. Je l'ai plutôt invitée à relire la première qu'elle avait réalisée au mois de mars (cf. figure n°57). Elle ne se souvenait plus bien comment elle s'y était prise pour la compléter : ainsi, pour retrouver le premier résultat de CHF 3.60, elle a cherché combien il fallait ajouter à CHF 1.20 et trouvé CHF 2.40, mais elle ne se rappelait plus à quoi correspondait l'écriture $\times 1.20$. De cette première perte de contrôle a résulté un échange très directif, où suivant le projet d'institutionnaliser les propriétés de la proportionnalité que je m'étais donné, je me suis mis à les inscrire (cf. figure n°63, avec en rouge, le rapport externe et sa réciproque, en bleu, la correspondance des rapports internes, en

⁴³⁶ Le choix du produit croisé a essentiellement tenu au fait que, quel que soit le cas de figure, il ne reposait pas sur la disponibilité d'une ou plusieurs relations numériques qui, à défaut, devaient être établies avant d'être utilisées, les trois nombres à partir desquels il fonctionnait étant toujours directement disponible dans l'énoncé de l'exercice : le nombre de personnes de la recette de base, le nombre de personnes de la recette transformée et le nombre désignant la quantité d'ingrédients de la recette de base. Il pouvait par ailleurs être facilement inscrit dans un diagramme stable et facile à reproduire : un tableau à quatre cases.

vert, la correspondance des sommes et en rose finalement, les produits croisés) successivement sur le tableau de proportionnalité figurant sur la fiche, les illustrant au détour d'une ou plusieurs relations numériques liant les nombres qu'on y rencontrait. Or, si le discours que je portais suivait son cours de manière fluide, il était bien difficile, en contrepartie, de déterminer ce qu'El parvenait à en retenir, à l'image de ce qui s'était passé, durant la troisième séance, lors de la construction du premier tableau de proportionnalité. C'était un peu comme si l'institutionnalisation prononcée tournait à vide, car détachée des relations supposées la porter.

Hier, j'ai acheté 3 kg de farine qui coûte CHF 1,20 par kg. Combien ai-je payé ? Aujourd'hui, j'en achète 6 kg. Combien dois-je payer ?

Prix de la farine que j'ai achetée hier : 3,60.....
 Prix de la farine que j'ai achetée aujourd'hui : 7,20.....

A partir de cette situation, compléter le tableau suivant :

quantité de farine en kg	prix de la farine en CHF
1	1,20
2	2,40
3	3,60
4	4,80
5	6,00
6	7,20
7	8,40
8	9,60
9	10,80
10	12,00
11	13,20
12	14,40
13	15,60
14	16,80
15	18,00

Handwritten notes on the table:
 - Red circles around 3, 6, 9, 12, 15 in the first column.
 - Blue circles around 1, 2, 4, 8 in the first column.
 - Blue arrows indicating multiplication and division relationships between rows.
 - A note "x 1,20" next to the table.
 - A note "c'est aussi utile!" with an arrow pointing to the table.
 - Red circles around 3, 6, 9, 12, 15 in the second column.
 - A red circle around 1,20 in the second column.

Figure n°63 - Propriétés de la proportionnalité inscrites sur la première fiche de devoirs complétée par El

C'est cependant à partir des produits croisés que j'ai indiqué à El que j'allais maintenant lui montrer une technique qui allait dorénavant lui permettre d'effectuer toutes les transformations de quantité d'une recette qu'elle souhaitait accomplir⁴³⁷. Prenant l'exemple d'une recette établie pour trois personnes, demandant une quantité de 100 g d'ingrédients, que l'on voulait transformer pour vingt personnes, j'ai tracé un carré de quatre cases sur une feuille, lui ai montré comment y placer les trois quantités données (3p, 100 g et 20 p), puis comment opérer en multipliant tout d'abord les nombres qui figuraient en diagonale et en divisant ensuite le produit obtenu par celui qui n'avait pas encore utilisé, pour aboutir enfin sur la calculatrice au résultat de 666,66666 qui correspondait, en grammes, à la quantité d'ingrédients transformée (cf. figure n°64). El m'a simplement répondu se souvenir que je le lui avais déjà montré (ce qui était effectivement le cas, lors de la quatrième séance).

Proposant un deuxième exemple - une recette établie pour trois personnes, une quantité d'ingrédients de 50 g que l'on voulait transformer pour six personnes (le rapport de 2 étant ici choisi afin de pouvoir après coup valider le résultat obtenu) -, j'ai tracé un nouveau tableau de quatre cases, y ai inscrit 3 p et 6 p pour signifier le nombre de personnes et 50 g pour la quantité d'ingrédients à transformer, puis ai demandé à El de chercher la nouvelle quantité à prévoir (cf. figure n°64). Elle a d'abord fait mine de multiplier 3 par 50, puis s'est ravisée, multipliant 50 par 6 pour trouver 300 (prononçant "trois cent grammes"), qu'elle a divisé ensuite par 3 pour

⁴³⁷ « Enfin » aurait-elle pu raisonnablement s'exclamer, après tous les essais successifs auxquels nous, - c'est-à-dire, son enseignant actuel (et sans doute, tous ceux qui l'avaient précédé), sa maman, ses copines, sa sœur, son éducatrice et elle-même - nous étions déjà livrés ; mais également « pas sûr », vu qu'ils avaient jusqu'ici à peu près tous plus ou moins échoué.

trouver 100, que j'ai inscrit dans le tableau. J'ai alors demandé à El s'il aurait été possible de trouver ce 100 d'une autre manière, mais comme j'ai vu qu'elle s'essayait à reproduire ce qu'elle venait de faire, je l'ai interrompue, pour lui montrer qu'on aurait aussi pu⁴³⁸, du fait qu'on passait d'une quantité pour trois à une quantité pour six personnes, doubler 50 pour trouver 100.

3p	20p
100g	666,66g

3p	6p
50g	100g

15p	20p
300g	400g

Figure n°64 - Trois essais successifs d'utilisation du produit en croix

Dans un troisième exemple - une recette établie pour 15 personnes, une quantité d'ingrédients de 300 g que l'on voulait transformer pour 20 personnes -, c'est El qui s'est chargée du dessin du tableau de quatre cases et du placement des quantités. Le fait qu'elle ait commencé de multiplier 15 par 20 a demandé d'établir sur le tableau, à l'aide des numéros 1, 2 et 3 (cf. figure n°64) un ordre selon lequel procéder.

A la suite de ces trois premiers exemples, j'ai proposé à El d'utiliser cette technique pour contrôler les résultats qu'elle avait obtenus dans la deuxième fiche de devoirs (cf. fiche n°9) réalisée au mois de mars, ce qu'elle est très bien parvenue à faire. C'est alors que, de façon entièrement imprévue, l'enseignante en charge de ses cours d'éducation cognitive au CFPS est entrée dans la classe, ce qui m'a conduit à demander à El si elle consentait à lui montrer la technique qu'elle venait d'apprendre à faire fonctionner. La chose pouvait paraître anodine, mais c'était manifestement la première fois, depuis le début du soutien, que El se retrouvait en situation de montrer à une personne externe au couple enseignant-enseigné que nous formions, une technique qui se devait être fonctionnelle pour effectuer des transformations d'ingrédients d'une recette.

A cet effet, j'ai choisi un nouvel exemple, soit une recette établie pour quatre personnes, une quantité d'ingrédients de 450 g que l'on voulait transformer pour vingt personnes (impliquant un rapport de 5 devant permettre après coup de valider le résultat). El a dessiné un tableau de quatre cases, dans lequel elle a inscrit 4 p, 20 p et 450 g, avant de taper $450 \times 20 =$ sur la calculatrice et de diviser le résultat de 9000 par 4 pour trouver 2250 qu'elle a inscrit sous la forme de 2 kg 225 (on retrouvait l'influence de la sœur) dans la quatrième case du tableau (que je lui ai fait corriger en 2 kg 250). Alors que tout avait bien fonctionné, j'ai encore demandé à El si elle voyait comment il était possible de passer directement de la recette pour quatre à la recette pour vingt et elle m'a répondu que l'on pouvait "faire fois cinq". Voulant profiter de l'occasion occasionnée par la disponibilité de cette relation, j'ai dit à El qu'on aurait également pu utiliser ce "fois cinq" pour transformer la quantité de 450 g en 2 kg 250, mais tandis que je m'apprêtais à le lui faire vérifier sur la calculatrice, j'ai remarqué qu'El avait déjà commencé à multiplier 450 par 5, en comptant, à l'aide de ses doigts (elle utilisait un doigt pour marquer chaque nombre) : « 455, 460, 465, 470, 475 » pour aboutir 475. La tentative de contrôle du résultat obtenu par

⁴³⁸ La chose a d'ailleurs pu passer pour assez incongrue aux yeux de l'apprentie, sachant qu'après lui avoir promis de lui enseigner un seul procédé fonctionnant dans tous les cas de figure, dès le deuxième exemple, je lui en montrais un autre qui, dans le cas particulier, fonctionnait aussi bien.

l'usage de la technique du produit en croix par l'usage direct du rapport interne avait donc échoué, du fait que la multiplication à laquelle El s'était livrée n'avait pas abouti, entraînant une assez inattendue perte de contrôle.

La séance, qui s'est terminée par une invitation de l'enseignante d'éducation cognitive adressée à El pour qu'elle vienne montrer l'usage de la technique aux autres apprenties de la classe (une invitation à laquelle El a immédiatement souscrit et vis-à-vis de laquelle j'ai simplement demandé un temps de préparation préalable), avait donc montré que l'institutionnalisation des propriétés de la proportionnalité qui s'y était déroulée n'avait manifestement pas permis à El de les appréhender, mais qu'en revanche un processus d'appropriation de la technique du produit en croix paraissait s'être amorcé.

7^{ème} séance (10.04.2013) : effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide du produit en croix

La septième séance a eu lieu au retour des vacances de Pâques. Il s'agissait de poursuivre le processus initié autour du produit en croix lors de la séance précédente selon deux axes. Le premier axe visait à contrôler les résultats des fiches de devoirs complétées par El de façon à lui faire éprouver qu'il permettait bien de résoudre chaque exercice TQIR que l'on y rencontrait. Le deuxième visait à lui montrer que la technique permettait d'aller au-delà de la résolution de ce type d'exercices par le visionnement d'un clip vidéo, figurant sur "YouTube" et intitulé : « Le produit en croix »⁴³⁹.

A son arrivée, El avait emporté quatre nouveaux exercices TQIR (cf. figure n°65) qu'elle avait conçus et résolus pendant les vacances. Pour commencer la séance, je lui ai redonné à résoudre le dernier exemple qui avait traité dans celle qui précédait, à savoir la transformation pour vingt personnes d'une quantité de 450 g prévue pour quatre personnes. El est fort bien parvenue à utiliser le produit en croix pour déterminer la quantité transformée, sauf qu'elle a écrit 2250 kg au lieu⁴⁴⁰ de 2250 g (ou 2 kg 250).

⁴³⁹ Le clip est disponible sous : <https://www.youtube.com/watch?v=DQ9XLQ3CciI>. Il a été réalisé par des enseignants de l'école secondaire Jean Gauthier à l'Université du Québec à Chicoutimi, sous l'égide du Ministère de l'éducation et du sport du Québec. Le produit en croix y est tout d'abord présenté d'un point de vue strictement numérique dans les cas d'une proportion ou d'une égalité de deux fractions. L'exemple utilisé est l'égalité $1/2 = 2/4$ où l'on montre que le "produit des extrêmes" (1×4) est égal au "produit des moyens" (2×2). On dit ensuite que le produit en croix est utile, quand il manque un des trois nombres de la proportion ou de l'égalité des deux fractions. Un second exemple est proposé pour montrer comment le produit en croix fonctionne : $5/15 = 12/?$, où la résolution s'opère en trois temps : on commence par multiplier les extrêmes et les moyens pour aboutir à l'égalité : $5 \times 12 = 5 \times ?$; on résout la multiplication 5×12 à gauche du signe égal pour parvenir à $180 = 5 \times ?$; on divise chaque terme de l'équation par 5 pour trouver $? = 36$. Il est alors précisé que pour être plus rapide, il suffit (cela se fait par des gestes dans le clip) de multiplier les deux nombres qui sont "en croisé" (c'est-à-dire en diagonale), puis de diviser le résultat par le nombre qui est "tout seul" pour trouver celui qui est manquant. Trois illustrations contextualisées (c'est-à-dire non exclusivement numériques) de l'usage du produit en croix sont enfin proposées. La première examine le cas d'un examen où l'on a obtenu 30 points sur 35 et où l'on souhaite déterminer combien cela fait en pourcentage : on pose donc $30/35 = ?/100$ que l'on résout en multipliant 30 par 100 qui donne 3000, que l'on divise ensuite par 35 pour obtenir 85,71 (noté 85,71 %) : il est alors précisé de bien distinguer la nature des deux "étages" de chaque fraction : l'étage des numérateurs étant désigné par le terme "note" et celui des dénominateurs par le terme "total". La deuxième illustration concerne le cas d'un salaire horaire de 11,50 \$ et où il s'agit de trouver le salaire pour 40 heures de travail : on commence par distinguer "salaire"/"heure", puis on pose $11,50 \$/1 = ?/40$ que l'on résout en multipliant 11,50 par 40 qui donne 460, que l'on divise ensuite par 1 pour obtenir 460 (noté 460 \$). La troisième illustration rapporte au cas du prix de la viande de bœuf qui, au kilo, est égal à 9,80 \$/kg et dont on veut trouver le poids que l'on peut acheter pour 30 dollars : on commence par distinguer "prix"/"kg", puis on pose $9,80 \$/1 = 30/?$ que l'on résout en multipliant 30 par 1 qui donne 30, que l'on divise ensuite par 9,80 pour obtenir 3,06 (noté 3,06 kg). Pour terminer, on insiste encore sur le fait que le produit en croix est une technique rapide et efficace pour autant que l'on pense à bien écrire (c'est-à-dire à signifier à quoi correspondent les numérateurs et les dénominateurs) ce dont on parle. Dans son ensemble, le clip constitue un bel exemple de description d'une technique, fondée numériquement et algébriquement, avant d'être rapportée à des contextualisations particulières, soit ce qu'il est précisément difficile de réaliser à l'intention des apprenties de la Fps par défaut de pouvoir s'appuyer sur les propriétés numériques et algébriques qu'elle implique.

⁴⁴⁰ La correction apportée lui a fait dire qu'effectivement, cela représentait des grammes, sinon on ne pourrait pas les porter. Il s'agit là d'une réplique que j'ai entendue à diverses reprises, lorsqu'une apprentie intervertit l'abréviation "g" et l'abréviation "kg". Or, le contexte professionnel dans lequel elle est prononcée fait précisément disparaître l'ambiguïté suscitée par cette

Les rillettes de thon à la bretonne ^{20.03.13}	
Pour 6 pers.	Pour 15 pers.
• 200g de thon en boîte	• 666 g de thon en boîte
• 20 cl de crème fraîche	• 66 cl de crème fraîche
• 2 petits oignons	• 6 petits oignons
• 1 citron	• 3 citrons
• 2 oeufs	• 6 oeufs
• de la ciboulette	• de la ciboulette
• 4 cuillères à soupe d'huile d'olive	• 13 cuillères à soupe d'huile d'olive
• 4 cuillères à soupe de moutarde	• 13 cuillères à soupe de moutarde
• du sel et du poivre	• du sel et du poivre
Les oeufs mimosa	
Pour 4 pers.	Pour 35 pers.
• 6 oeufs	• 52,5 oeufs
• 3 cuillères à soupe de mayonnaise	• 26,25 cuillères à soupe de mayonnaise
• 1 poignée de persil	• 8,75 poignée de persil
• 1 cuillère à soupe de vinaigre	• 8,75 cuillères à soupe de vinaigre
• du sel et du poivre	• du sel et du poivre
La salade piémontaise ^{2e 30.03.2013}	
Pour 4 pers.	Pour 10 pers.
• 400g de tomates fermes	• 4 kg de tomates fermes
• 6 pommes de terre à chair ferme	• 105 pommes de terre à chair ferme
• 3 oeufs	• 52,5 oeufs
• 8 gros cornichons	• 140 gros cornichons
• 150 g mayonnaise	• 2 kg 625 g mayonnaise
• 1 talon de jambon	• 17,5 talon de jambon
• du sel poivre	• du sel poivre
Le gâteau aux marrons de l'Ardèche	
Pour 6 pers.	Pour 100 pers.
• 250 g crème de marrons	• 4 kg 166 g de crème de marrons
• 1 l. de lait	• 20 l. de lait
• 1 gousse de vanille	• 16 gosses de vanille
• 2 cuillères à soupe de farine	• 100 oeufs
• 6 oeufs	• 2 kg 800 g de sucre
• 125 g de sucre	• 2 kg 800 g de beurre
• 125 g de beurre	• 16 pincées de sel
• 1 pincée de sel	

Figure n°65 - Quatre nouveaux exercices créés et résolus par El hors classe

L'examen des devoirs qu'elle avait apporté n'a pas produit de pertes de contrôle, puisqu'il était justement prévu d'utiliser le produit en croix pour contrôler les fiches de devoirs. En revanche, ce qu'il a été possible d'y observer, c'est qu'El avait bel et bien recouru au produit en croix pour effectuer les transformations de chaque quantité d'ingrédients des quatre recettes et qu'elle y était parvenue sans commettre aucune erreur (les résultats du premier exercice correspondant à la transformation d'une recette pour six personnes en une recette pour vingt personnes et non pas quinze comme indiqué sur la fiche⁴⁴¹). Lors du contrôle des résultats avec le produit en croix, El a d'ailleurs manifesté sa grande satisfaction à cet égard et elle a même pu expliquer que les calculs produisaient parfois des nombres qui ne s'arrêtaient pas et que, dans ces cas, elle n'avait pas écrit tous les chiffres figurant sur l'écran de la calculette (elle m'a donné comme exemple les 4 kg 166g de marron du quatrième exercice).

Dans la suite la séance, le visionnement du clip s'est également avéré très porteur, dans le sens où il a été possible de l'interrompre à chacune des trois tâches contextualisées qui était présentée, de demander à El de rechercher la quantité manquante de la proportion à l'aide du produit en croix, puis d'assister à la résolution en direct qui officiait comme validation du résultat trouvé et en conséquence de la technique qu'elle avait utilisée. La fin de la séance a porté sur l'examen d'autres fiches⁴⁴² de devoirs qu'El avait collectés durant les deux premières années qu'elle avait passées au CFPS et qu'elle souhaitait me faire corriger. Avant qu'elle ne s'en aille, je lui ai encore donné les cinquième et sixième fiches de devoirs (cf. figure n°60) qu'elle avait complétées au mois de mars, de façon à ce qu'elle puisse aussi en contrôler les résultats à l'aide du produit en croix.

La séance avait donc montré que le processus amorcé la séance précédente vis-à-vis du produit en croix s'était poursuivi d'abord hors des cours, à l'occasion de la résolution des exercices qu'El s'était créés pendant les vacances, puis au sein même du cours, au travers des deux

intervention, dans le sens où précisément on n'aura jamais à porter 2250 kg d'ingrédients dans quelque recette que ce soit. Il est donc tout loisir d'adjoindre l'abréviation "kg" à un nombre de quatre chiffres non pas pour dire qu'il représente une quantité mesurée en kilos, mais simplement qu'elle en contient (c'est-à-dire qu'elle est égale ou supérieure à 1 kilo).

⁴⁴¹ Ne l'ayant pas interprété de suite, j'ai dit à El que je tenterai de le faire d'ici à la prochaine séance.

⁴⁴² Les fiches référaient toutes à des tâches professionnelles et sociales - établissement d'un budget, calcul de coûts, calcul de poids, mesures du temps, usage de la monnaie (El m'a dit qu'elle avait de la peine avec la monnaie) - à l'exception de deux d'entre elles qui proposaient des exercices de divisions qu'elle avait effectués sur la calculette (parce qu'elle ne savait pas faire les divisions).

activités qui lui avaient été proposées. Un processus que l'on peut qualifier de dévolution, au sens qui lui est donné par Brousseau dans la TDS (1998). Il a d'ailleurs été possible d'en obtenir un nouvel indice le lendemain de la séance, lorsque l'apprentie m'a interpellé durant la pause pour que je lui rappelle l'adresse du clip sur Internet.

8^{ème} séance (17.04.2013) : contrôler des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette à l'aide du produit en croix

Pour cette huitième séance, j'avais prévu de vérifier les deux fiches de devoirs qu'El avait emportées la fois précédente, puis de préparer avec elle l'intervention qu'elle aurait à réaliser en classe, pour répondre à l'invitation de l'enseignante d'éducation cognitive.

En début de séance, El m'a confié qu'elle avait montré le produit en croix à une collègue de secteur, ainsi qu'à une MSP qui lui donnait des cours de cuisine (qui l'avait félicitée d'avoir appris à s'en servir), ce qui indiquait que le processus de dévolution avait poursuivi son cours durant la semaine. El n'avait pas revu le clip que nous avions visionné la fois précédente, mais elle avait bel et bien conservé l'adresse du site, de manière à pouvoir le montrer aux éducateurs du pavillon où elle résidait et à ses collègues de classe.

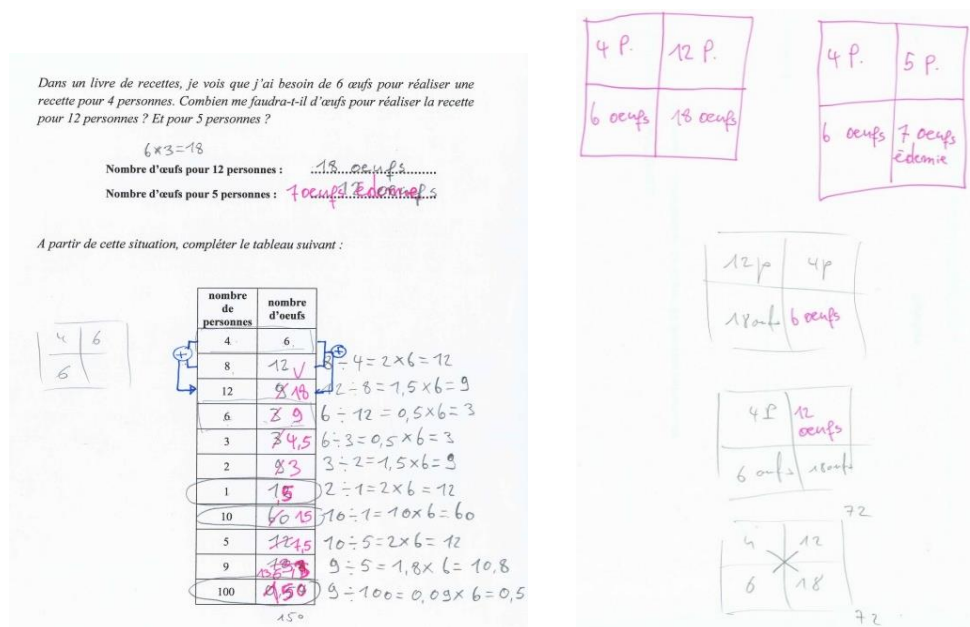


Figure n°66 - Correction de la cinquième fiche de devoirs à l'aide du produit en croix

El avait ramené ses deux fiches de devoirs, mais elle n'avait contrôlé, à l'aide du produit en croix, que le premier résultat de la première (6 œufs pour quatre personnes / 18 œufs pour douze personnes). Elle m'a avoué en effet que, lorsque les quantités diminuaient (de la recette pour douze à la recette pour cinq), elle n'avait pas su comment s'y prendre. Cela signifiait donc que si elle commençait à faire un usage adéquat du produit en croix, elle ne l'avait jusqu'ici considéré fonctionnel que pour les cas des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette où le nombre de personnes, entre la recette de base et la recette transformée, augmentait⁴⁴³ et qu'il lui restait donc à l'éprouver dans les cas inverses. C'est ainsi qu'après avoir contrôlé les deux résultats de la première fiche (cf. figure n°66), où j'ai été très étonné de remarquer qu'El a directement transformé le résultat 7,5 obtenu sur la calculatrice en "sept œufs à demie" qu'elle a inscrit dans le tableau à quatre cases (c'était la première fois en effet qu'elle

⁴⁴³ Il est d'ailleurs vraisemblable que le fait que le produit en croix commence par l'effectuation d'une multiplication ait pu contribuer à limiter son emploi à ces seuls cas de figure.

associait le 0,5 à l'idée de demi), je lui ai montré, à partir du premier exemple, que l'on pouvait tout aussi bien transformer, à l'aide du produit en croix, les ingrédients d'une recette pour quatre personnes en une recette pour douze personnes que les ingrédients d'une recette pour douze personnes en une recette pour quatre personnes, vu que les produits croisés (égaux à 72 dans le cas particulier) restaient les mêmes. Ceci a ensuite permis de corriger successivement tous les résultats figurant dans le tableau de la fiche, tandis que j'en profitais pour lui montrer d'autres techniques tout autant fonctionnelles, fondées sur d'autres propriétés de la proportionnalité.

Dans la seconde fiche (cf. figure n°67), El ne savait pas trop non plus comment utiliser le produit en croix pour vérifier les résultats (elle pensait d'ailleurs qu'ils étaient corrects). Cela laissait supposer que le fait que la transformation portait sur un nombre de brioches et non pas sur un nombre de personnes, comme dans la plupart des exercices rencontrés auparavant, pouvait être à la source de son embarras, ce qui voudrait dire que là encore, le produit en croix, avait besoin d'être éprouvé dans de tels cas de figure. Ceci était particulièrement manifeste dans la succession des tableaux de quatre cases qu'elle avait produits pour contrôler les résultats obtenus (cf. figure n°67) où les quantités de brioches pouvaient être confondues avec les quantités d'ingrédients à transformer (la distinction n'était plus si tranchée qu'avec des personnes) : ainsi, dans le second tableau, elle avait rajouté l'abréviation "g" au nombre de brioches, écrivant "50 g de brioches" (chose qu'elle refera encore à deux reprises par la suite), alors que dans les trois qui suivaient c'étaient les quantités d'eau, plutôt que les nombres de brioches qui avaient été prises pour servir de support à la transformation.

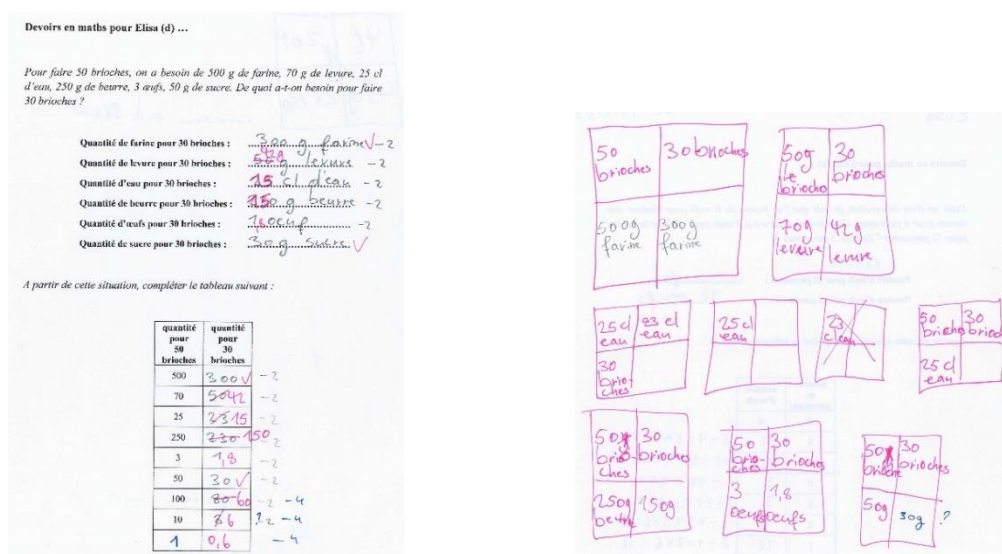


Figure n°67 - Correction de la sixième fiche de devoirs à l'aide du produit en croix

La correction des résultats figurant dans le tableau de proportionnalité s'est ensuite passée de manière plus fluide et il a même été possible, arrivant au bas de celui-ci, de donner l'occasion à El d'anticiper le nombre correspondant de 10 dans la colonne de droite qu'elle a trouvé en lui soustrayant 4, comme il avait été possible de le faire entre 100 et 60 !

La fin de la séance m'a d'abord donné l'occasion de dire à El que je pensais avoir compris comment elle avait procédé pour transformer les quantités d'ingrédients de la recette des rillettes de thon (cf. premier exercice de la figure n°65) et qu'au lieu de le faire pour quinze personnes, elle avait effectué pour vingt personnes (je lui ai montré que tous les résultats concordaient). Ensuite, j'ai pu très succinctement lui présenter (la séance touchant à sa fin), les documents que j'avais préparés en vue de son intervention en classe, le scénario que j'avais esquissé et les exercices que j'avais préparés à cet effet. Enfin, je lui ai donné deux nouvelles fiches d'exercices pour les devoirs. En quittant la classe, El m'a encore dit qu'elle était vraiment

contente d'avoir appris comment transformer les quantités d'ingrédients d'une recette et m'a demandé s'il serait possible de continuer les séances de mathématiques avec moi l'an prochain.

Cette dernière remarque donnait à penser que l'apprentie s'était dorénavant attribué une forme de contrôle sur l'usage du produit en croix pour transformer des quantités d'ingrédients d'une recette (ce qui était son objectif prioritaire à l'entame des interactions en décembre). La séance avait cependant montré que le processus de dévolution qui s'était amorcé et poursuivi durant la semaine nécessitait maintenant d'en éprouver l'usage sur des exercices de plus en plus diversifiés⁴⁴⁴ - quand les quantités diminuent, quand la transformation ne porte pas sur un nombre de personnes, etc. - pour en étendre et en consolider la portée.

9^{ème} séance (24.04.2013) : enseigner le produit en croix pour effectuer des transformations de quantités d'ingrédients d'une recette

Dans cette neuvième séance, nous devons préparer l'intervention d'El auprès des apprenties de sa classe. Le scénario que j'avais imaginé pour cette intervention se déroulait en trois temps. Dans un premier temps, El devait demander à ses collègues de résoudre par elles-mêmes un exercice TQIR⁴⁴⁵ (cf. figure n°68). Dans un deuxième temps, il s'agirait de leur enseigner le produit en croix pour (in)valider les résultats qu'elles auraient découverts. Alors que dans un troisième temps, El pourrait leur distribuer en guise de synthèse une fiche⁴⁴⁶ définissant le produit en croix (cf. figure n°68). La séance devait permettre à El d'explorer le scénario, en résolvant l'exercice et en découvrant la fiche-synthèse, pour déterminer si ce dernier lui convenait et si elle pouvait se l'approprier ; par ailleurs, elle constituait également, à son intention, une forme d'institutionnalisation du travail mené dans les séances précédentes.

Transformer les quantités d'ingrédients d'une recette de cuisine

Dans mon livre de recettes « Croqu'menus », je découvre la recette des spaghettis carbonara qui est prévue pour 4 personnes :

	cuis. 4 personnes (p. 230)	Spaghettis carbonara
400 g spaghetti		
100 g tranches de lard ou de pancetta		
1 cu. huile		
1-2 gousses d'ail		
2 dl crème		
50 g parmesan râpé		
½ cu. sel		
poivre		

Ce soir, j'ai invité 5 copines à dîner. Quelles quantités de spaghetti, de lard, d'ail, de crème, d'ail et de parmesan dois-je prévoir (en n'oubliant pas que je vais manger avec elles) ?

Spaghetti : 600g

Ail : 1,5-3 gousses

Œufs : 3.000g

Lard : 150g

Crème : 3.0l

Parmesan : 75g

Mathématiques – CPVS du Château de Seedorf – Apprenties A2 IN-CU

Notion mathématique : le produit en croix

Découverte : Pour transformer les quantités d'ingrédients d'une recette de cuisine, on peut utiliser un procédé qu'on appelle le « produit en croix » ou « produit croisé ». On construit un tableau à quatre cases et on place à l'intérieur les nombres de personnes de chaque recette et la quantité d'ingrédients à transformer.

	4	6	
Nombre de personnes			
Quantité (en kg, g, l, dl...)	300	450	

On multiplie ensuite les deux nombres qui se trouvent sur la même diagonale et on divise le résultat par le troisième :

$300 \times 6 = 1800$
 $1800 : 4 = 450$

Définition : Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, le produit des termes situés dans une diagonale est égal au produit des termes situés dans l'autre diagonale. Le produit en croix tire son nom du fait que les deux diagonales forment une croix sur le tableau.

D'autres utilisations du produit en croix :
 On peut utiliser le produit en croix dans beaucoup d'autres situations de la vie quotidienne, comme les calculs de coûts, les transformations d'unités de mesures, les dosages, les pourcentages, etc.

	400	1000	
Quantité de fromage (g)			
Prix du fromage (CHF)	12	30	

$400 \times 30 = 12000$
 $12000 : 400 = 30$
 $1000 \times 12 = 12000$
 $12000 : 1000 = 12$

Page 1

Figure n°68 - Fiches d'exercice et de synthèse en vue de l'intervention d'El dans sa classe

⁴⁴⁴ En guise de clin d'œil à Vergnaud, on pourrait parler de la nécessaire exploration du *champ conceptuel* du produit en croix.

⁴⁴⁵ Pour l'occasion, j'avais repris l'exercice de la septième fiche de devoirs effectuée par El au mois de mars, mais en modifiant partiellement l'énoncé (de manière à rendre plus explicite le fait que la cuisinière faisait bien aussi partie des convives) et en supprimant le tableau de proportionnalité.

⁴⁴⁶ La fiche prenait la forme de celles que j'avais proposées, l'année précédente, aux apprenties employées de cuisine AFP (cf. chapitre 8) pour institutionnaliser tour à tour les notions mathématiques que je leur avais fait rencontrer. Elle partait d'un exemple et montrait comment, sur la base d'un diagramme, faire fonctionner le produit en croix ; elle en donnait ensuite une définition et se terminait par une extension proposant un autre domaine d'expérience où il était possible d'en faire usage.

A son arrivée, El a commencé par me faire une farce : elle m'a dit qu'elle n'avait pas fait ses devoirs, juste avant de sortir, en souriant, les deux fiches de son cartable qu'elle avait entièrement et correctement complétées en utilisant le produit en croix (cf. figure n°69).

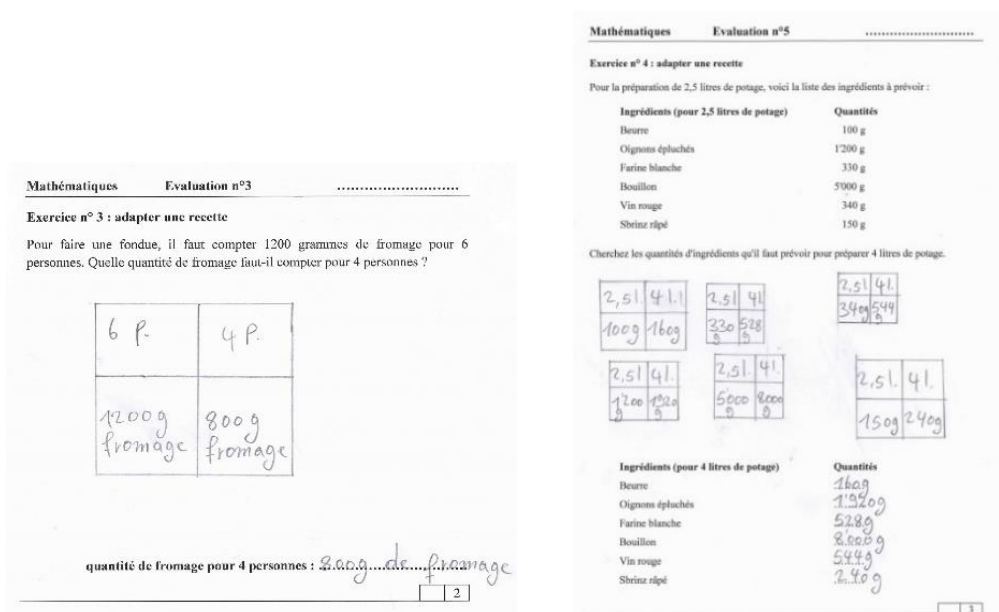


Figure n°69 - Deux nouvelles fiches de devoirs effectuées par El hors classe

Après lui avoir rappelé le scénario de l'intervention qu'elle aurait à réaliser deux jours plus tard dans sa classe, auquel elle a déclaré souscrire, je l'ai invitée à résoudre l'exercice qu'elle devrait soumettre à ses collègues. El a pris une feuille de brouillon sur laquelle elle a dessiné au stylo un grand tableau de quatre cases, puis elle a écrit "4 P" dans la case du haut à gauche, "6 P" dans la case du haut à droite et "400 g" dans la case du bas à gauche. Ensuite, elle a tapé $4/0/0/x/6/=$ sur la calculatrice, trouvé 2400, avant de diviser ce résultat par 4 pour aboutir 600, qu'elle a transcrit sous la forme de "600 g" sur sa feuille. Elle a procédé de la même manière pour les cinq autres quantités d'ingrédients à transformer, en utilisant le même tableau de quatre cases où elle effaçait et inscrivait tour à tour les quantités qu'elle projetait de transformer. Pour certains calculs (les multiplications), elle n'avait pas systématiquement recours à la calculatrice : ainsi pour la quantité d'ail, elle a procédé mentalement pour calculer $6 \times 1 = 6$, avant de taper $6/\div/4/=$ sur la calculatrice et parvenir à 1,5. Par contre, elle n'a pas utilisé le deuxième résultat trouvé pour l'ail pour en déduire celui de la crème ou des œufs (qui étaient les mêmes), elle a à chaque fois appliqué le produit en croix en entier. Une fois qu'elle a eu tout terminé, je lui ai montré qu'on aurait également pu employer d'autres procédés, en considérant, par exemple, la correspondance 4/400 pour trouver la correspondance 6/600, en reprenant le 3 des dl de crème pour déterminer la quantité d'œufs, ou bien encore en utilisant la correspondance 100/150 du lard pour établir la quantité de parmesan (en divisant les deux résultats par 2).

Une fois qu'El a eu terminé l'exercice, nous avons lu et complété la fiche synthèse (cf. figure n°69) que j'avais rédigée au sujet du produit en croix. Au terme de la lecture, El m'a demandé s'il était possible d'employer la même technique pour trouver son âge (j'ai compris qu'il s'agissait de déterminer son âge à partir de son année de naissance et de l'année en cours). C'était donc elle, maintenant, qui cherchait à étendre l'usage de la technique à d'autres exercices. L'essai qui en a résulté s'étant montré infructueux, j'ai alors pu lui montrer que c'était la soustraction qui, dans ce nouveau cas de figure, était la technique à employer.

Sa question m'a donné l'idée de lui proposer d'autres exemples de cas où l'usage du produit en croix n'était pas fonctionnel et j'ai recouru pour cela à une page du manuel d'exercices de Denver (cf. chapitre 5) destiné aux classes de formation élémentaire que j'avais sous la main et que je lui ai suggéré, après avoir vérifié que tout était bien en ordre pour son intervention en classe, d'entamer la résolution en classe, puis d'emporter comme devoirs.

El a eu le temps de résoudre deux exercices de la page du manuel à l'aide du produit en croix (cf. figure n°70), ce qui nous a permis de discuter du fait que celui-ci s'avérait pertinent pour résoudre le premier, mais qu'il ne l'était pas pour le second.

<i>Exercice 121.</i> <i>Une couturière gagne 135.-francs pour 15 heures de travail. Quel sera son salaire pour 40 heures de travail ?</i>	<table> <tr> <td>15 h</td><td>135.-</td></tr> <tr> <td>40 h</td><td>360</td></tr> </table>	15 h	135.-	40 h	360
15 h	135.-				
40 h	360				
<i>Exercice 122.</i> <i>Pour construire un mur, deux maçons ont besoin de 12 jours. Combien de temps faudra-t-il à quatre maçons pour construire le même mur ?</i>	<table> <tr> <td>2 M</td><td>12 j</td></tr> <tr> <td>4 M</td><td>24 j</td></tr> </table>	2 M	12 j	4 M	24 j
2 M	12 j				
4 M	24 j				

Figure n°70 - Exercices tirés d'un manuel pour la formation élémentaire résolus par El

La séance avait donc montré, au travers des deux fiches de devoirs et de l'exercice qui serait proposé à ses collègues lors de son intervention en classe, que l'usage du produit en croix était de mieux en mieux sous le contrôle de l'apprentie et qu'il était dès lors possible de l'éprouver dans des cas où cet usage ne s'avérait pas adéquat.

10^{ème} séance (01.05.2013) : éprouver la fonctionnalité du produit en croix dans de nouveaux domaines d'expérience

Contrairement à ce que je m'étais imaginé, cette dixième séance a finalement été la dernière où j'ai rencontré El dans le cadre de ce soutien, vu qu'elle est ensuite repartie en stage jusqu'à la fin de l'année scolaire. J'avais prévu un moment pour qu'elle puisse me donner un retour sur l'intervention qu'elle avait menée en classe et je voulais également poursuivre, à partir de la page du manuel qu'elle avait emportée pour les devoirs, l'exploration d'exercices où l'usage du produit en croix était tantôt fonctionnel, tantôt ne l'était pas, afin qu'elle puisse progressivement les distinguer les uns des autres.

En ce qui concerne l'intervention en classe, El m'a dit que cela s'était très bien passé⁴⁴⁷. La séance avait commencé par la lecture de l'exercice de la fiche, puis par sa résolution. Les

⁴⁴⁷ Le fait que l'intervention s'était bien déroulée m'a été confirmé par deux canaux distincts. Une apprentie de la classe d'El m'en avait tout d'abord reparlé durant la semaine : elle se souvenait du tableau à quatre cases, du fait qu'il fallait multiplier les deux nombres en diagonale, puis qu'il fallait soustraire (elle a dit "soustraire" au lieu de "diviser") le nombre restant dans le tableau ; elle a même précisé qu'El avait parlé du produit en croix à une éducatrice dans un cours d'éducation nutritionnelle, ce qui montrait que la diffusion essaimait dans d'autres lieux du CFPS. Ensuite, c'est l'enseignante d'éducation cognitive qui m'en avait fait un bref compte-rendu : la leçon avait duré une heure et s'était déroulée selon le rituel d'une leçon d'ARL (Higelé & al., 2013). El avait commencé par distribuer les fiches d'exercices, puis procédé à une lecture à voix haute de l'énoncé pour s'assurer que toutes les apprenties l'avaient bien compris ; elle avait ensuite proposé aux apprenties de résoudre seules l'exercice (non sans avoir demandé à l'enseignante si elle pouvait s'asseoir à sa place), en ayant dû préciser auprès de certaines qu'il s'agissait de trouver les quantités pour six et non pas seulement pour cinq personnes ; à une apprentie qui avait multiplié les quantités par 6, El avait dit que c'était bien, parce qu'elle avait déjà fait le premier pas ; une fois la résolution effectuée, elle avait demandé à ses collègues les résultats qui avaient été trouvés pour la quantité de spaghettis, les avaient notés au tableau et leur avait montré comment on pouvait utiliser le produit en croix pour trouver le bon résultat. Une apprentie était alors intervenue pour dire qu'elle ne connaissait pas la division et El lui avait montré le signe ($\div$) qu'il fallait employer sur la calculatrice ; elle avait ensuite invité les apprenties à utiliser le produit en croix pour chercher toutes les autres quantités à transformer et les autres apprenties s'étaient mises à la tâche, réexpliquant l'usage du procédé à celles qui n'y parvenaient pas ; une fois que toutes les transformations avaient été établies, El avait distribué, fait lire et compléter la fiche-synthèse ; elle avait expliqué l'importance de mettre sur la ligne du haut du diagramme le nombre des personnes ; dans la dernière partie de la fiche, elle avait montré qu'il fallait faire en sorte que le "trou" qui correspondait à la quantité à chercher se trouve toujours dans la case en bas à droite (l'enseignante a souligné qu'El semblait très au clair sur la position que devait prendre chaque nombre

apprenties de la classe avaient, selon les propos qu'elle rapportait, toutes "fait fois six", au lieu de faire "fois six", puis "divisé par quatre". El leur avait distribué la fiche comprenant la définition du produit en croix qu'elles avaient lue et complétée ensemble, puis leur avait montré comment utiliser le produit en croix pour transformer une première quantité d'ingrédients. Après cela, El leur avait demandé de poursuivre la résolution de l'exercice et certaines avaient eu des difficultés, alors que d'autres pas. Les résultats avaient été corrigés au tableau. Les apprenties avaient été contentes et l'enseignante avait dit que c'était bien et que l'on pourrait le refaire une fois.

Pour la fiche d'exercice (cf. figure n°71, les résultats trouvés hors classe sont en bleu et les corrections établies en classe sont en rose), El n'avait pas repris la résolution des deux premiers qui avaient déjà été traités la fois précédente. Le fait que le domaine d'expérience avait changé - calcul de coûts, salaire horaire - ne l'avait pas empêché d'employer correctement le produit en croix dans les quatre exercices suivants, mais elle avait cependant interverti les abréviations d'unités ("kg" au lieu de "g") dans le premier et n'avait pas mentionné d'abréviation d'unités dans les trois autres. El avait renoncé à résoudre le dernier exercice, car elle avait pressenti un piège, ce qui m'a conduit à lui indiquer comment il était néanmoins possible de procéder, en commençant par effectuer le total des heures travaillées ($185 + 15 = 200$).

Formation élémentaire : mathématiques 58

Exercice 121.
Une couturière gagne 135.—francs pour 15 heures de travail.
Quel sera son salaire pour 40 heures de travail ?
360.— ✓

Exercice 122.
Pour construire un mur, deux maçons ont besoin de 12 jours.
Combien de temps faudra-t-il à quatre maçons pour construire le même mur ?
3 jours ✗

Exercice 123.
7 kg de tomates coûtent 13,65 francs.
Que coûtent 4 kg ?
7,80 kg francs

Exercice 124.
5,25 mètres de soie coûtent 452,55 francs.
Que coûtent 4,75 mètres ?
403,45 francs

Exercice 125.
J'achète 50 flacons de lotion pour 165.—francs.
Quel sera le prix de 18 flacons ?
59,40 francs

Exercice 126.
Pour 65 heures de travail, un ouvrier reçoit un salaire de 656,50 francs.
Combien recevra-t-il pour 98 heures de travail ?
983,80 francs

Exercice 127.
Une personne qui a travaillé 185 heures a gagné 2'775.—francs.
Que gagnerait-elle en travaillant 15 heures de plus ?
185 + 15 = 200 × 2'775 ÷ 185 = 3'000.— ✓

Figure n°71 - Exercices pris par El comme devoirs, résolus hors classe, puis corrigés en cours

La séance qui s'est terminée par la correction d'autres fiches de devoirs qu'El avait apportées lors de la huitième (El en avait repris une nouvelle que j'ai retrouvée entièrement complétée dans mon casier à la fin juin) avait donc montré que l'apprentie avait bel et bien pu relever le défi que constituait l'enseignement du produit en croix à ses collègues de classe, contribuant de fait à son institutionnalisation, tandis que le processus de dévolution se poursuivait de façon concomitante sur de nouveaux domaines d'expérience.

dans le tableau) ; El avait encore précisé qu'on pouvait utiliser le produit en croix un peu partout et elle a donné l'exemple d'une autre transformation de quantités d'ingrédients d'une recette ; les apprenties lui avaient demandé d'autres exercices pour s'entraîner et El leur avait répondu qu'elle leur en apporterait.

SYNTHÈSE DES ANALYSES

Inscrit dans le cadre d'un *contrat de reprise* (Brousseau, 1995), ce suivi de dix séances de soutien avec une apprentie praticienne en intendance est à considérer comme un exemple de processus de *dévolution/institutionnalisation* (Brousseau, 1986 ; Rouchier, 1996) réalisable dans le contexte de la Fps. Le processus y prend la forme d'un *jeu du couple enseignant-enseigné* (Conne, 1998, 1999) qui va utiliser le CFPS, les différents lieux qui le composent, les acteurs qui y interviennent et les savoirs qui y sont investis, comme supports à l'appropriation d'une technique - le produit en croix - pour résoudre des exercices TQIR. Ce jeu peut être envisagé comme un possible⁴⁴⁸, visant à prendre en compte comme un atout et non comme un obstacle le fait que dans ce type de contrat, les élèves soient : « dans une demande de savoirs définitifs, [...] méconnaissent le fait que le sens est provisoire et qu'il y a toujours un sens à venir [...] et ramènent l'enseignant sur les formes les plus algorithmiques du savoir » (Bloch & Salin, 2004, p.175). L'apprentie est en effet dans l'attente d'un savoir définitif - un procédé qui lui permette d'effectuer n'importe quelle transformation de quantités d'ingrédients d'une recette - plaçant du même coup l'enseignant dans la position de devoir le lui proposer et l'aider à se l'approprier, ce qu'il va précisément chercher à faire.

Le jeu commence par la résolution de plusieurs exercices TQIR. L'apprentie y joue systématiquement la carte du rapport interne, une technique qu'elle maîtrise quand la relation numérique dont elle relève est disponible, mais qui échoue dans le cas contraire. De son côté, l'enseignant a dans sa main plusieurs techniques qu'il va jouer tour à tour auprès de l'apprentie, mais qui se heurtent à divers écueils faisant qu'aucune d'entre elles n'est directement assimilable et utilisable par elle. Le jeu ne se déroule pas seulement dans un seul lieu : s'il démarre et se joue pour une bonne part dans le cadre de la classe, il en sort également par le biais des devoirs que l'apprentie demande avec insistance. D'autres lieux du CFPS sont ainsi investis et d'autres joueurs y sont conviés - la maman, les copines - qui, comme l'enseignant, proposent à l'apprentie des procédés de résolution qui ne sont pas non plus assimilables tels quels. De son côté, l'apprentie va également se créer un lieu à elle, qui va prendre la forme d'exercices qu'elle conçoit par elle-même et se donne à résoudre sur le modèle des devoirs proposés par l'enseignant. On peut parler à ce propos d'aménagement d'un *milieu d'action a-didactique* (Brousseau, op.cit.), propice au développement d'un *temps d'apprentissage* (dont Bloch & Salin (op.cit.) déplorait justement l'étroitesse en classe de SEGPA), mais qui est toutefois dépourvu de rétroactions : l'apprentie invente et résout, mais le milieu constitué ne permet pas de valider ou d'invalidier les procédés qu'elle utilise.

A un certain moment du jeu, ce dernier va prendre une tournure particulière quand l'enseignant va désigner le produit en croix comme enjeu de l'enseignant et que l'apprentie va consentir à l'investir aussi bien en cours, que dans le milieu d'action qu'elle continue à se créer hors de la classe. Le jeu de l'enseignant va dès lors s'en trouver sensiblement modifié : il ne s'agira plus de déterminer et d'enseigner une technique que l'apprentie puisse s'approprier, mais bien de contribuer à favoriser cette appropriation. C'est ainsi que l'apprentie sera conduite à l'employer pour résoudre d'autres exercices, définis sur d'autres variables, d'autres supports et d'autres domaines d'expériences, de façon à ce que la généralité d'usage d'une technique conçue au départ pour résoudre une tâche très particulière - la résolution d'exercices TQIR - puisse progressivement se développer, s'éprouver et se construire.

⁴⁴⁸ En tenant naturellement compte du fait que les conditions de départ étaient très favorables, puisque les interactions se sont nouées à partir de la demande effective d'une apprentie, voulant montrer à l'interne aux acteurs du CFPS, qu'elle était capable de faire mieux qu'une simple formation pratique : le temps qu'elle a consenti à prendre sur ses heures de congé pour venir faire des mathématiques en classe témoignait en effet d'un investissement tout à fait remarquable, bien que non-exceptionnel au sein du centre (depuis 2009, j'ai en effet rencontré plusieurs apprenties dans un cadre similaire qui profitaient de ces moments en marge de leur travail pour investir des objets d'apprentissage qui leur tenaient particulièrement à cœur).

Dans un mouvement similaire, le produit en croix va être diffusé par l'apprentie dans différents lieux du CFPS et auprès de différents acteurs : une enseignante, une MSP, des collègues de classe, une éducatrice, etc. qui vont constituer autant de *milieux de formulation* et de *validation* (Brousseau, op.cit.) œuvrant et consolidant son fonctionnement et son contrôle. Exporté au-delà de la classe, le jeu échappe alors entièrement à l'enseignant, ce qui rend la dévolution effective, tandis qu'en contrepartie l'institutionnalisation est portée dans les différents lieux, par le fait que la technique diffère de celles qui y sont habituellement enseignées. L'apprentie se voit reconnue "sachante" d'un savoir institué qui, comme elle le souhaitait au début du soutien, devient, ponctuellement tout au moins (elle n'accédera pas, malgré tout, à la formation d'employée en intendance AFP qu'elle souhaitait pouvoir suivre), source d'attribution d'un surcroît de potentiel.

CONCLUSION

Rappelons pour commencer que l'enjeu principal de la thèse était d'appréhender les mathématiques à l'œuvre dans un contexte - la formation professionnelle spécialisée - dont on ne savait a priori pas grand-chose, au vu de l'absence de toute étude en ddm le concernant. La méthode utilisée pour le faire a procédé d'une succession de cinq investigations menées à l'intérieur d'un système - le CFPS du Château de Seedorf - par l'un de ses acteurs qui y œuvre en tant que responsable pédagogique, et qui, de fait, était tenu d'en respecter, pour une bonne part, le fonctionnement et les contraintes. Au fil des investigations menées, on suit la trace des actions portées à l'encontre du système, ce qui, en contrepartie, révèle progressivement les mathématiques qui président à la formation globale donnée aux apprenties, les investissements de savoirs auxquels elles peuvent donner lieu et les interactions de connaissances qu'elles génèrent⁴⁴⁹.

D'un point de vue général, le résultat le plus probant de la thèse est assurément *d'apporter une forme de lisibilité aux mathématiques et à leur fonctionnement dans le contexte de la Fps et d'en problématiser certains aspects*.

La première partie de la conclusion va chercher à en synthétiser les points les plus saillants, suivant la structure - institution, investissements de savoirs, interactions de connaissances - qui en a servi de socle. La deuxième partie viendra interroger l'usage de la narration, en tant qu'instrument de recherche pour récolter des données et rendre compte du produit des analyses. La troisième partie ponctuera le tout en présentant les perspectives auxquelles l'ensemble du travail mené est désormais en mesure de donner lieu.

INSTITUTION

Les analyses menées au niveau de l'institution révèlent trois caractéristiques principales des mathématiques au sein de la Fps, à savoir leur *précarité*, leur *disparité* et leur *immobilité*. Ces trois caractéristiques viennent élucider, pour une bonne part, leur aspect diffus qui m'était apparu à mon arrivée au CFPS (cf. chapitre 1). Elles sont à considérer comme le produit des réponses que le système et ses acteurs apportent aux contraintes dans lesquelles ils sont appelés à évoluer pour lui permettre de fonctionner.

La précarité des mathématiques dans la Fps

L'absence de déterminations externes un tant soit peu consistantes des mathématiques devant faire l'objet d'un enseignement au CFPS leur assigne une première caractéristique spécifique, à savoir leur *précarité*.

Dans les plans de formations élaborés à l'externe par les organisations faïtières des sept métiers dont les apprenties peuvent entreprendre la formation⁴⁵⁰ au CFPS, les mathématiques y sont soit entièrement absentes, soit formulées de façon excessivement congrue. Définis sous la forme de compétences professionnelles, méthodologiques, sociales et personnelles, les objectifs des plans de formation ne déterminent en effet, de façon précise, ni les tâches mathématiques, que les apprenties devront apprendre à accomplir, ni non plus les techniques qu'elles devront utiliser

⁴⁴⁹ A la différence d'un travail qui porte sur le système école, qu'il connaît parce qu'il en a été ou en est encore un des acteurs, et au cours duquel un travail introspectif est à l'œuvre en continu, le chercheur qui a pour intention d'appréhender un système entièrement inconnu doit en toute priorité se faire expliquer les choses plutôt que de vouloir les expliquer.

⁴⁵⁰ On laissera de côté ici le cas des formations de type CFC qui ne concerne que très peu d'apprenties au CFPS.

pour le faire. La non-maîtrise des contenus mathématiques qui figurent dans les plans de formation n'entraîne en aucun cas, à son terme, son échec.

Il en ressort qu'un enseignement des mathématiques de type didactique organisé peut sans autre disparaître de la formation des apprenties, sans que cette disparition ne s'érige en obstacle à son (bon) déroulement.

La disparité des mathématiques dans la Fps

Le défaut de déterminations externes ne signifie toutefois pas que les mathématiques ont déserté la formation des apprenties au CFPS, puisqu'elles sont au contraire présentes dans tous les lieux du centre qui ont fait l'objet d'un examen particulier. Cela veut dire que des déterminations internes participent à leur existence, en les dotant d'une deuxième caractéristique spécifique, à savoir leur *disparité*.

La disparité des mathématiques au CFPS se révèle en premier lieu dans les enjeux, divers, et non spécifiquement didactiques, dont elles relèvent. C'est ainsi que, par exemple, on y a recours pour contribuer, avec d'autres évaluations, à déterminer le type de formation - AFPra, AFP ou CFC - que pourront suivre les apprenties ou que l'on fait appel à des supports fortement mathématisés dans les cours d'éducation cognitive, afin de favoriser le développement de stratégies d'apprentissage.

En second lieu, cette disparité provient du fait que les mathématiques sont mobilisées dans l'action, quand une tâche - qu'elle soit d'ordre professionnel ou social - le requière : on les explique, on montre comment s'y prendre pour en faire bon usage et à charge des apprenties de s'en emparer⁴⁵¹ (ou de profiter de ce qu'elles en aient déjà la maîtrise). Il n'existe donc pas de *rapport institutionnel* (Chevallard, 1988b) qui en définit la teneur, ce qui fait que les techniques proposées varient d'une personne à une autre, d'un lieu à un autre, déléguant implicitement aux apprenties la gestion de cette variété.

Ce que j'ai cherché, en référence à Chevallard (1988a), à recouvrir sous l'appellation de *didactique improvisé*, vise à désigner ces pratiques des mathématiques, actives au CFPS, mais fugaces, difficiles à saisir, et dont la thèse n'a finalement rendu que très partiellement compte.

L'immobilité des mathématiques dans la Fps

Dans les lieux où des documents ont été conçus, à l'interne, pour désigner les mathématiques à enseigner aux apprenties, les tâches, essentiellement numériques, étaient un peu partout les mêmes, ne marquant pas d'évolution significative tout au long de la formation des apprenties⁴⁵². Il s'agit là de la troisième caractéristique des mathématiques dans la Fps, à savoir leur *immobilité*.

Cette immobilité procède, non pas de la seule incapacité des apprenties à s'approprier les techniques qui leur sont enseignées, mais bien aussi de la spécificité d'un *système de formation mathématiquement autarcique*, car dépourvu d'un amont et d'un aval. Le système d'enseignement d'où proviennent les apprenties avant leur entrée en formation ne détermine en effet nulle part les savoirs que les apprenties sont supposées maîtriser et sur le socle duquel l'enseignement pourrait s'appuyer. Et c'est bien plutôt par défaut des savoirs attendus maîtrisés au sortir de l'école qu'elles entament leur formation (et on a vu que ce n'étaient pas les résultats obtenus au cours des épreuves de stage qui permettaient d'y surseoir). Il n'y a pas non plus de

⁴⁵¹ En cas d'échec, on pourra toujours répéter l'explication, proposer une autre technique, trouver une astuce qui permette de la contourner ou se résoudre à ce que l'exécution de la tâche ne puisse être dévolue à l'apprentie.

⁴⁵² Rappelant des phénomènes, telle la *reconduction dans l'ignorance* (Conne, 1999) ou le *frein à la progression du temps didactique* (Favre, 2004), déjà identifiés dans l'Es.

système d'enseignement situé au terme de la formation, dont elle constituerait l'école (Chevallard, 1988c), propre à mettre les savoirs en mouvement, puisque la formation est supposée déboucher directement sur une insertion dans le monde du travail où les mathématiques ne seront plus matière à enseignement.

Ce sont donc les apprenties elles-mêmes, au travers de ce qu'elles montrent ou ne montrent pas au cours des interactions, qui se retrouvent en charge de réguler ce défilement des savoirs, ce qui n'est manifestement pas suffisant pour le produire.

Faire avec et faire sans les mathématiques dans la Fps

La précarité, la disparité et l'immobilité des mathématiques dans la Fps montrent que si celles-ci peuvent indéniablement s'avérer utiles à l'accomplissement de tâches professionnelles et sociales que les apprenties doivent apprendre à exécuter au cours de leur formation, il est tout autant possible de s'en passer. En une formule, on peut dire que le système et ses différents acteurs peuvent tout aussi bien *faire avec*, qu'ils peuvent *faire sans* les mathématiques tout au long des différentes étapes de la formation.

Toute tâche requérant l'usage de mathématiques pour être accomplie entraîne ainsi une forme de négociation implicite visant à déterminer si ces mathématiques doivent faire l'objet d'un enseignement/apprentissage spécifique ou si, au contraire, il s'agit plutôt d'apprendre à se débrouiller, en se passant de cet enseignement/apprentissage. Telle transaction a déjà lieu au niveau du système, où elle se manifeste par le mode de désignation des savoirs mathématiques qui figurent/ne figurent pas dans les plans de formation (externes) et les programmes (internes). On la retrouve ensuite au niveau des MSP et des enseignants, où elle se révèle au travers de la mise en œuvre/absence de mise en œuvre d'un enseignement de type organisé et/ou improvisé. Et elle apparaît également au niveau des apprenties bien sûr, où elle se donne à voir dans l'engagement dont elles font/ne font pas preuve vis-à-vis de l'enseignement qui leur est proposé.

Faire avec et faire sans constituent vis-à-vis des mathématiques dans la Fps une condition de fonctionnement du système, permettant de naviguer entre chacun des deux pôles, de façon à ne pas rester bloqué face aux difficultés d'enseignement et d'apprentissage qui se présentent, et être à même, dans tous les cas de figure, de continuer à *aller de l'avant*. Cette condition s'inscrit comme une forme de réponse aux contraintes qui pèsent sur chaque lieu où se déroule la formation, restituant aux acteurs qui s'y trouvent un espace de liberté et d'ouverture qu'il leur est loisir ou non d'investir, un peu comme bon leur semble.

INVESTISSEMENTS DE SAVOIRS

Les analyses menées au niveau des investissements de savoirs mettent en évidence la *fonction* particulière qui est *donnée aux exercices* proposés en cours aux apprenties employées de cuisine AFP et les *impasses dans lesquelles les techniques* qui leur sont enseignées pour les résoudre sont en passe d'aboutir. Elles montrent aussi l'importance de la *disponibilité des relations numériques* pour résoudre de tels exercices en regard des techniques enseignées, puis permettent de saisir le *rôle ambigu que les nombres décimaux* sont appelés à jouer dans la Fps.

Des exercices scolaires plutôt que des problèmes de cuisine

L'enseignement des mathématiques donné aux apprenties employées de cuisine AFP est largement déterminé par les épreuves d'examens conçues par l'ORTRA Gastro suisse. Ce sont en effet des exercices du même type que ceux que l'on trouve dans ces épreuves que l'on donne et apprend à résoudre dans les cours. Si ces exercices évoquent tous le contexte de la cuisine,

ils ne correspondent pourtant pas aux problèmes effectifs que les apprenties rencontrent lorsqu'elles y travaillent⁴⁵³, comme l'a bien montré l'examen des rares problèmes qu'elles sont parvenues à rapporter en cours. Les données récoltées dans la thèse ne permettent pas de déterminer ce qui contribue à la pérennisation de tels exercices dans les épreuves d'examens soumises aux apprenties. Elles montrent en revanche que le rôle qu'on leur fait jouer dans la Fps s'est inversé par rapport à celui qui leur est donné à l'école. Ces exercices ne constituent plus en effet des *moyens* pour contextualiser (ou pour illustrer, cf. Comin (2002), chapitre 3) les mathématiques dont on cherche à réaliser l'enseignement, mais deviennent, dans ce nouveau contexte, des *fins* que des mathématiques décontextualisées doivent permettre de résoudre. En d'autres termes, on pourrait dire qu'à l'école, la résolution de l'exercice précède et sert de support au développement ultérieur des mathématiques, alors que dans la Fps, ce sont les mathématiques qui précèdent et servent de support à la résolution ultérieure des exercices⁴⁵⁴.

Des algorithmes pour résoudre des exercices : une impasse didactique

Les exercices soumis aux apprenties dans le cadre des cours et des examens ne font pas l'objet d'une analyse en termes de *complexité cognitive* (Vergnaud, 1991). Ils relèvent, de ce point de vue, d'une assez étonnante étendue, allant d'un simple exercice de type ET+E avec recherche de l'état final, jusqu'à des exercices combinant plus de trois relations additives et/ou multiplicatives, pouvant impliquer des calculs de pourcentage.

Nombreux sont donc les exercices dont la résolution apparaît hors de portée des apprenties. Le recours à un algorithme s'avère dès lors la solution qui est empruntée dans la Fps pour tenter, malgré tout, de leur octroyer la possibilité d'y parvenir. En ce sens, l'algorithme s'avère un *instrument de déblocage*⁴⁵⁵ - et pour l'enseignant et pour les apprenties - en leur donnant à tous deux l'illusion de pouvoir se passer de l'enseignement/l'apprentissage des mathématiques nécessaires à la résolution de tels exercices.

Le problème didactique est toutefois loin d'être résolu, puisqu'il se voit déplacé sur :

- le choix d'un algorithme idoine dont les apprenties puissent effectivement parvenir à se saisir,
- les différents écueils auxquels l'emploi de l'algorithme va nécessairement se heurter et qu'il s'agira d'apprendre à surmonter,
- le nombre et la diversité des exercices dans lesquels il sera nécessaire de l'éprouver pour tenter d'en stabiliser l'usage et le contrôle.

⁴⁵³ On rejoint ici le constat effectué par Kaiser (2011) concernant le calcul professionnel enseigné aux apprentis dans les formations de type CFC qui : « impose souvent un point de vue scolaire et traditionnel, peu axé sur la réalité d'un quotidien professionnel » (p.1). Celui-ci est toujours d'actualité en 2015 ; pour des exemples, on se rapportera au site de Hotel & Gastro formation : http://www.hotelgastro.ch/download.cfm?ID_n=366&unter=366&haupt=95&language=2 (et plus particulièrement aux exercices des séries zéro, situations 1, 2 et 3 que l'on y trouve).

⁴⁵⁴ A l'école comme dans la Fps, les déterminations qui participent à la pérennité de tels exercices est difficile à établir. Si les pratiques de références dans les deux systèmes ne sont en principe pas les mêmes - des pratiques mathématiques dans l'un et des pratiques professionnelles dans l'autre -, les rapports qu'ils entretiennent avec ces pratiques sont avant tout de l'ordre du symbolique, ce qui tend souvent à les disqualifier de part et d'autre. Il n'empêche que, malgré tout, et ce, depuis fort longtemps (voir, notamment, le "Cours d'arithmétique usuelle et raisonnée. A l'usage des élèves de l'école moyenne centrale du canton de Fribourg" (Prat, 1840)), ils demeurent...

⁴⁵⁵ Brousseau (1986) dit précisément que :

"L'algorithme" constitue un instrument de déblocage et de solution des conflits didactiques, en ce sens qu'il permet momentanément un partage clair des responsabilités. Le maître montre l'algorithme, l'élève l'apprend et "l'applique" correctement : sinon il doit s'exercer mais son incertitude est presque nulle. On lui affirme qu'il existe toute une classe de *situations* différentes dans lesquelles l'algorithme donne une solution (le conflit va reprendre quand il s'agira de choisir un algorithme pour un problème donné). (p.61)

Sauf que, dans la perspective de la TDS, l'alternative à l'algorithme sera, pour l'élève, la construction d'un savoir par le biais de la confrontation a-didactique avec une situation, tandis qu'ici, l'alternative, pour l'apprentie, sera son aptitude à *faire avec* ou à *faire sans* par le biais de l'utilisation des savoirs partiels, déjà construits, dont elle dispose.

Il apparaît en outre que moins les apprenties sont à même d'en faire une utilisation adéquate, plus on va chercher à déléguer à cet algorithme, par ajout de nouvelles règles, voire d'un nouveau diagramme, le contrôle de son fonctionnement. Or, ceci en complexifie inévitablement l'usage, et par là, le rend moins accessible ; il en amoindrit aussi la portée, en réduisant la variété des exercices qu'il permet de résoudre.

Des relations numériques pour résoudre des exercices

Dans les exercices de transformation des quantités d'ingrédients d'une recette (TQIR) qui sont soumis aux apprenties employées de cuisine AFP, la technique la plus intuitive qu'elles emploient est l'usage direct du rapport interne qui lie le nombre de personnes/la quantité de produit de la recette de base au nombre de personnes/à la quantité de produit de la recette transformée. Elle est la plus intuitive, parce qu'elle suit le mouvement de la proportion au niveau des grandeurs mesurées et des opérations au niveau des nombres : on recourt à la multiplication quand les quantités/les nombres s'accroissent et à la division quand elles/ils diminuent.

Cependant, l'écueil majeur auquel se heurte l'usage de cette technique réside dans l'*indisponibilité de la relation numérique*, multiplicative ou divise, sur lequel repose le rapport interne. Il crée des impasses tant chez les apprenties qui cherchent à y recourir pour effectuer les transformations, que chez l'enseignant qui cherche à "concrétiser" la relation numérique manquante afin de la leur rendre disponible. L'importance des relations numériques pour résoudre des exercices TQIR a d'ailleurs pu être établie aussi bien lorsqu'elles étaient indisponibles et qu'elles empêchaient la résolution, que quand elles s'avéraient disponibles et que l'usage du rapport interne était ainsi rendu possible, venant surseoir à celui d'une autre technique enseignée, ou qu'elles engageaient les apprenties à créer un expédient, c'est-à-dire un procédé de résolution qui reste lié à la singularité de la situation.

Des algorithmes pour se substituer aux relations numériques

L'enseignement de la règle de trois et/ou du produit en croix comme techniques de résolution des exercices TQIR dans la Fps doit donc être compris comme une *réponse apportée à l'imprévisibilité relative à la disponibilité des relations numériques chez les apprenties* et à *l'impuissance manifeste, dans des conditions d'enseignement où la résolution des exercices est une fin plutôt qu'un moyen, d'œuvrer à les rendre plus stables*. Car ces deux techniques n'impliquent pas, autant que le rapport interne, de devoir compter sur des relations numériques déjà constituées pour opérer.

L'usage direct du rapport interne nécessite en effet, qu'à chaque fois que les nombres à partir desquels s'établissent ces rapports changent, une nouvelle relation numérique soit disponible - ou alors il faudra parvenir à la déterminer - pour en faire un bon usage. Dans le cas de la règle de trois, le nombre de relations numériques en jeu se réduit largement, vu que celle-ci n'implique que des relations multiplicatives et divises relatives au nombre 1 ; de fait, dès lors que les propriétés numériques $n \div n = 1$ et $1 \times m = m$ sont constituées, il n'est plus nécessaire de disposer d'une nouvelle relation à chaque fois que n et m changent, ce qui permet de traiter n'importe quel exercice de ce type. Dans le cas du produit en croix, il n'est lieu d'en disposer d'aucune, puisque ce dernier, en s'affranchissant des grandeurs et en "croisant" les nombres en jeu dans la proportion, n'a besoin pour fonctionner, de n'établir aucun rapport fondé sur une relation numérique particulière.

De fait, si la règle de trois et le produit en croix peuvent passer a priori pour moins intuitives (car ne suivant pas le mouvement des grandeurs et des nombres en jeu) et plus lourdes (car reposant sur deux opérations au lieu d'une) que l'usage direct du rapport interne, c'est parce

qu'elles permettent de se détacher de la singularité des nombres en jeu dans l'exercice et des relations qu'ils impliquent, qu'elles lui sont préférées. Alors que leur usage est souvent décrié dans l'école obligatoire (ce qui explique leur disparition des programmes), il faut comprendre leur présence dans le contexte de la Fps, comme un moyen de surseoir à l'échec d'un apprentissage antérieur - celui des relations numériques - qui n'a pu s'y accomplir.

L'éviction des nombres décimaux

Les investissements de savoirs mathématiques qui ont cours dans la Fps tendent, autant que possible, à *contourner l'usage des nombres décimaux*. Trois exemples⁴⁵⁶ issus des analyses permettent d'en attester :

- Le premier exemple réside précisément dans l'usage qui est fait de la règle de trois ou du produit en croix qui, lors de la résolution d'un exercice TQIR, vient se substituer à l'usage direct du rapport interne, quand la relation numérique sur lequel ce dernier repose est décimale. Ainsi, dans le cas d'un rapport égal à $15/4$, la division par 4 suivie de la multiplication par 15 (règle de trois), tout comme la multiplication par 15 suivie de la division par 4 (produit en croix) revient en fait à dissocier les deux termes (numérateur et dénominateur) de la fraction $15/4$, afin de n'avoir qu'à opérer avec deux nombres naturels.
- Le deuxième exemple procède du système de désignation des mesures de poids qu'il a été possible d'inférer des productions de Ca (cf. chapitre 6). Ce système, qui repose sur deux seules unités distinctes (les kilos et les grammes), recourt à des nombres où l'usage de la virgule n'est pas forcément nécessaire et peut très bien être remplacée par une apostrophe, puisqu'elle sert simplement à en distinguer la "partie-kilo" de la "partie-gramme". Les abréviations d'unités qui accompagnent habituellement les nombres pour représenter les mesures s'y révèlent superflues et il est tout à fait possible de procéder, à l'oral comme à l'écrit, à des additions et des soustractions, sans recourir à des nombres décimaux.
- Le troisième exemple provient des différentes manières de désigner les mesures auxquelles on a recours au "quotidien" qui, contrairement à la façon dont on les représente dans le système décimal des poids et mesures, ne sont pas univoques. Leur comparaison montre que lorsqu'on passe d'un domaine de grandeurs à un autre, le nombre de chiffres de ce qui est supposé être la partie décimale du nombre n'est pas le même : si on écrit 3,850 kg pour désigner un poids, on n'écrit jamais 3,850 CHF pour désigner un prix ; et à l'inverse, on n'écrit jamais 3,85 kg pour désigner un poids, alors qu'on le fera volontiers, en écrivant 3,85 CHF pour un prix. De fait, la partie du nombre qui se trouve à la droite de la virgule, ne correspond pas à la partie décimale d'un nombre décimal⁴⁵⁷, mais bien à une partie entière, relative à une unité spécifique à chaque domaine de grandeurs - ici des grammes ou des centimes - qu'elle représente.

L'inévitable retour des nombres décimaux

L'éviction des décimaux ne constituerait pas un problème en soi si ceux-ci n'étaient pas immanquablement amenés à réapparaître. Dans la Fps, il n'est en effet pas envisageable de vouloir enseigner des techniques, telle la règle de trois ou le produit en croix, sans avoir recours

⁴⁵⁶ Ces trois exemples viennent renforcer la critique adressée aux propos de Rouche (2006) et la confusion entre *logique d'exposition* et *logique d'initiation* Conne (2004) que l'on y rencontre. On voit en effet que, dans la seconde, les nombres décimaux ne s'élaborent pas à partir du quotidien dans une construction qui passerait des grandeurs, via les grandeurs mesurées, jusqu'aux nombres décimaux, puisque les pratiques au quotidien évitent dans la mesure du possible d'y avoir recours. C'est donc bien plutôt à l'école que les nombres décimaux sont appelés à devoir se construire.

⁴⁵⁷ On retrouve ici la conception d'un nombre décimal comme réunion de deux naturels, sis de chaque côté de la virgule, déjà bien mise en évidence par Brousseau (1980). La différence de contexte veut cependant que si celle-ci, dans la perspective de Brousseau, s'avère un obstacle à l'appréhension ultérieure des décimaux, elle relève ici d'un aspect fonctionnel relatif à l'usage qui en est fait.

à une calculatrice. La maîtrise très partielle des opérations - multiplications et divisions - à réaliser, qui restent des objets continuellement sensibles dans ce contexte, constitue en effet un obstacle difficilement surmontable pour bon nombre d'apprenties. Or, dès que l'on a recours à la calculatrice, il va falloir tenir compte de règles relatives à l'usage des nombres décimaux qui vont créer - on en a rencontré beaucoup d'exemples - des contradictions avec l'usage des mesures qui visent à s'en passer. Des contradictions qui, dans la plupart des cas, déconcertent les apprenties, les amenant à réfuter, voire à corriger les résultats produits pour les rendre mieux compatibles avec ceux, naturels, auxquels elles s'attendaient.

C'est aussi l'usage de la calculatrice qui va nécessiter le recours à des conversions de mesures. Le tableau qui est enseigné aux apprenties dans la Fps (et déjà auparavant à l'école) pour les établir peut lui aussi être envisagé comme une façon d'éviter les opérations qui impliquent des nombres décimaux, puisqu'il s'appuie sur un diagramme et des règles d'usage qui déterminent le placement des nombres, l'inscription des zéros et le positionnement de la virgule. Il n'en reste pas moins que c'est manifestement, et paradoxalement, la maîtrise des nombres décimaux qui officie comme contrôle à l'usage de ces règles et à la validation du résultat final.

A défaut d'un lieu qui en prenne effectivement l'enseignement en charge, il va donc là aussi falloir apprendre à *faire avec* et à *faire sans* les nombres décimaux pour *aller de l'avant* dans la résolution des exercices proposés en cours.

INTERACTIONS DE CONNAISSANCES

Les analyses menées au niveau des interactions de connaissances montrent que *toute interaction est incertitude*⁴⁵⁸ et que cette incertitude est irréductible, aussi bien pour l'enseignant qui a l'intention d'enseigner un savoir, que pour l'apprentie qui souhaite s'en emparer pour apprendre à en faire usage⁴⁵⁹. Comme (1999) a utilisé le terme de *rapport à l'ignorance* pour qualifier cette incertitude qui se manifeste aussi bien en amont, au cours, qu'en aval de l'interaction.

Ignorance en amont de l'interaction

En amont de l'interaction, le rapport à l'ignorance concerne spécifiquement l'enseignant qui a charge de la piloter. Il présente au moins trois aspects.

Le premier aspect relève du *choix du savoir à enseigner*. En l'absence de techniques explicitement désignées dans un programme, c'est à l'enseignant que revient ce choix. Or, les critères pour le faire sont inexistant, tant à l'interne du système, où plusieurs techniques coexistent et sont enseignées pour appréhender les exercices à résoudre ; qu'à l'externe, où en consultant des ouvrages comme ceux de Rouche (1992, 1998, 2006) ou en se référant à des études de ddm spécifiques comme celle de Comin (2002) dans le cas de la proportionnalité, on obtient au mieux des avis sur la pertinence de recourir à une technique particulière, parfois l'expression de certains avantages ou inconvénients, et au pire des éléments de polémique (Bkouche, 2008).

Le deuxième aspect tient au fait que *l'enseignant ne connaît pas*, pour une bonne part, *les savoirs que les apprenties maîtrisent* et sur lesquels il pourra effectivement compter pour mener son enseignement. Le fait de se retrouver dans un contrat de reprise ne définit pas en effet les savoirs maîtrisés par les apprenties, mais bien plutôt, et a contrario, ceux qui ne le sont pas.

⁴⁵⁸ Il faut considérer l'incertitude comme une incertitude d'ordre cognitif, au même titre que l'on parle d'interactions de connaissances, et non pas d'une incertitude d'ordre relationnel qui, bien que toujours à l'œuvre, n'a pas été prise en compte au cours des analyses.

⁴⁵⁹ On ne peut manquer de souligner encore une fois le contraste entre les incertitudes du couple enseignant-enseigné (logique d'initiation) et les certitudes des constructions dans les ouvrages de Rouche (logique d'exposition).

Ainsi, lors des premières rencontres avec une apprentie ou un groupe d'entre elles, l'enseignant est immanquablement appelé à constituer une *mémoire didactique* (Brousseau & Centeno, 1991) pour y développer son enseignement. Mais ce, sans pour autant être assuré que les savoirs qui ont pu être identifiés à cette occasion seront bien ceux qu'il sera en mesure de retrouver dans les séances qui suivront.

Le troisième aspect tient enfin aux *contraintes* dans lesquelles l'interaction aura lieu (temps à disposition, nécessité de procéder à des évaluations, exercices à résoudre qui se modifient à l'arrivée d'une nouvelle épreuve d'examens, etc.). Tout en diminuant l'espace des choix didactiques en mains de l'enseignant, elles réduisent conjointement sa marge d'actions et par là même la perspective d'être bel et bien en mesure de parvenir à ses fins.

Ignorance au cours de l'interaction

Au cours de l'interaction, le rapport à l'ignorance concerne tout autant l'enseignant que les apprenties. Il se manifeste par des *pertes de contrôles*, suivies de *prises de contrôles* (Conne, 2003) qui scandent la dynamique de l'interaction.

Pour l'enseignant, les pertes de contrôles proviennent essentiellement de deux origines. Elles adviennent pour une part au détour des *productions* des apprenties qui le surprennent et dont il n'est pas toujours à même d'effectuer une interprétation adéquate. Ces productions imprévues sont tantôt le fait d'une relation numérique qui n'est ou n'est pas disponible, d'une règle qui dicte la façon d'exécuter une opération, d'une ébauche de technique qui n'est que partiellement mise en œuvre, d'un nombre qui s'avère impropre à désigner la grandeur qu'il représente, à une manière de faire qui a cours dans le secteur professionnel, etc.. Elles engagent de sa part des *interventions*, largement improvisées, qui visent à reprendre le contrôle du pilotage dans le déroulement de l'interaction.

Pour une autre part, les pertes de contrôle de l'enseignant apparaissent dans l'interaction lorsqu'un savoir dont il n'avait pas tenu compte soudain s'y révèle. Elles sont provoquées par *la propre interaction de l'enseignant avec le milieu constitué*. Ces pertes de contrôle ne s'accompagnent pas forcément d'une intervention explicite de sa part, mais elles viennent remettre en cause la pertinence des choix effectués en amont, occasionnant des doutes, et fragilisant le suivi de l'interaction qu'il lui reste à mener.

Pour les apprenties, les pertes de contrôles relèvent également de deux origines. Les premières résultent de *l'interaction de l'apprentie avec le milieu constitué* qui ne réagit pas comme attendu, tandis que les secondes émanent des *prises de contrôles réalisées par l'enseignant* dont elles ne parviennent pas à saisir le teneur. Dans les deux cas, on peut assister à des formes de ballotements de la part des apprenties, oscillant entre des velléités de reprises de contrôles qui engagent de nouveaux procédés et des formes de désinvestissements ou de retraits qui peuvent s'avérer passagers ou de plus ample durée.

Ignorance en aval de l'interaction

En aval de l'interaction, le rapport à l'ignorance concerne à nouveau certainement tout autant l'enseignant que les apprenties. Si, au vu des données récoltées et des analyses qu'elles ont produites, il est difficile de qualifier celui des secondes, ce rapport se manifeste pour le premier dans la *recherche de significations* qu'il va chercher à en établir et dans ce qu'il sera en mesure d'en faire dans la perspective des interactions futures qu'il lui reviendra d'établir avec les apprenties.

Cette recherche de significations débute au sein des impressions, souvent ambivalentes, qui le traversent au sortir de l'interaction. Elle se poursuit lors de la considération des productions des

apprenties, de leur recontextualisation sous une forme narrative et de l'interprétation auxquelles elles vont aboutir : faisant apparaître certaines comme relativement banales⁴⁶⁰, donnant lieu pour d'autres à des réinterprétations successives, tandis que d'autres encore conserveront leur part de mystère, en résistant à toute forme d'interprétation. Se posera alors pour l'enseignant la question de la destinée qu'il conviendra de donner à ce surcroît de significations, en vue de la préparation, puis de la conduite de nouvelles interactions.

Adoption d'une posture et recours au jeu

L'irréductibilité d'un rapport à l'ignorance en amont, au cours et en aval de l'interaction pose la question de sa gestion par l'enseignant. En référence à Conne (1999, 2006b), on peut esquisser deux pistes de réponse qu'il convient de considérer de façon dialectique, la deuxième procédant de la première, et réciproquement.

Première piste de réponse

La première piste engage l'enseignant à endosser la posture de l'*enseignant pragmatiste* qui, selon Conne, peut-être qualifiée à l'aide de la triade *savoir, ignorance, quête de significations* (2006b, p.4). De façon symétrique, il est possible de lui associer la triade *savoir, ignorance, quête de contrôles* qui, dans la Fps, viendrait caractériser la posture de l'*apprentie pragmatiste*.

Cette double posture vise à faire en sorte que le couple enseignant/enseigné se défausse du *clivage sachant/ignorant*, lequel s'impose d'autant plus "naturellement" dans un contexte qui accueille des apprenties considérées en difficulté d'apprentissage. Elle repose sur trois piliers fondamentaux :

- le premier pilier veut que si l'enseignant dispose de savoirs mathématiques pour enseigner, les apprenties disposent tout autant de savoirs mathématiques pour apprendre et que tous deux sont appelés à les mettre en jeu dans l'interaction ;
- le deuxième pilier veut que, pour l'un et l'autre, ces savoirs ne sont pas complets - même si ceux de l'enseignant sont assurément plus élaborés, moins partiels, moins enchevêtrés que ceux des apprenties - et présentent de la sorte une part importante d'ignorance ;
- le troisième pilier veut que l'interaction soit pour l'enseignant comme pour l'apprentie l'enjeu d'une réduction de l'ignorance et l'appropriation de nouveaux savoirs.

Dans le contexte de la Fps, cet enjeu se décline toutefois de façon distincte pour chacun d'eux du fait que les savoirs de l'*enseignant* apparaissent manifestement plus stables, car plus intégrés, que ceux des apprenties. Il s'agit donc pour lui de *partir à la quête de significations*, souvent incertaines, en cours ou en différé, qu'il pourra, ultérieurement, utiliser et mettre à l'épreuve lors de la conception, du pilotage et de l'analyse de nouvelles interactions. Tandis que pour les *apprenties* (cf., par exemple le parcours de Ca, au chapitre 6, ceux Co, Jac et Jad au chapitre 8, ou celui de El, au chapitre 9), il s'agit plutôt de *partir à la quête de contrôles*, tout aussi incertains, dans l'usage de leurs savoirs partiels ou lors de l'exécution d'une technique plus élaborée, qu'elles pourront, à leur tour, utiliser et mettre à l'épreuve lors de l'appréhension et la résolution de nouvelles tâches.

Seconde piste de réponse

La seconde piste engage l'enseignant à considérer l'interaction comme un *jeu* (Conne, 1999), tout comme nous l'avons fait au sein du groupe ddmes, lorsque nous avons défini le *jeu de*

⁴⁶⁰ On se reproche alors de n'avoir pas mieux compris les choses sur le vif et n'être pas intervenu plus à propos. Conne (1999) évoque cela dans les termes suivants :

Quelque chose se passe, on ne sait pas toujours très bien quoi et pourtant, une fois dépris de notre propre "faire" (interaction avec le milieu), cela devient généralement intelligible, parfois jusqu'à nous paraître banal. Le paradoxe du caractère à la fois imprévu et néanmoins intelligible tient justement à ce travail d'accord et de résonance (au sens musical) entre les pensées respectives. (ibid., p.65)

tâches (Favre, 2008) comme mode d'interactions spécifique pour mener des entretiens et aménager des expériences mathématiques aux élèves de l'Es.

Emprunter le rôle d'un joueur pour piloter les interactions demande à l'enseignant de reconnaître qu'il est cognitivement impliqué dans l'interaction, qu'il est nécessairement enrôlé dans une dynamique de pertes et prises de contrôle et que l'issue de l'interaction comporte toujours une part d'incertitude :

Ainsi donc, la référence au jeu s'impose non seulement sur un plan théorique, mais encore sur un plan expérimental, à cause de la question extrêmement délicate de notre participation cognitive directe, inévitable au processus observé. Entretien après entretien, élève après élève, thème après thème, jamais le jeu ne paraît jamais joué d'avance. (ibid., p.69)

Lors des investigations menées dans la thèse, cette idée du jeu n'a été explicitement mentionnée que dans la dernière (cf. chapitre 9), où elle a consisté à jouer avec trois techniques pour déterminer, progressivement, celle dont l'apprentie serait le plus à même de s'emparer. Elle était pourtant déjà bien présente durant le premier soutien (cf. chapitre 6), où il s'est agi de jouer avec les exercices proposés à l'apprentie, de façon à observer l'éventail des procédés qu'elle était susceptible de mettre en œuvre. Et elle a aussi fonctionné au cours des premières séances de cours avec les apprenties employées de cuisine AFP (cf. chapitre 8), où le jeu s'est actualisé dans les trois sortes d'activités distinctes qui leur ont été soumises pour apprécier en quoi elles seraient/ne seraient pas matière à investissement de leur part. Or, dans les trois cas, le recours au jeu s'est avéré pertinent, favorisant l'entrée dans un processus d'appropriation d'une technique dans le premier, permettant de voir à l'œuvre des procédés originaux dans le second et révélant des signes d'appétences vis-à-vis de l'ensemble des activités dans le troisième, comme autant de conséquences que l'on ne pouvait que difficilement soupçonner au départ.

Face aux aléas relatifs au déroulement des interactions, *l'idée du jeu* s'inscrit en conséquence, dans une perspective à nouveau pragmatiste, comme un *gage d'ouverture vers de nouveaux possibles*, pour le développement de l'activité du couple enseignant-enseigné.

NARRATION

Au départ, la narration a été envisagée comme le moyen privilégié de conserver les traces des interactions que je comptais nouer avec les apprenties. C'est ainsi que, dans la partie théorique qui lui a été consacrée (cf. chapitre 4), elle a été définie comme *le récit du pilotage de la situation que le pilote livre au chercheur pour analyse*, arguant que le recours à la narration s'avérerait tout particulièrement opportun, lorsque le pilote et le chercheur constituaient une seule et même personne. L'usage qui en a été fait dans la thèse a toutefois sensiblement dépassé ce rôle, puisque la narration a également été utilisée pour *rendre compte du produit des analyses du chercheur*. Cet élargissement pourra être entendu comme une façon d'en tirer un plus grand parti pour appréhender le "divers du champ pratique" des mathématiques à l'œuvre au CFPS, sachant que :

[...] la première manière dont l'homme tente de comprendre et de maîtriser *le divers* du champ pratique, est de s'en donner une représentation fictive[...] la structure narrative fournit à la fiction des techniques d'abréviation, d'articulation et de condensation par lesquelles est obtenu l'effet d'augmentation iconique que l'on décrit par ailleurs en peinture et dans les autres arts plastiques [...] Ricoeur (1998, p.247)

Or, si l'usage de la narration par le pilote a fait la preuve, durant la phase de récolte des données, de toute la fonctionnalité que nous lui connaissions déjà au sein du cadre du groupe ddmes

(2012), elle n'en va pas aussi aisément du rôle que peut lui faire tenir le chercheur pour rendre compte de ses analyses.

Narration pour le pilote

Pour le pilote que j'ai été, la narration a en effet fort bien rempli son rôle de *relation des interactions*, qu'il faut entendre selon la double acception du mot, à savoir qu'elle a permis de "relater" ce qui s'y est passé et de "relier" entre eux les événements qui y ont été consignés. Elle a pu être régulièrement utilisée au terme de chaque séance et c'est sur la base de ces données qu'ont pu être ensuite menées les analyses. Sa souplesse d'usage en regard d'autres instruments bien plus "lourds" (vidéo, protocoles) est désormais avérée. Je peux même ajouter que j'ai pris passablement de plaisir à en accomplir à chaque fois la rédaction au terme des interactions menées, cherchant à partir des productions récoltées et des souvenirs que j'en avais gardés, à en retracer la logique pour constituer le récit de ce que j'avais compris de ce qui s'y était passé.

A ce titre, il est en outre important de relever que dans le contexte de la Fps, où de nombreux écrits (rapports, évaluations, etc.) sont établis à l'égard des apprenties, la narration représente une façon originale, décalée, de les raconter. Malgré les précautions prises par le CFPS pour les considérer comme des êtres de compétences, c'est en effet souvent en termes de difficultés qu'on en parle et c'est tout aussi fréquemment en ces termes que l'on rend compte des interactions que l'on engage avec elles, quand ces dernières - on l'a vu dans de nombreux cas - ne mènent pas à la réussite escomptée. Or, l'injonction adressée au pilote dans la rédaction d'une narration qui veut que l'on y relate des faits et des enchaînements de faits⁴⁶¹ occasionne une rupture avec ce type de discours. Et si des difficultés peuvent bel et bien être inférées à sa lecture, celles-ci concernent tout autant l'enseignant que les apprenties, en tant que sujets pensant et interagissant autour des objets de savoir qui constituent l'enjeu de leur rencontre. L'accueil enthousiaste que les apprenties ont invariablement manifesté à chaque fois que je leur ai donné lecture d'une narration de nos interactions, à défaut d'en attester, le laisse tout au moins penser.

Narration pour le chercheur

L'option prise lors de la rédaction de la thèse a donc été de faire un usage conséquent de la narration pour rendre compte des analyses. S'il est parfois de nature à perdre le lecteur dans le dédale des détails advenus dans l'interaction, et aboutit à la production d'un texte que d'aucuns pourront juger trop dense et/ou trop long, il vise néanmoins à faire en sorte que ce dernier ne puisse pas trop vite échapper, comme le dit Pastré (2005), à la *singularité de l'action* ou à quitter la *logique de l'initiation* pour emprunter la *logique de l'exposition* (Conne, 2004). Au fil des chapitres, plusieurs essais ont été réalisés pour articuler les narrations du pilote et les analyses du chercheur. Dans certains cas (cf. chapitre 1 et chapitre 6), la narration du pilote a été donnée dans son état brut et entrecoupée des analyses du chercheur, alors que dans d'autres, ce sont les analyses qui ont été livrées en priorité et étayées par des extraits de narrations (cf. chapitre 6 et chapitre 8). Le chapitre 9 constitue une narration dans son intégralité qu'il faut considérer comme une *narration du chercheur* reprenant les narrations du pilote en y intégrant les analyses du chercheur.

En l'état, il n'y a pas de forme définitive qui puisse être arrêtée⁴⁶². Et si ma préférence penche indéniablement pour la voie empruntée au chapitre 9, il n'est pas certain que celle-ci parvienne à rendre aussi bien compte des différents niveaux d'analyse qui ont été distingués dans les autres

⁴⁶¹ L'exercice ne va cependant pas de soi et demande de s'y entraîner, comme en témoignent les quelques expériences que j'ai pu en faire dans le cadre de la formation des enseignants spécialisés où, de façon quasiment rédhitoire, ce sont les difficultés qui parsèment les propos oraux ou écrits des enseignants.

⁴⁶² Ce questionnement est actuellement en plein débat au sein du groupe dmes.

chapitres. Il est également certain que la possibilité qui est donnée, en fin de thèse, de rédiger un chapitre entier sous une forme narrative, tout comme son intelligibilité par un lecteur externe, dépend précisément du fait que les chapitres qui précèdent ont été construits d'une autre façon. Ils en délivrent ainsi les principales clés de lecture qui peuvent dès lors rester dans l'implicite et évitent d'en surcharger les propos.

Relevons encore que l'articulation de la narration du pilote et des analyses du chercheur soulève une question délicate lorsque tous deux s'incarnent dans une même personne. Au cours de l'analyse, le chercheur est en effet régulièrement amené, par le biais des nouvelles interprétations qu'il établit, à comprendre les choses différemment de ce que le pilote avait lui-même pu saisir, à chaud, au terme de l'interaction. De fait, les *relations de causalité, de finalité* ou *de hasard*, pour reprendre les distinctions de Ricoeur (1986), que le pilote avait pu nouer au cours de sa rédaction, peuvent être remises en question, transformant par exemple un lien de causalité en un lien de finalité ou montrant qu'un élément pris pour hasardeux s'avère au contraire crucial. Or, s'il en va assurément de même, lorsque le chercheur travaille à partir de protocoles ou de vidéos, la question de savoir s'il serait lieu de reprendre le substrat de l'analyse pour le modifier ne se pose jamais, puisqu'une fois qu'ils ont été établis, ils sont en principe immuables. Dans le cas de la narration, en revanche, il peut être tentant pour le chercheur, quand sa logique vient s'opposer à celle du pilote, de remanier la narration de ce dernier. Non pas pour la disqualifier, mais bien de façon à ce qu'elle gagne en intelligibilité fort des nouvelles significations qu'il a pu y lire. Le chercheur doit-il s'aventurer à le faire ou au contraire maintenir intacte la narration établie à chaud par le pilote ? Tout va dépendre en fait de la forme du produit final qu'il va choisir de livrer au lecteur.

PERSPECTIVES

En écho à ce qui a été annoncé dans l'introduction, quand j'affirmais que la thèse revêtait des enjeux pour les trois mondes que constituent la Fps, l'Es et la ddm, je vais décliner pour terminer les perspectives qu'elle permet maintenant d'envisager pour chacun d'entre eux.

Perspectives pour la Fps

Au CFPS, les cours de branches professionnelles et de culture générale des formations AFP sont maintenant donnés (comme c'était déjà le cas auparavant pour les formations CFC) dans les écoles professionnelles. L'enseignement des mathématiques de type didactique organisé susceptible d'y être dispensé ne concerne désormais plus que l'année d'orientation-initiation au travail qui précède l'entrée en apprentissage, les cours donnés aux apprenties en formation AFPra et, pour les apprenties en formation AFP, les deux heures hebdomadaires de cours d'éducation cognitive (même s'ils sont actuellement de plus en plus encombrés par le soutien aux devoirs). Cet enseignement n'est donc plus le lot que de déterminations internes, ce qui, d'un côté, tend à lever une part des contraintes - comme la préparation aux examens - dont ils faisaient l'objet, mais d'un autre côté vient en accroître la précarité - du fait que l'on ne sait plus trop ce qu'il convient d'enseigner - et le faire disparaître.

A la suite des analyses effectuées dans la thèse, il est toutefois possible de dégager deux principaux axes de travail⁴⁶³.

Le premier axe implique un rapprochement avec les secteurs professionnels pour déterminer, en collaboration avec les MSP, les problèmes que les apprenties ont effectivement à résoudre

⁴⁶³ Ces axes pourraient également concerner les cours de mathématiques qui sont donnés, pour certains métiers, dans les écoles professionnelles, mais ce pour autant que les épreuves d'examens, telles qu'elles apparaissent encore dans la formation d'employée en cuisine AFP, soient profondément réaménagées (ce qui est loin d'être acquis).

dans la pratique, les moyens qui sont mis à leur disposition pour le faire et les conditions dans lesquelles leur résolution doit avoir lieu. C'est la perspective adoptée depuis plusieurs années par Kaiser (2010 ; 2011), et l'unique, à ma connaissance, à être développée en Suisse dans le contexte de la formation professionnelle (il ne s'agit toutefois pas de la Fps), qui repose sur le concept de *mathématiques situées* ou de *mathématiques en situation*. Il est en effet indispensable qu'un rapprochement avec les secteurs professionnels soit effectué, si l'on veut parvenir à déterminer quelles mathématiques et en quoi les mathématiques peuvent être d'un véritable recours à l'effectuation des tâches professionnelles que les apprenties doivent apprendre à maîtriser durant leur formation, ce qui ne dit évidemment pas comment s'y prendre pour (bien) le faire et nécessite de fait un travail d'investigation conséquent⁴⁶⁴.

Le deuxième axe, complémentaire au premier, invite à proposer aux apprenties un travail sur les nombres⁴⁶⁵, leurs propriétés et leurs structures, qu'ils soient naturels, décimaux, rationnels, voire irrationnels. Plusieurs éléments, mis en évidence dans la thèse, parlent en effet dans ce sens :

- l'analyse des résultats des épreuves qui montre que les nombres décimaux, rationnels (et irrationnels) font l'objet d'un sous-investissement à l'école et qu'ils sont peu maîtrisés par bon nombre de stagiaires ;
- l'importance établie de la disponibilité des relations numériques dans la résolution des exercices numériques, ainsi que dans l'usage, voire le contrôle de certains algorithmes ;
- l'inévitable présence des décimaux et rationnels à l'occasion du maniement des calculettes.

Ce travail à réaliser sur les nombres implique cependant lui aussi un important travail d'investigation⁴⁶⁶ notamment, parce que, dans le cadre d'un contrat de reprise, il implique de prendre en compte toutes ces idées, plus moins correctes et plus ou moins mêlées, que les apprenties ont déjà pu se constituer à leur égard.

En suivant ces deux axes, il serait donc indiqué de poursuivre le travail entrepris dans une direction qui s'avérerait plus proche de l'*ingénierie didactique* (Artigue, 1988), en tenant évidemment compte des conditions particulières dans lesquelles de telles ingénieries seraient amenées à se développer.

Perspectives pour l'Es

Vis-à-vis de l'Es, les analyses conduites montrent qu'on ne saurait continuer à légitimer l'enseignement des mathématiques qui y est donné en vue des seules perspectives utilitaires

⁴⁶⁴ On peut donner à titre d'exemple l'essai de transposition des travaux de Kaiser qui a été récemment faite au CFPS, dans le secteur de l'intendance, autour d'un problème demandant de déterminer le nombre minimal de tables de cinq ou six personnes qu'il s'agissait de préparer en vue du repas de midi, selon le nombre, variable chaque jour (ce qui fait que le problème se repose en principe à chaque fois), de personnes qui participent au repas. La collaboration MSP-enseignant requise par le traitement du problème a créé une belle dynamique et permis de constituer un petit modèle susceptible de résoudre n'importe quel cas de figure. Ce modèle a été proposé aux apprenties en cours et en présence du MSP, en forme d'institutionnalisation, après qu'elles aient résolu par elles-mêmes plusieurs cas spécifiques, avec la perspective d'être ensuite en mesure d'y recourir dans la pratique. En dépit de l'enseignement dispensé, l'usage effectif du modèle en intendance n'a cependant pas vraiment pris, étant donné qu'au sein des contraintes temporelles qui y prévalaient (dès que le nombre de personnes était connu, il fallait se dépêcher de mettre les tables en place), on procédait plutôt à l'agencement de tables pour six, tout en dénombant simultanément le nombre de personnes qui leur correspondait ; puis, une fois que l'on arrivait à proximité du nombre de personnes à atteindre, on "s'arrangeait", en prélevant ou en rajoutant des tables et des couverts, pour aboutir à la disposition escomptée.

⁴⁶⁵ Dans les premières séances de cours menées avec les apprenties employées de cuisine AFP, on a pu observer l'appétence que certaines d'entre elles pouvaient manifester, lorsqu'on leur en donnait l'occasion, pour des activités concernant les nombres, détachés des grandeurs qu'ils représentent ; dans le même temps, il faut également se souvenir, du rappel à l'ordre effectué par El au chapitre 9, qui avait interrompu le travail entamé sur les fractions, prétextant qu'elle en savait suffisamment pour ce qu'elle avait à en faire, pour se garder de tout excès d'optimisme.

⁴⁶⁶ On relèvera à ce propos quelques essais déjà tentés au CFPS à travers l'usage d'ouvrages de vulgarisation tel que : « Le démon des maths » (Enzensberger, 1998) qui invitent à une exploration des nombres détachés de toute grandeur.

que justifierait en aval l'entrée dans la formation professionnelle. Or, si cette lourde contrainte pouvait être, au moins en partie, levée, il est probable que l'on soit mieux à même de résister à certains phénomènes caractérisant les pratiques d'enseignement des mathématiques dans l'Es (cf. Introduction). Il s'agirait par exemple de :

- veiller à ce que l'inversion mise à jour au sein de la Fps, quant à l'utilisation des exercices scolaires en tant que fin, plutôt qu'en tant que moyen n'y prenne pas déjà corps, et faire en sorte que l'enseignement donné ne soit pas seulement et avant tout algorithmique (Giroux & René de Cotret, 2001)
- diversifier les investissements de savoirs, faisant en sorte de réduire certains surinvestissements comme celui qui caractérise les opérations écrites, au profit d'autres savoirs, comme les savoirs géométriques (Dias, 2009) qui font plutôt l'objet de sous-investissements, ce qui pourrait donner lieu à une formation mathématique moins parcellaire et diminuer de la sorte le phénomène de reconduction dans l'ignorance (Conne, 1999)
- profiter d'amorcer le travail sur les nombres, naturels, décimaux, rationnels (voire irrationnels) proposé comme deuxième axe de travail dans la Fps, dans un contexte où le temps d'enseignement qui peut être consacré aux mathématiques est nettement plus important ; on pourrait notamment mettre à profit les trois niveaux distingués par Rouche (1992, 1998, 2006) - niveau des grandeurs, niveau des grandeurs mesurées, niveau des nombres - non en tant que progression linéaire à suivre, mais bien en tant que potentiel d'exploration pour l'enseignant et pour les élèves⁴⁶⁷.

Perspectives pour la ddm

Pour la ddm, le contexte de la Fps, situé tout à la fois en marge de l'école et en marge de la formation professionnelle, représente, comme celui de l'Es, un *autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence* (Conne & al., 2004). De par les résistances qu'il génère, que ce soit en termes d'appropriation des savoirs mathématiques ou en termes de conduite de l'enseignement, il forme un milieu consistant pour éprouver des dispositifs d'enseignement et d'apprentissage.

La Fps offre également un cadre propice à l'étude de ces *pratiques d'enseignement* que Chevallard a pointé depuis fort longtemps (1988b ; 1992), mais qu'il a surtout considéré d'un point de vue rhétorique dans ses textes, et qui, dans la thèse, ont systématiquement été versées dans la catégorie du *didactique improvisé*. De telles pratiques ont effectivement cours dans tous les lieux où se déroule la formation des apprenties au CFPS et s'il est indéniable qu'elles produisent des effets, on n'en connaît pourtant ni la portée, ni les implications et ni non plus les limites.

Cela dit, le plus important assurément est que l'ensemble du travail mené dans la thèse permet de préciser encore un peu mieux la *spécificité* du champ de recherche que le groupe ddmes, accompagné par quelques autres chercheurs en ddm, ont commencé à défricher depuis plusieurs années (cf. Introduction). Une spécificité qui reste largement incomprise, faisant que le champ de l'Es (augmenté maintenant du champ de la Fps), pour ceux qui ne s'y trouvent pas ou qui n'y vont pas voir, se voit systématiquement assimilé à celui de l'Eo (respectivement de la Fpo).

⁴⁶⁷ A ce titre, le chapitre du livre de Rouche, intitulé « Les multiples et les diviseurs » et consacré à : « quelques notions classiques, à savoir les diviseurs et les multiples, les nombres premiers, le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple et enfin les nombres carrés et triangulaires. » (ibid., p.287) donne des exemples de savoirs "pas vraiment classiques" dans l'Es, dans le sens où ils ne sont que fort peu investis, alors même qu'ils participent au développement de relations numériques multiplicatives et de division "utiles" dans la Fps. Son positionnement en toute fin d'ouvrage présente malencontreusement le risque qu'on les oublie...

A ce titre, les analyses des investissements de savoirs et des interactions de connaissances qui ont été réalisées dans le contexte du CFPS du Château de Seedorf ont montré que c'est bien plus l'encombrement et la faible organisation des savoirs que leur pauvreté qui caractérise les apprenties en formation. Un encombrement qui est produit et fortement accentué par la diversité des milieux familiaux, scolaires et professionnels qu'elles ont rencontrés (et rencontrent encore) tout au long de leur expérience de vie de jeunes adultes. Or, la plupart des dispositifs d'enseignement constitués pour l'Eo - les constructions établies par Rouche (1992, 1998, 2006) en offrent un bel exemple - sont invariablement fondés sur la perspective d'entraîner les élèves assez loin, i.e. jusqu'aux mathématiques formelles, pour leur permettre de rejeter de tels savoirs, au fur et à mesure qu'ils s'en approprient des nouveaux⁴⁶⁸.

Il est toutefois indéniable que la plupart des apprenties de la Fps, comme bon nombre d'élèves de l'Es, ne parviendront pas à accéder à ces mathématiques qui règlent la grande majorité des écueils auxquels ils s'affrontent. Les investissements de savoirs et les interactions de connaissances qui ont lieu d'advenir dans de tels contextes doivent donc nécessairement être considérés autrement qu'en se référant à la perspective d'atteindre un jour cet horizon lointain. On a vu que la stratégie qui est unilatéralement utilisée dans la Fps est de chercher à doter les apprenties d'algorithmes suffisamment puissants qui viennent se substituer à ces savoirs acquis. Sa mise en œuvre ne va cependant pas sans heurts et présente en continu le risque de les déposséder de leurs moyens, voire des possibilités de tirer parti de ces moyens. Une stratégie opposée consisterait à leur donner l'occasion d'éprouver dans diverses situations ces savoirs qu'elles se sont partiellement appropriés, à des fins de mises en ordre, de réorganisations, en vue de la constitution d'un *savoir savant* (Conne, 1992). Mais cela demande du temps dont on ne dispose pas vraiment dans la Fps, pour faire en sorte que des procédés localement opérationnels parviennent progressivement à accéder au statut de règles générales, plus largement fonctionnelles.

Il revient donc à la ddm de penser ce monde particulier constitué des personnes qui, pour une grande majorité d'entre elles, n'accéderont jamais à l'univers des mathématiques formelles. En offrant une lisibilité au fonctionnement des mathématiques que l'on rencontre dans la Fps, la thèse y a apporté une contribution supplémentaire. Elle invite dès lors à poursuivre les travaux menant au développement d'une didactique qui s'intéresse et s'adresse véritablement à celles et ceux qui, pour toutes sortes de raisons liées à leur parcours de vie, ne vont pas plus loin et s'arrêtent en chemin.

⁴⁶⁸ Cette question du rejet de certains savoirs par l'accès à d'autres savoirs a été traitée en ddm par l'idée de saut informationnel (Brousseau, 1983) dans le cadre de la TDS. La description d'un exemple de "révolution cognitive" provoquée chez un individu particulier par l'accès à un nouveau savoir se trouve dans Conne (1986). Le problème, c'est que l'on ne sait pas trop comment les provoquer et que l'on en est donc réduit à espérer qu'elles se produisent.

EPILOGUE

En guise d'épilogue à ce long travail, je donnerai la parole à Henri Roorda (1870-1925) qui fut, parmi d'autres, professeur de mathématiques à l'école supérieure de *jeunes filles* de Villamont, puis au gymnase de la Cité à Lausanne, philosophe et auteur de chroniques humoristiques dans la presse de Suisse romande, durant les premières décennies du XX^{ème} siècle :

N'ABUSONS PAS DE LA RÈGLE DE TROIS

[...] Je n'insiste pas davantage, car on m'a compris. C'est seulement à l'école que toutes les heures sont les mêmes et qu'un kilo de viande en vaut un autre. Il faut être pédagogue pour croire qu'on instruit deux fois plus un enfant en lui donnant huit leçons par jour qu'en lui en donnant quatre. Dans le monde du vrai travail, la qualité importe souvent davantage que la quantité.

[...] Georges Courteline nous a parlé d'un curé qui, au moment de sortir de son église pour aller souper chez la riche châtelaine du voisinage, vit arriver une pécheresse dont le besoin le plus pressant était de se confesser. Il ne put la décider à remettre la chose au lendemain. La malheureuse avait trompé cinq fois son mari. Or, le curé venait d'infliger la récitation de douze *Pater* et douze *Ave* à une de ses ouailles qui avait commis sept fois ce même péché. Les sourcils froncés et l'esprit tendu, il articula : « x est à 12 comme 5 est à 7... x est à 12 comme 5 est à 7... ». Mais, très pressé, et ne pouvant sortir de ce calcul difficile, le curé dit à la femme qui se repentait : « Vous tromperez encore deux fois votre mari. Puis, vous direz douze *Pater* et douze *Ave*. Et ça fera le compte. »

Henri Roorda (1919). *A prendre ou à laisser : le programme de lecture du professeur d'optimisme*. Lausanne : Editions Payot (pour la première édition) ; Paris : Editions Mille et une nuits (pour l'édition de 2012), pp.34-37.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES, CHAPITRE D'OUVRAGES ET ARTICLES DE RÉFÉRENCES

Anadón, M. & Guillemette, F. (2012). La recherche qualitative est-elle nécessairement inductive? *Recherches qualitatives, Hors série n°5*, 26-37.

Arsac, G. (1992). L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 12(1), 7-32.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.

Auckenthaler, Y. (2004). Jouer la surprise, oui mais comment ? Analyses de jeux de tâches géométriques et de leurs moments de surprise. Mémoire de licence inédit. Université de Genève : FPSE.

Ba, C. & Dorier, J-L. (2006). Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXème siècle. *L'Ouvert*, 113, 17-30.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

Berthelot, R., Salin, M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

Bessot, A., Déprez, S., Eberhard, M. & Gomas, B. (1993). Une approche didactique de la lecture des graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment. In A. Bessot & P. Vérillon (Ed.) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. (pp.115-144). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bessot, A. & Eberhard, M. (1995). Le problème de la pertinence des savoirs mathématiques pour la formation aux métiers du bâtiment. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds) *Différents types de savoir et leur articulation* (pp.13-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bkouche, R. (1996). La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France, de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes. In B. Belhoste, H. Gispert & N. Hulin (121-138) *Les Sciences au Lycée*. Paris : Vuibert

Bkouche R. (2008). *La règle de trois et les didacticiens*. [Online] <http://michel.delord.free.fr/rb/rb-reg23didac.pdf> [consulté le 21.07.2015].

Bkouche, R. Charlot, B. & Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris : Armand Colin.

Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Etude d'une progression sur la multiplication en SEGPA. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 41(1), 91-111.

Bloch, I. (2010). L'enseignement de la proportionnalité dans une classe ambition réussite. Variables didactiques, pratiques du professeur, rapport visible au savoir. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 2010/4, 52, 89-100.

Bloch, I. (2013). Elèves en difficulté à l'entrée au collège : quelques repères pour penser l'enseignement des mathématiques. *Petit x*, 93, 29-51.

- Bloch, I. & Salin, M.-H. (2004). Contrats, milieux, représentations : étude des particularités de l'ASH. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Ed.) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp. 171-186). Paris : IREM Paris 7.
- Bonafé F., Chevalier A., Combes M.-C., Deville A., Dray L., Robert J.-P. & Sauter M. (2002). *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Montpellier : IREM Montpellier, APMEP.
- Bontemps, V. (2014). Les mathématiques et l'expérience selon Ferdinand Gonseth. *Bulletin de l'Association Ferdinand Gonseth*, 158, 15-31.
- Bosch M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Brousseau, G. (1980a). L'échec et le contrat. *Recherches*, 41, 117-182.
- Brousseau, G. (1980b). Problème de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1(1), 11-58.
- Brousseau, G. (1981a). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de laryngologie*, 101(3/4), 107-131.
- Brousseau, G. (1981b). *Le cas de Gaël*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherche en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnigot (Eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 51-66). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Ed.) *Actes de la 8^{ème} école d'été de didactique des mathématiques à St-Sauves d'Auvergne*. Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.
- Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. & Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 167-210.
- Brown, J.-S. & Burton, R.-R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematics skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Brown, J.-S. & Van Lehn, K. (1980). Repair theory : a generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math-école*, 141, 2-14.
- Brun, J. (1996). Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In J. Brun (Ed.) *Didactique des mathématiques* (pp.19-43). Lausanne : Delachaux et Niestlé, coll. Textes de base en pédagogie.

- Brun, J. (1999). A propos du statut de l'erreur dans l'enseignement des mathématiques. *Résonances* n°5, janvier 1999, 7-9.
- Brun, J., Conne, F. & Retschitzki, J. (1989). *L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques*. Projet de recherche FNRS (Rapport final, 1991). Université de Genève : FPSE.
- Brun, J. & Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et Recherche* 3/90, 261-286.
- Brun, J. & Conne F. (1993). Calculs et erreurs systématiques. *Journal de l'enseignement primaire*, 43, Genève, 29-31.
- Brun, J., Conne F., Lemoyne, G. & Portugais, J. (1994a). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit. *Cahiers de la recherche en éducation*, Genève, 117-132.
- Brun, J., Conne F., Floris, R., Lemoyne, G., Leutenegger F. & Portugais, J. (1994b). Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnogt (Eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.203-209). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bruner, J. (1987). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF.
- Bruner, J. (1996). *L'éducation, entrée dans la culture. Les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle*. Paris : Editions Retz.
- Büchel, F. (1995). *L'éducation cognitive*. Lausanne : Delachaux et Niestlé, coll. Textes de base en pédagogie.
- Büchel, F. & Büchel, P. (2011). *DELV Comprendre son propre apprentissage. Un programme pour améliorer l'apprentissage et le raisonnement des adolescents et des adultes*. Tegna (Ti) : Centre d'éducation cognitive.
- Calpini J.-C. (1985). L'observation par la méthode clinique piagétienne. In M.-P. Michiels-Philippe (Dir.). *L'observation*. (pp.209-240). Lausanne : Delachaux et Niestlé.
- Cange, Ch. (2012). La narration : une opportunité pour l'enseignant spécialisé d'investiguer et de communiquer à propos de l'activité mathématique des élèves. Document inédit, disponible auprès du groupe ddmes.
- Cange, Ch. & Favre, J.-M. (2003). L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé est-il pavé de bonnes analyses d'erreurs ? In C. Mary & S. Schmidt (Ed.) *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. Education et francophonie*, vol. XXXI (2) [Online], 199-217.
- Cavaillès, J. (1981). *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Paris : Hermann (1^{ère} éd., 1938).
- Cherel, C. (2005). *Deux élèves en difficulté s'intègrent dans une classe ordinaire le temps... des mathématiques*. Montréal : Bande Didactique.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1988a). Médiations et individuations didactiques. *Interactions didactiques*, 8, Université de Neuchâtel, 23-34.
- Chevallard, Y. (1988b). L'univers didactique et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnements. *Interactions didactiques*, 9, Université de Neuchâtel, 9-36.

- Chevallard, Y. (1988c). Esquisse d'une théorie formelle du didactique. In C. Laborde (Ed.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique à Marseille* (pp.97-106). Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1997). Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherche en didactique des mathématiques*, 17(3), 17-54.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherche en didactique des mathématiques*, 22 (2.3), 135-182.
- Conne, F. (1985). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Thèse de doctorat. Lausanne : Conne/Couturier-Noverraz.
- Conne, F. (1986). Mathias ou un "moment de compréhension". *Petit x*, 10, 53-66.
- Conne, F. (1987). Un canard dans les mares. *Education et recherche*, 9.3, 301-328.
- Conne, F. (1992). Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 12(2), 221-270.
- Conne, F. (1997). Diagrammes, symboles et marques. Texte inédit, disponible sur HAL archives-ouvertes.fr [On Line] <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01133329/document> [consulté le 21.07.2015].
- Conne, F. (1998). L'activité dans le couple enseignant/enseigné. In M. Bailleul, Claude Comiti, Jean-Luc Dorier, Jean-Baptiste Lagrange, Bernard Parzysz & Marie-Hélène Salin (Eds.) *Actes de la 9^{ème} école d'été de didactique des mathématiques à Houlgate* (pp.15-24). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In F. Conne & G. Lemoyne (Ed.) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp.31-69). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.
- Conne, F. (2000). Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé ? In M. Bailleul (Ed.) *Tome II des Actes de la 10^{ème} école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 125-151). Caen : IUFM de Caen et ARDM.
- Conne, F. (2002). Evolution de la référence à la *réalité* dans les manuels suisses romands au cours du XX^{ème} siècle. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds) *Actes de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques* (CD ROM). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissements de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. In C. Mary & S. Schmidt (Ed.) *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. Education et francophonie*, vol. XXXI (2) [Online], 82-102.
- Conne, F. (2004a). Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Ed.) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques*. (pp.79-100). Paris : IREM Paris 7.
- Conne, F. (2004b). Jouer la surprise. *L'Educateur*, 7, 35-37.

Conne, F. (2004c). Problèmes de transposition didactique. *Petit x*, 64, 62-81.

Conne, F. (2006a). La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante. *L'éducateur, numéro spécial : la recherche en éducation*, 21-26.

Conne, F. (2006b). Savoirs à perte de vue. Texte inédit, disponible sur HAL archives-ouvertes.fr [On Line] <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01114874v3/document> [consulté le 21.07.2015].

Conne, F. (2007). Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres. Suivi de situations de dessin en 4^{ème} année primaire de l'enseignement spécialisé. In J. Giroux & D. Gauthier (Ed.) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. (pp.219-258). Montréal : Bande Didactique.

Conne, F. (2008). L'expérience comme signe didactique indiciel. *Recherche en didactique des mathématiques*, 28(2), 219-264.

Conne, F. (2012). A propos de calcul, une thématization nécessaire. Texte inédit.

Conne, F., Cange, C., Favre, J.-M., Del Notaro, L. Scheibler, A., Tièche Christinat, Ch., Bloch, I. & Salin M.-H. (2004). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Ed.) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp.77-185). Paris : IREM Paris 7.

Conne, F., Favre, J.-M. & Giroux, J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In P.A. Doudin & L. Lafortune (Eds) *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers. Quelle formation à l'enseignement ?* (pp. 118-151). Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

Coulet, J.-C. (2003). Les méthodes d'éducation cognitive : bilans et perspectives. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Eds) *Carnets de route de la COPIRELEM. Tome 1. Apprentissage et diversité. Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques* (pp.169-198). Paris : ARPEME.

CREM a.s.b.l. (1995). *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*. Centre de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques : Nivelles (Belgique).

CREM a.s.b.l. (2002). *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*. Centre de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques : Nivelles (Belgique).

Del Notaro, C. (2011). Le jeu de tâches, une interaction de connaissance particulière entre expérimentateur et élèves. In *Actes du XXVIIIème Colloque COPIRELEM "Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants"* (C2, pp.1-14). Dijon : IREM de Dijon

Del Notaro, C. (2013). Vers une distinction chiffre/nombre dans un jeu de tâches chez des élèves de 11 ans. In : IREM de Brest. *Actes du XXIXème Colloque COPIRELEM "Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants"* (C3, pp.1-13). Brest : IREM de Brest

Del Notaro, L. & Floris, R. (2005). L'utilisation de la calculatrice à l'école élémentaire : une nouvelle approche didactique pour l'enseignement de la numération. *Math-école* 215, 4-18.

Del Notaro, L. & Floris, R. (2011). Calculatrice et propriétés arithmétiques à l'école élémentaire. *Grand N* 87, 17-49.

Dias, B. (2003). *Apprentissage cognitif médiatisé : l'apport de la psychologie cognitive à l'enseignement et à l'apprentissage*. Lucerne : Editions SZH CSPA (Centre Suisse de Pédagogie Spécialisée).

Dias, T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques, un exemple avec la situation des polyèdres. *Grand N*, 83, 63-84.

Dorier J.-L. & Coutat S. (Ed.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle - Actes du colloque EMF2012*. Groupe de travail 5. [On Line] <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012/groupe-de-travail-5> [consulté le 21.07.2015].

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques*, 7 (2), 211-240.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2000). *Fonctionnement du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*. Thèse. Université Sciences et Technologies - Bordeaux 1.

Favre, J.-M. (1992). La multiplication : élaboration d'une démarche par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept. Mémoire inédit réalisé au Séminaire cantonal de l'enseignement spécialisé (SCES) à Lausanne, disponible auprès de l'auteur.

Favre, J.-M. (1994). Élaborer une démarche d'enseignement par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept : la multiplication. *Grand N*, 53, 27-37.

Favre, J.-M. (1997). L'échec, le temps, la multiplication : étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication dans une classe spécialisée, par comparaison avec l'enseignement et l'apprentissage de la même opération dans une classe primaire. Mémoire de licence inédit de l'Université de Genève, FAPSE.

Favre, J.-M. (1999). Le mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant ? In F. Conne & G. Lemoyne (Ed.) *Le cognitif en didactique des mathématiques*. (pp.235-261). Montréal : Presses Universitaires de Montréal.

Favre, J.-M. (2003). Un programme de mathématiques "adapté" pour l'enseignement spécialisé : un jeu délicat entre liberté ostensible et contraintes intestines. *Math-Ecole*, 206, 41-50.

Favre, J.-M. (2004a). Etude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe de l'enseignement spécialisé. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Ed.) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp. 109-126). Paris : IREM Paris 7.

Favre, J.-M. (2004b). La création d'un groupe de recherche pour étudier les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Ed.) *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp.127-140). Paris : IREM Paris 7.

Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N*, 82, 9-30.

Favre, J.-M. (2009). Enseigner les mathématiques à partir de l'exploration d'un objet. Une alternative pour favoriser la participation des élèves dans les activités mathématiques. In V. Guerdan, G. Petitpierre, J.-P. Moulin & M.-C. Haelewyck (Eds) *Participation et responsabilités sociales. Un nouveau paradigme pour l'inclusion des personnes avec une déficience intellectuelle* (CDROM). Berne : Peter Lang.

- Favre, J.-M. (2012a). Narrer pour problématiser dans le contexte de la formation professionnelle d'apprenties en difficulté d'apprentissage. In Dorier J.-L. & Coutat S. (Ed.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 699–710).
- Favre, J.-M. (2012b). Engager des élèves et des enseignantes de classes spéciales dans des pratiques mathématiques (1^{ère} partie). *Math-Ecole*, 218, 13-17.
- Favre, J.-M. (2013). Engager des élèves et des enseignantes de classes spéciales dans des pratiques mathématiques (partie 2). *Math-Ecole*, 219, 11-15.
- Feuerstein, R. (1990). Le PEI (Programme d'Enrichissement Instrumental). In *Pédagogies de la médiation* (pp.117-166). Lyon : Chroniques sociales.
- Flückiger, A. (2006). Formation au travail de l'erreur et didactique des mathématiques. *Revue Suisse des Sciences de l'Education*, 28(1), 43-59.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht : Reidel.
- Giroux, J. (2004). Echanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation* 30(2), 303-328.
- Giroux, J. (2007). Maillage de situations didactiques dans des classes de l'adaptation scolaire. In J. Giroux & D. Gauthier (Ed.) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. (pp. 35-63). Montréal : Editions Bande didactique.
- Giroux, J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire. *Recherche en didactique des mathématiques*, 28(1), 9-62.
- Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Education et Didactique*, 7(1), 59-86.
- Giroux, J. (à paraître). Variations sur les processus interprétatifs dans l'étude des difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Actes de la 17^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, août 2013, Nantes.
- Giroux, J. & René de Cotret, S. (2001). Le temps didactique en classe de doubleurs. In G. Lemoyne & C. Lessard (Ed.) *L'éducation au tournant du nouveau millénaire* (pp.41-71). Montréal : Publications de la Faculté des Sciences de l'Education de l'Université de Montréal.
- Groupe ddmes (2012). Des narrations pour partager et faire rebondir nos expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Actes des deuxièmes journées didactiques de La Chaux d'Abel*. [On Line] <http://www.ssr dm.ch/spip1/spip.php?article62> [consulté le 02.08.2014].
- Higelé, P., Hommage, G. & Perry, E. (2013). *ARL. Méthode pour l'apprentissage des opérations intellectuelles. Ateliers de Raisonnement Logique*. Paris : Editions Qui plus est.
- Houdement, C. (1998). Le choix des problèmes pour la "résolution de problèmes". *Grand N*, 63, pp.59-76.
- Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 71, pp.7-23.
- Jovenet, A.-M. (1998). Perception et conceptualisation de la symétrie. Une situation adaptée aux élèves myopathes. *Recherche en didactique des mathématiques*, 18(1), 35-58.

- Kaiser, H. (2010). Situierendes Wissen, subjektive Erfahrungsbereiche und Mathematik in der Berufsbildung. In S. Prediger (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 469-472). Münster : WTM-Verlag.
- Kaiser, H. (2011). *Le calcul professionnel recentré - approches novatrices dans la formation de cuisinière/cuisinier*. Zollikofen : Institut fédéral des hautes études en formation professionnelle (EHB IFFP IUFPF).
- Kaiser, H. (2015). *Le calcul/les mathématiques en situation professionnelle : apports théoriques*. Zollikofen : Institut fédéral des hautes études en formation professionnelle (EHB IFFP IUFPF).
- Laborde, C. & Vergnaud, G. (1994). L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. In G. Vergnaud (coord.) *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?* Paris : Hachette éducation.
- Le Lionnais, F., Bouvier, A. & George, M. (1979). *Dictionnaire des Mathématiques*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Lemoyne, G. (1990). La peur de ne pas savoir la réponse : les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. *Repères*, Université de Montréal, 79-101.
- Lemoyne, G. & Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants. In C. Mary & S. Schmidt (Ed.) *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. Education et francophonie*, vol. XXXI (2) [Online], 13-44.
- Maréchal, C. (2010). *Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé : une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition*. Thèse de doctorat. Université de Genève
- Maréchal, C. (2012) Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. In Dorier J.-L. & Coutat S. (Ed.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012* (GT8, pp.1102-1113).
- Mercier, A. (1995). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds) *Différents types de savoir et leur articulation* (145-169). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Monod, J.-D. (2004). La référence à l'utilité dans l'enseignement des mathématiques à l'école : regards croisés entre plans d'étude et usages sociaux. Mémoire de DEA inédit de l'Université de Genève, FAPSE.
- Morf, A, Grize, J.-B. & Pauli, L. (1969). Pour une pédagogie scientifique. *Dialectica*, 23.1, 24-31.
- Moulin, J.-P. (2015). CFPS, Centre de formation professionnelle de spécialisée à sociale : un renversement conceptuel et pratique. *Pages Romandes*, 1, 03/2015, 14-15.
- Ogay, C. (2010). *Leurs droits, malgré tout*. Vevey : Editions de l'Aire.
- Pastré, P. (2005). La deuxième vie de la didactique professionnelle. *Éducation permanente* 165, 29-46.
- Patras, F. (2015). *La possibilité des nombres*. Paris : PUF.
- Peirce, C.S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses*. Paris : Cerf.
- Peirce, C.S. (2002). *Pragmatisme et pragmaticisme*. Paris : Cerf.

- Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes "faibles". *Recherches en didactique des mathématiques*, 13(1.2), 5-118.
- Perret, J.-F., Brun, J., Guillet, N., Jaquet, F., Jaton, M., & Theurillat, M. (1987). Faire un compte-rendu d'une leçon de mathématique. Est-ce utile? Intéressant? Risqué? *Math-Ecole*, 127, 17-21.
- Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. Paris : PUF.
- Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne : Peter Lang.
- Rabardel, P. (2007). Principes pour la constitution d'une didactique professionnelle. In M. Merri (Coord.) *Activité humaine et conceptualisation. Questions à Gérard Vergnaud*. (pp. 87-90). Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.
- Ricoeur, P. (1985). *Temps et récit. Tome III : le temps raconté*. Paris : Seuil.
- Ricoeur, P. (1998). *Du texte à l'action: essai d'herméneutique II*. Paris : Seuil.
- Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériques dans les pratiques d'enseignement en SEGPA*. Thèse. Université Victor Segalen - Bordeaux 2.
- Rouche, N. (1988). L'apprentissage des mathématiques est-il un objet de recherche sérieux ? Publication interne au Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), Louvain-la-Neuve.
- Rouche, N. (1991a). Pourquoi les maths ? In R. Bkouche, B. Charlot & N. Rouche (Eds) *Faire des mathématiques : le plaisir du sens* (139-154). Paris : Armand Colin.
- Rouche, N. (1991b). Formation des concepts et construction du savoir. In R. Bkouche, B. Charlot & N. Rouche (Eds) *Faire des mathématiques : le plaisir du sens* (195-215). Paris : Armand Colin.
- Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.
- Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : ellipses.
- Rouche, N. (2006). *Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions*. Paris : ellipses.
- Rouchier, A. (1980). Présentation. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1 (1), 7-11.
- Rouchier, A. (1991). *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatiques élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse de doctorat d'état. Université d'Orléans.
- Rouchier A. (1996). Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(2), 177-196.
- Salin, M.-H. (1976): Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. DEA inédit, IREM de Bordeaux.
- Salin, M.-H. (2002). Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelo & R. Floris (Eds) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.111-124). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Salin, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire. In J. Giroux & D.Gauthier (Ed.) *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne* (p.195-217). Montréal : Bandes didactiques.

Subes, J. & Subes, M. (1954). *Manuel pour l'application des tests de niveau scolaire, orthographe et calcul*. Paris : Centre de psychologie appliquée.

Subes, J. & Subes, M. (1965). *Manuel pour l'application des tests de niveau scolaire : orthographe et calcul*. Paris : Centre de psychologie appliquée.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, 10(2.3), 133-170.

Vermersch, P. (2012). *Explicitation et phénoménologie*. Paris : PUF.

Voisin, S. (2013). *L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA. Contraintes, spécificités, situations*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 2.

LOIS, ORDONNANCES, PLANS DE FORMATION ET SITES RELATIFS À LA FORMATION PROFESSIONNELLE

Loi fédérale sur l'assurance-invalidité (LAI) du 19 juin 1959 (état au 1er janvier 2014)

[On Line] <https://www.admin.ch/opc/fr/classified-compilation/19590131/index.html> [consulté le 12.07.2015]

Loi fédérale sur la formation professionnelle (LFPr) du 13 décembre 2002 (état au 1er janvier 2015)

[On Line] <https://www.admin.ch/opc/fr/classified-compilation/20001860/index.html>. [consulté le 12.07.2015]

Ordonnance du SEFRI sur la formation professionnelle initiale d'employée en cuisine/employé en cuisine (n° 79022) du 7 décembre 2004

[On Line]
<http://www.sbf.admin.ch/bvz/grundbildung/index.html?detail=1&typ=EBA&item=612&lang=fr> [consulté le 12.07.2015]

Plan de formation pour la profession d'employé(e) en cuisine d'employée en cuisine/employé en cuisine (n° 79022) du 7 décembre 2004

[On Line]
<http://www.sbf.admin.ch/bvz/grundbildung/index.html?detail=1&typ=EBA&item=612&lang=fr> [consulté le 12.07.2015]

Plan de formation relatif à l'ordonnance sur la formation professionnelle initiale d'assistante du commerce de détail/assistant du commerce de détail du 8 décembre 2004

[On Line] <http://www.bds-fcs.ch/fr/informationen-fuer-fachleute/downloadcenter> [consulté le 12.07.2015]

Formation professionnelle : plan d'études cadre pour l'enseignement de la culture générale (PEC CG) du 27 avril 2006

[On Line] http://www.sbf.admin.ch/berufsbildung/01587/01595/index.html?lang=fr&__fr= [consulté le 12.07.2015]

Plan d'études des écoles cantonales pour l'enseignement de la culture générale (PEEC eCG Fribourg) du 21 juillet 2008

[On Line]

http://www.epaifribourg.ch/uploads/documents/publications/sfp_peec_ecg_fr_f_v1.0.pdf

[consulté le 12.07.2015]

Service de la formation professionnelle (SFP) du canton de Fribourg à Fribourg

[OnLine] http://www.fr.ch/sfp/fr/pub/sfp_presentation.htm [consulté le 12.07.2015]

Hotel & Gastroformation à Lonay (VD)

[OnLine] http://www.hotelgastro.ch/standard.cfm?ID_n=226&haupt=226&language=2

[consulté le 12.07.2015]

Centre de formation professionnelle et sociale (CFPS) du Château de Seedorf à Noréaz (FR)

[OnLine] <http://www.cfps-seedorf.ch/pages.php?lang=fr> [consulté le 12.07.2015]

DOCUMENTS RELATIFS À LA FORMATION PROFESSIONNELLE

Affolter, U., Von Niederhäusern, M & Beaud, F. (2009). *Croqu'menus : manger, boire, valoriser sa santé*. 12^{ème} édition, Berne : Schulverlag.

Antille, V., Gentile, C. & Micheloud, M. (2011). *De l'école aux cours professionnels. Comment bien commencer sa formation : informations sur l'apprentissage et les connaissances requises*. Berne : Centre suisse de services Formation professionnelle | orientation professionnelle, universitaire et de carrière (CSFO).

Denvers, F. (non-daté). *Exercices de mathématiques destinés aux classes de formation élémentaire*. Genève : Centre d'enseignement professionnel technique et artisanal (CEPTA).

Imperiale, M. & Lepori, M. (2013). *Formations initiales, rôle et prestations de l'AI*. Conférence donnée à l'Institut Agronomique de Grangeneuve (IAG), le 17 septembre 2013, p.3 du support à la présentation.

Secrétariat d'Etat à la formation, à la recherche et à l'innovation (SEFRI) (2014). *Formation professionnelle initiale de deux ans avec attestation fédérale de formation professionnelle (AFP) : guide*. Berne : SEFRI.

MANUELS SCOLAIRES ET OUVRAGES DE VULGARISATION DES MATHÉMATIQUES

Charrière, G. (1995). *L'algèbre : mode d'emploi*. Lausanne : Loisirs et Pédagogie.

Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001a). *Mathématiques 5^{ème} année, méthodologie - commentaires*. Neuchâtel : Editions COROME.

Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001b). *Mathématiques 5^{ème} année, fichier de l'élève*. Neuchâtel : Editions COROME.

Deledicq, A. & Izoard, D. (2000). *Histoires de maths*. Paris : ACL-Les Editions du Kangourou.

Deledicq, A. & Casiro, F. (2009). *Pythagore & Thalès*. Paris : ACL-Les Editions du Kangourou.

Enzensberger H.-M. (1998). *Le démon des maths*. Paris : Seuil/Jeunesse.

Guedj, D. (1998). *Le Théorème du Perroquet*. Paris : Seuil.

Prat, L. (1840). *Cours d'arithmétique usuelle et raisonnée. A l'usage des élèves de l'école moyenne centrale du canton de Fribourg - 1ère et 2^{ème} parties*. 2^{ème} édition, Fribourg : L.-J. Schmid, libraire et relieur.

Roorda Van Eysinga, H. (1917). *I. Arithmétique. Théorie et exercices*. Lausanne : Payot & Cie.

Singh, S. (1998). *Le dernier théorème de Fermat*. Paris : JC Lattès.

AUTRES SITES

Association vaudoise des organismes privés pour personnes en difficulté (AVOP)

[OnLine] <http://www.avop.ch> [consulté le 12.07.2015]

Institut Pré-de-Vert à Rolle

[OnLine] <http://www.pre-de-vert.ch> [consulté le 12.07.2015]

Société Suisse de Recherche en Didactiques des Mathématiques (SSRDM)

[OnLine] <http://www.ssrmdm.ch/Spip3/> [consulté le 12.07.2015]

TABLE DES ILLUSTRATIONS

FIGURES

Figure n°1 - Les différentes étapes de la formation des apprenties au CFPS.....	29
Figure n°2 - Structure de la construction n°1 relative au champ de la mesure	86
Figure n°3 - Structure de la construction n°2 relative au champ de la proportionnalité	88
Figure n°4 - Rapport de culture générale de fin de première année de formation au CFPS datant de 2009.....	134
Figure n°5 - Programme de formation élémentaire en blanchisserie encore en usage au CFPS.....	142
Figure n°6 - Programme de calcul professionnel pour les apprenties en blanchisserie durant l'année 2007-2008 au CFPS.....	144
Figure n°7 - Exemple d'exercice figurant dans une procédure de qualification de 2007	156
Figure n°8 - Technique du "produit en croix" enseignée à Ca dans le cadre des cours professionnels	168
Figure n°9 - Résolution par Ca de l'exercice n°1 le 05.01.10.....	163
Figure n°10 - Résolution par Ca de l'exercice n°2 le 05.01.10.....	165
Figure n°11 - Résolution par Ca de l'exercice n°3 le 05.01.10.....	166
Figure n°12 - Suite de la résolution par Ca de l'exercice n°2 le 05.01.10	167
Figure n°13 - Suite de la résolution par Ca de l'exercice n°1 le 05.01.10	168
Figure n°14 - Les deux exercices CFI résolus par Ca	171
Figure n°15 - Les deux premiers exercices CP résolus par Ca.....	172
Figure n°16 - Le troisième exercice CP résolu par Ca	174
Figure n°17 - Le quatrième exercice CP résolu par Ca	175
Figure n°18 - Les trois exercices TQIR résolus par Ca.....	176
Figure n°19 - Résolution par Ca de l'exercice n°9 le 19.01.10.....	177
Figure n°20 - Le premier exercice CC résolu par Ca	180
Figure n°21 - Le deuxième exercice CC résolu par Ca	181
Figure n°22 - Le troisième exercice CC résolu par Ca.....	182
Figure n°23 - Calcul de la longueur de l'hypoténuse à l'aide du théorème de Pythagore	225
Figure n°24 - Fiche support à l'enseignement de la règle de trois établie par le MSP en charge des cours	237
Figure n°25 - Fiche synthèse à l'usage de la règle de trois pour résoudre un exercice TQIR complétée par Tiz	238
Figure n°26 - Tableaux de conversion de mesures de poids réalisés par Tiz et par Mam dans le cadre des cours	239
Figure n°27 - Diagramme support à l'usage de la règle de trois/du produit en croix dans un calcul de pour cent	247

Figure n°28 - Extrait de la "feuille d'aide" donnée aux apprenties employée de cuisine AFP pour leur examen	248
Figure n°29 - L'exercice TQIR résolu par Tiz le 22.09.11.....	249
Figure n°30 - Diagramme support à l'usage de la règle de trois dans l'exercice 4 de l'épreuve d'évaluation.....	262
Figure n°31 - Exercice TQIR résolu par Jac et par Mam le 5.01.12	264
Figure n°32 - Exercice TQIR résolu par Co le 03.05.12	266
Figure n°33 - Exercices TQIR résolus par Jac le 19.01.12	267
Figure n°34 - Exercice TQIR résolu par Jac le 02.02.12	267
Figure n°35 - Exercice TQIR résolu par Jac le 29.03.12	268
Figure n°36 - Exercice TQIR résolu par Jac le 03.05.12	269
Figure n°37 - Inscriptions complémentaires notées par Jad en recopiant la règle de trois le 17.11.11	270
Figure n°38 - Inscriptions complémentaires notées par Jad lors de la résolution d'un exercice TQIR durant l'épreuve d'évaluation du 01.12.11	270
Figure n°39 - Inscriptions complémentaires notées par Jad lors de la résolution d'un exercice TQIR durant l'épreuve d'évaluation du 01.12.11	271
Figure n°40 - Exercice TQIR résolu par Jad le 29.03.12	272
Figure n°41 - Exercice RFI résolu par Jad, Jac et Sa le 03.11.11	273
Figure n°42 - Exercice de calcul de poids résolu par Jac le 03.11.11	276
Figure n°43 - Fiches synthèses établies par l'enseignante spécialisée à l'intention de Sa le 03.11.11	278
Figure n°44 - Fiche d'entraînement aux conversions de mesures de poids complétée par Co le 12.01.12	285
Figure n°45 - Epreuve d'évaluation réalisée par Co le 26.02.12.....	287
Figure n°46 - Epreuve d'évaluation réalisée par Sa le 26.02.12	288
Figure n°47 - Epreuve d'évaluation réalisée par Jac le 26.02.12	289
Figure n°48 - Epreuve d'évaluation réalisée par Jad le 02.02.12	290
Figure n°49 - Epreuve d'évaluation réalisée par Tiz le 02.02.12	291
Figure n°50 - Recette des "pâtes à la crème" extraite du livre de cuisine appartenant à El	297
Figure n°51 - Recette de la pâte à crêpes reprise d'une épreuve d'évaluation de l'année précédente	298
Figure n°52 - Fiche-devoirs complétée par El durant les vacances de Noël 2012	301
Figure n°53 - Tableaux de proportionnalité constitués à partir d'un exercice TQIR de rapport interne égal à 3	303
Figure n°54 - Trois exercices créés et résolus par El hors classe	304
Figure n°55 - Tableau de proportionnalité constitué à partir d'un exercice TQIR de rapport interne égal à 15/4	307

Figure n°56 - Un nouvel exercice créé et résolu par El hors classe	307
Figure n°57 - Première fiche de devoirs complétée par El hors classe	309
Figure n°58 - Deuxième fiche de devoirs complétée par El hors classe	309
Figure n°59 - Troisième et quatrième fiches de devoirs créées et complétées par El hors classe...	310
Figure n°60 - Cinquième et sixième fiches de devoirs complétées par El hors classe	311
Figure n°61 - Septième fiche de devoirs complétée par El hors classe	312
Figure n°62 - Huitième fiche de devoirs complétée par El hors classe	312
Figure n°63 - Propriétés de la proportionnalité inscrites sur la première fiche de devoirs complétée par El	314
Figure n°64 - Trois essais successifs d'utilisation du produit en croix	315
Figure n°65 - Quatre nouveaux exercices créés et résolus par El hors classe	317
Figure n°66 - Correction de la cinquième fiche de devoirs à l'aide du produit en croix	318
Figure n°67 - Correction de la sixième fiche de devoirs à l'aide du produit en croix.....	319
Figure n°68 - Fiches d'exercice et de synthèse en vue de l'intervention d'El dans sa classe	320
Figure n°69 - Deux nouvelles fiches de devoirs effectuées par El hors classe	321
Figure n°70 - Exercices tirés d'un manuel pour la formation élémentaire résolus par El.....	322
Figure n°71 - Exercices pris par El comme devoirs, résolus hors classe, puis corrigés en cours ...	323

TABLEAUX

Tableau n°1 - Vue d'ensemble des unités de longueur dans le système décimal des poids et mesures	92
Tableau n°2 - Vue d'ensemble des unités de poids dans le système décimal des poids et mesures.	92
Tableau n°3 - Vue d'ensemble des unités de capacité dans le système décimal des poids et mesures	93
Tableau n°4 - Addition de deux grandeurs mesurées à l'aide d'un tableau (1)	94
Tableau n°5 - Addition de deux grandeurs mesurées à l'aide d'un tableau (2)	95
Tableau n°6 - Tableau de proportionnalité extrait de Rouche (2006., p.206).....	96
Tableau n°7 - Représentation graphique de la situation du calcul du prix de la farine.....	97
Tableau n°8 - Répartition des fiches d'exercices en fonction des six domaines mathématiques considérés	122
Tableau n°9 - Comparatif des programmes de calcul professionnel durant l'année 2007-2008 au CFPS.....	146
Tableau n°10 - Présence des savoirs mathématiques durant la formation des apprenties au CFPS	151
Tableau n°11 - Récapitulatif des exercices supports aux interactions durant les cinq séances de soutien avec Ca.....	160
Tableau n°12 - Réussites à l'exercice "lecture de nombres écrits en chiffres"	188
Tableau n°13 - Erreurs relatives à la lecture des nombres 1000001 et 7/5	189

Tableau n°14 - Réussites à l'exercice "transcription en chiffres de nombres écrits en mots"	191
Tableau n°15 - Erreurs dans la transcription en chiffres du nombre "deux cent onze mille six cent dix-neuf"	192
Tableau n°16 - Erreurs dans la transcription en chiffres du nombre "trois millions"	192
Tableau n°17 - Réussites à l'exercice "dénombrement d'un réseau rectangulaire de cases"	193
Tableau n°18 - Réussites à l'exercice "comptage et décomptage par n"	194
Tableau n°19 - Erreurs relatives au comptage par 0,1	195
Tableau n°20 - Réussites à l'exercice "ordre des nombres dans N et dans D"	196
Tableau n°21 - Réussites à l'exercice "opérations dans N à l'oral"	198
Tableau n°22 - Réussites à l'exercice "opérations dans N à l'écrit (1)"	200
Tableau n°23 - Erreurs relatives à la pose des nombres dans la soustraction $7 + 18 + 126 =$	200
Tableau n°24 - Erreurs relatives à l'emprunt dans la soustraction $202 - 143 =$	201
Tableau n°25 - Réussites à l'exercice "opérations dans N et D à l'oral"	202
Tableau n°26 - Réussites à l'exercice "opérations dans N à l'écrit (2)"	203
Tableau n°27 - Erreurs relatives à la multiplication de $111 \times 111 =$	204
Tableau n°28 - Réussites à l'exercice " problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (1)"	207
Tableau n°29 - Réussites à l'exercice "problèmes additifs, multiplicatifs et mixtes (2)"	210
Tableau n°30 - Fonctionnement de deux tableaux de conversion de mesures de poids	211
Tableau n°31 - Réussites à l'exercice "mesures décimales de longueurs, d'angles et d'aires dans un triangle"	213
Tableau n°32 - Réussites à l'exercice "rapports entre unités de mesures d'un même domaine de grandeurs"	216
Tableau n°33 - Réussites à l'exercice "conversions de mesures"	218
Tableau n°34 - Erreurs relatives à l'exercice "conversions de mesures"	218
Tableau n°35 - Savoirs maîtrisés par les apprenties mis à jour par les épreuves	221
Tableau n°36 - Savoirs partiellement maîtrisés par les apprenties mis à jour par les épreuves	221
Tableau n°37 - Savoirs peu maîtrisés par les apprenties mis à jour par les épreuves	222
Tableau n°38 - Champs notionnels sous-investis durant la scolarité des stagiaires mis à jour par les épreuves.....	222
Tableau n°39 - Les trois problèmes de cuisine rapportés en cours par les apprenties	241
Tableau n°40 - Les six exercices figurant dans la procédure de qualification de 2010	244
Tableau n°41 - Résultats donnés par les apprenties à l'exercice n°1 de l'épreuve d'évaluation	252
Tableau n°42 - Résultats donnés par les apprenties à l'exercice n°3 de l'épreuve d'évaluation	254
Tableau n°43 - Résultats donnés par les apprenties à l'exercice n°4 de l'épreuve d'évaluation	255
Tableau n°44 - Réponses des apprenties aux conversions en grammes de quantités en kilos	282
Tableau n°45 - Réponses des apprenties aux conversions en kilos de quantités en grammes	283

LEXIQUE DES PRINCIPAUX SIGLES UTILISÉS DANS LA THÈSE

aCM	apprentissage cognitif médiatisé
AI	Assurance invalidité
AIS	Adaptation et intégration scolaire (en France)
AFP	Attestation fédérale de formation professionnelle
AFPra	Attestation de formation pratique
ARL	Ateliers de raisonnement logique
ASET	Association suisse des entreprises d'entretien des textiles
AVOP	Association vaudoise des organismes privés pour personnes en difficulté
CC	Exercice de calcul de coûts
CFC	Certificat fédéral de capacité
CFPS	Centre de formation professionnelle et sociale
CP	Exercice de calcul de poids
CREM	Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (de Nivelles en Belgique)
DBK	Deuttschschweizerische Berufsbildungsämter-Konferenz (à Lucerne)
ddm	didactique des mathématiques
ddmes	didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé
DELV	Das eigene Lernen Verstehen
DEFR	Département fédéral de l'économie, de la formation et de la recherche
ECF	Ecole de commerce de Fribourg
eCG	enseignement de la culture générale
Eo	Ecole ordinaire
EPAI	Ecole professionnelle artisanale et industrielle (de Fribourg)
EPM	Ecole professionnelle de Montreux
Es	Enseignement spécialisé
FE	Formation élémentaire
Fps	Formation professionnelle spécialisée
FCS	Formation du commerce de détail suisse
HEPL	Haute école pédagogique de Lausanne
IAG	Institut agricole de l'Etat de Fribourg (à Grangeneuve)

INSOS	Association de branche nationale des institutions pour personnes avec handicap
IREM	Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (en France)
LFPR	Loi fédérale sur la formation professionnelle
MSP	Maître socio-professionnel
OAI	Office de l'assurance invalidité
OFFT	Office fédéral de la formation professionnelle et de la technologie
ORTRA	Organisation du monde du travail
PEI	Programme d'enrichissement instrumental
PEC CG	Plan d'études cadre pour l'enseignement de la culture générale (suisse)
PEEC eCG Fribourg	Plan d'études des écoles cantonales pour l'enseignement de la culture générale du canton de Fribourg
RFI	Exercice de remplissage de fiches d'inventaire
SEFRI	Secrétariat d'Etat à la formation, à la recherche et à l'innovation
SER	Secrétariat d'état à l'éducation et à la recherche
SCES	Séminaire Cantonal de l'Enseignement Spécialisé (à Lausanne)
SEGPA	Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté (en France)
SES	Service de l'enseignement spécialisé (du canton de Vaud)
SESAF	Service de l'enseignement spécialisé et de l'appui à la formation (du canton de Vaud)
SFP	Service de la formation professionnelle (du canton de Fribourg)
SSRDM	Société suisse de recherche en didactique des mathématiques
TAD	Théorie anthropologique du didactique
TCC	Théorie des champs conceptuels
TPA	Travail personnel approfondi
TQIR	Exercice de transformation de quantités d'ingrédients d'une recette
TSD	Théorie des situations didactiques
USMM	Union suisse des métiers de la mode

ANNEXES

TABLE DES ANNEXES

ANNEXE 1

NARRATION D'UNE SEANCE SUR LE THEME DES PUISSANCES DURANT L'ANNÉE 2011-2012	367

Narration de la séance avec Al, Aq, Cy, La, Na, Maj et Mar dans la classe de Val du 29.11.11	367

ANNEXE 2

NARRATIONS DE CINQ SÉANCES AVEC CA DURANT L'ANNÉE 2009-2010	372

Narration de la 1 ^{ère} séance avec Ca du 05.01.10	372
Narration de la 2 ^{ème} séance avec Ca du 12.01.10	376
Narration de la 3 ^{ème} séance avec Ca du 19.01.10	378
Narration de la 4 ^{ème} séance avec Ca du 02.02.11	380
Narration de la 5 ^{ème} séance avec Ca du 04.05.11	382

ANNEXE 3

NARRATIONS DE CINQ SÉANCES AVEC CO, JAC, JAD, LOU, MAM, SA ET TIZ DURANT L'ANNÉE 2011-2012.....	385

Narration de la 1 ^{ère} séance du 08.09.11	385
Narration de la 2 ^{ème} séance du 22.09.11	388
Narration de la 3 ^{ème} séance du 06.10.11	393
Narration de la 4 ^{ème} séance du 03.11.11	399
Narration de la 5 ^{ème} séance du 17.11.11	404
Narration de la 6 ^{ème} séance du 01.12.11	410
Narration de la 7 ^{ème} séance du 22.12.11	415
Narration de la 8 ^{ème} séance du 05.01.12	420
Narration de la 9 ^{ème} séance du 12.01.12	423
Narration de la 10 ^{ème} séance du 19.01.12	427
Narration de la 11 ^{ème} séance du 26.01.12	430
Narration de la 12 ^{ème} séance du 02.02.12	434

ANNEXE 4

NARRATIONS D'UNE SÉANCE AVEC EL DURANT L'ANNÉE 2012-2013.....	437

Narration de la séance avec El du 12.12.12.....	437

ANNEXE N°1

NARRATION D'UNE SEANCE SUR LE THÈME DES PUISSANCES DURANT L'ANNÉE 2011-2012

Narration de la séance avec Al, Aq, Cy, La, Na, Maj et Mar dans la classe de Val du 29.11.11

A mon arrivée en classe, six apprenties de première année étaient présentes : Al, Aq, Cy, La, Na et Maj, accompagnées de leur enseignante Val. J'ai commencé par demander à La ce qui pouvait bien l'intéresser dans les puissances et ce qui l'avait poussée à m'interpeller dans les couloirs du CFPS pour que je vienne lui en parler en classe. Elle m'a répondu qu'elle avait le projet, après sa formation au CFPS, de fréquenter une école d'agence immobilière et qu'elle savait qu'il y avait beaucoup de mathématiques dans l'examen d'entrée. Maj a dit que cela l'intéressait aussi, en prévision de la réalisation d'un CFC de confectionneuse et La a complété en ajoutant que Mar (qui avait un peu de retard et qui n'était pas encore en classe) était aussi concernée, parce qu'elle envisageait d'entreprendre un CFC dans le domaine de l'intendance. En revanche, les autres apprenties présentes ne se déclaraient pas vraiment concernées par le sujet : Cy, parce que cela ne lui servirait à rien d'apprendre les puissances, Aq, parce que cela faisait partie des trucs pour les "intellos" et Na et Al qui ne savaient pas trop. J'ai répondu à Cy que j'essaierai de faire en sorte qu'elle puisse au moins repérer une utilité à l'utilisation des puissances durant la séance et que nous ferions le point tout à la fin pour voir si j'y étais parvenu.

Lorsque j'ai demandé qui, dans la classe, connaissait des choses concernant les puissances, Maj a dit qu'elle en avait fait à l'école et Aq a ajouté qu'elle avait appris cela durant sa dernière année de scolarité. Elle a précisé qu'elle savait que 10^6 correspondait à 1 suivi de six zéros, ce que j'ai de suite inscrit au tableau en écrivant $10^6 = 1000000$. Aq m'a alors prié de rajouter les "traits" au nombre 1000000 (ce que j'ai fait après qu'elle m'ait indiqué d'aller de trois en trois, en partant de la droite, de manière à obtenir 1'000'000) pour lire le nombre "un million". Maj a ajouté qu'elle savait aussi ce que cela signifiait quand il y avait des moins (puissances négatives), en donnant l'exemple de 10^{-6} qui correspondait selon elle à 0 suivi d'une virgule, de 6 zéros et d'un 1 derrière, ce que j'ai à nouveau inscrit au tableau en notant : $10^{-6} = 0,0000001$. Assistant à l'échange, et alors qu'elle prenait place au milieu du groupe d'apprenties (vu que c'est moi qui occupait la place du pupitre), Val (l'enseignante) a dit que, de son côté, elle ne se rappelait plus bien de tout cela.

J'ai alors enchaîné en déclarant que, dans un premier temps, on pouvait dire que les puissances permettaient de simplifier les écritures multiplicatives et j'ai donné au tableau, en lien avec ce qu'avait proposé Aq, l'exemple du $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ qui pouvait se simplifier en 10^6 et qui correspondait bien à 1'000'000 (et j'ai même ajouté, je crois, que l'on reviendrait plus tard sur la question des puissances négatives). J'ai précisé aussi que c'était un peu pareil que dans le cas de l'addition et de la multiplication, lorsque l'on simplifiait l'écriture $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 =$ en $6 \times 10 =$ qui toutes deux donnent et correspondent au nombre 60 (ce que j'ai là aussi noté au tableau).

J'ai poursuivi en disant que pour parler des puissances, j'allais commencer par leur lire une histoire, une histoire qui évoquait les puissances. J'ai distribué à chaque apprentie et à Val une feuille comprenant la légende de l'échiquier¹, une feuille de brouillon, ainsi qu'une calculatrice

¹ Il s'agit de l'histoire bien connue du sage indien qui, en guise de récompense d'avoir inventé le jeu d'échecs, demande à son souverain de placer un grain de blé sur la première de case, deux grains de blé sur la deuxième, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième, etc. (Charrière, 1995, p.1).

de type TI30 (que Na, dans un premier temps, renoncera à utiliser, prétextant qu'elle n'en connaît pas le fonctionnement ; il faudra que je lui montre l'équivalence des touches + - x : et = avec celles que l'on trouve sur une calculette usuelle pour qu'elle y consente) pour deux apprenties (et ce, parce que je n'en avais pas plus à disposition).

Les apprenties n'ont pas paru autrement intéressées par la perspective de lire une histoire, mais elles ont néanmoins écouté sa lecture (que j'ai faite) avec attention. Au terme de celle-ci, j'ai fait remarquer que pour que le souverain se retrouve dans l'impossibilité de rassembler les grains demandés par le sage, il fallait que 18446744073709551615 soit un sacré grand nombre et j'ai invité les apprenties à examiner un peu plus près de quoi il relevait. J'ai ainsi lancé une petite recherche à partir du rétroprojecteur et d'une fiche en demandant aux apprenties de compléter le nombre de graines devant se trouver sur chaque case de l'échiquier. J'ai commencé par dire qu'il y aurait une graine sur la case 1, deux graines sur la case 2, quatre graines sur la case 3, huit graines sur la case 4... (je notais à chaque fois le numéro de la case, attendait qu'une apprentie donne le nombre de graines, puis l'inscrivait à côté et poursuivais avec la case suivante). Comme elles se trompaient passablement dans leurs calculs, je les ai invitées à utiliser les calculettes, puis à poursuivre la recherche du nombre de graines par case aussi loin qu'elles le pouvaient.

Toutes se sont lancées dans la recherche (j'étais plutôt étonné que cela prenne aussi bien), prenant soin à noter les chiffres des nombres qui grandissaient de plus en plus. Certaines apprenties utilisaient des calculettes usuelles (que l'on trouvait sur leur table), d'autres les TI30 que je leur avais données. Pendant qu'elles travaillaient, j'ai noté sur le projecteur à côté de chaque résultat les "multiplications par 2" qui correspondaient aux nombres de graines découverts : 4 -> 2×2 ; 8 -> $2 \times 2 \times 2$; 16 -> $2 \times 2 \times 2 \times 2$; etc.

J'ai laissé les apprenties compléter leur fiches jusqu'à la case 37 (je crois me souvenir que c'est Cy qui était allée aussi loin) et ai interrompu leur travail (en fait, je ne me rappelais plus que les calculettes de type TI 30 permettaient d'aller au-delà des nombres à dix chiffres qu'il est possible d'afficher sur le cadran, en jouant précisément sur les puissances de dix et je m'attendais à ce que les calculettes bloquent auparavant, en affichant le sigle E ou Error, comme c'est le cas sur les calculettes usuelles). J'ai demandé à quelle case de l'échiquier les calculettes usuelles ne permettaient plus de trouver les nombres (parce que leur nombre de chiffres étaient trop grand). Cy a répondu qu'il s'agissait de la case 27 et elle a lu, chiffre par chiffre, le nombre qui y figurait. Comme me l'avait précédemment demandé Aq pour 1'000'000, j'ai complété la suite des chiffres avec des traits : 67'108'864, de manière à pouvoir lire ce nombre, montrant comment on pouvait s'appuyer sur les traits pour le faire, tout en stipulant qu'il était déjà passablement grand. J'ai dit que l'on obtenait vite de très grands nombres avec les puissances et Mar a renchéri en disant que si elle possédait cette somme dans son porte-monnaie, elle pourrait aller souvent chez Vuiton.

J'ai demandé ensuite ce qui se passait lorsque l'on utilisait la calculette Ti30 et qu'on allait au-delà de la case 27. Maj a dit qu'à un certain moment, on voyait apparaître des puissances. Les autres apprenties ne l'avaient pas remarqué et je leur ai donc proposé de repartir du nombre 67'108'864 et de continuer à multiplier par 2. Il n'a pas été tout simple d'obtenir ces grands nombres écrits avec les puissances. Les apprenties cherchaient, mais disaient qu'elles ne voyaient pas les puissances. J'ai essayé d'expliquer que, quand la calculette devait produire un nombre dont le nombre de chiffres dépassait celui que l'on pouvait faire apparaître sur le cadran, elle donnait les premiers chiffres du nombre, puis, sous la forme d'une puissance, le nombre total de chiffres du nombre. Val a cependant obtenu un nombre comprenant dix chiffres, avec l'affichage du nombre 10 sous la forme d'une puissance et s'en est étonnée (puisque, selon mon explication, un nombre à dix chiffres devait pouvoir apparaître sur le cadran sans recourir aux puissances). Je m'en suis étonné moi aussi (je ne savais plus trop si

mon explication était la bonne et j'ai pu voir après coup qu'elle était approximative, le nombre accompagné de la puissance 10, signifiant en fait un nombre à onze chiffres) et l'ai invitée à poursuivre les multiplications par deux, jusqu'à ce qu'elle obtienne un nombre avec dix chiffres sur le cadran et l'affichage du nombre 11 sous la forme d'une puissance, ce qui est bel et bien advenu pour le nombre de graines à la case 38 : 1,374389535 ¹¹.

Nous en sommes restés là pour la question de l'affichage des grands nombres sur les calculettes TI30 et j'ai demandé aux apprenties de reprendre les calculettes usuelles pour leur montrer la fonction constante de la touche = (et leur dire ainsi qu'au lieu de taper à chaque fois $x \times 2 =$ sur ce type de calculettes, il suffisait simplement d'appuyer à répétition sur la touche =). Je leur ai donc montré comment on pouvait appuyer sur $1 \times 2 =, =, =, =, \dots$ pour produire les puissances de deux successives, mais je n'ai pas remarqué qu'en faisant de la sorte, mes puissances ne décollaient pas. Les apprenties, en revanche, m'en ont immédiatement fait part, et j'ai bien dû me rendre à l'évidence que pour produire les puissances, il fallait commencer par taper $2 \times 1 =, =, =, =, \dots$ pour que cela fonctionne (la multiplication s'avérait ainsi non-commutative en termes d'effets produits sur la calculette). Il m'a semblé que certaines apprenties connaissaient cette fonctionnalité de la touche =, alors que d'autres la découvraient pour la première fois.

Je suis ensuite revenu au rétroprojecteur pour noter les puissances de 2 correspondant aux écritures multiplicatives (de type $2 \times 2 \times 2 \times 2, \dots$) que j'avais inscrites à côté des nombres de grains successifs qui avaient été découverts et j'ai noté dans l'ordre $2^4, 2^5, 2^7, 2^6, 2^3, 2^2, 2^1$ (les apprenties dictaient au fur et à mesure et, je crois que c'est à partir de cet instant que Cy s'est mise à prendre note sur sa feuille de brouillon de tout ce j'écrivais sur le rétroprojecteur). C'est alors que Maj a proposé d'inscrire 2^0 (soit deux à la puissance zéro) et de le placer en face du 1 de la case n°1, tout en précisant que, quand il y avait "puissance 0", cela faisait toujours 1. Val lui a demandé si 18 à la puissance 0 donnait aussi 1 et Maj a répondu par l'affirmative (tandis que, de mon côté, je soulignais que c'était pour ne pas rompre la belle harmonie de la suite des puissances ainsi constituée).

J'ai poursuivi en disant que l'on avait jusqu'ici cherché le nombre de graines qu'il y avait sur chaque case, mais que l'on ne s'était pas encore intéressé au nombre de graines qu'il y avait en tout sur toutes les cases. A cet effet, j'ai esquissé une ébauche d'échiquier sur le tableau et dessiné une graine sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième et huit sur la quatrième. J'ai demandé ensuite aux apprenties combien il y avait de cases en tout sur les deux premières cases, puis sur les trois premières, puis sur les quatre et ainsi de suite... Les réponses fusaient, mais pas toujours de manière exacte. J'ai donc dessiné un tableau sur le rétroprojecteur, juste au-dessus de tout ce que j'avais déjà écrit au sujet de la suite des nombres de graines se trouvant sur les cases de l'échiquier et j'ai inscrit :

1	2	3	4						
1	3	7	15						

Pendant que j'écrivais, Val a repéré comment se construisait la suite des nombres de la deuxième ligne et a dit quelque chose comme "ah ouais, joli". J'ai dit aux apprenties que Val avait sûrement découvert quelque chose et que peut-être elles aussi pourraient trouver "quelque chose de joli" dans cette suite de résultats. L'attention des apprenties était très bonne (on voyait qu'elles cherchaient), mais elles ne parvenaient pas à trouver ce que Val avait découvert. C'est ainsi que Val s'est mise à réciter les nombres qui venaient dans la suite du tableau et que je l'ai à mon tour suivie en complétant le tableau.

C	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Aq a soudain repéré que le chiffre des unités se répétait toujours dans le même ordre : 1, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5,... Val lui a répondu qu'elle n'avait pas remarqué cela et que, pour elle, c'était encore autre chose qu'elle avait trouvé. Comme rien ne venait, j'ai suggéré aux apprenties de comparer cette suite de résultats avec la suite des nombres de graines par case et c'est à cet instant que La a dit qu'il suffisait de faire + 1 et que Mar a proposé au contraire de faire -1. J'ai donc ajouté une ligne au tableau afin de pouvoir illustrer leur découverte respective, puis suis revenu sur l'écriture $2^{64} - 1$ qui se trouvait dans l'histoire pour en donner l'explication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Je leur ai dit que c'était finalement bien plus simple d'écrire un nombre avec des puissances, puisque il suffisait de quatre chiffres et un signe pour le faire dans un cas : $2^{64} - 1$, alors qu'il en fallait vingt dans l'autre : 18446744073709551615. Reprenant le système des traits proposé par Aq en début de séance, j'en ai également profité pour leur montrer comment il était possible de lire ce nombre à vingt chiffres (avec la suite des puissances de 10 : mille, million, milliard, billion, billiard, trillion,...).

J'ai poursuivi en leur disant que les puissances servaient aussi à écrire les nombres et qu'il s'agissait peut-être là d'une "utilité" des puissances que Cy pourrait reconnaître. J'ai pris l'exemple d'un nombre à quatre chiffres comme 4567 pour montrer qu'on pouvait le décomposer comme suit (Cy poursuivait consciencieusement sa prise de notes) :

$$4567 = 4000 + 500 + 60 + 7$$

$$4567 = 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 7$$

$$4567 = 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7$$

J'ai répété la décomposition avec un nombre à six chiffres, tout en m'excusant d'aller un peu vite (le temps avait passé et je voyais déjà que je devrais renoncer à l'écriture des nombres en puissances de deux que j'avais pourtant projetée) et en leur disant d'essayer de s'approprier ce qu'elles seraient en mesure de faire.

J'ai repris alors la suite des puissances de 10 (en les inscrivant sur le rétroprojecteur), partant de 1000 dans l'ordre décroissant : 1000, 100, 10, 1 avec respectivement 10^3 , 10^2 , 10^1 , 10^0 pour aller vers les puissances négatives évoquées par Maj en début de séance : 0,1, 0,01, 0,001,..., avec respectivement 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} ,... et je leur ai distribué une nouvelle fiche comportant l'ensemble des puissances de dix positives et négatives, accompagnées de leur désignation en mots respective (Charrière, 1995, p.182). J'ai tenté de leur montrer qu'on y trouvait des mots appartenant au "langage des jeunes" comme "méga" et "giga" (ceci pour faire écho à un bref échange que l'on avait eu en début de séance, autour de l'expression " je suis cadavre" que l'une d'elles avait prononcé à son arrivée en classe pour dire "je suis morte", c'est-à-dire "très fatiguée") et je me suis même laissé à leur indiquer qu'elles pourraient dorénavant utiliser les termes "yotta" ou "yocto" pour qualifier une soirée très réussie ou au contraire désastreuse. Mais cela n'a pas eu bien l'air de les enthousiasmer.

J'ai encore distribué une feuille comprenant deux exercices, l'un demandant de remplir un tableau de puissances et l'autre de comparer des écritures en puissances, ce qui m'a permis de leur indiquer sur la calculette TI30 la touche y^x , leur en expliquer rapidement le fonctionnement (certaines se sont tout de suite mises à compléter le tableau) et leur donner la signification des termes de "base" et de "exposant".

Enfin, reprenant la fiche comprenant la légende de l'échiquier, j'ai essayé de les mettre au défi de trouver plus de 180 carrés dans l'échiquier qui y figurait. J'ai précisé que le défi avait

quelque chose à voir avec les puissances et qu'elles pourraient peut-être le découvrir. J'ai ajouté que j'en avais dès lors terminé avec la séance sur les puissances et que je les remerciais de m'y avoir invité. Mais alors que j'étais sur le point de partir, Mar a dit quelque chose comme: "Ben avec vous alors, on ne chôme pas". Na m'a demandé si je ne pouvais pas revenir une fois pour leur parler des racines. Quant à Cy, qui était en train de remplir le tableau des puissances, Val lui a demandé si elle avait trouvé intéressant ce travail autour des puissances. Elle a levé la tête en souriant et en disant : "Non, non", puis s'est remise au travail. Sur ce, j'ai quitté la classe.

Une semaine après la séance, j'ai à nouveau croisé La dans un couloir. Elle m'a dit : "Vous savez, vous m'avez pris la tête avec votre histoire de carrés". Je lui ai demandé combien elle en avait déjà trouvé et elle m'a répondu 125. L'après-midi, Val m'a dit qu'elle n'avait pas eu le temps de reprendre longtemps le problème de l'échiquier, mais que les apprenties avaient vu que l'on pouvait y lire 64 carrés d'une case et 49 carrés de quatre cases (elle leur avait suggéré d'envisager le rapport que ces deux nombres pouvaient entretenir avec le domaine des puissances). Val a ajouté qu'elle me tiendrait au courant des développements ultérieurs du problème.

Une semaine plus tard encore, La m'a confié qu'elle était parvenue à 204 carrés. La classe était en train de rédiger une solution du problème à mon intention. J'attendais avec impatience... mais je ne l'ai jamais reçue.

ANNEXE N°2

NARRATIONS DE CINQ SÉANCES AVEC CA DURANT L'ANNÉE 2009-2010

Narration de la 1^{ère} séance avec Ca du 05.01.10

Cela se passe un mardi après-midi. Je travaille seul en coaching avec une apprentie (Ca). J'ai apporté quelques problèmes de maths que j'ai créés en fonction des problèmes que j'ai trouvés sur des examens de fin de formation des années précédentes. Je conviens avec Ca que je vais lui demander de résoudre quelques problèmes en vue de préparer les examens qu'elle aura à passer en juin. Je lui dis d'essayer de les résoudre seule, de manière à ce que je puisse essayer de comprendre comment elle s'y prend pour le faire et afin que je puisse, le cas échéant, mieux l'aider après coup. Elle commence par résoudre le problème n°1 (elle me dit que cela lui est égal par lequel commencer).

1° Une recette indique qu'il faut 6 œufs, 60 cl de lait, 150 g de sucre, 180 g de farine et 30 g de beurre pour faire un flan pour 6 personnes. Calculez les quantités d'œufs, de lait, de sucre, de farine et de beurre qu'il faudra pour faire un flan pour 4 personnes.

Après avoir lu l'énoncé, Ca commence par récrire (en colonne) toutes les quantités qui figurent dans la donnée, avec l'initiale de ce que la quantité désigne : 6 œufs, 60 clL, 150 gs,... Au-dessus de la colonne, elle écrit 6p et 4p un peu à côté. Puis, elle commence à taper des calculs sur la calculette (je ne parviens pas bien à voir ce qu'elle fait). En face de 6 œufs et au-dessous de 4p, elle finit par écrire 4, puis elle recommence à taper, biffe son 4, puis écrit 3, 96 (je ne sais pas si c'était 3,96 ou 3 et 96 séparément). Ca est très hésitante, elle reprend la calculette et dit qu'elle a oublié la formule... Je lui demande de m'expliquer comment elle s'y est prise pour résoudre son problème. Elle me dit qu'elle a essayé de faire $6 : 4 \times 6 =$, mais que cela ne va pas parce qu'elle trouve 9 et qu'elle devrait trouver quelque chose de plus petit que 6 (pour 4 personnes). J'essaie encore de lui demander comment elle a fait pour aboutir à 3,96, mais elle me dit qu'elle ne sait plus, en indiquant qu'elle a déjà oublié les calculs qu'elle vient de faire.

Je lui demande de continuer. Ca reprend la calculette, tape à nouveau quelques calculs que je ne parviens pas à observer, puis note 0,4 cl en face du 60 clL et en-dessous de ses propositions précédentes. Elle est toujours très hésitante, je dois beaucoup l'encourager à continuer, à essayer. Ca me dit qu'elle hésite entre deux formules, puis trois, dont une où elle doit diviser par 100. Je lui demande si elle peut m'en communiquer une. Elle évoque $6 \times 60 : 4$, qui ne fonctionne toujours pas, et elle ne se rappelle plus bien des autres. Elle poursuit sur la calculette, en inscrivant finalement 100gs à côté des 150 gs, mais elle ne sait pas si sa réponse est correcte et s'arrête. Je lui propose de laisser la résolution de son problème en l'état et de passer à un autre (tout en insistant pour que cette fois-ci, elle écrive les calculs sur sa feuille avant de les taper sur la calculette). Elle accepte du bout des lèvres et je lui un deuxième exercice.

2° Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

Au terme de sa lecture, Ca écrit tout de suite un grand signe + en-dessous de l'énoncé, puis, en ligne : $500g + 800g + 1,200 + 850g + 1000kg + 1,150kg$ qu'elle tape sur la calculette pour trouver 3152,35 qu'elle inscrit sur sa feuille en notant 3152,35 kg. Comme j'ai observé qu'elle semblait très surprise de ce résultat et qu'elle ne regardait jamais les totaux partiels qui

apparaissaient sur sa calculette au fil des opérations, je prends la calculette en lui demandant de bien regarder ce qui se passe. Je commence par taper $500 + 800 + 1,200$ (ce qui aboutit à 1301,2), puis recommence une fois en tapant $500 + 800 + 1200$ (ce qui aboutit à 2500). En voyant 2500 sur l'écran, elle prononce "deux kilos cinq cents". Je lui demande de me dire, si elle a vu la différence entre les deux calculs, mais elle répond par la négative. Je recommence une fois, ce qui lui permet de remarquer que j'ai utilisé la touche (.) dans le premier cas et pas dans le second. Je lui demande d'effectuer les deux procédés, ce qu'elle fait sans difficulté, puis lui propose de laisser ce deuxième problème en l'état et de passer à la résolution d'un troisième.

3° On épluche un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, on découpe les carottes en dés, ce qui entraîne 200 g de déchets supplémentaires. Quelle quantité de carottes découpées obtient-on au final ?

A nouveau, Ca écrit un signe - le signe - cette fois-ci - juste en-dessous de l'énoncé, puis $5 - 650$ qu'elle projette de réaliser sur la calculette. Et là, sans doute une dizaine de fois consécutives, elle se met à taper $5 - 650 =$ qui, à chaque fois, aboutit au résultat de $- 645$. Surprise, incompréhension, désarroi, puis découragement semblent se lire sur son visage, au point qu'elle sera prête à me croire quand je lui dirai que je lui ai donné une calculette qui ne sait vraiment pas bien calculer...

Je l'invite donc à laisser la calculette de côté et d'essayer de réaliser $5 - 650$ sans y avoir recours. Ca me dit que cela fera "quatre (qu'elle écrit) quelque chose". Elle poursuit en disant "quatre kilos quatre cents (elle écrit 400) à peu près". Je rebondis en lui disant qu'il n'y a donc plus que le 50 à ôter, ce qu'elle semble ne pas comprendre. Je précise en disant (et en montrant sur le 650 qu'elle a écrit) qu'après avoir enlevé le 600, il ne reste plus maintenant qu'à enlever le 50. Elle fait mine de comprendre, puis trace le 400 qu'elle a écrit auparavant pour le remplacer par 350 et prononce "quatre kilos trois cent cinquante".

Je poursuis en lui demandant comment il serait donc possible de faire apparaître ce "fichu quatre kilos trois cent cinquante" sur la calculette. Ca essaie $5 - 650 =$ qui donne à nouveau $- 645$. Je lui rappelle alors qu'elle avait commencé par additionner 200 à 450 pour trouver trouvé 650 qui sont des grammes et que pour enlever ces 650 g à 5 kg sur la calculette, il faut transformer ces 5 kg en 5000 grammes. Je lui demande de tenter le coup, puis lui montre qu'il aurait également été possible de passer par $0,450 + 0,200 = 0,650 / 5 - 0,650 = 4,350$, ce qu'elle semble pourtant moins bien comprendre.

3° On épluche un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, on découpe les carottes en dés, ce qui entraîne 200 g de déchets supplémentaires. Quelle quantité de carottes découpées obtient-on au final ?

$$5 - 650 =$$

4, ~~350~~ 350g

$$200 + 450 = 650$$

$$5000 - 650 = 4350$$

$$0,450 + 0,200 = 0,650$$

$$5 - 0,650 =$$

Je suggère alors à Ca d'utiliser ce qu'elle a compris de ce troisième problème pour tenter de contrôler ce qu'elle a fait dans le deuxième (devant m'absenter pour aller chercher une enseignante à la réception, je la laisse seule face à sa feuille).

2° Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

A mon retour, je remarque qu'elle a écrit sur sa feuille (toujours en ligne) $500g + 800g + 1200kg + 850g + 1000k$ $1150kg = 5500$ kg. Je lui demande si ça lui va, ce à quoi elle répond par l'affirmative, discute quelques courts instants de la question des unités (kg et g), puis lui demande de reprendre le premier problème.

2° Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

$$500g + 800g + 1,200 + 850g + 1000kg + 1,150kg = 3152,35kg$$

$$500g + 800g + 1200kg + 850g + 1000 + 1150 kg = 5500 kg$$

1° Une recette indique qu'il faut 6 œufs, 60 cl de lait, 150 g de sucre, 180 g de farine et 30 g de beurre pour faire un flan pour 6 personnes. Calculez les quantités d'œufs, de lait, de sucre, de farine et de beurre qu'il faudra pour faire un flan pour 4 personnes.

Sous la liste des ingrédients qu'elle avait préalablement dressée, je récris 6p (pour six personnes), dessine 6 œufs, inscris 4p un peu à côté et demande : "alors combien d'œufs pour quatre personnes ?". Elle sourit, oscille de la tête (elle semble trouver les choses tout à coup très simples) et répond 4. Je poursuis en inscrivant 60cl sous le dessin des 6 œufs. Elle réfléchit un instant, puis énonce : "quatre décilitres". Et là, c'est moi qui souris. J'inscris 4dl sur la feuille et lui demande combien cela fait de cl, ce à quoi elle répond de suite 40 cl que j'inscris aussi sur la feuille.

Je continue en inscrivant 150g sous les 60cl. Ca réfléchit un bon moment. Elle propose d'abord 45, puis 40, mais elle n'est vraiment pas sûre. Je lui suggère d'essayer pour 180 g et elle répond à nouveau 40, sans grande certitude. On passe alors au 30g où Ca, après un nouvel instant de réflexion, a une idée assez étonnante. Elle commence par chercher la moitié de 30, trouve 15, puis "partage" ce 15 en trois et trouve 5. A partir de 5, elle cherche à plusieurs reprises (par itération : 5, 10, 15,...) combien de fois ce 5 peut aller dans 30 et, après avoir remarqué qu'il "y va" six fois, propose 20g de beurre pour la recette à 4 personnes. N'ayant pas compris du premier coup comment elle en était arrivée à 5, je lui demande comment elle s'y prise. En l'écoutant, je note sur la feuille à quoi correspond le 15 (3 personnes), puis le 5 (1 personne) et l'invite à revenir sur l'une des questions qui précèdent (150 g). Ca reprend alors le même procédé : partage par la moitié (75), "partage" de la moitié en trois (25), itération jusqu'au nombre de départ (150), itération par quatre et découverte du 100. Pour 180g enfin, Ca trouve assez facilement (peut-être par proximité au 25 qui précède ?) la valeur 30 (qui correspond à 1 personne) et propose d'abord 90, puis 120 (comme valeur pour 4 personnes). Je lui demande encore de compléter les quantités de lait et d'œufs pour 1 et 3 personnes, afin d'avoir un relevé complet des valeurs de ce qui est devenu une sorte de tableau.

Au terme de la séance, Ca semble très contente. Elle va même jusqu'à me demander un autre problème à faire chez elle, qu'elle choisit au hasard dans ceux qui restent :

5° A la boucherie, une pièce de bœuf coûte 72 francs. En fin de journée, le boucher offre un rabais de 25 %. Quel sera le nouveau prix de cette pièce de bœuf ?

De mon côté, je m'interroge assez longuement sur comment dès lors, je pourrai bien m'y prendre pour lui permettre de retrouver ses formules...

Quelques problèmes en cuisine...

1° Une recette indique qu'il faut 6 œufs, 60 cl de lait, 150 g de sucre, 180 g de farine et 30 g de beurre pour faire un flan pour 6 personnes. Calculez les quantités d'œufs, de lait, de sucre, de farine et de beurre qu'il faudra pour faire un flan pour 4 personnes.

6 p
 6 œufs
 60 cl L
 150 g S
 180 g F
 30 g B

4 p
~~42 g S~~
 0,4 cl
 100 g S

6 p.	4 p	3 p.	1 p
000	00	00	0
000	00	00	0
60 cl	40 cl / 40 cl	30 / 3 cl	10 cl / 10 cl
150 g.	100	75	25
180 g.	120	90	30
30 g.	20 g.	15 g.	5 g.

Narration de la 2^{ème} séance avec Ca du 12.01.10

Le mardi suivant, je propose à Ca de revenir sur les problèmes que l'on travaillés la fois précédente. Je commence par le problème n°3 en lui demandant si elle se rappelle comment elle l'a résolu ou, le cas échéant, comment elle pourrait le résoudre ?

3° On épluche un sac de 5 kg de carottes. Les épluchures pèsent 450 g. Puis, on découpe les carottes en dés, ce qui entraîne 200 g de déchets supplémentaires. Quelle quantité de carottes découpées obtient-on au final ?

Ca sourit à l'idée de devoir se rappeler ce qu'elle avait fait, dit qu'elle ne se souvient pas de tout, puis s'engage dans la résolution. Elle écrit : $500kg - 450 - 200g =$, tipe ce calcul sur la calculette, trouve 4350 qu'elle écrit 4,350kg et qu'elle lit "quatre kilos trois cent cinquante". Je lui demande si elle pense que c'est correct, mais elle dit qu'elle n'est pas sûre. Je lui demande si elle pense qu'elle a procédé de la même manière que la fois précédente, mais elle ne sait pas. Je lui demande enfin si elle se rappelle sur quoi elle avait buté la dernière fois, et ça elle s'en rappelle bien : elle dit qu'elle n'avait pas mis les 0 après le 5 (de 5 kg). Je découvre alors les traces de ce qu'elle avait produit pour comparer les deux démarches et lui propose de laisser un signe de ce qu'elle a appris au cours de cette résolution. On s'arrête sur "attention aux zéros !". Je poursuis avec le problème n°2.

2° Un cuisinier achète 500 g d'oignons, 800 g de poivrons 1,2 kg de courgettes, 850 g d'aubergines et 1 kg de tomates au marché pour faire une ratatouille. Il place tous ces légumes dans un panier qui pèse 1,150 kg et le dépose sur une balance. Quel poids indiquera la balance ?

Ca écrit : $500g + 800g + 1,200kg + 850 + 1000k + 1,150kg$ et fait mine de taper ce calcul sur la calculette. Je l'interromps en lui demandant comment elle s'y prendrait si elle devait le faire sans calculette. Elle fait un geste pour me dire "en colonne" et se met à écrire (en prenant soin d'ordonner les nombres du plus grand au plus petit) :

$$\begin{array}{r} 1,200 \\ 1,150 \\ 1,000 \\ 850 \\ 800 \\ + 500 \end{array}$$

Je lui demande d'effectuer le calcul en ligne sur la calculette, puis celui en colonne par écrit. Elle trouve 3152,35 pour le premier et 5,500 pour le second. Elle penche plutôt pour le second résultat, mais n'est pas vraiment certaine. Soudain, elle s'exclame en déclarant qu'elle a oublié les zéros dans le calcul en ligne (i.e. 0,500 ; 0,800 ; 0,850). Elle reprend la calculette, effectue le calcul en ligne modifié et trouve 1004,5. Elle paraît assez déconcertée, sans pouvoir vraiment modifier ce qu'elle a fait. Je lui propose alors de comparer avec ce qu'elle avait produit la fois dernière, ce qui nous amène à constituer deux nouveaux calculs en ligne, l'un dépourvu de nombres à virgule : $1200 + 1150 + 1000 + 850 + 800 + 500 = 5500$ et l'autre qui ne contient que des nombres à virgule : $1,200 + 1,150 + 1,000 + 0,850 + 0,800 + 0,500 = 5,500$. J'essaie ensuite de discuter avec Ca de la différence entre 5,500 et 5500, mais sans grand succès apparent, et l'on s'arrête sur le signe "attention aux zéros !" en guise de conclusion provisoire. Je continue avec le problème n°1.

1° Une recette indique qu'il faut 6 œufs, 60 cl de lait, 150 g de sucre, 180 g de farine et 30 g de beurre pour faire un flan pour 6 personnes. Calculez les quantités d'œufs, de lait, de sucre, de farine et de beurre qu'il faudra pour faire un flan pour 4 personnes.

Ca commence par écrire la liste des ingrédients en colonne (elle omet les 150 g de sucre) : 6 œuf, 60cl, 180, 30, puis elle inscrit 6p juste au-dessus de 6 oeuf, 4p un peu à côté et 4 œuf au-dessous. Elle poursuit en écrivant 40cl en-dessous de 4 œuf, puis s'arrête face au 180. Comme elle ne sait comment faire, je l'encourage à essayer pour 30. Après quelques instants de réflexion, elle inscrit 20 en face du 30, puis revient au 180, mais ne sait toujours pas quoi faire. Je lui signale qu'elle a oublié le 150 qu'elle rajoute à sa liste, avant de saisir la calculette pour taper :

150 : 4 =, trouver 37,5 et noter 37,5 g

180 : 4 =, trouver 45 et noter 45 g

30 : 4 =, trouver 15, tracer le 20 et noter 15 g

Une nouvelle fois, je lui propose de comparer sa façon de procéder avec ce qu'elle avait produit la fois dernière et Ca, tout de suite, repère que le 20 était correct, et qu'elle n'aurait pas dû le tracer. Je l'invite donc à expliciter comment elle était parvenue à trouver 20, ce qu'elle fait en m'expliquant qu'elle a passé par 5, qu'elle a ensuite itéré "quatre" fois (5, 10, 20). Je demande alors comment il serait possible de "trouver le 5 du 180" pour faire de la même façon. Elle cherche un bon moment, puis murmure : "avec la division ?". Je l'invite à essayer, ce qu'elle fait en tapant $180 : 6 =$ sur la calculette pour trouver 30, qu'elle itère 4 fois (30, 60, 90, 120) pour trouver 120 ; puis en répétant la même façon de faire pour 150 ($150 : 6 = 25$; 25, 50, 75, 100).

Je tente un lien avec sa formule en m'arrêtant sur $(X : 6) \times 4 =$ (sans grande conviction il est vrai) et en y insérant tour à tour tous les ingrédients de la recette pour montrer son efficacité et que c'est bien ce que son enseignant de maths cherche à lui faire apprendre. Je termine en annonçant que je lui proposerai un nouveau problème de recette la fois prochaine. Ca me demande si ce sera de nouveau le même et moi de répondre par la négative.

Narration de la 3^{ème} séance avec Ca du 19.01.10

La semaine d'après, j'arrive avec un problème inédit en précisant à Ca qu'il s'agit d'une nouvelle recette de cuisine, pour quatre personnes, dont il faut transformer les quantités d'ingrédients, afin de la réaliser pour dix personnes.

9° Pour faire un gratin dauphinois pour 4 personnes, une recette indique qu'il faut : 1 gousse d'ail, 1,200 kg de pommes de terre pelées et coupées en fine tranches, 100 g de lard, 150 g de fromage râpé, 4dl de lait, 1 cuillère à café de sel et 10 grammes de beurre frais. Calculez les quantités de chaque ingrédient qu'il faudra pour faire un gratin pour 10 personnes.

Ca commence par écrire 4per et 10per (sous forme de deux têtes de colonne), puis 1 gousse d'ail sous 4per, avant de me demander si ça ne pourrait pas être pour huit personnes?". Je lui dis d'accord, recopie les deux têtes de tableaux et l'invite à résoudre. Ca complète de la manière suivante :

4 per	8 per
1 gousse d'ail	2 gousses d'ail
1,200 kg de pommes	2,400 pommes
100 g de lard	200 g de lard
150 de fromage	250 fromage
4 dl lait	8 dl lait
1 c.af	2 caf
10 grammes b	20 g beurre

Ca paraît très satisfaite et je lui demande si elle saurait maintenant trouver pour 10 personnes. Elle répond que "normalement oui" et inscrit tout d'abord 2/ ½ gousse d'ail en face de 1 gousse d'ail. Elle poursuit en écrivant 2,600 pommes, puis 400 g de lard. Là, elle s'arrête un long moment, avant de déclarer (au sujet du lard) qu'elle s'est trompée, parce que "400 g de lard, c'est pour 16 personnes". Elle ne sait trop quoi faire (je crois, mais ne suis pas trop sûr, qu'elle a fini par remplacer ici 400 par 350), puis continue en écrivant successivement 350 fromage, 10 dl de lai, 2/1/2 caf et 25 g beurre. Elle ponctue sa résolution en inscrivant 4 x 2 un peu au-dessus de l'ensemble des résultats qu'elle a trouvé pour huit personnes et 4 x 3 en-dessus de ceux pour dix personnes, une écriture qu'elle tracera finalement, après un long moment de réflexion, pour la remplacer par $8 + 2 = 10$.

Je la félicite pour ces bonnes idées et lui propose de réexaminer ses solutions pour dix personnes à la lumière du $8 + 2 = 10$, c'est-à-dire de "huit plus deux personnes". Je lui montre que cela fonctionne très bien pour les gousses d'ail (avec deux gousses pour huit et la moitié d'une gousse pour deux) et lui demande de faire de même pour les pommes de terre pelées. Ca ne parvient toutefois pas à trouver la moitié de 1,200 kg, ni par oral, ni sur la calculatrice où elle fait une division par quatre. J'interviens alors pour lui montrer comment trouver la moitié en appuyant sur les touches : 2 et =, puis la soutient beaucoup, une fois les 600 g trouvés, pour revenir aux 2,400 kg (pour 8 personnes) et faire la somme des deux nombres qui permet d'aboutir à 3 kilos.

En poursuivant avec la quantité de lard, Ca m'explique qu'elle a voulu faire "plus deux" (i.e. $8 + 2 = 10$), mais que cela n'allait pas, parce que 400g, c'était la quantité pour seize personnes. Elle cherche ensuite à partager les 100g en deux, trouve 50, mais poursuit son partage en divisant à nouveau par deux pour trouver 25. Elle écrit alors 25 1 sur sa feuille en déclarant que 25, c'est la quantité qu'il faut pour une personne. Je lui demande alors si celle-ci lui permet de trouver ce qu'il faut pour dix personnes, et Ca de procéder en ajoutant deux fois 25 à 200 (225, 250) pour trouver 250.

Avec le fromage, elle ne détecte pas son erreur pour huit personnes ($150 + 150$ donnait bel et bien 250). Je la lui indique donc, tout en lui demandant d'essayer de trouver à nouveau ce qu'il faut pour dix. En pointant le 150 (pour quatre personnes), elle prononce immédiatement 50, tout en sachant que ce n'est pas correct. Elle cherche ensuite la moitié de 150, à partir du 50 qu'elle a évoqué, en tentant d'abord $60 + 60$, puis, $65 + 65$, $70 + 70$ et finalement $75 + 75$. Elle déclare alors à mon intention : " en tout cas, si c'était pour 3 personnes, je sais que ce serait 50!" J'aide alors Ca trouver 375 (en passant par $300 + 75$) et l'on passe rapidement sur les quantités de lait, de sel et de beurre, en vérifiant que la procédure du $8 + 2 = 10$ a bel et bien été respectée.

Je termine en désignant le 25 et le 1 que Ca avait écrit sur sa feuille lorsqu'elle cherchait la quantité de lard, pour lui dire que c'est bien sans doute ce que son enseignant cherche à lui faire apprendre, sachant que lorsqu'on a la quantité pour 1 personne, il est ensuite facilement (!) possible de trouver ce qu'il faut pour n'importe quel nombre de convives. Ca écoute en hochant la tête, mais je ne sais trop ce qu'elle en comprend. Je lui dis en tous les cas, que l'on explorera d'autres problèmes la fois prochaine.

9° Pour faire un gratin dauphinois pour 4 personnes, une recette indique qu'il faut : 1 gousse d'ail, 1,200 kg de pommes de terre pelées et coupées en fine tranches, 100 g de lard, 150 g de fromage râpé, 4dl de lait, 1 cuillère à café de sel et 10 grammes de beurre frais. Calculez les quantités de chaque ingrédient qu'il faudra pour faire un gratin pour 10 personnes.

$8 + 2 = 10$

4 per	~~8 + 2~~	10 per
1 gousse d'ail		$2\frac{1}{2}$ gousse d'ail
		2,600 pommes
		~~100~~ 350 g de lard
		350 fromage
		10 dl de lait
		$2\frac{1}{2}$ caf
		25 g beurre

4 per	4×2	8 per
1 gousse d'ail		2 gousse d'ail
1,200 kg de pommes		2,400 pommes
100 g de lard	4	200 g de lard
150 de fromage		250 fromage
4 dl lait		8 dl de lait
1. c. a f		2 caf
10 grammes b.		20 g beurre

Narration de la 4^{ème} séance avec Ca du 02.02.11

Deux semaines plus tard (entretemps, nous n'avons pas refait de maths, occupés que nous étions par le suivi du travail de fin d'apprentissage de Ca), je propose le problème suivant.

6° L'épicier vous livre :

1 cageot de 20 kg de pruneaux à CHF 2.20/kg

1 caisse de salades comprenant 8 pièces à CHF 1.10 la pièce

5 radis blancs à CHF 0.90 la pièce

un assortiment de légumes pour le potage à CHF 4.20

500 g de raisin à CHF 4.40 le kg

Quel est le montant de la facture à payer ?

Ca le résout en mon absence. Elle a écrit :

$$20 \text{ kg} \times 2.20 \text{ fr} = 44 \text{ fr}$$

$$8 \times 1.10 \text{ la pièce} = 8.80$$

$$0,90$$

$$5 \times 0,90 \text{ la pièce} = 4,50$$

$$+ 4.20 + 500 \text{ g de raisin} = 2.20$$

$$\text{La facture est de } 59.5 \text{ fr}$$

et juste en-dessous :

$$1$$

$$500 \text{ g le raisin à } 4.40 \text{ kg}$$

$$500 \text{ g de raisin} - 2.20 \text{ fr}$$

A mon arrivée, je lui propose de faire l'addition finale en colonne. Elle écrit :

$$44$$

$$8.80$$

$$4,50$$

$$2.20$$

et trouve à nouveau 59.50.

Je poursuis donc avec un nouveau problème.

7° Vous aller chercher 3,5 l d'huile d'arachide et 500 g de crème en poudre à la cave. A votre arrivée, les fiches d'inventaire précisent qu'il reste 45 l d'huile d'arachide et 2,300 kg de crème en poudre. Combien restera-t-il d'huile d'arachide et de crème en poudre après votre passage ?

Je lui demande s'il y a des mots qu'elle ne comprend pas, mais Ca répond par la négative. Elle écrit : $45 \text{ L} - 3,5 \text{ L} =$, qu'elle tape sur la calculette et trouve 41.5 qu'elle inscrit sur sa feuille : 41.5L. Elle poursuit en inscrivant : $2.300 \text{ kg} - 500 \text{ g} =$, qu'elle tape à nouveau sur sa calculette pour trouver - 497.7. Interloquée, elle répète le même calcul à plusieurs reprises sur la calculette pour trouver à chaque fois - 497.7. Elle s'arrête alors, ne sachant quoi faire. Je lui propose de tenter le coup par écrit en colonne. Ca pose alors :

$$2.300$$

$$\underline{0 \ 500}$$

$$00$$

Elle s'arrête au moment de devoir faire $3 - 5$, hésite, inscrit 200 à côté de son calcul $2.300 \text{ kg} - 500 \text{ g} =$, le trace, puis le réécrit une fois et s'arrête, pas trop convaincue. Je lui suggère alors de tenter le coup en ligne, en enlevant cent grammes à cinq reprises à deux mille trois cent. Elle écrit alors :

$$\begin{array}{r}
 2.300\text{ k} - 100 \\
 2.200 - 100 \\
 2.100 - 100 \\
 2.000 - 100 \\
 1,900 - 100 \\
 1,800
 \end{array}$$

Et là, elle paraît beaucoup plus sûre. Je lui demande alors comment elle peut faire apparaître ce 1,800 sur la calculette. Elle essaie à nouveau $2.300\text{k} - 500\text{g} =$, sans succès (- 497.7). J'en viens à lui montrer les deux manières de faire, soit $2.300 - 0.500 =$, puis $2300 - 500 =$, ce qui la fait sourire et lui fait dire qu'elle a encore oublié le zéro. Elle parvient à refaire les deux calculs sur la calculette et je l'invite ensuite à tenter à nouveau le coup en colonne.

Ca commence par faire :

$$\begin{array}{r}
 2.300 \\
 - 0.500 \\
 \hline
 2.800
 \end{array}$$

juste avant de se "rappeler" qu'il faut "mettre les uns" et de corriger en :

$$\begin{array}{r}
 2.1300 \\
 - 10.500 \\
 \hline
 1.800
 \end{array}$$

La séance se termine alors par une exclamation de Ca : "Vous verrez, aux examens, je vais faire six en maths!".

Narration de la 5^{ème} séance avec Ca du 04.05.11

Cela fait bien longtemps que nous ne nous sommes pas revu (six semaines). J'ai même cru que Ca ne reviendrait plus aux séances du mardi. La plus grande partie de la séance est consacrée à la mise sur pied d'un petit programme qui conduit jusqu'aux examens et à d'autres divers. Nous n'avons donc que peu de temps pour faire des maths. Nous le consacrons à la correction d'un examen blanc que Ca a passé à la fin janvier et où elle a eu une note en-dessous de la moyenne. Le premier exercice de l'examen blanc est le suivant :

Exercice 1				Nombre points maximal obtenu	
Pour un banquet de mariage, vous préparez sept litres de crème de volaille au curry. Dans le manuel, vous trouvez la recette suivante :					
Ingrédients pour 2,5 litres :					
Beurre	50 g	Poitrine de poulet, sans peau	300 g		
Oignons épluchés	100 g	Riz siam patna	30 g		
Curry de Madras	40 g	Crème entière	150 g		
Farine blanche	110 g	Lait de coco	50 g		
Fond de volaille clair	3200 g	Coriandre	5 g		
Devoir Calculez les ingrédients nécessaires pour sept litres de crème de volaille au curry. Utilisez l'espace pour les calculs et les notes (méthode de résolution).					
$50 \times 100\% = 50$					
Ecrivez les ingrédients pour sept litres de crème de volaille au curry dans les colonnes correspondantes.					
Beurre	?	g	Poitrine de poulet, sans peau	?	g
Oignons épluchés	?	g	Riz siam patna	?	g
Curry de Madras	?	g	Crème entière	?	g
Farine blanche	?	g	Lait de coco	?	g
Fond de volaille clair	0	g	Coriandre	0	g
				3	0
Report				3	

Ca n'a obtenu aucun point à cet exercice. Elle a simplement écrit : $50 \times 100\% = 50$. Elle ne se souvient pas trop pourquoi, ni comment. Elle évoque tout juste le fait d'avoir voulu chercher une formule.

Je lui dis qu'il s'agit ici d'un "classique" de ce qu'elle pourra trouver lors des examens de juin : une transformation de recette. On donne des quantités pour tant de personnes, tant de kilos ou tant de litres et il s'agit de transformer ces quantités pour un autre nombre de personnes, de kilos ou de litres. Je lui indique que dans le cas particulier, il n'est pas si simple de passer d'une recette pour 2,5 litres à une recette pour 7 litres et que cela l'aurait été beaucoup plus s'il avait fallu prévoir des quantités pour 5 litres. Ca est d'accord et trouve tout de suite qu'il aurait fallu 100g de beurre, 200g d'oignons, etc. La question, lui dis-je, est donc de trouver une manière de passer de 2,5 à 7. Je propose un bref croquis montrant un petit pot avec 2,5 l de contenance et un plus grand avec 7 l. Ca propose de doubler 2,5 l et de rajouter encore une fois 2,5 l. Je lui dis que l'idée est bonne et que, sans doute, cela irait très bien en cuisine ; mais que pour les examens, il n'était pas possible de prendre 7,5 pour 7.

Je poursuis en lui montrant que pour passer de 2,5 à 7, ses enseignants lui ont très certainement montré qu'il était très efficace de passer par 1, parce qu'une fois que l'on dispose des quantités pour 1, on peut, par simple multiplication, trouver les quantités pour tout ce que l'on désire. Ca se souvient très bien de cela. Je dessine alors un nouveau pot de 1 l et lui demande comment l'on peut passer de 2,5 à 1. Elle propose de diviser par 2, puis de diviser par 0,5. Je souris et lui demande pourquoi ne pas le faire directement par 2,5. Elle sourit à son tour, me dit "pourquoi pas" et nous nous mettons à transformer les quantités d'ingrédients en les divisant d'abord par 2,5, puis en les multipliant par 7. Au terme de cette série de calculs, je

la mets au défi de résoudre la prochaine fois le même problème, ce qu'elle accepte sans opposition.

Je continue en revenant sur un problème qu'elle avait résolu au cours d'une séance précédente pour tenter de lui montrer que tous les problèmes de transformation de recette peuvent se résoudre par le passage par 1 :

1° Une recette indique qu'il faut 6 œufs, 60 cl de lait, 150 g de sucre, 180 g de farine et 30 g de beurre pour faire un flan pour 6 personnes. Calculez les quantités d'œufs, de lait, de sucre, de farine et de beurre qu'il faudra pour faire un flan pour 4 personnes.

Interrompant mes explications, Ca me dit alors que l'on pourrait aussi diviser par 3 et passer par 2, parce que les deux nombres (6 et 4) sont des nombres ronds (elle veut dire des nombres pairs), mais elle ne sait plus, à partir de son 2, comment remonter alors jusqu'à 4 : ajouter 2...

Le second exercice de l'examen blanc est parfaitement réussi. Elle a obtenu 3 points et Ca ne manque pas de le souligner. Le troisième et le quatrième exercice de comprennent des erreurs. Ca a obtenu 2 points au troisième et 0,5 point au quatrième.

Dans le troisième exercice, Ca a écrit : $3000\text{kg} - 600\text{g} = 2'400\text{g}$ pour le premier item et : $2,400\text{kg} - 0,150\text{kg} = 3'399$, pour le second. Je commence par lui demander pourquoi elle a écrit 3000kg (et pas 3) dans le premier calcul (et pas 3). Elle me répond que c'était plus facile pour faire le calcul (en montrant qu'elle l'a fait à la main). Je lui dis alors que je pense que le deuxième, elle l'a plutôt fait à la calculatrice. Elle s'en étonne un peu, saisis la calculatrice, tipe, $2,400 - 0,150$ et est très surprise de trouver 2,25. Je lui montre alors sur la calculatrice que je suis prêt à parier qu'au cours de l'épreuve, elle a tipé $2400 - 0,150$ (qui donne 2399,85) et lui propose de revenir sur cette question une prochaine fois.

Exercice 2				Report		Nombre points maximal obtenu	
On vous livre des denrées que vous avez commandées. Vous devez ranger les denrées à l'économet et y ajouter les fiches d'inventaire. Quelles sont les quantités que vous avez maintenant en stock?							
Voici les denrées qui doivent être ajoutées au stock et rangées dans l'économet:							
12 boîtes d'olives (voir modèle de solution)		24 b. Tomates pelées					
		12 bt. Sauce au soja					
		100 l. Huile de friture					
		75 kg. Farine complète					
		50 kg. Riz caroline					
		25 kg. Sucre de canne					
Devoir:							
Inscrivez dans la fiche d'inventaire quelle quantité il y a en stock après rangement. (Inscrivez la réponse dans les cases vides)							
Fiche d'inventaire		Olives					
Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			
33 boîtes		12 boîtes		45 boîtes			
Fiche d'inventaire		Tomates pelées					
Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			
4 boîtes		24 b		28 boîtes			
Fiche d'inventaire		Farine complète					
Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			
56 kg		75 kg		131 kg			
Fiche d'inventaire		Sauce au soja					
Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			
2 bouteilles		12 b		14 b			
Fiche d'inventaire		Riz creole					
Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			
5 kg		50 kg		55 kg			
Fiche d'inventaire		Huile de friture					
Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			
25 litres		100 l		125 l			
Fiche d'inventaire		Sucre de canne					
Stock précédent		Livraison		Nouveau stock			
7,5 kg		25 kg		32,5 kg			
Report				6			

Exercice 3				Report		Nombre points maximal obtenu	
Vous épluchez 3 kg de pommes. Les épluchures et les parures pèsent 600 g. Puis, vous découpez les pommes en petits morceaux.							
Devoir A:							
Calculez combien il vous reste de pommes épluchées en kg.							
$3000\text{ kg} - 600\text{ g} = 2'400\text{ g}$							
Quand vous coupez les quartiers de pommes, vous perdez encore une fois 0,150 kg.							
Devoir B:							
Calculez quelle quantité vous obtenez de quartiers de pommes en kg.							
$2,400\text{ kg} - 0,150\text{ kg} = 3'399\text{ kg}$							
Exercice 4							
Vous allez chercher à la cave un sac de pommes de terre contenant 22,500 kg. L'épluchage des pommes de terre entraîne 18 % de perte. Combien de kg de pommes de terre épluchées vous reste-t-il pour faire de la purée?							
Devoir:							
Calculez combien de kg de pommes de terre épluchées vous obtenez.							
$22,500\text{ kg} \times 100 = 2,250\text{ k} - 18\% = 18,75$							
Report				12			

Le quatrième exercice propose un calcul de pourcentage. Ca a écrit : $22,500\text{ kg} \times 100 = 2,250\text{ k} - 18\% = 18,75$. Et ça, cela reste bien mystérieux... Je lui montre juste que sur la calculatrice, résoudre un problème de ce type ne suppose qu'un seul calcul, proche de ce qu'elle a tenté : $22,500 - 18\% \rightarrow 18,45$.

Les cinquième et sixième exercices de l'examen blanc, par manque de temps, n'ont pas pu être traités durant la séance.

Exercice 5					Nombre points maximal obtenu
Report					12
Vous avez décidé de préparer pour votre famille le plat national espagnol: la paella. Il vous reste encore 20.- CHF dans vos économies. Est-ce suffisant? 					
Devoir: Calculez le coût des marchandises nécessaires pour préparer votre paella (Cet exercice peut être calculé sans méthode de résolution.)					
Suivez l'exemple des cuisses de poulet					
Produit utilisé	Quantité	Unité	CHF par unité	Coût des marchandises	
par ex. cuisses de poulet	480 g	0,480 kg	8.20 CHF par kg	CHF 3.95	
Echines de porc prêts à l'emploi	120 g	0,120 kg	14.50 CHF par kg		
Huile d'olive	40 g	0,040 kg	6.70 CHF par kg		
Saucisse à l'ail	120 g	0,120 kg	8.50 CHF par kg		
Poivrons 3 couleurs	50 g	0,050 kg	5.10 CHF par kg		
Tomates	80 g	0,080 kg	3.- CHF par kg		
Riz arborio	200 g	0,200 kg	1.80 CHF par kg		
Safran en poudre	1 g	0,001 kg	4.50 CHF par g		
Fond de volaille	10 dl	0,100 l	-.90 CHF par l		
Moules	200 g	0,200 kg	6.70 CHF par kg		
Crevettes géantes	120 g	0,120 kg	23.- CHF par kg		
Citron	1 pièce	1 pièce	-.60 CHF pièce		
Sel				CHF 0.03	
Coût total des marchandises:					
Espace pour les calculs et les notes:					
Report					15

Exercice 6					Nombre points maximal obtenu
Report					15
Pour passer votre examen pratique, vous décidez de créer un dessert à la banane. Vous appelez votre création la "Banana-Fantasy". Le chef vous dit que vous devez calculer le coût des marchandises nécessaires à votre création.					
Devoir: Calculez le coût de marchandises à acheter pour votre création dessert:					
Danrées et quantités nécessaires pour 4 personnes: 					
8 pièces	Mini-meringues, à 10 centimes pièce	80 c			
4 pièces	Grandes bananes à 70 centimes pièce	280 CHF			
8 boules	Glace chocolat à 35 centimes la boule	280 CHF			
2 dl	Crème fouettée à CHF 8.10 le litre	4,05 CHF			
120 g	Sauce chocolat à CHF 7.- le kg				
20 g	Raisins secs à CHF 6.50 le kg				
8 pièces	Bricolets à 5 centimes pièce				
70 g	Framboises à CHF 5.20 le kg				
Le coût total des marchandises nécessaires à votre création de ce dessert pour 4 personnes s'élève à _____ CHF.					
Total					18

ANNEXE N°3

NARRATIONS DES DOUZE SÉANCES² AVEC CO, JAC, JAD, LOU, MAM, SA ET TIZ DURANT L'ANNÉE 2011-2012

Narration de la 1^{ère} séance du 08.09.11

Il s'agit de la première séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Elles sont sept : Mam, Jad, Tiz, Jac, Lou, Co et Sa. J'interviens dans le cadre des cours de cuisine que leur donne Chris, leur maître socio-professionnel, le jeudi, durant toute la matinée. Chris est présent, assis à une table parmi les apprenties. Ly, enseignante de soutien, est également là pour offrir à Sa, apprentie sourde intégrée depuis deux ans CFPS, une traduction en langue des signes. Elle est assise en face de Sa, juste à mes côtés. Nous sommes donc dix en tout pour ce premier moment de mathématiques de l'année.

Je commence par me présenter même si toutes les apprenties me connaissent plus ou moins (je suis venu deux fois dans leur classe l'an passé, pour assister à des activités d'atelier de raisonnement logique ; j'en avais profité pour leur présenter la "course à vingt" et leur apporter quelques casse-tête). Je fais un rapide tour de table en les appelant tour à tour par leur prénom (certaines sont plutôt étonnées que je le connaisse). Je leur dis que Chris m'a invité dans le cadre de ses cours, pour leur enseigner les maths, parce qu'il savait que j'aimais bien les maths.

Tiz me demande ce qui fait que j'aime bien les maths. Je lui dis que j'essaierai de le lui montrer dans le courant de la séance. Jad dit qu'elle n'aime pas les maths et se cache le visage dans ses mains. Le début de la séance est un peu agité. Certaines apprenties rigolent. Jac dit qu'elle a faim et qu'elle se réjouit d'aller dîner (il n'est que dix heures). Lou dessine sur une feuille, Co souffre des dents (elle s'est fait extraire une dent de sagesse),...

Je leur demande si elles savent pourquoi on vient leur enseigner des maths, dans le cadre de leur cours professionnels. Tiz dit que c'est parce qu'on a tout le temps besoin des maths. Je lui demande de préciser un peu et elle parle de la cuisine, pour faire des recettes ou pour faire les courses. Je lui demande si elle est bien sûr que l'on a besoin de savoir des maths pour faire les courses et elle me raconte qu'elles (Tiz et Jac) se sont dernièrement "payé" la honte au supermarché, parce qu'elles avaient trop pris de marchandises dans leur caddy et qu'elles n'avaient pas assez pour payer. Une autre apprentie évoque le paiement des factures, des assurances... Une autre encore le budget. Jac parle de faire des maths quand on regarde la télé, puis se rétracte en disant que c'était une boutade. Jad dit qu'on peut bien en faire quand on regarde la télé : une "deuxième" pub, c'est déjà des maths. Lou dit que les maths, cela sert aussi à évaluer des distances quand on conduit et que l'on doit freiner. Jad poursuit en disant que les maths cela sert surtout à embêter les élèves en classe...

Je précise alors les raisons de ma présence, une heure chaque quinzaine. Je leur dis qu'il s'agit tout d'abord de les aider à préparer leurs examens de maths de fin d'année, et que je leur amènerai, pour ce faire, des épreuves des années précédentes, pour me rendre mieux compte où il pourrait être important de les aider (certaines semblent un peu surprises d'apprendre qu'il y aura un examen, même si Chris le leur a déjà dit). Je leur dis ensuite que les maths peuvent peut-être aussi leur servir à résoudre des problèmes en cuisine (comme Tiz l'avait évoqué). A ce titre, j'annonce que je vais leur demander tour à tour, entre chaque cours, d'identifier un problème qu'elles rencontrent en cuisine, qu'elles ne savent pas résoudre et où elles pensent

² Les productions des apprenties à partir desquelles les narrations ont été rédigées, et que l'on retrouve dans le corps principal de la thèse, n'ont pas été jointes au texte de façon à ce que le volume des annexes conserve une dimension raisonnable.

que les maths pourraient leur être utiles. Je précise qu'il s'agira de rapporter ce problème en cours, au besoin avec l'aide de Chris, afin que l'on puisse envisager et discuter différentes manières de le résoudre. Je dis à Tiz que c'est là une première chose qui me plaît beaucoup en maths, échanger et discuter de diverses manières de résoudre un problème. Tiz est d'accord de recueillir un problème pour le prochain cours. Enfin, je dis que les cours peuvent aussi permettre de travailler une notion qu'elles ont essayé d'apprendre, sans succès, à l'école ou dont elles ont entendu parler, mais qu'on ne leur a pas enseignée. Je désigne à titre d'exemple le flip-shirt de la classe sur lequel figure des dessins d'objets en 3D que j'avais réalisé pour des stagiaires et à propos desquels Mam m'avait entretenu au début de la séance. Sa me demande si c'est possible me peut de me poser des questions en particulier (et pas devant tout le monde), ce à quoi je réponds par l'affirmative.

Je viens ensuite à l'objet de la séance, soit une activité d'exploration de la calculette, en les informant que la calculette sera à leur disposition pour les examens. Je dis qu'elles savent déjà assurément faire un tas de choses sur une calculette, mais qu'il y a sans doute aussi toute une série de touches dont elles ne connaissent pas bien la signification. Mam me dit que c'est bien normal, parce que ces touches ne leur sont pas utiles. Je réponds en soulignant l'importance de bien connaître le fonctionnement de la calculette pour savoir quand en faire usage de façon pertinente et je lance l'activité en leur demandant de partir à la découverte de leur calculette, en essayant d'appuyer tout autant sur les touches qu'elles connaissent que sur celles qu'elles ne connaissent pas (je distingue à cet effet les touches jaunes qui permettent de fabriquer des nombres, des touches bleues qui permettent de les transformer). Je leur demande, en distribuant des feuilles et des stylos-billes (en indiquant que c'est pour garder la trace de ce qu'elles font), de noter les choses qui les étonnent et/ou qu'elles ne comprennent pas, afin que l'on puisse en discuter après coup. Je propose également à Chris de faire l'activité avec les apprenties.

Le démarrage est instantané chez certaines et plutôt lent chez d'autres : Lou et Jad, notamment, continuent à dessiner et Jad note à plusieurs reprises, "j'aime pas les maths" sur sa feuille. Je les encourage pourtant à démarrer, ce qu'elles consentent à faire. Tout au long de ce moment de découverte, je passe vers chacune d'entre elles (et chez Chris aussi) pour leur montrer, sans mot dire, un aspect un peu surprenant et pas trop connu de la calculette comme le $2 + = = = =$ ou le $2 \times = = = = =$; le $7 \times 5 =$, $4 =$, $8 \times =$; le $3 : =$; ... Avec certaines, j'encourage aussi l'exploration d'une touche comme $\sqrt{}$ chez Jac ou d'une marque comme M (comment la faire apparaître ? comment la faire disparaître ?) chez Lou. L'agitation du début de séance est complètement retombée, je suis frappé par la qualité de l'attention qui règne. Toutes les apprenties (à l'exception de Jad peut-être) sont prises par l'activité, Chris également. Au bout d'une quinzaine de minutes, j'interromps le travail en demandant à une apprentie d'aller présenter l'une de ses découvertes au tableau (je demande à toutes les autres d'en choisir une sur leur feuille qu'elles présenteront par la suite). C'est Tiz qui se lance la première et qui dit qu'elle n'a pas compris comment il était possible qu'en appuyant sur le 3, le $:$ et le $=$ cela donne 0,333333 (elle sait ce qu'est un nombre périodique et connaît le signe pour le représenter). Ce qui l'étonne n'est pas tant d'avoir fait apparaître un résultat comme 0,333333 que d'avoir pu le faire en utilisant qu'un seul nombre (la touche "divisé" en effet lie en principe deux nombres pour en produire un troisième).

Je lui demande d'écrire les touches et le résultat au tableau ce qu'elle fait en écrivant : $3 : =$ 0,333333 et je propose d'explorer la chose avec d'autres nombres. Toutes les apprenties se mettent ainsi à la tâche pour une vraie recherche en collectif (i.e. toutes recherchent les résultats sur la calculette). 9 est tout d'abord proposé et donne 0,111111, puis 12 qui donne 0,833333, puis 21 qui donne 0,04761905. Là, Mam réagit en disant que ce n'est pas un résultat comme les autres, parce qu'il n'y a pas de chiffres qui se répètent. Je propose d'essayer

avec 2 qui donne 0,5, puis 1 (qui "ne donne rien" disent les apprenties), puis 4 qui donne 0,25, puis 5 qui donne 0,2 (là, c'est moi qui ai repris le feutre et qui note à chaque fois le nombre, les touches et le résultat au tableau).

A ce moment, je demande aux apprenties de regarder les résultats au tableau, en les considérant dans l'ordre des nombres, soit les résultats pour : 1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 21 et essayer de trouver ce que peut bien signifier l'usage des deux touches : et = appliquées à un nombre. C'est alors que Tiz soudain s'exclame : "c'est la moitié". Je lui demande de préciser sa réponse, mais elle fait mine de se rétracter. J'en profite alors pour lui dire qu'il y a ici une autre raison pour laquelle j'aime bien les maths : soit quand face à quelque chose de mystérieux, qu'on ne comprend bien, une idée fait soudain jour et qu'il y a ici quelque chose de bien merveilleux.

A partir de l'idée "c'est la moitié", il est alors possible d'associer $2 : = 0,5$ à $\frac{1}{2}$, puis à $1 : 2$ qui est bien égal à 0,5 ; puis $3 : = 0,3333$ à $\frac{1}{3}$, puis à $1 : 3 =$ qui donne bien 0,33333 et ainsi de suite pour tous les résultats figurant sur le tableau.

Je fais remarquer que tous les résultats sauf un comportent une virgule, que certains s'arrêtent alors que d'autres remplissent tout le cadran de la calculette et que dans ceux qui ne s'arrêtent pas, tous, sauf le résultat du 21 signalé Mam, comportent un "chiffre" périodique. Une apprentie dit alors que c'est peut-être les nombres qui se terminent par 1 qui donnent des résultats sans "chiffre périodique". Je réponds que c'est une bien belle idée qu'il convient de vérifier, chose que les apprenties entament pour 31 et pour 41. J'interromps cependant leur recherche en avançant que ce ne sera vraisemblablement pas le cas pour 81. Je pense en effet à cet instant que, comme 81 est le carré de 9, on pourrait obtenir à nouveau un "chiffre" périodique. Or, je suis bien étonné quand les apprenties m'annoncent que ce n'est pas le cas puisque l'on trouve : 0,01234568. Et ce sont elles qui, à leur tour, seront totalement surprises, lorsqu'elles remarqueront que l'on obtient ici la suite des nombres entiers : 0-1-2-3-4-5-6... Une apprentie me demandera d'ailleurs : "mais comment vous avez tout cela ?" (alors même que je ne le savais pas, ce que je n'avoue pas sur place), tandis qu'une autre proposera, pour trouver d'autres suites de décimales irrégulières, de diviser 1 par 82, ou bien 2 par 82, etc.

Il serait évidemment possible de continuer de la sorte, mais la séance touche à sa fin. J'interromps donc l'activité en disant que l'on reprendra, dans chaque prochaine séance, l'une des autres découvertes faites sur la calculette aujourd'hui. C'est alors que Jac déclare qu'elle a vu qu'on pouvait écrire "lol" sur la calculette. Lou renchérit en disant que l'on peut aussi écrire "soleil". Certaines apprenties ne savent pas que l'on peut écrire des mots avec des chiffres, je demande donc à Lou de leur dicter le nombre qui donne "soleil". Peu après, Tiz dit qu'elle a écrit "hello". J'essaie à mon tour de le faire, mais comme le 0 ne tient pas au début, je commence par le 4 et j'obtiens un "hello" à l'envers. C'est d'ailleurs Tiz qui précisera juste après que, pour pouvoir faire apparaître le 0 au début, il faut appuyer sur la touche "virgule" de la calculette. Je suggère aux apprenties d'essayer, pour la fois prochaine, de faire apparaître le plus long mot possible sur la calculette.

Jac dit à nouveau qu'elle a faim et qu'elle se réjouit d'aller dîner. Je lui dis qu'il y a là une troisième raison qui me fait aimer les maths : pourvoir faire oublier que l'on a faim, tant on est pris par ce à quoi l'on pense.

Notons enfin pour terminer, que Val, ma collègue enseignante, qui avait le même groupe d'apprenties pour les cours de culture générale l'après-midi, m'a dit en rigolant en fin de journée que les apprenties n'avaient pas arrêté durant le cours d'essayer de faire apparaître des mots comme "google" sur les calculettes qui se trouvaient sur leur table.

Narration de la 2^{ème} séance du 22.09.11

Il s'agit de la deuxième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Les sept apprenties sont présentes, soit : Mam, Jad, Tiz, Jac, Lou, Co et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa.

Je débute la séance en évoquant tout à la fois le plaisir de les retrouver une deuxième fois et la surprise que j'ai ressentie la fois dernière devant le fait qu'elles se soient intéressées à des choses qui n'ont en principe par grand-chose à voir avec leur travail en cuisine. Je pense au travail sur les touches : et =, mais les apprenties évoquent plutôt la recherche de mots sur la calculette, Lou disant qu'elle a trouvé toute une série de mots, mais qu'elle a laissé la feuille sur lesquels elle les a écrits dans une autre classe. Elle me demande si elle peut aller la chercher, mais je lui réponds qu'on en reparlera tout à l'heure.

Je poursuis en indiquant que j'ai produit à leur intention une petite feuille synthèse concernant la recherche effectuée la fois dernière que je leur distribue (cf. annexe). Je précise que je ne sais pas trop si cela va les intéresser d'avoir une fiche de la sorte, que si c'était le cas je pourrais essayer d'en produire une en rapport avec chaque séance, et qu'elles pourront toujours les inclure dans leur classeur de technologie de cuisine pour se rappeler de ce qui a été fait et appris en mathématiques. Jad me rétorque que son classeur est déjà bien plein, mais Chris dit que l'on pourra quand même trouver de la place.

Je procède ensuite à la lecture de la fiche, en précisant que le fait de taper sur la touche : et sur la touche = correspond en mathématiques à la notion d'inverse d'un nombre, puis en rappelant les recherches effectuées, les résultats trouvés et les constats réalisés, puis enfin en énonçant la définition de la notion d'inverse et en pointant les autres nombres inverses extraits du Charrière (au sujet desquels je parle succinctement de la notion de période, désignant des longues et des courtes figurant dans les exemples ; Tiz me dit qu'elle se rappelle de ce qu'est une période). L'attention n'est pas bien grande durant ce moment de lecture (au point que j'ai un peu l'impression d'accélérer le mouvement, afin de pouvoir passer à autre chose), je dois à plusieurs reprises l'interrompre devant le bavardage gestuel (Lou et Jad échangeant en langue des signes) ou langagier des apprenties.

Au terme de cette lecture, je continue en disant que, depuis que je travaille à Seedorf, je cherche à mieux connaître ce qui pourrait bien intéresser les apprenties en mathématiques et que c'est pour cela notamment que j'essaie d'organiser des petites recherches sur la calculette comme celles de la fois précédente. Je précise que je leur en proposerai à nouveau une aujourd'hui autour de la touche $\sqrt{\quad}$ (que je dessine sur le flip-chart), parce que plusieurs d'entre elles avaient transcrit ce signe sur leur feuille la fois dernière pour dire qu'elles ne savaient pas ce qu'il signifiait (Jac acquiesce en disant que c'était le cas pour elle et Tiz dit qu'elle a déjà vu ça quand elle était à l'école, mais qu'elle ne se rappelle plus ce que cela signifie).

Je dis que je suis également très intéressé par les problèmes qu'elles peuvent effectivement rencontrer dans leur secteur professionnel (la cuisine) et que c'est pour cela que j'ai demandé à Tiz d'en rapporter un que nous aurons l'occasion d'examiner aujourd'hui. Enfin, je dis que je cherche aussi à mieux comprendre comment il est possible de les aider à passer leurs examens de mathématiques et que cela, ce n'est pas tout simple, parce qu'il est vrai que parfois on pense donner de bonnes explications, mais que cela embrouille plus que cela n'éclaire (elles sont plusieurs à manifester leur approbation). C'est du reste pour cela que j'ai pris aujourd'hui avec moi des exercices d'examen que Chris m'a transmis et que je leur donnerai à faire.

Mais avant tout cela, je leur propose de mettre en commun les mots que l'on peut écrire sur la calculette qu'elles ont pu découvrir depuis la fois dernière. Plusieurs d'entre elles disent

qu'elles ont trouvé tout plein de mots, mais qu'elles ne se rappellent plus bien desquels. Lou demande à nouveau si elle peut aller chercher sa feuille dans l'autre classe, ce à quoi j'acquiesce. Jad dit qu'elle se rappelle de "LOL" que je note donc sur le flip chart, tout en demandant le nombre qu'il faut taper sur la calculette pour le faire apparaître. Jad répond correctement 707 et poursuit sur sa lancée, en proposant "BEBE" qu'elle désigne par 8383. Et là, je sens soudain que l'ensemble des apprenties (à l'exception de Co qui est restée silencieuse tout au long de cette activité) se prennent au jeu. Il y a les mots à trouver (ou à se rappeler), les chiffres pour les écrire, la suite des chiffres à me dicter (certaines n'ont pas vu tout de suite que l'on pouvait retourner la calculette pour le faire) dans le bon ordre, les nombres ensuite à lire. Sa et Mam notamment deviennent très actives pour énoncer les suites de chiffres. Les apprenties, dont Lou qui est revenue avec sa feuille (cf. annexe), proposeront (dans le désordre) "BIO", "ŒIL", "BELLE", "GLOBE", "GOOGLE", "SOLEIL", "BOLOSSE" (au lieu de "molosse", ce qui provoquera une discussion), "HELOISE". Mam tentera "BOISSON" qui sera rejeté à cause du "N". Je montrerai "ILLISIBLE" en les invitant à chercher un mot de plus de dix lettres pour essayer de battre mon score. Tiz dira encore qu'elle a tenté d'utiliser le dictionnaire, mais que ce n'était pas facile. L'activité se termine par une mise en correspondance chiffre-lettre sur le flip chart : 0->O ; 1->I ; 2->... ; 3->E ; 4->h ; 5->S ; 6->g ; 7->L ; 8->B ; 9->G (avec une discussion autour des cas du 2 et du 5 pour déterminer lequel donne S et les cas du 6 et du 9 pour savoir lequel donne g/G).

Je profite, après une courte pause qui a permis à deux apprenties de se rendre aux toilettes et à moi d'échanger succinctement avec Co sur les raisons de son silence (elle me dira qu'elle a un peu mal au dos), pour lancer la petite recherche sur la touche $\sqrt{}$. Je demande aux apprenties de taper 0 puis $\sqrt{}$ et de regarder ce qui se passe. Elles répondent "rien" et je note "0" (après 0 et $\sqrt{}$) sur le flip chart. Je poursuis avec 1 qui ne donne "rien" non plus, puis avec 2, 3 et 4. Pour 2, Lou s'exclame que : "c'est le bordel!", alors qu'une autre apprentie me dicte la suite des chiffres : "1,4142135. Pour 3, c'est Co qui prend pour la première fois la parole et qui dicte : 1,7320508. Pour 4, cela donne 2 et j'invite ainsi les apprenties à chercher les nombres qui comme 0, 1 et 4 donnent des nombres entiers quand on appuie sur la touche $\sqrt{}$, soit de trouver ceux qui donnent 3, 4, 5, 6 et ainsi de suite. Je ne laisse toutefois pas la recherche démarrer de suite, en demandant à Tiz de venir exposer le problème qu'elle a identifié en cuisine. Je m'assieds donc à sa place et lui dis de se rendre au tableau.

Tiz, après s'être levée, s'arrête auprès de Chris, pour qu'il l'aide à se rappeler du problème. Nous assistons de fait à un échange entre Cris et Tiz qui mêle tout à la fois des éléments du problème rencontré et des ébauches de solution. Suite à cet échange, Tiz se rend alors au tableau où elle écrit : "10 personnes / Recette / il faut trouver pour 2 personnes" et à partir de quoi elle essaie de nous expliquer tout à la fois son problème et comment elle s'y est prise pour le résoudre : "il fallait transformer des kg en g, et puis diviser aussi, j'avais la formule et j'ai trouvé comment faire,...".

Je demande alors aux autres apprenties si elles ont bien saisi le problème rencontré par Tiz et, à ma grande surprise, elles répondent toutes par l'affirmative. Je dis donc que pour ma part qui ne travaille pas en cuisine, j'ai besoin de m'en faire une meilleure idée et je retourne au flip-chart. Je note "Problèmes de cuisine" et, avec l'aide de Tiz et de Chris, je poursuis en écrivant : "Il y a une recette de quiches pour 10 personnes". Grâce à leurs explications, je comprends que le problème de Tiz est apparu suite à la réalisation de treize quiches qui ont été cuisinées pour huitante personnes et que Tiz désirait, quant à elle, savoir comment il lui faudrait s'y prendre pour faire des quiches pour deux personnes. J'écris donc au flip chart : "En cuisine, on a fait 13 quiches pour 80 personnes. Tiz ne veut faire des quiches pour deux personnes". Nous n'irons cependant pas vraiment plus loin dans la formulation du problème, parce que Tiz et Chris ne se souvenaient plus bien des quantités exactes d'ingrédients qui figuraient dans la

recette. Chris a pourtant bien trouvé une recette de quiches dans le livre qui était sous sa main, mais la recette était envisagée pour quatre personnes, alors que celle en cuisine l'était pour dix. Nous convenons ainsi que Tiz recherche ces quantités exactes pour la fois prochaine.

Je demande alors aux autres apprenties, dont l'attention était restée assez bonne tout au long de ces échanges, qui se chargera, cette fois-ci, d'identifier un nouveau problème en cuisine. Mam prend la parole et dit que, de son côté, elle ne sait pas bien comment s'y prendre quand il faut cuire des pâtes pour les apprenties. Elle fait un geste pour montrer des formes de pâtes allongées qu'elle veut mettre dans l'eau, mais je ne parviens pas vraiment à percevoir la nature du problème qu'elle désigne. Chris ajoute qu'en plus c'est différent quand les pâtes constituent le plat principal ou quand elles ne forment qu'un accompagnement. Il précise aussi qu'il y a le problème de la tare. Je demande alors, à l'intention des autres apprenties, ce qu'est la tare et Chris explique que c'est le poids du récipient qui contient les pâtes. Je note donc au flip chart : "Mam veut préparer des pâtes pour toutes les filles de Seedorf avec la tare" pour se rappeler du problème de Mam, et l'encourage à mieux le définir d'ici à la prochaine fois.

Pour la fin de la séance, je propose aux apprenties de résoudre un problème d'examen. Comme il ne reste que peu de temps, je renonce à lire avec elles la page de garde de l'épreuve (qui la présente) et ne fais qu'évoquer le fait que l'épreuve d'examens comporte en tout six exercices. Une des apprenties trouve que c'est beaucoup, alors qu'une autre d'entre elles demande si l'épreuve de maths a beaucoup d'importance ou bien si c'est plutôt l'examen pratique qui va compter. Chris dit que c'est bien l'examen pratique qui compte le plus, mais que celui de maths permet de rehausser sa moyenne. Je distribue donc le premier exercice de l'examen (le même à toutes les apprenties), en leur demandant de se débrouiller du mieux qu'elles peuvent pour le lire et pour le résoudre. Je leur dis qu'elles peuvent utiliser la calculatrice pour le faire et leur demande d'employer un stylo-bille pour qu'elles (et moi après coup bien sûr) puissent conserver la trace de ce qu'elles font. Certaines protestent un peu pour l'usage du stylo-bille. L'une d'entre elles dira qu'elles ont déjà dû résoudre le même problème, mais Chris rectifiera en disant qu'il s'agit d'un problème semblable, mais qui n'était pas en tous points pareils (en fait, les apprenties ont déjà eu plusieurs occasions de résoudre des problèmes de ce type, notamment dans cours interentreprises auxquels elles participent). Ly s'enquière auprès de Sa pour savoir si elle a des questions liées à la consigne (elle lui explique le mot "manuel", en le remplaçant par "livre") et l'invite elle aussi à se débrouiller toute seule.

Je suis alors frappé par le fait que toutes les apprenties s'engagent dans le problème et s'essaient à le résoudre (cf. annexe pour les productions de chaque apprentie). Tiz dira que ce problème ressemble à celui dont elle a parlé tout à l'heure, puis encore, en cours de résolution, qu'elle fait confiance à son instinct pour le faire. Mam, qui n'écrit pas une ligne sur sa feuille, me dira qu'elle est "en réflexion", lorsque je l'interpellerai pour lui demander si elle n'a pas compris quelque chose. Jad, au terme de sa résolution, me demandera d'une part de lui dire si elle a fait quelque chose de juste, alors même qu'elle s'est arrêtée à l'inscription du prix du sucre dans la table des réponses, parce qu'elle savait qu'elle avait commis une erreur (à ce propos, je lui ai dit, en voyant tout ce qu'elle avait écrit "vous voyez que vous savez faire des maths", ce à quoi elle me répondra : "ben non, puisque je me suis trompée"). Jac me demandera une nouvelle feuille parce qu'elle s'est trompée lorsqu'elle a voulu reporter des résultats de ses calculs dans les cases figurant au bas de la feuille d'exercice (elle n'aime pas faire des ratures et c'est donc moi qui les ai faites à sa place – voir les cases "jus de citron" et "mangue" sur sa feuille – pour que, finalement, elle consente à terminer l'exercice). Co prendra plus de temps que les autres apprenties pour résoudre le problème, peut-être parce qu'elle avait d'abord écrit ses calculs sur une feuille de brouillons avant de les recopier sur sa feuille de l'exercice.

A Lou, Jac, Sa (puis un peu plus tard à Tiz) qui ont terminé avant les autres, je suggère de reprendre la recherche sur la touche $\sqrt{}$. Toutes les quatre se prennent bien au jeu. Lou, qui trouve les solutions très rapidement, vient les inscrire tour à tour sur le flip chart. Je lui demande néanmoins de les inscrire sur sa feuille à partir du résultat 36, pour que les autres puissent chercher aussi. Lorsqu'elle trouvera le résultat 100 (pour la racine 10), je lui demanderai si elle a découvert une signification à la touche $\sqrt{}$. Elle me regardera droit dans les yeux (je pense qu'elle n'y pensait plus vraiment), regardera sa feuille, puis éclatera d'un grand sourire en disant qu'elle a compris. Elle se mettra dès lors à rechercher les nombres plus grands que 100, en multipliant leur racine ($11 \times 11 = 121$, $12 \times 12 = 144$,...) et je lui glisserai que je lui demanderai la fois prochaine d'expliquer le fonctionnement de la touche $\sqrt{}$ aux autres apprenties.

Sa commencera quant à elle par taper $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, sur sa calculette en me faisant comprendre qu'elle ne voit pas bien ce qu'elle doit chercher. Avec des gestes, et en prenant appui sur les résultats figurant déjà sur le flip chart, je lui montre alors qu'il s'agit de trouver les nombres qui permettent d'obtenir 4, 5 et 6 avec la touche $\sqrt{}$ et non l'inverse. Elle cherchera dès lors et découvrira les solutions pour 4, 5, 6, 7, à chaque fois avec beaucoup d'excitation, lorsqu'elle verra le bon résultat s'afficher sur la calculette.

Jac engagera de son côté un travail systématique à partir de 14 (14, 15, 16, 17) et notera le résultat 36 qui figure sur le flip chart, juste avant de me rendre sa feuille.

Quant à Tiz, qui pense avoir découvert le fonctionnement de la touche $\sqrt{}$, elle me dit qu'elle veut à tout prix le révéler aux autres. Je lui dis qu'on le fera plutôt la fois prochaine vu que l'heure de la fin de la séance était déjà largement dépassée, mais comme elle veut absolument me faire part de sa découverte, je lui dis de venir avec moi derrière la porte pour le faire. Elle me dit alors que : " cela a à voir avec les tableaux de multiplication, vous savez, six fois, six fois, six fois quatre, non pas six fois quatre, non, par exemple, huitante et un, c'est neuf fois quelque chose, neuf fois, enfin je suis sûre que cela à quelque chose à voir avec les tableaux de multiplication". Elle retournera ensuite en classe en lançant plein de compliments à cette façon de faire des maths, "vraiment pas comme à l'école"...



Notion mathématique : l'inverse d'un nombre

Découverte : En introduisant un nombre (**n**) dans la calculatrice, puis en appuyant sur les touches $\boxed{:}$ et $\boxed{=}$, on obtient **l'inverse de ce nombre ($1/n$)**.

1 : =	→	1	5 : =	→	0,2
2 : =	→	0,5	9 : =	→	0,1111111
3 : =	→	0,3333333	12 : =	→	0,0833333
4 : =	→	0,25	21 : =	→	0,047619
31 : =	→	0,032258	81 : =	→	0,0123456

- Parmi les nombres inverses découverts, un seul est entier : **1**.
- Trois nombres ont leur partie décimale qui s'arrête : **0,5 - 0,25 - 0,2**.
- Six nombres ont leur partie décimale qui ne s'arrête pas : **0,3333333 - 0,1111111 - 0,0833333 - 0,047619 - 0,032258 - 0,0123456**.

Définition : "Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1".

2 et 0,5 sont inverses l'un de l'autre, car $2 \times 0,5 = 1$.

D'autres nombres inverses :

Table des codes décimaux des nombres du type $1/p$, où p est un nombre premier ($\neq 2$ et 5) inférieur à 100.

$1/3 = 0,3$
$1/7 = 0,142857$
$1/11 = 0,09$
$1/13 = 0,076923$
$1/17 = 0,0588235294117647$
$1/19 = 0,052631578947368421$
$1/23 = 0,0434782608695652173913$
$1/29 = 0,0344827586206896551724137931$
$1/31 = 0,032258064516129$
$1/37 = 0,027$
$1/41 = 0,02439$
$1/43 = 0,023255813953488372093$
$1/47 = 0,0212765957446808510638297872340425531914893617$
$1/53 = 0,0188679245283$
$1/59 = 0,0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661$
$1/61 = 0,016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459$
$1/67 = 0,014925373134328358208955223880597$
$1/71 = 0,01408450704225352112676056338028169$
$1/73 = 0,01369863$
$1/79 = 0,0126582278481$
$1/83 = 0,01204819277108433734939759036144578313253$
$1/89 = 0,01123595505617977528089887640449438202247191$
$1/97 = 0,010309278350515463917525773195876288659793814432989690721649484536082474226804123711340206185567$

Narration de la 3^{ème} séance du 06.10.11

Il s'agit de la troisième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Les sept apprenties sont présentes, soit : Mam, Jad, Tiz, Jac, Lou, Co et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa.

Je débute la séance en évoquant le plaisir de les retrouver pour une troisième fois. Je distribue une feuille de brouillon par apprentie (et deux à Jac qui dessine - des portraits - durant les séances) et contrôle qu'elles aient bien chacune un stylo-bille et une calculette à disposition sur leur table. J'évoque le "menu" du jour, à savoir la rédaction des problèmes rencontrés par Tiz et par Mam en cuisine, la synthèse du travail fait au sujet des mots que l'on peut faire apparaître sur l'écran de la calculette, la signification de la touche $\sqrt{\quad}$ que certaines d'entre elles ont investiguée la fois dernière, le retour sur le problème d'examen n°1 et la découverte d'un nouveau problème d'examen.

A l'écoute de ce programme, Tiz me dit que l'on pourrait aussi parler du problème que Jad a rencontré en cuisine, à savoir la découpe d'un bac de gratin dauphinois. Je réponds que c'est très volontiers que l'on pourra en parler tous ensemble. Lou, de son côté, me demande si on ne pourrait pas travailler sur des calculettes qui ont plus de touches (il s'agit, comme je l'ai compris, de calculettes de type Ti 30 de la marque Texas Instrument, soit celles que l'on propose dans les classes de l'école ordinaire à partir de la 5^{ème} année primaire). Je lui dis que j'en ai quelques-unes en ma possession et que je pourrai les apporter la fois prochaine. Je demande aux autres apprenties si elles sont intéressées par ces calculettes "plus performantes" et la plupart répondent par l'affirmative.

C'est Mam qui commence par évoquer son problème. Elle est très concentrée, ferme les yeux pour le formuler et dit qu'il s'agit de prévoir quelle quantité de pâtes il faut préparer quand on veut le faire pour septante apprenties. Chris précise que c'est au moment de peser les pâtes, avant de les cuire. Je note sur le rétroprojecteur : "70 apprenties" et Mam poursuit en disant qu'il faut compter 50 g de pâtes par apprentie et qu'elle sait maintenant comment s'y prendre, à savoir qu'il faut "faire 70 x 50", une opération dont elle cherche ensuite le résultat sur la calculette. De mon côté, j'ai noté sur le rétroprojecteur :

Le problème de Mam

70 apprenties

50 g de pâtes par apprenties

Combien il faut en peser ?

$70 \times 50 = \dots$

Je passe ensuite au problème de Jad (qui est d'accord de nous en faire part, avant que l'on revienne sur celui de Tiz) qui raconte qu'elle devait partager en cuisine des bacs de gratin dauphinois pour cent apprenties. Il y avait cinq bacs de gratin et il s'agissait de trouver combien de parts il fallait faire dans chaque bac. Elle indique qu'il faut diviser 100 par 5, ce qui donne 20, parce que 20×5 donne 100. Je note sur le rétroprojecteur :

Le problème de Jad

100 apprenties

5 bacs de gratin

Combien de parts faut-il faire ?

$100 : 5 = \dots 20$

$20 \times 5 = 100$

Et j'y adjoins le dessin d'un rectangle, figurant un bac, en demandant à Jad comment elle s'y était prise pour effectuer son partage. Elle vient au rétro, trace 2 traits horizontaux au travers

du rectangle, puis successivement 5 traits verticaux, pour aboutir à 18 parts qu'elle décompte. Elle dit que ce n'est pas si mal, puisque ce n'est pas loin de 20 et que si on voulait faire mieux, on pourrait encore rajouter un trait (ce qu'elle fait), ce qui donnerait 21, et que cette fois, ce serait très bien, parce que cela ferait un supplément (au cas où une apprentie aurait encore faim). Chris conteste toutefois la chose en déclarant que les parts de Jad ne sont pas vraiment égales. Je souligne alors qu'il y a sans doute deux problèmes en un, soit trouver combien il faut faire de parts égales dans un bac et savoir ensuite comment s'y prendre pour découper les parts et faire en sorte qu'elles soient bien égales.

C'est alors que Sa (par la voix de Ly) propose de faire "cinq en haut et 4 en bas" pour découper les parts de gratin. Je dessine donc un nouveau rectangle sur le rétroprojecteur, en notant 5 au-dessus et 4 au-dessous et lui demande de venir faire le partage. Sa refuse pourtant de se lever, prétextant qu'elle n'ose pas. Je lui demande alors de "dessiner son idée" sur une feuille "pour essayer", ce qu'elle accepte, puis réitère ma demande de venir réaliser son idée sur le rétroprojecteur, ce qu'elle finit par accepter. Sa trace 3 traits horizontaux au travers du rectangle, puis 4 verticaux. Je dénombre pour elle les morceaux réalisés, parviens à 20, mais Chris conteste à nouveau la réalisation de Sa, parce que les parts ne sont toujours pas bien égales. Je dis qu'il faudra vraiment trouver une façon de faire pour résoudre ce problème, tandis que Sa reprend sa place (Ly me dira, après la séance, que Sa avait perçu que l'ensemble de la proposition qu'elle avait faite était erronée). Le rétroprojecteur s'est donc enrichi des dessins de Jad et de Sa et de quelques notes que j'ai ajoutées :

Le problème de Jad

100 apprenties

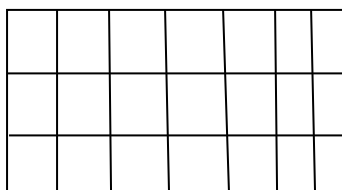
5 bacs de gratin

Combien de parts faut-il faire ?

$$100 : 5 = \dots 20$$

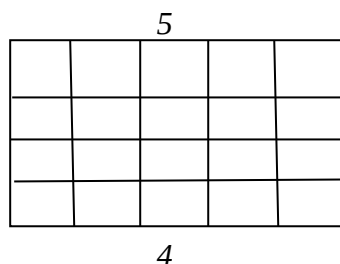
$$20 \times 5 = 100$$

(18)



100 parts identiques

21 (avec supplément)



Nous passons ensuite au problème de Tiz (je relève ici que, durant tous les échanges concernant les problèmes de Mam, Jad et Tiz, l'atmosphère est calme et que les apprenties semblent très concernées ; tout juste à la fin de l'examen de son problème, Jad me dira qu'elle trouve que je me "la pète un peu", quand, considérant mon écriture sur le rétroprojecteur, et habituellement peu lisible, je déclarerai m'en être plutôt bien sorti cette fois-ci).

Je commence par rappeler ce qui avait été formulé la fois dernière en écrivant le début de l'énoncé sur le rétroprojecteur. Chris ayant préparé une photocopie de la recette pour tout le monde, je rajoute, en me les faisant dicter par Tiz, les ingrédients nécessaires à la réalisation de la recette (à l'exception du lard, parce que, précisera Chris, ce dernier n'est pas utilisé en cuisine, eu égard aux apprenties qui ne mangent pas de porc), soit :

Le problème de Tiz

Les MSP ont préparé 13 quiches pour 80 personnes.

On a une recette pour 10 personnes.

Comment faire une quiche pour 2 personnes ?

Pâte brisée	Lait
Oignons	Crème
Gruyère	Œufs
Beurre	Farine fleur ³

Je n'écris pas les quantités à côté de chaque ingrédient (prenant subitement conscience du temps qui s'écoule) en disant aux apprenties que je les rajouterai par après. A propos de ce problème, Tiz déclarera (et ce, contrairement à ce qu'elle m'avait laissé entendre quand je l'avais rencontrée hors de la classe, et qu'elle m'avait dit qu'elle avait trouvé un problème et qu'elle savait le résoudre) qu'elle sait qu'il faut transformer les kilos en grammes (je rajouterai "kg -> g" sur le rétroprojecteur), et qu'après il faut appliquer une formule, en divisant par deux pour savoir pour une personne, puis en multipliant par quelque chose, mais qu'elle ne se sait plus très bien et qu'elle ne se rappelle jamais de cette formule (je rajouterai "*la formule*", "÷ 2" et "*x quelque chose*" sur le rétroprojecteur).

Pour terminer ce point concernant les problèmes rencontrés en cuisine qu'on en rediscutera (Mam manifeste sa désapprobation devant ce report) et propose aux apprenties de leur envoyer ces trois problèmes par courriel pour qu'elles essaient de les résoudre de leur côté (Jad, Jac et Mam me disent qu'elles n'ont pas d'adresse, ce qui est vrai pour une seule d'entre elles, mais Chris me dit qu'il peut aussi leur transmettre les problèmes en version papier). Je demande aussi qui se chargera d'identifier un nouveau problème en cuisine. Aucune apprentie (parmi celles qui ne l'ont pas encore fait) ne manifeste son intérêt pour la chose et c'est finalement Sa, après pas mal d'hésitations, qui consent finalement à le faire (Ly, après la séance, me dira que Sa ne savait pas trop bien ce qu'elle allait pouvoir choisir),

Nous passons ensuite à la découverte de la fiche-synthèse (cf. annexe) concernant les mots que l'on peut inscrire sur la calculette. J'en distribue une par apprentie et procède ensuite à sa lecture. La découverte des associations lettres-chiffres fera réagir Sa pour le 2 qui dira que cela peut faire un Z et d'autres apprenties pour le 9 qui, selon elles, ne fait pas vraiment un G. A la lecture des mots, certaines d'entre elles se manifesteront pour dire : "c'est moi qui l'ai trouvé". Lou sera d'ailleurs particulièrement satisfaite de voir apparaître le terme "bolosse", contesté la fois dernière, mais que je déclare avoir ajouté sur la feuille, parce que ma fille, à qui j'en avais parlé, m'avait dit que c'était un mot qu'elle avait déjà entendu dans des discussions entre jeunes (j'ai dit aussi que ma fille avait trouvé le mot "oseille" et, Lou, après m'avoir demandé son âge, m'a prié de la féliciter). La lecture de la définition de "symétrie centrale" ne suscitera pas de réaction, alors que le descriptif des cartes à jouer fera seulement dire à Jac qu'elle ne sait pas jouer aux cartes. Au terme de cette lecture, Lou me demandera si je ne suis pas d'origine italienne, parce que je n'arrête pas de bouger les mains en parlant, ce à quoi, je répondrais par la négative.

J'invite ensuite Lou à venir au tableau (et moi de prendre sa place) pour qu'elle explique à ses collègues les découvertes qu'elle a faites la fois dernière, concernant la touche racine (Lou parle en fait de la touche "vé"). Elle dit qu'elle ne se rappelle plus vraiment (elle se rappelle seulement de 121) et que ce serait bien qu'elle ait sa feuille (celle où elle a inscrit ses résultats). Comme je l'ai sous la main, je la lui tends tout en lui demandant de commencer par dessiner la touche au tableau. Elle trace un grand $\sqrt{\quad}$, puis se met à recopier un à un les résultats figurant sur sa feuille, soit :

³ Nous discuterons brièvement du mot "fleur" et de sa signification pour "qualifier" une farine.

$$\begin{array}{rcl}
49 & \sqrt{} & 7 \\
64 & \sqrt{} & 8 \\
81 & \sqrt{} & 9 \\
100 & \sqrt{} & 10 \\
121 & \sqrt{} & 11 \\
144 & \sqrt{} & 12 \\
169 & \sqrt{} & 13 \\
196 & \sqrt{} & 14 \\
225 & \sqrt{} & 15
\end{array}$$

Elle dit qu'elle ne se rappelle plus comment cela fonctionne, quand soudain Tiz vient à son aide, en lui disant que 49, "c'est dans la multiplication avec 7". Lou se remémore alors la correspondance entre 7×7 et 49, 8×8 et 64, 9×9 et 81, etc. et Tiz renchérit, en disant qu'elle avait trouvé 20 et 400 (et que, Lou, à ma demande, inscrit à la suite de ses résultats). Je me rends alors au tableau pour préciser le nom de la touche (racine carrée) que j'écris sur le dessin de Lou et expliciter la correspondance $n^2 \leftrightarrow \sqrt{}$ à travers deux exemples : $9 \times 9 = 81 \rightarrow \sqrt{81} = 9$ et $4 \times 4 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4$.

Durant ces explications, j'ai cependant l'impression qu'à cet instant les apprenties, excepté Lou et Tiz peut-être, sont un peu ailleurs. Je tente pourtant encore de contextualiser l'utilisation de la touche $\sqrt{}$ sur un "bac à gratin de forme carrée" (que je dessine sur le rétroprojecteur), gratin qui aurait été cuisiné pour 100 ou pour 64 apprenties, ce qui permettrait, en utilisant la touche $\sqrt{}$ de savoir combien de coupes horizontales et verticales, il faudrait réaliser. Pourtant, seule Lou semble suivre ici mes explications en me disant (pour me faire plaisir ?) quelque chose comme : "ah ouais, c'est intéressant".

J'essaie ensuite de solliciter à nouveau l'attention des apprenties en leur disant qu'après avoir beaucoup parlé, je vais leur proposer un petit travail en groupe, durant lequel, ce sera à leur tour de discuter entre elles. Elles ne semblent toutefois pas vraiment alléchées par la perspective, et quand je propose à Jad de travailler avec Mam, Jad me demande la raison d'un tel choix, prétextant qu'elle préférerait travailler avec Chris. J'obtempère en lui disant qu'elle pourra travailler avec Mam et Chris (Chris ayant manifesté son accord). Je demande ensuite à Tiz de travailler avec Sa et à Jac, Lou et Co de se mettre ensemble. Je donne ensuite les consignes (il s'agit de revenir sur le problème d'examen qu'elles ont résolu la fois précédente et de discuter de six solutions possibles que j'ai rédigées à partir de ce qu'elles avaient trouvé) pour le travail en groupes que je note en les répétant une seconde fois sur le rétroprojecteur :

1° Relire le problème

2° Lire les six solutions

3° Discuter et choisir les solutions qui permettent de résoudre le problème

4° Choisir la solution "la mieux"

Dans le groupe de Tiz et Sa (avec Ly qui traduit pour Sa), le travail démarre immédiatement par la relecture de l'énoncé, l'examen des solutions et les choix qui s'arrêtent sur la 2^{ème}, la 4^{ème} et la 6^{ème} solution, avec une préférence pour la 2^{ème} (Sa avait vérifié que " $\times 2,5$ " donnait les mêmes résultats).

Dans le groupe de Co, Jac et Lou, c'est un peu plus laborieux pour démarrer. Je dois d'abord encourager les apprenties à relire l'énoncé. Ensuite, seules les deux premières solutions sont envisagées. Lou, qui mène le groupe, s'étant arrêtée à la deuxième, en disant que c'était celle qui convenait, alors que la première était incomplète. Elle en a d'ailleurs expliqué les raisons à Jac et à Co, en s'appuyant sur la feuille comprenant l'exercice où elle a noté : $700 : 2 = \dots \times 5 =$. C'est donc moi qui intervins encore pour inviter les trois apprenties à prendre

connaissance des quatre autres solutions. Jac et Co ne donneront cependant pas leur avis, tandis que Lou dira qu'aucune autre solution que la 2^{ème} ne convient.

Dans le groupe de Mam et Jad, les deux apprenties ne travaillent pas ensemble. Jad veut faire avec Chris, alors que Mam (qui avait laissé sa feuille vierge la fois dernière) se met, à ma grande surprise, à résoudre le problème en solitaire et à écrire ses calculs sur la feuille de l'énoncé. J'essaierai bien d'encourager Jad à interagir avec Mam, puis de demander à Chris de se mettre dans le groupe pour susciter les échanges, mais cela restera sans effet. Reste qu'au terme de la séance, Mam aura presque entièrement résolu le problème (en divisant les quantités par 5, puis en multipliant par 2), alors que Jad (qui en avait fait de même, mais en divisant par 2, puis en multipliant par 5, la fois dernière) choisira la 5^{ème} solution, en précisant à mon intention que c'est parce qu'il faut d'abord diviser par 5 pour trouver ce que cela fait pour 1 litre, puis multiplier par 2 pour trouver ce qu'il faut en tout pour 2 litres (en désignant le "2 litres" de l'énoncé).

La séance s'arrête (à nouveau avec un peu de retard sur l'horaire) avec la perspective de se revoir au début du mois de novembre, pour finaliser les solutions de ce premier problème d'examen et appréhender les suivants, ainsi qu'un bref échange en forme de boutade avec Jad (je ne me rappelle plus ce qui en a été le prétexte), au terme de laquelle je lui dis en souriant que, des fois aussi, je trouve qu'elle "se la pète un peu".



Notion mathématique : la symétrie centrale

Découverte : La plupart des chiffres que l'on utilise pour afficher des nombres sur l'écran d'une calculette peuvent se transformer en lettres.

Il suffit pour cela de retourner la calculette d'un demi-tour.

0	→	O	5	→	S
1	→	I	6	→	g
2	→	---	7	→	L
3	→	E	8	→	B
4	→	h	9	→	G

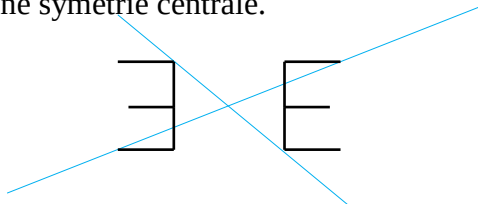
Sur l'écran d'une calculette, on peut donc écrire des nombres qui forment des mots ou des mots qui forment des nombres.

707 → LOL 0.18 → BIO 3838 → BEBE
 7130 → ŒIL 37738 → BELLE 38079 → GLOBE
 379009 → GOOGLE 713705 → SOLEIL 3510734 → HELOISE
 3550708 → BOLOSSE 378151771 → ILLISIBLE

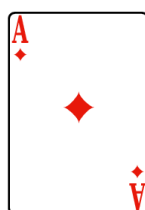
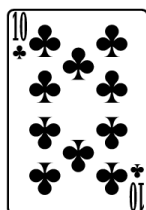
.....

Définition : "La symétrie centrale est une transformation qui permet de déplacer une figure d'un demi-tour sur un plan."

Le mouvement qui transforme un chiffre comme 3 en une lettre comme E est une symétrie centrale.



D'autres symétries centrales :



Narration de la 4^{ème} séance du 03.11.11

Il s'agit de la quatrième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Cinq apprenties sont présentes en début de séance, soit : Jad, Tiz, Jac, Co et Sa. Mam est en rendez-vous à l'extérieur et ne participera pas à la séance. Lou est en rendez-vous à l'intérieur du centre et nous rejoindra en cours. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa.

En arrivant en classe, Jad me dit avec un sourire et un geste pour se protéger : "Oh non, pas encore les maths", tandis qu'elle prend place. Je m'approche d'elle en lui disant qu'heureusement je ne suis pas seulement "les maths en personne", mais que j'ai également d'autres fonctions, comme celles d'enseignant ou encore de papa. Je m'essaie à lui demander ce qui fait qu'elle déteste tant que cela les maths et elle me répond que simplement cela ne l'intéresse pas.

Je salue comme à son habitude les autres apprenties (réitérant le plaisir que je ai à les rencontrer pour une quatrième séance), leur distribue à chacune une feuille de brouillon et vérifie qu'elles aient toutes un stylobille et une calculatrice à disposition. Je demande si elles ont bien reçu par courriel les problèmes que Mam, Jad et Tiz avaient identifiés en cuisine et rapportés en cours. Sa me dit alors qu'elle n'a rien reçu. Co n'a pas consulté son courriel depuis bien longtemps. Tiz a changé son adresse (elle me dit qu'elle veut me donner la nouvelle). Jac n'a pas d'adresse courriel (elle doit bientôt en créer une avec l'enseignante de sa classe). Quant à Jad, elle dit, en plaisantant, que son courriel n'accepte pas les messages qui contiennent des maths. Et Chris, à qui j'avais également transmis les problèmes, me dit avoir eu récemment des problèmes avec sa messagerie et s'être retrouvé dans l'incapacité de lire ses messages (et donc le mien).

Je demande ensuite à Sa si, de son côté, elle a pu repérer un problème en cuisine, mais elle répond par la négative, prétextant qu'elle n'a rien trouvé. Chris intervient cependant en indiquant que ce n'est pas vraiment le cas. Il précise qu'il y a d'une part les problèmes de tare que Sa ne sait pas bien résoudre et d'autre part les problèmes de transformation d'unités qu'elle a également de la peine à effectuer. Il donne pour les premiers l'exemple d'un récipient de 2 kg dans lequel on place 700 g de marchandise et pour les seconds la question de savoir combien de grammes représentent une masse de 0,003 kg. Sa confirme ses propos en disant qu'elle ne comprend rien à tout cela. Tiz dit que pourtant, quand il y a la machine électronique (une balance ?), c'est tout simple, puisqu'il suffit d'appuyer sur le bon bouton. Je propose donc à Sa de rechercher un problème de tare ou un problème de transformation d'unité pour la fois prochaine, mais elle refuse, disant d'abord que c'est trop difficile, puis, de manière définitive, que c'est tout à fait impossible. Co, en revanche, est d'accord de chercher un problème avec l'aide de Chris. Je m'enquière également auprès de Tiz si elle sait également résoudre les problèmes de tare quand il n'y a pas de machine électronique. Comme elle répond par l'affirmative, je lui propose donc de montrer à Sa comment elle sait s'y prendre, en disant que, de la sorte, cela sera peut-être plus facile pour Sa, hors du regard de l'ensemble du groupe (et de moi-même en particulier), de discuter de cela avec elle. Je l'invite en outre à nous rapporter, dans la mesure du possible, comment elle s'y est prise pour le faire et conviens avec Co que c'est bien elle qui a pour tâche de chercher un problème en cuisine d'ici à la fois prochaine.

Je distribue ensuite les fiches-synthèse concernant la racine carrée (cf. annexe), tout en rappelant, en préambule, que certaines apprenties du groupe ont procédé la fois dernière à l'exploration de la touche $\sqrt{}$. Je commence par lire les découvertes que j'ai reportées sur la fiche : $0 \sqrt{}$ donne 0, $1 \sqrt{}$ donne 1, $2 \sqrt{}$ donne 1,4142135... J'observe alors que Ly accompagne la lecture du texte en suivant avec son doigt sur la fiche de Sa, tandis que Co et Tiz sont bien

concentrées sur leur texte. Jac, quant à elle, saisit la calculatrice pour y refaire des calculs, tandis que Jad se détourne de la feuille et regarde du côté de Chris. Au terme de la lecture de l'ensemble des résultats, je rappelle au tableau la signification de la touche $\sqrt{}$, en écrivant $8 \times 8 = 64$, pour montrer que la $\sqrt{}$ est l'opération inverse qui, à partir de 64, permet de retrouver 8. Je dessine également un carré, en écrivant 64 en son centre, pour montrer que la touche $\sqrt{}$ permet de retrouver la longueur du côté du carré (8). J'évoque en parallèle, la découpe d'un plat de gratin carré, dans lequel il faudrait découper 64 parts, la touche $\sqrt{}$ permettant d'orienter la découpe pour obtenir le nombre exact de parts. Je poursuis ensuite la lecture de la fiche avec l'idée de "carré parfait" et de "nombre carré", la définition de la $\sqrt{}$, puis pour terminer, l'exemple du théorème de Pythagore, que je ne fais qu'évoquer, en demandant aux apprenties si elles en ont déjà entendu parler à l'école. Elles disent ne pas vraiment se rappeler. L'une d'entre elles me fait cependant remarquer que le côté oblique du triangle n'est pas vraiment droit (je parle d'un défaut des pixels de l'ordinateur), alors qu'une autre désigne la formule du théorème, en disant que le calcul avec les lettres, elle avait vu cela à l'école. J'en profite pour parler un peu d'algèbre, demandant aux autres si elles ont aussi déjà travaillé cela à l'école. Toutes, à l'exception de Co, semblent effectivement en avoir un peu connaissance. Je demande alors si l'une d'entre elles serait intéressée à en savoir un peu plus sur l'algèbre ou sur Pythagore. Jac demande si je peux lui trouver un livre au sujet de Pythagore (elle précisera à deux reprises qu'elle veut un livre), alors que Co aimerait bien aussi en savoir un peu plus. Les autres se disent peu intéressées (Ly me dira après la séance qu'elle a eu du mal à traduire en langue des signes ces échanges au sujet de Pythagore et de l'algèbre et que cela sera sans doute plus concret pour Sa, si je parle plus avant du mathématicien qu'a été Pythagore). Je m'engage donc auprès de Jac et de Co pour leur trouver un livre et un ou deux textes concernant Pythagore pour la fois prochaine.

Je poursuis en revenant sur les problèmes d'examen. Je rappelle qu'elles ont déjà eu l'occasion d'examiner un premier exercice la fois précédente (sur lequel nous reviendrons dans la suite de la séance), et que je compte aujourd'hui leur soumettre deux autres problèmes tirés de ce même examen. Je distribue à chacune un exemplaire de l'exercice n°2 et propose de le lire ensemble. J'indique qu'il y a une partie de l'énoncé qui est en allemand, mais que la traduction figure sur la feuille. Aucune des apprenties présentes ne voulant se lancer dans la lecture, Co me suggère de le faire. J'entame donc la lecture de l'exercice, en continu, c'est-à-dire sans m'arrêter, pour expliquer tel ou tel terme. Je précise néanmoins que la traduction des termes allemands figurant dans la fiche d'inventaire se trouve juste en-dessous de cette dernière, montrant que "Landkarte" signifie Fiche d'inventaire, "Betsand bisher", "Stock précédent", etc. Tout au long de ma lecture, Ly souligne à nouveau le suivi des mots de l'énoncé à l'intention de Sa. Jac, Tiz et Co semblent également suivre de leur côté le déroulement du texte, alors que Jad, comme précédemment, ignore l'exercice que j'ai distribué. Parvenu au terme de la partie du texte comprenant la traduction, je leur demande d'y aller en complétant les fiches d'inventaire.

Jac, Tiz et Co se mettent à résoudre le problème, alors que Jad ne fait rien... Sa, d'un geste, me demande de passer vers elle. Elle me fait comprendre qu'elle n'a pas saisi ce qu'elle doit faire. Je désigne tour à tour chacune des données de la première fiche d'inventaire avec un stylo, tout en montrant également le "2 boîtes de purée de tomates" figurant dans la première partie de l'énoncé. Sa, après avoir essayé d'articuler ce que j'ai compris comme un "moins", écrit $41 - 2 = 39$ sur sa feuille de brouillon, tout en suscitant mon accord. Je réponds en écrivant $33 - 4 = 29$ sur la même feuille, en faisant correspondre par un geste cette écriture à la fiche d'inventaire des boîtes de pêches proposée comme exemple. Jad m'interpelle ensuite pour me dire qu'elle n'a rien compris à ce qu'elle devait faire. Je lui signifie que je n'en suis pas trop étonné, du fait qu'elle n'a pas pris connaissance de l'énoncé pendant que j'en faisais la

lecture, ni qu'elle l'ait fait de son propre chef, une fois que j'ai eu terminé. Je lui rappelle à ce propos que durant l'examen, ce sera à elle que reviendra tout à la fois la lecture et la résolution du problème et que mon rôle était précisément de les aider à s'y entraîner. Nous reprenons ensuite le texte de l'énoncé (je vois qu'elle a compris qu'il s'agit de fiches d'inventaire) et nous discutons de la tâche à réaliser dans le problème. Elle sait qu'il faut utiliser la soustraction pour le faire et se lance alors dans la résolution. Elle s'interrompt néanmoins après avoir rempli correctement les quatre premières fiches, me disant, quand je le lui fais remarquer, qu'elle s'est arrêtée pour me faire une farce, puis poursuivant la résolution jusqu'à son terme.

Entretemps, Lou est revenue de son rendez-vous. Je lui donne la fiche comprenant l'exercice n°2, en l'informant brièvement de ce que nous avons fait auparavant et en précisant qu'il s'agit d'un second problème d'examen à résoudre. Je lui dis d'en prendre connaissance, lui tendant une calculatrice de type "scientifique" pour le faire et en demandant s'il s'agit bien de celle dont elle m'avait parlé la fois précédente (ce qui est le cas). J'en profite pour lui demander ce qui l'intéresse plus particulièrement sur cette calculatrice et elle désigne, en disant "tout", l'ensemble des touches (à l'exception des touches chiffres et +, -, x, ÷ et =) figurant sur le clavier. Je l'invite donc à faire des choix, une fois qu'elle aura résolu l'exercice n°2, en essayant déjà d'explorer les touches qui l'intriguent plus particulièrement. Elle trouvera sans peine la signification de la touche -> (qui sert à "effacer" la fonction de la dernière touche sur laquelle on vient d'appuyer) et j'aurai tout juste l'occasion de lui montrer la façon d'entrer sur la calculatrice des codes fractionnaires.

Sa me rappelle à nouveau, désignant les résultats qu'elle a découverts pour la deuxième fiche d'inventaire et qui la laissent perplexe. En procédant par écrit, elle a trouvé (cf. annexe 2) d'abord 1,799 comme résultat à $2300 - 500$, puis 1,700 et finalement 497,7 en utilisant la calculatrice. J'essaie alors de lui montrer, en effectuant les deux opérations par écrit devant elle (cf. annexe 2), la différence entre le signe ' (apostrophe) et la touche , (virgule), la façon de positionner les nombres dans les deux cas et le fait que l'on aboutisse tantôt à des grammes dans le premier et tantôt à des kilos dans le second (en fait, je n'ai pas bien compris en situation, que le problème rencontré par Sa, était d'abord un problème d'effectuation de l'algorithme de soustraction, plutôt que, comme je l'avais cru, d'un problème de transformation d'unité de mesures). Co m'interpelle ensuite à propos de la même fiche d'inventaire (cf. annexe 2). La réponse qu'elle a trouvée par écrit : 1,800 n'est pas la même que celle qu'elle a trouvée sur la calculatrice : 497,7 et cela l'étonne beaucoup. J'essaie à nouveau, à peu près de la même façon avec laquelle j'ai opéré auprès de Sa, de compléter son premier calcul qui comprend des quantités exprimées en kilos (en ajoutant un 0 et une virgule devant le nombre 500), puis d'en refaire un second avec les mêmes quantités exprimées en grammes (là encore, je ne suis pas bien certain d'avoir répondu à son interrogation ; en fait, c'est la incohérence du résultat apparu sur la calculatrice qui l'a questionnée et elle aurait tout aussi bien pu se dire que la calculatrice qui "calculait" mal ; il aurait sans doute été plus adapté de l'inviter à reporter son calcul sur la calculatrice, afin d'obtenir le même résultat que par écrit).

Au fur et à mesure que les apprenties parviennent au terme de la résolution de l'exercice n°2, je leur distribue l'exercice n°3, en les priant d'en faire seule la lecture et de le résoudre seule également (sauf pour Sa, avec qui Ly a accompagné la lecture). Toutes les apprenties parviennent à engager une procédure de résolution, sauf Co, qui, à plusieurs reprises, me dit qu'elle n'y arrive pas (elle n'a rien pu écrire sur sa feuille, ni me dire ce qui l'empêchait d'entrer dans le problème). Tiz, de son côté, dit à plusieurs reprises qu'il s'agit d'un problème impossible. Elle s'énerve, interpelle Jaq pour lui faire part du fait que ce n'est pas possible. Je m'approche et je remarque qu'après avoir transformé 5 en 5000, elle a divisé 5000 par 450 et trouvé 11,11 (elle a même mis un trait sur les deux décimales 11 pour signifier une période). Elle me dit que ce problème est vraiment impossible, qu'elle aimerait bien savoir comment s'y

prendre pour trouver ce qu'il y a comme carottes épluchées dans 5kg. Je discute un peu avec elle, mais sans pour autant parvenir à identifier le problème qu'elle a effectivement rencontré. Ce n'est qu'en fin de séance, après avoir, à sa demande, mis en image le problème au tableau (j'ai dessiné 2 carottes et inscrit 5 kg au-dessus des deux carottes, puis dessiné des épluchures et des fanes et inscrit 450 g au-dessus, puis dessiné 2 carottes épluchées, puis des petits cubes avec 0,2 kg juste au-dessus et à chaque fois mis des flèches entre chaque dessin), qu'elle parvient à m'expliquer que ce qu'elle cherche à savoir : soit combien il faut de carottes épluchées pour faire 5 kg. J'en profite donc pour poser le problème à l'ensemble de la classe, noter leurs propositions et leur demander de les vérifier en cuisine : "Combien de carottes pour faire 5 kilos ?" Toutes les apprenties semblent à cet instant très concernées. Lou dit que cela dépend si ce sont des grosses ou des petites carottes et je réponds qu'on va considérer des carottes moyennes. Dès lors, les réponses fusent. Celles de Jaq et de Co font rire. J'invite aussi Chris à répondre et leur demande de me rapporter le bon résultat pour le prochain cours (une apprentie dira plus tard qu'elle espère que les carottes à la cuisine sont plutôt petites).

Jad : 50	Jaq : 10, après avoir dit 5	Lou : 20
Co : 100	Sa : 40 Tiz : 30	Chris : 35

Je demande également si l'une d'entre elles serait intéressée à emprunter une calculatrice "scientifique" et l'explorer d'ici à la fois prochaine. Lou répond par la négative. Jac hésite, puis finit par décliner l'offre. Co, en revanche, accepte et prend l'une des calculatrices à disposition. Jad, Tiz et Sa ne veulent pas non plus et la réunion se termine là-dessus. Toutefois, alors que je suis en train de ranger mes papiers, Jad me demande si je ne suis pas un peu découragé de faire des maths avec des apprenties comme elles qui n'aiment pas les maths. Je lui avoue alors que c'est au contraire ce qui me passionne depuis vingt ans : chercher comment je peux tenter d'intéresser aux mathématiques tant les élèves qui les aiment que ceux qui disent ne pas les aimer. Je lui dis que si elle se passionne pour la cuisine, moi c'est les maths que je préfère. Tiz intervient en disant que sa passion à elle, ce n'est pas la cuisine. Elle rajoute que si elle aime bien la cuisine, ce n'est pourtant pas cela sa passion. Je lui dis que je crois savoir que c'est plutôt la musique et elle me demande comment je sais cela. Je lui réponds que je l'ai déjà entendue plusieurs fois chanter lors des fêtes de Seedorf.



Notion mathématique : la racine carrée

Découverte : Sur une calculatrice, la touche $\sqrt{\quad}$ permet de chercher la **racine carrée** d'un nombre.

0 $\sqrt{\quad}$	→	0	25 $\sqrt{\quad}$	→	5
1 $\sqrt{\quad}$	→	1	36 $\sqrt{\quad}$	→	6
2 $\sqrt{\quad}$	→	1,4142135	49 $\sqrt{\quad}$	→	7
3 $\sqrt{\quad}$	→	1,7320508	64 $\sqrt{\quad}$	→	8
4 $\sqrt{\quad}$	→	2	81 $\sqrt{\quad}$	→	9
9 $\sqrt{\quad}$	→	3	100 $\sqrt{\quad}$	→	10
16 $\sqrt{\quad}$	→	4	121 $\sqrt{\quad}$	→	11

Les nombres dont la racine carrée donne un **nombre entier** sont appelés des **nombres carrés** ou des **carrés parfaits**.

4, 25, 81, 225, 400, 10'000 sont des carrés parfaits.

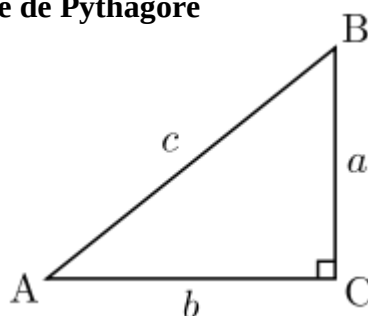
Pour trouver un carré parfait, il suffit de multiplier un nombre entier par lui-même.

Définition : "La racine carrée d'un nombre n est le nombre m qui, multiplié par lui-même, est égal au nombre n ."

11 est la racine carrée de 121, parce que $11 \times 11 = 121$

D'autres utilisations de la racine carrée :

Le théorème de Pythagore



"Dans un triangle rectangle, la longueur du grand côté (c) est (toujours) égale à la racine carrée de la somme des longueurs mises au carré des deux autres côtés (a et b)."

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Narration de la 5^{ème} séance du 17.11.11

Il s'agit de la cinquième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Les sept apprenties sont présentes, soit : Mam, Jad, Tiz, Jac, Lou, Co et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa.

A l'entrée de la classe, je discute avec Co qui est un peu en avance et lui demande si elle a essayé d'explorer un peu la calculette qu'elle a empruntée la fois dernière. Elle répond que oui, qu'elle a tenté des choses, mais qu'elle ne se souvient plus très bien desquelles. Elle me dit par ailleurs qu'elle a oublié de reprendre la calculette aujourd'hui et qu'elle est restée dans son appartement.

Les autres apprenties, à leur arrivée en classe (Jad refait à cet instant le coup du "Oh non, pas les maths"), semblent un peu surprises de me voir. Elles pensent que l'on s'est déjà vu jeudi dernier et que l'on ne devrait donc se revoir que la semaine prochaine (étant donné que je ne viens qu'à quinzaine dans leur classe). Chris leur a d'ailleurs demandé la chose en début de matinée et elles lui ont répondu que je ne viendrai pas. Je confirme pourtant que c'est bien aujourd'hui qu'a lieu notre cinquième séance (Jaq me taquine un peu en affirmant que c'est la quatrième, je réponds que j'ai soigneusement noté les dates des précédentes rencontres, mais elle me rétorque qu'elle les a aussi notées dans sa tête) et leur distribue une feuille de brouillon, tout en vérifiant qu'elles disposent bien d'une calculette et d'un stylo-bille (j'évoque au passage avec Mam, le fait que cela fait bien longtemps, elle qui n'était pas là le 3 novembre, que l'on ne s'était revu).

Je démarre en leur disant que nous allons commencer par faire la synthèse des deux premiers exercices d'examen qu'elles ont réalisés les fois précédentes, puis que nous donnerons la parole à Co pour qu'elle puisse évoquer le problème qu'elle a rencontré en cuisine, enfin que j'ai conçu quelques autres activités dont je leur ferai part en troisième partie de séance. Au préalable cependant, je relis le problème que Tiz avait rencontré à la fin de la dernière séance ("combien de carottes pour faire 5 kg de carottes ?"), que j'avais inscrit au tableau (accompagné de leurs prévisions pour établir des comparaisons). Les apprenties me disent qu'elles ne l'ont pas résolu, alors que Tiz, en souriant, m'avoue avoir tenu il y a peu des carottes dans les mains, mais qu'elle n'y a plus pensé. Je renvoie donc la discussion autour de la résolution du problème à la prochaine séance et distribue dans la foulée les fiches de l'exercice n°1.

J'invite une apprentie à lire l'énoncé à voix haute, mais comme aucune ne s'annonce pour le faire, je prends le parti de le lire moi-même, tout en leur demandant de suivre sur leur feuille. L'attention me paraît plutôt bonne durant cette lecture, mais au terme de celle-ci une apprentie se met à protester en disant qu'elles ont déjà dû résoudre ce problème la fois précédente, Lou renchérissant en déclarant qu'elle en a marre de refaire tout le temps les mêmes exercices. J'essaie alors d'expliquer qu'il ne s'agit pas de résoudre le même problème une nouvelle fois, mais bien de revenir sur les diverses manières qu'elles ont empruntées pour le résoudre, choisir celle qui leur paraît la meilleure, afin de pouvoir la réutiliser de façon efficace, lorsqu'elles se retrouveront en situation d'examen. Je m'empresse alors de dessiner sur le rétroprojecteur les six procédures de résolution qui avaient été envisagées pour pouvoir en discuter avec elles. Comme cela prend pas mal de temps pour le faire, je peste intérieurement de ne pas l'avoir préparé avant la séance. Je suis pourtant assez surpris de ce que les apprenties soient particulièrement attentives tout au long du dessin des six diagrammes.

Au terme de la réalisation des diagrammes, je demande lequel permettra de définir les quantités d'ingrédients qu'il sera nécessaire de préparer pour réaliser les cinq litres de potage. Toutes les apprenties paraissent opter avec détermination pour le deuxième diagramme, l'une

expliquant qu'il s'agit de trouver d'abord les quantités pour un litre, puis de chercher celles qu'il faut pour cinq litres. Je propose donc de remplir le diagramme et demande aux apprenties de me dicter les résultats, en s'aidant au besoin de la calculatrice. Ce sont surtout Jad (en calculant par oral), Co, Jac et Tiz (avec la calculatrice) qui participent au remplissage. A la fin, Mam suggère a contrario d'utiliser plutôt le quatrième diagramme, étant donné que, explique-t-elle, il est préférable de commencer d'abord par la multiplication et de faire ensuite la division. Je propose qu'on essaie de remplir ce quatrième diagramme, afin de vérifier la proposition de Mam. Très vite les apprenties observent que les résultats sont pareils et Mam sourit en découvrant ce fait. Je demande alors si un autre diagramme permet également de produire les mêmes résultats. Le premier et le troisième diagramme sont d'emblée écartés, même si Mam interviendra en disant que (je ne me souviens plus très bien) "c'est à chaque fois pareil quand on divise par deux dans tous les tableaux". Le cinquième quant à lui, est écarté après vérification du premier item ($700 : 5 \times 2$ donne 280 et non pas 1750), alors que le sixième, après vérification de tous les résultats communs, sembler étonner plusieurs apprenties. Sa dira que c'est plus rapide comme cela, mais aucune ne parviendra à en expliciter la raison. C'est finalement Chris, à qui je demande ce qu'il en pense, qui expliquera l'équivalence entre $x 5 / : 2$ et $x 2,5$.

$\div 2$			$\div 2$	$\times 5$		$\times 5$	
700	...		700	...	...	700	...
10	...		10	...	...	10	...
50	...		50	...	...	50	...
350	...		350	...	...	350	...
200	...		200	...	...	200	...

$\times 5$	$\div 2$		$\div 5$	$\times 2$		$\times 2,5$	
700	...	...	700	...	...	700	...
10	...	...	10	...	...	10	...
50	...	...	50	...	...	50	...
350	...	...	350	...	...	350	...
200	...	...	200	...	...	200	...

Après l'examen de ces différents diagrammes, je demande aux apprenties lequel leur paraît le plus efficace pour résoudre des problèmes de recettes (et donc celui qu'elles veulent retenir pour leurs examens). Sans aucune hésitation, elles optent toutes pour leur deuxième, que je leur demande de reporter sur leur fiche, en y inscrivant les quantités figurant dans l'exercice (j'accompagne le tout, en reproduisant l'entier du diagramme que je complète au rétroprojecteur). Je les invite également à remplir les cases des solutions se trouvant au bas de

l'exercice à l'aide des résultats produits par le diagramme. Au fur et à mesure qu'elles terminent de compléter leur fiche, je les ramasse (en vue de contrôler qu'elles ne contiennent pas d'erreur) et leur distribue l'exercice n°2.

A nouveau certaines apprenties protestent, prétextant que l'exercice a déjà été fait la fois dernière. Je réitère donc la raison qui me pousse à en faire une synthèse collective, à savoir la perspective des examens. Je donne toutefois à Lou qui survole ce type d'exercice (j'avais pu le remarquer la fois précédente), une calculette scientifique, en l'invitant à poursuivre son exploration. Je lui donne également une fiche "boîte noire", que j'avais dans mon cahier de préparation, en lui disant qu'elle peut aussi essayer de la compléter, au cas où cela l'intéresse. J'explique également succinctement à Mam (absente la fois précédente) que l'exercice n°2 consiste à remplir des fiches d'inventaire et, plutôt que de relire l'exercice dans son intégralité (j'ai à la fois le souci du temps qui passe et celui de l'attention des apprenties qui risque de s'amenuiser), dessine une des fiches sur le rétro que je complète avec les données de l'énoncé :

Fiche d'inventaire		Purée de tomates
Stock précédent	Prélevé aujourd'hui	Nouveau stock
41 boîtes	2 boîtes	

Je demande ensuite à Mam comment elle pourrait s'y prendre pour compléter la fiche et, assez naturellement, elle propose de procéder par soustraction, soit de faire $41 - 2$, ce à quoi elle donnera d'abord 38, puis 37, puis enfin 39 comme résultat. J'indique cependant que si cet exercice peut sembler relativement facile à résoudre, certaines apprenties ont eu des surprises la fois dernière avec la fiche d'inventaire qui concernait la crème en poudre. J'inscris ainsi au tableau (à côté de 2,300 et 500, les deux quantités en jeu) trois solutions qui avaient été trouvées à cette occasion, à savoir, 1800, 1,800 (en fait, j'aurai plutôt dû noter 1,8 pour être en conformité avec les résultats qui étaient apparus sur la calculette) et 497,7, en précisant que ce dernier avait été perçu comme un résultat assez bizarre par celles qui l'avaient découvert. Immédiatement, Tiz déclare qu'il faut transformer les 2,300 kg en grammes, ce qui donne 2300, puis soustraire 500 à 2300, ce qui donne 1800. Je demande alors comment il est possible de trouver 1,800 et c'est Lou qui, alors qu'elle était en train de compléter la fiche des boîtes noires que je lui avais donnée, prend la parole pour dire qu'il faut affubler le 500 d'un "0" et d'une virgule, puis soustraire 0,500 à 2,300 pour trouver 1,800. Vérification faite sur la calculette, et après que l'on se soit (à peu près) entendu sur le fait que l'on obtient des grammes dans le premier cas et des kilos dans le second, je demande si une apprentie se souvient avoir trouvé 497,7 la fois dernière et comment elle s'y était prise pour le faire. C'est Co qui au bout quelques instants prend la parole en disant (elle se rappelait très bien) qu'elle avait fait $2,300 - 500$, ce qui avait donné 497,7. Je demande alors si quelqu'un peut expliquer l'apparition de ce résultat surprenant. L'attention chez les apprenties me paraît très bonne et c'est Lou qui à nouveau esquisse une réponse. Elle commence par dire que c'est normal, parce dans le dernier calcul, un nombre contient une virgule et l'autre n'en contient pas, alors que dans les deux calculs précédents, soit les deux nombres comprennent des virgules, soit les deux nombres n'en contiennent pas. J'invite Lou à préciser son explication (il me semble également lui avoir donné un contre-exemple, mais je ne me souviens plus lequel) pour que l'on puisse mieux comprendre ce qu'elle veut nous dire. Elle déclare alors que de toute façon, le dernier calcul ne peut pas fonctionner, parce que dans une soustraction, le premier nombre doit toujours être plus grand que le second, sinon, cela devient impossible à faire. Je relève

que l'idée est intéressante et qu'il s'agirait de la vérifier (ce serait bien sûr intéressant de proposer à Lou des soustractions de type $a - b =$ avec $b > a$ à réaliser sur la calculette) et demande si d'autres apprenties ont une explication à donner. Comme aucune ne fait mine de prendre la parole, j'essaie de me lancer moi-même dans des explications, en référant (plus ou moins) à la première idée de Lou, pour indiquer que dans le premier calcul, on a opéré une transformation de la première quantité des kilos en grammes, afin de pouvoir soustraire des grammes à des grammes (et supprimer les virgules) et que l'on a fait l'inverse dans le deuxième (transformation des grammes en kilos pour pouvoir soustraire des kilos à des kilos, avec apparition d'une virgule). Je déclare alors (de façon plutôt péremptoire et pas entièrement correcte au demeurant) qu'il n'est pas possible de soustraire sans autre des kilos à des grammes ou des grammes et des kilos et qu'il s'agit là d'un piège favori de ceux qui construisent les épreuves d'examens (et qu'il s'agit donc d'apprendre à l'éviter). J'entends au même moment Tiz dire à Jaq que c'est pourtant bien ce qu'elle avait dit au débit. Je conseille donc aux apprenties de bien prendre garde à chaque fois qu'elles se retrouvent face à un problème où elles doivent opérer avec des quantités d'ingrédients, en vérifiant que ces quantités soient bien exprimées à l'aide de la même unité et d'opérer les transformations nécessaires si tel n'est pas le cas (ne connaissant pas les compétences des apprenties, outre celles qui ont pu apparaître dans le cadre des séances, à établir de telles transformations).

Je demande alors aux apprenties de remplir l'ensemble des fiches d'inventaire figurant dans l'exercice n°2 et je les accompagne pour le faire au rétroprojecteur en remplissant les tableaux qui suivent :

41 boîtes	2 boîtes	39 boîtes
2,300 kg	0,500 kg 500 g	1,800kg
103 kg	7 kg	96 kg
45 litres	3,5 litres	41.5 litres
48 paquets	12 paquets	36 paquets
81 kg	1,5 kg	79,5 kg

Dès que toutes les fiches sont remplies, je les ramasse pour correction. Lou me dit qu'elle ne parvient pas à résoudre la deuxième boîte noire de sa fiche et je lui réponds qu'on prendra un moment en fin de séance pour en parler (j'ai vu après coup, cf. annexe 2, qu'elle a trouvé l'opérateur et les résultats corrects, sauf le dernier, à la première boîte noire et qu'elle a calculé les écarts entre les nombres à l'entrée et les nombres à la sortie sur la seconde boîte noire) . J'informe alors les apprenties du fait que je leur proposerai une évaluation la fois prochaine sur les deux types d'exercices que nous avons examinés aujourd'hui, à savoir les "problèmes de recettes" et les "problèmes de fiches d'inventaire" (certaines réagissent, manifestant un certain étonnement à ce que je leur fasse passer des épreuves). Je leur propose deux fiches d'exercices pour s'y préparer et suis plutôt étonné que toutes (Lou compris) veuillent les prendre. Je leur dis que si elles ont des questions au sujet de la résolution de ces exercices, elles peuvent interpeller Chris ou bien alors me poser des questions par courriel (je note mon adresse au tableau, mais je ne crois pas souvenir que l'une d'elles en ait pris note).

Une fois les feuilles d'exercices distribuées, j'indique aux apprenties qu'il me reste encore quatre points à évoquer avec elles avant de clore la séance (Jad qui m'a déjà indiqué à deux reprises que l'heure de la fin de la séance a passé, Chris lui ayant répondu que ce n'est pas elle la gardienne du temps, dit qu'elle a aussi des points à dire). Je commence par demander à Co si elle a pu repérer, aux cours des deux semaines qui ont précédé notre cinquième rencontre,

un problème en cuisine. Elle me répond par la négative, disant qu'elle a oublié de le faire. Je lui réponds que ce n'est pas grave, mais l'invite à s'en charger et à ne pas l'oublier à nouveau pour la fois prochaine (je vois Chris qui prend note de la tâche pour s'en rappeler).

Je poursuis en disant que, comme je l'avais promis la fois dernière, j'ai amené des livres concernant Pythagore. Je commence par parler du livre de Deledicq, intitulé : « Pythagore et Thalès » (Deledicq & Casiro, 2009) que je donne en prêt à Jaq. Les apprenties me demandent de quelle nationalité étaient ces deux mathématiciens et je réponds qu'ils étaient grecs tous les deux, nés plus de 500 ans avant Jésus Christ. Je parle ensuite du « Théorème du Perroquet » (Guedj, 1998), en disant qu'il s'agit d'une sorte d'enquête policière qui parle de mathématiques et qu'un chapitre entier du livre est consacré à Pythagore. Le livre ne trouve toutefois pas preneuse. J'évoque après le « Théorème de Fermat » (Singh, 1998), montrant la photo de Wiles jeune, et précisant que l'histoire raconte la résolution, par un mathématicien, d'un problème fameux qui avait un rapport étroit avec Pythagore, et qui avait occupé toutes les premières années de la vie de ce mathématicien. Là non plus, le livre ne trouve pas preneuse. Enfin, je montre un autre livre de Deledicq, intitulé : « Histoire de maths » (Deledicq & Izoard, 2000), qui raconte, sous forme de BD, des extraits de la vie de plusieurs mathématiciens dont je cite les noms : Archimède, Omar Kahyam, Toricelli, Bruno,... Une apprentie me fait remarquer qu'il y en a un qui est italien (Toricelli), alors que Lou me demande de lui prêter le livre, parce qu'elle aime bien les BD. Je donne encore à Co, qui m'en avait fait la demande, un article sur Pythagore, tiré de Wikipédia.

Je continue en rappelant aux apprenties que je leur avais dit, lors de notre deuxième rencontre, que j'étais très intéressé par ce qu'elles faisaient en mathématiques. Je leur raconte qu'à cet effet, je rédige, après chaque séance, un compte-rendu en forme d'histoire de ce qui s'y est passé. Je leur distribue un exemplaire du compte-rendu de la séance du 3 novembre (un pour deux, je n'en avais tiré que quatre) et je les vois se précipiter dans la lecture du texte. Elles semblent ne pas pouvoir croire que je puisse faire un truc pareil et sont très étonnées de se retrouver dans l'histoire. Jad, par exemple, qui voit qu'elle apparaît au tout début (elle me disait "Oh non, pas encore les maths") rigole beaucoup et me dit quelque chose comme : "Ah et bien là, on voit que vous n'êtes pas seulement un prof de maths". Plusieurs me demandent si j'ai fait des comptes rendus de chacune des séances précédentes. Lou me dit qu'elle en veut un exemplaire de chaque. Chaque apprentie, à l'exception de Sa qui, feuilletant le compte-rendu trouve qu'il contient "beaucoup de mots", désire en recevoir un, de même que Chris et Ly (et j'irai donc, une fois la séance terminée, faire cinq autres tirages, afin que tout le monde, Sa comprise, puisse en obtenir un exemplaire). Lou dira encore à propos de ce récit, qu'elle sait très bien que tout le monde ici au CFPS écrit des choses au sujet des apprenties pour les colloques et je ne pourrai bien sûr pas m'empêcher de lui répondre que les histoires des séances que je rédige ne sont pas destinées à des colloques.

Enfin, je termine en disant aux apprenties que si elles n'ont pas, depuis trois séances, pu ramener de problèmes en cuisine, j'en ai, de mon côté, rencontré un important, à l'occasion de l'anniversaire de mes deux filles et que j'aimerais leur en faire part. Je leur raconte alors (il s'agit d'une situation réelle, vécue le week-end précédent la séance) que nous avions trente invités et que nous souhaitions préparer à leur intention de la fondue bressane (j'ai dû expliquer ce qu'était la fondue bressane qu'elles ne connaissaient pas). Nous nous sommes alors demandé, ma femme et moi, quelle quantité de poulet il fallait acheter et nous avons décidé d'en prévoir 200 grammes par personne. J'explique que nous avons multiplié 30 par 200 et que nous avons trouvé 6000 grammes, soit 6 kilos, puis qu'en se rendant au magasin, ma femme a finalement décidé d'en prendre un kilo de plus, parce qu'elle a repensé au fait que certains invités étaient de gros mangeurs. Je précise que j'ai passé ensuite une bonne partie du samedi après-midi à découper le poulet et que le lendemain, il nous est resté une très grande

quantité de poulet sur les bras. J'indique que je serai donc très intéressé à ce que les apprenties (et Chris par la même occasion) puissent me donner conseil et me dire comment j'aurai pu mieux effectuer mes précisions. L'attention, malgré le fait que l'heure est largement dépassée, est à son comble. Certaines apprenties me disent que je n'aurai dû prévoir que 100 grammes par personne, d'autres interpellent Chris pour lui demander si c'est bien 350 grammes qu'il faut prévoir pour une assiette complète. Je dis qu'il y avait bien sûr encore des amuse-bouche, des salades, des mayonnaises, du fromage et du dessert. Une apprentie me dit que s'il y avait encore tout cela, c'était beaucoup trop de compter 200 grammes de viande par personne... Au bout de quelques instants, j'interromps les échanges, en leur disant que je serai vraiment très content de pouvoir bénéficier de tous leurs conseils et leur distribue une fiche sur laquelle j'ai rédigé mon problème, avec de la place pour qu'elles puissent les inscrire. Toutes acceptent de prendre la feuille et la séance se termine, non sans que je pense à demander à Lou si elle veut que l'on regarde brièvement le deuxième exercice des boîtes noires sur sa feuille et qu'elle me réponde que l'on pourra plutôt voir tout cela la fois prochaine...

Narration de la 6^{ème} séance du 01.12.11

Il s'agit de la sixième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Les sept apprenties sont présentes, soit : Mam, Jad, Tiz, Jac, Lou, Co et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa.

Je sais, pour en avoir discuté avec Ly pendant la pause, que contrairement à la fois dernière, les apprenties ont anticipé ma présence dans la classe à partir de 10h00 (j'avais en outre passé dans la classe la semaine précédente, soit le 24 novembre, peu avant midi, pour leur rendre les fiches comprenant les exercices 1 et 2 de l'examen corrigées, afin qu'elles puissent les utiliser pour s'entraîner en vue de l'épreuve d'évaluation de ce matin). Je sais aussi que Chris a vérifié que les tâches qui étaient à faire en cuisine (problème des 5 kg de carottes notamment) ont bel et bien été accomplies.

Lou arrive avec un peu d'avance et s'installe dans un fauteuil à l'entrée de la classe. Je pense en profiter pour discuter avec elle de la fiche "boîte noire" qu'elle a commencé la fois dernière (cf. annexe 1). Je m'approche et entame la conversation, mais je m'aperçois très vite que j'empiète sur la/sa pause. Je préfère donc me retirer en lui disant que l'on reparlera de cette fiche pendant le cours, tout en précisant que je voulais simplement profiter d'un moment où il était plus facile de converser à deux que lorsque tout le groupe d'apprenties est présent. Mais Lou a déjà entamé une autre conversation avec Sa, arrivée entre temps, et à laquelle, faute de savoir/pouvoir m'exprimer en langue des signes, je n'ai pas accès. Les autres apprenties du groupe arrivent l'une après l'autre. Mam me dit en souriant qu'elle est contente de me revoir, mais pas pour faire ce pourquoi je suis là (à savoir pour faire des maths). Jad me refait le coup du "oh non pas les maths" (c'est devenu un jeu, je pense). Jaq, Co, Lou et Sa s'installent à leur place, suivies de Tiz qui arrive en dernier.

Je commence en réitérant mon plaisir d'être à nouveau présent pour une sixième séance, tout en indiquant que ce sera l'avant-dernière avant Noël. Certaines apprenties comprennent néanmoins qu'il s'agit de l'avant dernière fois que je viens dans leur classe, ce qui fait que je me vois contraint d'expliquer que ce n'est pas ce que j'ai voulu dire et que c'est bien d'ici à Noël qu'il ne restera plus qu'une seule rencontre, soit le jeudi 15 décembre prochain. Je dévoile ensuite le programme du jour qui comprend un retour sur les problèmes rencontrés en cuisine, l'épreuve d'évaluation, ainsi qu'une activité de transformation d'unités (kilos en grammes et grammes en kilos).

Comme il n'y a pas de réaction particulière au fait qu'une évaluation aura lieu ce jour, je passe sans autre au problème des carottes ("Combien faut-il de carottes pour faire 5 kg ?" que j'ai noté au tableau avec les prévisions de chaque apprentie et celle de Chris) que je relis, avant de demander s'il a pu être résolu. Les apprenties déclarent tour à tour qu'elles n'ont pas essayé d'y apporter une solution, tandis que Chris, de son côté, déclare qu'il a précisément effectué une commande de carottes à cet effet (je plaisante en disant qu'il va y avoir des carottes au menu durant toute la semaine prochaine, mais Chris me répond que 5 kg de carottes, cela part vite). Il explique que les carottes reçues étaient pour une fois très petites et qu'il en a dénombré 101, soit une de plus que la prévision effectuée par Co (100). Je m'approche donc de Co pour la féliciter et l'inviter à lever son bras en signe de victoire, tandis que Lou proteste un peu, en disant qu'on avait parlé de carottes moyennes et que celles reçues par Chris étaient vraiment petites. Je lui demande combien l'on pourrait dès lors compter de carottes moyennes pour produire 5 kg et elle répond 50 (soit la moitié de 100), ce qui entraîne un signe de contentement chez Jad qui avait proposé ce nombre comme prévision.

Je demande ensuite à Co si elle a pu repérer un problème en cuisine (comme nous en avions convenu la fois dernière), mais elle répond à nouveau par la négative en disant qu'elle a

oublié. Je lui demande si la tâche est trop difficile et s'il faut que je demande à une autre apprentie de s'en charger (Mam, Jad et Tiz protestent en disant qu'elles s'en sont bien acquittées tour à tour), mais Co répond qu'elle veut bien le faire d'ici à la fois prochaine.

J'enchaîne ensuite (toujours dans le cadre des problèmes rencontrés en cuisine) en leur disant que j'ai été très impressionné par l'organisation dont elles avaient pu faire preuve à l'occasion de la journée des parents (qui avait eu lieu le samedi précédent) pour préparer un repas pour plus de deux cent personnes (j'avais d'abord pensé évoquer cette journée en tout début de séance, mais comme je l'ai un peu oublié, je le fais maintenant). Je demande s'il y avait bien plus de deux cent personnes et une apprentie répond qu'il y en avait 250 (je note ce nombre sur le rétroprojecteur). Chris intervient pour préciser qu'il y en avait bien 250 annoncées, mais qu'il y eu quelques désistements de dernière minutes et que l'on peut donc en compter 220 (que je note aussi au rétro). Je poursuis en affirmant que cela doit être toute une organisation pour prévoir combien il faut commander de nourriture pour autant de monde et une apprentie renchérit en disant qu'il faut être très précis pour que tout soit prêt au bon moment. J'acquiesce en disant que l'organisation en cuisine doit assurément être très bien préparée et reviens sur la commande de nourriture. J'écris, en sollicitant l'aide des apprenties) les différents ingrédients qui composaient le menu sur le rétroprojecteur en commençant par le "rôti braisé" (quelqu'un précise que c'était du filet), puis les pâtes (je me trompe en disant pommes de terre, mais suis immédiatement repris), puis les tomates. Une apprentie évoque également des croûtons, une autre des champignons, Chris précise qu'il s'agit d'une sauce grand-mère qui contient aussi des oignons "sauce" (il fait deviner le mot aux apprenties et l'une d'entre elles m'informe que ce sont des petits oignons, comme ceux que l'on utilise dans la raclette et qu'ils sont tout ronds ; une autre, à sa suite, dit qu'ils sont carrés, une autre poursuit en disant qu'ils sont triangles ; je lance à tout hasard que ce n'est pas possible qu'ils soient ronds, carrés ou triangles, parce que cela voudrait dire qu'ils sont tout plats, mais personne ne semble saisir ce que je veux dire par là). Je dis que je crois me rappeler qu'il y avait aussi des épinards et Co confirme, mais d'autres ne semblent plus bien se souvenir. Chris déclare qu'il y avait bel et bien des épinards avec les tomates et que la recette s'appelle (il fait à nouveau deviner aux apprenties) des tomates florentines.

Revenant au rôti, je demande aux apprenties comment se passe une commande pour autant de personnes. Lou dit que l'on compte 120 (j'ai d'abord noté 100 sur le rétroprojecteur, mais je crois bien qu'elle avait dit 120) grammes par personne et que l'on multiplie 120 par le nombre de personnes attendues, soit 220. Mam se dit qu'elle devrait pourtant savoir, vu que c'est elle qui s'est occupée des rôtis. En l'entendant, je l'invite à nous faire part de ce dont elle se souvient et elle répond qu'elle se rappelle qu'elle devait découper les rôtis en réalisant 30 tranches par rôti. Je demande alors combien de rôtis avaient été achetés à cette occasion et quelqu'un répond 20. Je poursuis en sollicitant les apprenties sur la manière de s'y prendre pour savoir qu'il faut commander 20 rôtis pour 220 personnes et c'est Chris qui prend la parole pour expliquer que l'on passe bien par le calcul du nombre de grammes par personnes, multiplié par le nombre de personnes. Il précise que l'on compte plutôt 150 grammes pour le rôti, parce que le rôti perd du poids à la cuisson (ce qui donne environ 120 grammes une fois cuit). Il explique aussi qu'il faut évaluer le poids d'une tranche, pour savoir combien en découper par rôti (après coup, je ne me rappelle plus bien l'ensemble de ce qu'il a expliqué). Une apprentie dira encore que l'on utilise ce qui reste (les tranches en trop) pour les suppléments (deuxième service). Je demanderai tout à la fin si les prévisions ont été bonnes et si les apprenties ont été mises à contribution pour les réaliser. On me répondra que les prévisions ont été plutôt bonnes (500 à 600 grammes en trop qui ont été mises au frigo et utilisées pour le repas du lundi) et que ce sont en règle générale plutôt les MSP qui s'occupent du calcul des quantités à prévoir.

Le temps passant et l'attention faiblissant passablement, je laisse de côté le calcul des quantités des autres ingrédients du repas de la journée des parents pour reparler succinctement des conseils que je leur avais demandés de m'adresser, la fois dernière, pour la réalisation de la fondue bressane (où, à l'occasion de l'anniversaire de mes filles, les quantités de poulet commandées avaient fortement dépassé les quantités de poulet absorbées). Aucune apprentie ne s'y était finalement mise, sauf Jad qui, cherchant sa feuille sans parvenir à remettre la main dessus, me dit qu'elle avait indiqué : " Ne pas se rendre le ventre vide à la boucherie". Je la remercie du conseil en lui disant que j'essaierai de m'en souvenir et j'indique aux autres apprenties que je passerai par le courriel pour solliciter d'autres conseils de leur part d'ici à la fois prochaine (Jad, encore elle, me rappelle que son courriel a de la peine à recevoir ce qui concerne les mathématiques).

Je passe ensuite au déroulement de l'épreuve d'évaluation, en rappelant qu'il s'agit tout à la fois d'apprécier leurs capacités à adapter des recettes pour un certain nombre de personnes et à remplir des fiches d'inventaire. Je montre un exemplaire de l'épreuve, en disant qu'elle est composée de quatre exercices et d'une question bonus. J'indique que chaque exercice comprend un certain nombre de points et que c'est une chose important à regarder dans le cadre d'une épreuve ou d'un examen, afin de choisir en priorité ceux qui peuvent rapporter le plus (Mam, en cours d'épreuve, me dira exactement le contraire : elle restera longtemps sur l'exercice n°3 qui vaut 2 points, au lieu de passer à l'exercice n°4 qui en vaut 6, parce qu'elle pense que l'exercice à 2 points est plus à sa portée). En distribuant les épreuves, je précise qu'il est possible d'utiliser toutes les fiches d'exercices qu'elles ont remplies jusqu'ici, que la calculette est à leur disposition et que je souhaite qu'elles emploient un stylobille afin de garder la trace de leurs calculs et que je puisse, le cas échéant, utiliser ces traces pour leur ajouter des points. Lou m'interpelle durant la distribution pour me demander si j'ai photocopié les narrations des premières séances et je lui réponds que je ne l'ai fait que pour celle de la fois précédente et que je la lui donnerai, une fois l'évaluation terminée.

La lecture de l'ensemble des cinq exercices ne suscitera pas de questions, une bonne partie des apprenties ayant déjà démarré la résolution des problèmes en cours (Lou le faisant même avant que je ne commence à lire). Au terme de cette lecture, toutes les apprenties, à l'exception de Sa qui a rejeté sa feuille sur la table, se mettent à la tâche, le silence recouvrant assez soudainement l'ensemble de la classe. Ly s'approche alors de Sa pour procéder à une relecture des consignes et lui indiquer que les exercices qui figurent dans l'épreuve sont semblables à ceux qu'elle a réalisés en guise de préparation. Sa récusé pourtant la comparaison, en désignant les nombres des exercices figurant sur les deux fiches, pour montrer qu'ils sont bel et bien différents. Et ce n'est qu'après un bon moment de "négociation" avec Ly, qu'elle parviendra finalement à entrer dans l'épreuve, par l'intermédiaire de l'exercice n°2, concernant les fiches d'inventaire.

C'est Lou qui termine en premier la réalisation de l'épreuve. Je lui donne en échange la fiche des boîtes noires, en lui montrant comment compléter la deuxième boîte (soit en multipliant par deux et en ajoutant trois). Elle ne fait toutefois que compléter les trois résultats de la boîte (cf. annexe 2) et ne va pas plus loin (elle n'avait plus très envie). Je lui passe ensuite la narration de la séance précédente, dont elle ne fait pas la lecture sur le moment, préférant se mettre à dessiner.

Jad est la deuxième apprentie à rendre son épreuve. Elle le fait en demandant à Chris si elle peut quitter la salle de classe pour se rendre en cuisine (elle était de service le midi). Chris lui répond que ce n'est pas encore l'heure et j'en profite pour lui tendre la narration de la séance précédente, qu'elle accepte avec le sourire, entamant sa lecture en précisant à l'intention de Chris qu'elle n'aimait pas lire auparavant, mais qu'elle a changé depuis.

Jaq est la troisième apprentie à rendre son évaluation. Elle désigne l'exercice n°4, en me disant qu'elle a "fait plus" et en sollicitant mon approbation. Je lui demande, en guise de réponse, si elle a fait référence aux exercices de préparation que j'avais donné à faire, mais Jaq me répond qu'elle n'a pas eu le temps de les effectuer. Je lui tends à son tour la narration de la séance précédente qu'elle accepte volontiers.

Sa est la quatrième à apprentie à rendre son évaluation. Tous les exercices ont été complétés, mais il a fallu à chaque fois (soit Ly, soit moi) l'encourager à démarrer leur résolution. C'est un peu comme si elle avait besoin de savoir si ce qu'elle envisageait de faire pour résoudre l'exercice était correct, avant de se laisser aller à sa réalisation. Sa décline la narration de la séance précédente que je lui propose.

Il sera nécessaire de prolonger la séance pour que Co, Mam et Tiz terminent leur évaluation. Co a fait beaucoup d'essais pour trouver la solution de la question bonus (partage du plat à gratin) qu'elle a finalement découverte (elle affichera un grand sourire quand le dénombrement des parts aboutira enfin à 25). Mam est longtemps resté bloquée sur l'exercice n°2 dont elle n'a pu entamé la résolution que grâce à la fiche (comportant le même exercice que nous avons complété la fois dernière) qu'elle a emprunté à Jad (vu qu'elle ne retrouvait pas la sienne dans ses affaires), puis sur l'exercice n° 3 qu'elle ne parvenait pas à résoudre. Quant à Tiz, c'est sur l'exercice n°4 qu'elle est longtemps demeurée, sans parvenir à aboutir. Elle cherchait à utiliser la feuille d'exercices qu'elle avait complétée en guise de préparation, mais elle ne parvenait pas à se rappeler, à défaut de l'avoir notée, la manière dont elle s'y était prise pour les résoudre. Toutes les trois acceptent la narration de la séance précédente que je leur propose.

La séance se termine alors sans que nous n'ayons finalement eu la possibilité de parler de transformation d'unités et sans qu'aucune évocation des ouvrages - « Pythagore & Thalès » (Deledicq & Casiro, 2009) et « Histoires de maths » (Deledicq & Izoard, 2000) - empruntés la fois dernière ne se manifeste...

Annexe à la séance du 01.12.11: fiche⁴ "Applications" complétée par Lou

THÈME 9 – APPLICATIONS F3

Lou

Boîtes noires I

Cette boîte noire effectue toujours la (les) même(s) opération(s) sur les nombres qu'on y fait entrer.

Complète-la.

2	→		→	6
3	→		→	9
7	→		→	21
10	→		→	30
54	→		→	162
92	→		→	276

Ici, il s'agit d'une autre boîte noire. Quelle(s) opération(s) peut-elle bien effectuer?

2	→		→	7
4	→		→	11
5	→		→	13
8	→		→	19
10	→		→	23
6	→		→	15

Cherche maintenant ce que font les boîtes noires suivantes:

12	→		→	60
17	→		→	85
9	→		→	...
0	→		→	...
25	→		→	...
...	→		→	5

5	→		→	14
10	→		→	29
12	→		→	35
3	→		→	...
100	→		→	...
...	→		→	5

1	→		→	1
10	→		→	91
100	→		→	991
4	→		→	...
...	→		→	11
...	→		→	81

1	→		→	1
2	→		→	4
7	→		→	49
15	→		→	...
5	→		→	...
...	→		→	100

5	→		→	23
2	→		→	2
10	→		→	98
3	→		→	...
9	→		→	...
20	→		→	...

3	→		→	30
10	→		→	1003
5	→		→	128
0	→		→	...
13	→		→	...
24	→		→	...

68

⁴ extraite de Chastellain & Jaquet (2001b, p.68).

Narration de la 7^{ème} séance du 22.12.11

Il s'agit de la septième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Les sept apprenties sont présentes, soit : Mam, Jad, Tiz, Jac, Lou, Co et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa.

Du fait que la séance du 15 décembre n'a pas eu lieu (Chris et les apprenties devant rester en cuisine pour préparer le repas de fin d'année du personnel), j'ai demandé à Chris durant la semaine si je pouvais passé ce jeudi matin, dernier de l'année, pour rendre les épreuves d'évaluation (afin de ne pas les laisser traîner jusqu'en janvier). C'était d'accord pour Chris qui, à moins d'un changement de dernière minute, m'a dit qu'il y aurait bel et bien des cours ce jeudi 22 décembre et que je pouvais passer vers 10h00.

Avant de démarrer, je demande à Chris de combien de temps je dispose pour rendre et discuter des évaluations avec les apprenties. Il me répond que je peux seulement y aller, vu qu'il a prévu de visionner des photos et de passer un DVD en fin de matinée. Je demande à Jac et à Lou si elles ont ramené le livre que je leur avais prêté : Jac me dit qu'elle a laissé dans son appartement, qu'elle ne l'a pas vraiment lu, mais qu'elle me le ramènera l'après-midi quand elle reviendra au château pour les cours de culture générale (je lui dis qu'elle peut éventuellement le conserver pour les vacances, mais elle me répond que non, qu'elle préfère me le rendre ; "une autre fois", dit-elle). Lou se met à chercher le livre dans la classe et finit par le retrouver, me disant qu'elle l'a lu, mais que cela ne l'a pas trop intéressée. Co, de son côté, a pensé à ramener la calculatrice qu'elle m'avait empruntée, mais ne me parle pas de ce qu'elle a pu ou n'a pas pu en faire.

Je commence par dire aux apprenties que ce n'était pas vraiment prévu que je sois là aujourd'hui et que je ne vais donc pas rester trop longtemps, mais que j'ai demandé à Chris de pouvoir venir pour leur rendre leurs évaluations. Au préalable, je leur demande si elles ont bien reçu le courriel que je leur ai envoyé (comprenant le problème de la fondue bressane), vu qu'aucune d'entre elles ne m'a renvoyé (comme je l'espérais) des conseils pour mieux faire une fois prochaine. Chris et Ly déclarent l'avoir bien reçu, tandis que les apprenties ont un peu plus de mal à le dire.

Je passe ensuite sans autre au retour des épreuves d'évaluation. J'ai écrit sur le tableau les deux thèmes qui étaient traités durant l'épreuve : la transformation d'une recette et le remplissage d'une fiche d'inventaires. Je leur dis que, suite au corrigé de l'épreuve, j'ai l'impression que toutes savent assez bien remplir une fiche d'inventaire (thème n°2), mais que deux d'entre elles n'ont pas encore vraiment compris comment transformer les quantités figurant dans une recette (thème n°1). Elles me demandent de qui il s'agit et je leur réponds qu'elles vont le découvrir de suite.

Je distribue les épreuves dans l'ordre où les apprenties sont assises, c'est-à-dire en commençant par Sa, puis par Co, puis par Lou, puis par Jac (qui me dit que ça ne l'étonne pas de recevoir un 3, parce qu'elle n'avait pas très envie de faire l'épreuve le jour où elle a eu lieu), puis par Tiz (qui n'en croit pas ses yeux, lorsqu'elle apprend qu'elle a fait 6), puis par Jad (à qui je conseille d'un peu mieux relire son travail), puis enfin par Mam (à qui je dis qu'elle fait partie de celle qui n'ont pas encore bien compris les transformations de recette). J'engage ensuite une brève discussion sur la ou les manières dont il serait possible de s'y prendre pour aider Mam et Jac à mieux s'approprier les transformations de recette. Je dis que, de mon côté, je suis prêt à donner un coup de main et que je consens même à leur donner la possibilité d'améliorer leur note en janvier, en leur proposant une nouvelle épreuve. Chris dit qu'il peut aussi prendre du temps pour les aider en cuisine. Co et Lou se proposent pour aider Mam et Jac et je leur demande alors comment cela peut se passer très concrètement. Lou répond que

Mam et Jac peuvent venir vers elle avec l'épreuve et les exercices de préparation et qu'elle est prête à leur expliquer comment s'y prendre.

Je profite de la proposition de Lou pour l'inviter à démarrer ses explications, mais certaines apprenties protestent, rappelant qu'elles ont des photos et un DVD à regarder. Je réponds que je suis bien au courant, vu que Christophe m'en a parlé avant la séance, mais que je pensais quand même engager la correction, tout en leur laissant après coup du temps pour visionner les photos et le DVD. Je finis par leur dire que l'on regarde au moins le premier exercice, ce à quoi elles finissent par consentir, et demande à Lou de le relire.

Au terme de la lecture, je vois Lou réfléchir, puis expliquer que comme la recette est pour quatre personnes et qu'il faut la prévoir pour douze personnes, il faut multiplier les quantités figurant dans la recette par 3, ce que je représente au tableau en notant :

	$\textcircled{\times 3}$	
4 personnes		12 personnes

Elle poursuit en expliquant qu'il suffit ensuite de multiplier les deux verres de pamplemousse par 3 pour trouver six, les six verres de jus d'abricot par 3 pour trouver 18 et les deux cuillères à café de sirop de grenadine par 3 pour trouver à nouveau six (elle remarque ici qu'elle s'est trompée, ayant inscrit 9 sur sa feuille). Au fur et à mesure des explications de Lou, je note au tableau :

	$\textcircled{\times 3}$	
2 v. pamplemousse		6 v. pamplemousse

	$\textcircled{\times 6}$	(je me suis trompé et j'ai noté $\times 6$ au lieu de $\times 3$)
6 v. abricot		18 v. abricot

(Jac ici proteste, car elle me dit qu'elle a bien noté 18 alors que je ne lui ai rien compté aucun point pour l'exercice, ce qui fera que je reviendrai à la fin de la séquence pour lui rajouter un point)

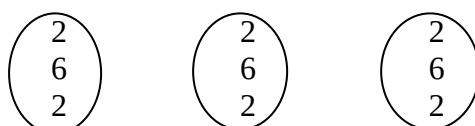
	$\textcircled{\times 3}$	
2 cc. grenadine		6 cc. grenadine

Avant que n'aie le temps de ne rien dire, plusieurs apprenties (dont Tiz et Jac) s'écrient à l'intention de Lou : "mais il vient d'où ton 3" ? Lou essaie de leur répondre en expliquant que c'est pour passer de quatre à douze, mais comme ses propos ne semblent pas convaincre ses collègues, je l'invite à venir au tableau pour préciser ce qu'elle veut dire. Lou dessine alors trois tables avec quatre ronds (pour signifier des personnes) autour. Les autres apprenties disent qu'elles ne voient toujours pas pourquoi elle en fait trois. Lou répond qu'elle aurait tout aussi bien pu dessiner deux tables avec six personnes et que cela serait bien pareil. Je suggère à Lou de reprendre ce qu'elle voulait dire en utilisant des verres plutôt que des tables. Elle n'a pas vraiment l'air de comprendre, mais répond néanmoins à ma suggestion, en dessinant

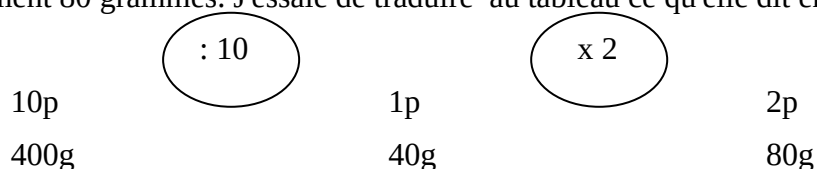
quatre ronds sur chaque table, (soit un en face de chaque personne). La situation est un peu bloquée, Jaq demande à Lou de mieux expliquer, Lou lui répond qu'elle n'a qu'à faire un effort pour mieux comprendre et je me rends donc au tableau en disant à Lou qu'il n'est pas si facile que cela de s'expliquer pour faire comprendre aux autres ce que l'on veut dire.

J'essaie cependant à mon tour de reprendre une explication (en m'appuyant sur le dessin de Lou), en disant que comme la recette est pour quatre personnes et qu'on veut la réaliser pour douze personnes, on va prendre quatre, puis encore quatre, ce qui fait huit, puis encore quatre, ce qui fait douze, et en précisant que c'est là d'où vient le "3" proposé par Lou. Comme les apprenties ne semblent pas mieux comprendre ce que je veux dire par là, c'est Ly qui vient à la rescousse, en me suggérant de traduire tout cela avec des petites cartes, parce qu'elle pense que "visuellement" cela pourrait mieux passer. Comme à mon tour je ne semble pas bien saisir ce qu'elle veut dire, elle s'adresse aux apprenties en leur disant que c'est comme si l'on devait distribuer des cartes à douze personnes au lieu de quatre (je n'ai plus bien en tête l'explication exacte qu'elle a donnée). Elle explique aussi qu'à son avis la meilleure façon de procéder pour transformer une recette, c'est de chercher d'abord ce qu'il faut comme quantité pour une personne, puis de chercher ensuite ce qu'il en faut pour douze. L'intervention de Ly me permet alors de tenter une nouvelle explication (les apprenties me paraissent malgré tout très attentives tout au long de ces différentes explications, les photos et le DVD semblent oubliés, tout au moins pour l'instant). Je dessine au-dessus de chaque tableau une forme, ovale, en disant que c'est pour signifier un pot de cocktail. Lou me reprend en disant qu'il faut utiliser un shaker et je réponds qu'il faut donc s'imaginer des shakers. Je dis que l'on va donc utiliser un shaker pour les quatre personnes de la première table, un autre shaker pour les quatre personnes de la deuxième table et un troisième shaker pour les quatre personnes de la troisième table, soit douze personnes en tout. Je dessine alors un 2 dans chaque shaker pour représenter les verres de pamplemousse, un 6 pour représenter les verres de jus d'abricot et un nouveau 2 pour représenter les cuillères de grenadine.

Je montre qu'il y a bien à chaque fois trois 2, trois 6 et trois 2 et invite les apprenties à les additionner pour trouver respectivement 6, 18 (c'est Jac qui livrera la réponse qui figure sur sa feuille et qu'elle sait correcte) et 6.



Je demande alors aux apprenties si elles ont pu suivre ce que j'avais tenté de leur montrer et c'est Mam qui prend la parole pour me demander si l'on ne peut pas en faire un plus dur (i.e., un exercice plus difficile). Je suis bien sûr plutôt étonné de la demande de Mam (je m'attendais plutôt à voir revenir le visionnement des photos et du DVD dans l'échange), mais j'en profite pour enchaîner avec la correction de l'exercice n°3 (cf. annexe 1) dont je relis le premier énoncé. Je note au tableau 10p pour dix personnes, 2p pour deux personnes et 400g pour quatre cent grammes. Jad propose de diviser les 400 grammes par 5 pour trouver la quantité de pâte brisée pour 2 personnes (je note sa proposition au tableau) et énonce 80 grammes comme résultat (alors même qu'elle avait trouvé 0,05 g comme résultat durant l'épreuve). Les autres apprenties ne semblent cependant à nouveau pas bien comprendre d'où peut provenir ce 5. Lou enchaîne alors en disant que, de son côté, elle a divisé par 10 pour chercher ce qu'il faut compter pour une personne et trouvé 40, puis multiplié par 2 pour obtenir également 80 grammes. J'essaie de traduire au tableau ce qu'elle dit en inscrivant :



Je reprends alors à mon compte l'explication de Lou, mais Mam m'interrompt pour me dire que $10 : 10$, cela ne fait pas 1, mais 0. Je l'invite donc à vérifier sur la calculette et elle est très surprise de voir que cela fait bien 1 (je crois me rappeler que j'ai repris très brièvement l'idée des cartes évoquée par Ly pour dire que si l'on a dix cartes et qu'on les partage entre dix personnes cela en fait bien une par personne). Je reprends le raisonnement de Lou à l'aide du schéma sur le tableau et je me rends compte que Jac paraît bien comprendre le passage du quarante grammes pour une personne qu'il s'agit de doubler pour trouver le nombre de grammes (80) pour deux personnes. J'indique enfin que la proposition de Lou, soit de passer par la quantité qu'il faut pour une personne, est précisément celle que Ly suggérait d'utiliser auparavant pour l'exercice du cocktail tropical et que Jad, de son côté, a trouvé une solution plus rapide ($: 5$) qui permet d'aboutir au même résultat.

Je suggère encore d'éprouver la manière de faire de Lou sur le deuxième énoncé de l'exercice 3, en invitant les apprenties à le relire. Je demande pour combien de personnes la recette est prévue. Une apprentie répond 4, une autre 6, une autre encore 15. Je propose donc à Mam de relire le problème à haute voix, mais elle préfère que ce soit moi qui le fasse. Je demande à Jac si elle veut bien le faire, mais elle lâche sa feuille sur sa table. Mam dit alors que la recette est pour six personnes, ce que je note au tableau sous la forme de 6p. J'écris 1p un peu à côté, 1200g en dessous de 6p. Mam indique qu'il faut diviser par 6 pour trouver la quantité pour une personne, ce qu'elle opère sur la calculette pour trouver 200. Je demande ensuite pour combien de personnes il faut prévoir du fromage et Mam répond 4 que j'écris au tableau un peu à côté du 1p sous la forme de 4p. Une apprentie indique alors qu'il faut multiplier 200 par 4 et c'est Co qui dira que cela donne 800 grammes (réponse qui figurait sur sa feuille). Mam demandera encore comment l'on a fait pour passer 200 à 800 et je reprendrai à son intention la proposition de multiplier par quatre qui semble lui convenir. Je termine en indiquant que l'avantage avec la manière de faire de Lou, c'est qu'une fois que l'on a trouvé la quantité qu'il faut pour une personne, on peut rapidement, grâce à la multiplication, trouver les quantités qu'il faut pour quinze, vingt, trente ou autant de personnes que l'on veut.

J'invite alors les apprenties à "digérer" tout cela durant la pause de Noël tout en indiquant que je pense organiser à l'intention de Mam et de Jac (qui n'ont pas obtenu la moyenne à l'épreuve) une ou deux séances de soutien. C'est alors que Tiz dit qu'elle aimerait aussi y participer (parce qu'elle n'est toujours pas trop sûre d'avoir bien compris), puis Jad et Co aussi et que je dis que, dans ces conditions, il faudra discuter avec Chris pour savoir comment l'on peut s'organiser pour être en mesure de le faire.

Alors que j'étais sur le point de partir, je dis encore à tout hasard (!) que j'avais prévu une activité de Noël où il s'agit d'apprendre à faire des étoiles avec des maths. Je leur demande aux apprenties si elles ont appris à dessiner des étoiles. Beaucoup d'entre elles montrent qu'elles savent comment réaliser une étoile à cinq branches sans lever le crayon ou une étoile à six branches composées de deux triangles (je monte aux autres comment faire). Je demande alors comment l'on pourrait faire pour créer une étoile à sept branches sans lever le crayon. Une apprentie fait une proposition de ce type (mais avec sept branches) :



Je dis que l'on peut aussi utiliser un cercle et des points sur ce cercle pour y parvenir. Je montre un exemple au tableau et j'entends Mam et Tiz qui se demandent à quoi cela peut bien servir de dessiner des étoiles. Sans faire mine de les avoir entendues, je distribue à tout le monde des feuilles qui comprennent des cercles avec respectivement dix onze et douze points, puis j'invite les apprenties à tenter des dessins d'étoiles en sautant tantôt un, tantôt deux, tantôt trois points. L'activité "prend" peu à peu chez toutes les apprenties, à l'exception de Jad qui restera tout au long en dehors. Tiz, de son côté, peine à suivre une règle à chaque fois

identique, ce qui fait que ces premiers essais sont peu symétriques, ce qui ne lui plaît pas vraiment. Sa a besoin que je lui donne une nouvelle règle à chaque fois qu'elle a terminé une étoile pour redémarrer le dessin d'une autre. Co, Mam, Jac et Lou (elle me demandera de nombreuses feuilles en sus pour poursuivre après mon départ) créent des tas d'étoiles différentes. Et il ne restera finalement qu'assez peu de temps (je pars de la classe aux alentours de 11h30) pour visionner les photos et le DVD.

Narration de la 8^{ème} séance du 05.01.12

Il s'agit d'une séance d'appui organisée à l'intention de Mam et Jac, en fonction des résultats à l'épreuve d'évaluation réalisée avant Noël, dans laquelle elles n'avaient pas obtenu la moyenne. Je vais chercher les deux apprenties à 8h40 dans la classe où Chris donne les cours de cuisine. Je passe un court moment pour expliquer aux apprenties ce que je viens faire (plusieurs d'entre elles me demandent pourquoi je ne suis pas en vacances comme les autres enseignants et je leur réponds que, contrairement à ce que l'on s'imagine souvent, certains enseignants travaillent durant les périodes où ils n'ont pas de cours) et surtout pourquoi je viens chercher seulement Mam et Jac. Tiz et Jad manifestent en effet également leur souhait de pouvoir nous accompagner et je les informe que la chose est bien prévue, mais un peu plus en avant dans le courant du mois de janvier.

Arrivés dans la classe où j'accueille habituellement les stagiaires, je rappelle que l'idée de ce moment est de pouvoir les aider à réaliser des transformations de recette, chose qu'elles ne sont pas parvenues à mener à bien dans l'épreuve d'évaluation et qu'elles retrouveront à coup sûr dans le cadre des examens de fin d'année. Jac, qui s'est saisie d'un cube Rubik qu'elle a trouvé à son entrée dans la classe, me demande en râlant un peu si elle va devoir rester en ma compagnie jusqu'à la pause et je lui réponds que ce sera bien le cas en principe, afin qu'on ait du temps pour travailler. Je précise cependant qu'au cas où les choses iraient plus vite que prévu, elle pourrait bénéficier d'un moment pour réaliser des casse-tête (la classe en regorge).

Après avoir noté au tableau le thème du jour "Transformer une recette", je leur dis qu'il s'agit en fait un peu toujours de la même chose, à savoir qu'on donne une recette qui est prévue pour un certain nombre de personnes et qu'il s'agit de l'adapter pour un autre nombre de personnes, c'est-à-dire de calculer les nouvelles quantités d'ingrédients qu'il faudra prévoir pour ce nouveau nombre de personnes. Je leur donne la recette qui figurait dans l'exercice 4 de l'épreuve d'évaluation et demande à Jac de la lire (elle décline l'offre, ce qui fait que j'entame la lecture moi-même). Les deux apprenties identifient très vite qu'il s'agit d'une recette pour quatre personnes que l'on doit transformer pour quinze personnes. Je note ainsi au tableau :

Recette pour 4 personnes

Recette pour 15 personnes

et leur demande comment elles imaginent s'y prendre pour établir les transformations. Jac propose de faire "six fois quatre". Mam propose de faire "fois deux" et trouve douze, dit que ce n'est pas assez, puis essaie de faire "fois trois" trouve dix-huit et dit que c'est trop, puis se rétracte en disant que "non, je crois que ça va". Elle essaie ensuite de poursuivre en disant "trois fois dix" et trouve 30, mais Jac trouve que c'est beaucoup.

Je les interromps en leur disant que je vois qu'elles ont toutes deux l'idée de passer par la multiplication et que je pense qu'elles ont cette idée parce qu'il s'agit au départ d'une recette pour quatre personnes dont il s'agit d'augmenter les quantités pour parvenir à faire une recette pour quinze personnes. Jac me répond que l'on peut faire aussi "divisé" parfois - elle évoque $15 : 6$ - et je lui dis que précisément, il s'agit pour elle d'apprendre à savoir un peu mieux quand il s'agit d'utiliser l'une ou l'autre des deux opérations. Mam me dit qu'on peut utiliser la multiplication mais aussi l'addition et je lui réponds que c'est bien ce que j'avais compris qu'elle essayait de faire auparavant quand, partant de 6, elle cherchait à obtenir 15.

M'approchant du tableau, je leur dis que dans les problèmes de transformation de recette, on propose souvent aux élèves de passer par une étape intermédiaire qui consiste à chercher les quantités qu'il faut pour une personne. Je complète ainsi le tableau :

Recette pour 4 personnes Recette pour 1 personne Recette pour 15 personnes

En entendant mes propos, Mam s'exclame en disant quelque chose comme "mais oui, c'est vrai, oh je me suis même pas rappelé de ça" et j'enchaîne en concédant que je ne suis en effet assurément pas le premier enseignant à le leur suggérer. Je poursuis en disant que l'idée est précisément de pouvoir passer par la multiplication, mais plus simplement que Mam ne l'avait fait auparavant (quand elle avait essayé "fois deux", puis "fois trois"). J'essaie de montrer que l'on lorsque l'on part de 1, il suffit ensuite de multiplier par 15 pour parvenir à 15 et que l'on peut également faire pareil si l'on a 30, 60 ou 1500 personnes.

Je leur dis que la question qui se pose dorénavant avec cette étape supplémentaire est de savoir comment passer d'une recette pour 4 personnes à une recette pour 1 personne et leur demande si elles savent comment l'on peut d'y prendre. Jac répond que l'on peut diviser et Mam dit que l'on peut aussi soustraire. Aucune ne paraissant en mesure de trancher, je leur dis que c'est la division qui fonctionne dans le cas particulier et essaie d'illustrer (assez maladroitement je crois) cette affirmation avec des dessins d'œufs (que l'on devrait utiliser dans une recette pour quatre personnes), puis avec le dessin d'une pizza pour quatre que l'on devrait réaliser pour une personne. Durant ces explications, Mam propose de diviser par un pour trouver quatre et je suis assez emprunté pour lui montrer qu'il s'agira plutôt de diviser par quatre pour trouver un Je complète néanmoins le tableau de la façon suivante :

Recette pour 4 personnes *Recette pour 1 personne* *Recette pour 15 personnes*

$\div 4$	$\times 15$

Je poursuis en expliquant qu'il en va de même dans le livre de cuisine qu'elles utilisent dans le cadre des cours professionnel où les recettes sont en général établies pour 10 personnes et que l'on peut reprendre le même procédé si l'on veut réaliser la recette pour 80 apprenties. Je note au tableau :

Recette pour 4 personnes *Recette pour 1 personne* *Recette pour 15 personnes*

$\div 4$	$\times 15$

Recette pour 10 personnes *Recette pour 1 personne* *Recette pour 80 personnes*

$\div 10$	$\times 80$

A ce moment, Mam manifeste quelque chose comme "ah mais oui, c'est tout bête", ce que bien sûr je conteste en répondant que si c'était si bête que cela, on parviendrait tout le temps à le faire. Mam me dit que c'est surtout qu'elle n'arrive jamais à vraiment à s'en rappeler. Je lui réponds que ce qu'il importe tout d'abord, c'est qu'elle ait bien suivi le mouvement (c'est le terme que j'ai employé) qui va de la recette de base à la recette pour une personne, puis de la recette pour une personne à la recette pour un nouveau nombre de personnes, ainsi que les opérations qui lui sont associées. J'efface tout ce que j'ai écrit au tableau jusqu'ici et y inscris :

<i>Recette pour x personnes</i>	<i>Recette pour 1 personne</i>	<i>Recette pour y personnes</i>

en expliquant brièvement qu'en maths on utilise les lettres x et y pour exprimer des nombres quels qu'ils soient (j'ai été vite). Je demande à Jac et à Mam d'en prendre note sur leur feuille.

Je reviens ensuite à l'énoncé du problème en leur demandant comment remplacer le x et le y dans ce cas particulier, puis comment passer de la recette pour 4 à la recette pour 1, et ensuite de la recette pour 1 à la recette pour 15 et complète le tableau avec leurs propositions :

<i>Recette pour x personnes</i>	<i>Recette pour 1 personne</i>	<i>Recette pour y personnes</i>
<i>Recette pour 4 personnes</i>	<i>Recette pour 15 personnes</i>	
$\div 4$	$\times 15$	

Je leur demande à nouveau d'en prendre note et une fois que cela est fait, je leur dis qu'il suffit de placer les quantités à transformer au-dessous de l'inscription "recette pour 4 personnes" (que je note au tableau sous dictée de Mam et Jac) et de procéder aux différentes opérations.

<i>Recette pour x personnes</i>	<i>Recette pour 1 personne</i>	<i>Recette pour y personnes</i>
<i>Recette pour x personnes</i>		<i>Recette pour x personnes</i>
	$\div 4$	$\times 15$
6 o		
10 c		
8 v		
20 g		
16 g		
6 c		

Jac me demande alors s'il faut faire $6 \div 4$ ou $4 \div 6$. Mam dit que quand on divise, il faut toujours mettre le plus grand nombre devant. Je réponds que ce n'est pas forcément toujours le cas, mais que la question est importante parce que si cela n'a pas vraiment d'incidence pour la multiplication, en revanche l'ordre doit être pris en compte dans le cadre de la division. J'invite donc Mam et Jac à essayer les deux divisions sur la calculette et leur faire prendre conscience que le résultat est différent, puis reviens à la recette pour dire qu'il s'agit bien de 6 œufs (et non pas 4) que l'on doit transformer.

Les deux apprenties remplissent alors ce qui est devenu une sorte de tableau en effectuant les opérations sur la calculette. Jac qui omettra d'inscrire les 10 cuillères à soupe de farine (elle corrigera après coup) manifestera son étonnement lorsqu'elle trouvera 22,5 pour le nombre d'œufs. Je lui répondrai que le "virgule cinq" signifie un demi-œuf, mais que ce ne doit en effet pas être très pratique de partager des œufs par deux en cuisine et qu'il n'y a qu'en classe où on pouvait se mettre à imaginer des trucs pareils (ce qui fera sourire Mam). Mam, quant à elle, remplira tous les nombres correspondant aux quantités de la recette pour une personne (c'est moi qui lui ai conseillé de les déplacer, d'où les ratures sur sa fiche, afin qu'ils se trouvent bien en-dessous de la mention "recette 1 personne"), puis s'arrêtera et paraîtra assez surprise de devoir encore opérer une seconde fois (en faisant $\times 15$) avec tous les nombres. Elle dira même quelque chose comme "on devrait tout réussir à faire d'un seul coup", ce que j'avaliserai de suite pour leur montrer après coup comment il était possible de passer directement en multipliant par 3,75 (je leur ai montré comment l'on pouvait diviser 15 par 4).

Une fois que tout est terminé (il reste environ une quinzaine de minutes et Mam, bien que déclarant être fatiguée, manifeste son étonnement que tout ait passé si vite), et après avoir conseillé à Mam et à Jac d'ajouter sur leur fiche les lettres correspondant aux unités utilisées dans la recette (surtout parce que les experts aux examens aiment bien qu'on le fasse), je leur demande si elles pensent être capables de refaire ce qu'elles ont fait à propos d'une autre recette. Jac dit qu'elle est bien certaine et Mam pense de même.

Je lance les paris, en leur proposant de transformer la recette de l'exercice 1 de l'épreuve d'évaluation. Toutes deux sont d'accord de relever le défi (je sers la main de Jac pour bien montrer l'enjeu) et se lancent à la tâche. Au terme de la résolution de ce second exercice, elles manifesteront leur grande satisfaction d'être venues et accepteront même d'emporter avec elles d'autres exercices pour s'entraîner.

Narration de la 9^{ème} séance du 12.01.12

Il s'agit de la neuvième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Seules cinq apprenties sont présentes en début de cours, soit : Jad, Tiz, Jac, Lou, et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa. Jad est malade et doit quitter la classe en début de cours pour aller s'allonger sur un canapé. Mam est absente et ne prendra pas part à la séance, alors que Co, qui vendait des pâtisseries durant la pause, nous rejoint un peu plus tard.

Je commence par dire aux apprenties le plaisir que j'ai à les revoir pour une neuvième séance, alors que Jac me rend le livre "Pythagore et Thalès" que je lui avais prêté. Je leur dis que le cours du jour sera tout entier consacré à la question des transformations d'unités (je note le titre au tableau) qui est un thème qu'elles peuvent avoir à traiter en cuisine et qui fera sans aucun doute l'objet de plusieurs questions durant leurs examens. Je leur dis que ce qui nous va nous intéresser plus particulièrement aujourd'hui est la transformation des unités qui permettent de mesurer le poids d'un objet. Je découvre à leur intention la balance que j'ai apportée (il s'agit d'une balance à deux plateaux, Chris me demande s'il s'agit d'une balance que l'on équilibre à l'aide d'une tirette, ce à quoi je réponds par la négative) et leur demande quelles sont les unités que l'on utilise pour peser des quantités. Une apprentie énonce " kilo" que je note au tableau, une autre prononce "gramme" que j'inscris à côté, une autre encore dit "kilogramme" que je note à la place de "kilo", en indiquant que le second est l'abréviation du premier. Je donne ensuite aux apprenties des poids d'un kilo à soupeser (toutes ont l'occasion d'en faire l'expérience, Tiz est étonnée que cela soit si lourd, Jac en prend un dans chaque main en disant qu'elle n'a pas l'impression que c'est le même poids dans les deux).

J'explique ensuite le fonctionnement de la balance, en déposant d'abord un poids d'un kilo sur chaque plateau pour montrer une situation d'équilibre, puis en leur montrant comment il est possible d'approcher le poids d'un objet (je prends un gros carton que j'ai apporté avec moi) en mettant d'abord un poids d'un kilo, puis un autre, puis encore un autre (j'indique en même temps aux apprenties que l'on utilise plus vraiment de telles balances et que celles qu'elles utilisent en cuisine leur donnent très certainement directement le poids de l'objet à peser). Jac paraît bien connaître le fonctionnement de la balance et c'est elle qui dit que le carton vaut plus que deux kilos et moins que trois (les trois autres apprenties présentes ne semblent pas vraiment intéressées par la chose). Je donne ensuite aux apprenties à soupeser un poids d'un gramme, pour bien marquer la différence avec celui d'un kilo et je les invite à désigner des objets de la classe qui pourraient peser un gramme. Je vérifie leurs propositions successives sur la balance, soit un taille-crayon, une gomme (trop lourds), un cheveu que Sa s'est arrachée (trop léger), une feuille de papier et un bouchon de stylo (deux objets pour lesquels la balance s'équilibre). Sa fera en outre mine de se couper une poignée de cheveux avec une paire de ciseaux pour signifier une troisième proposition qui aurait pu faire mouche.

Suite à ces différentes pesées (durant lesquelles Co a rejoint le groupe), je déclare qu'il est donc possible de recourir à deux sortes d'unités pour peser des quantités, à savoir le kilogramme (je note le mot sur l'un des tableaux de la classe, après avoir effacé ce que j'y avais précédemment inscrit, tout en l'accompagnant d'un dessin illustrant le poids d'1 kilo que j'ai fait soupeser aux apprenties) et le gramme (je note le mot sur un second tableau accompagné d'un autre dessin). Je précise également que l'on utilise les abréviations "kg" et "g" (que je note également à côté entre parenthèses) pour simplifier les écritures. Le poids d'un objet pouvant donc être tout à la fois mesuré en rapport avec des kilogrammes ou avec des grammes, il va dès lors s'agir d'apprendre à transformer en grammes (je raconte qu'il s'agit d'un piège que l'on tend souvent aux apprenties qui passent un examen) des quantités exprimées en kilogrammes et à transformer en kilogrammes, des quantités exprimées en

grammes. Tiz me dit que pour le faire elle utilise un tableau et je lui réponds qu'on aura sans doute l'occasion d'en parler par la suite.

Déposant le poids d'un kilogramme sur l'un des plateaux de la balance et le poids d'un gramme de l'autre côté, je demande alors combien il faut de grammes pour établir l'équilibre entre grammes et kilogrammes et c'est à nouveau Jac qui répond qu'il en faut 1000. Je note donc : $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ sur le premier tableau (juste au-dessous de "kilogramme (kg)") et invite les apprenties à effectuer d'autres transformations (comme, à l'exception de Jac, je ne les sens pas vraiment présentes, je leur distribue à chacune une feuille de brouillon et leur demande de prendre note de ce qui figure au tableau). Je complète ensuite avec plusieurs quantités exprimées en kilos que je demande successivement aux apprenties de transformer en grammes, ce qui donne (sur le premier tableau) :

kilogramme (kg)

$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$

$2 \text{ kg} = \dots\dots$

$3 \text{ kg} = \dots\dots$

$1 \text{ kg } 500 = \dots\dots$

$2 \text{ kg } 300 = \dots\dots$

$3 \text{ kg } 1 = \dots\dots$

$3 \text{ kg } 100 = \dots\dots$

Pour chaque item je leur demande de noter combien cela fait de grammes (prévision), puis, une fois qu'elles ont noté, d'énoncer ce qu'elles ont trouvé. Toutes les apprenties trouvent 2000 g pour 2 kg et 3000 g pour 3 kg. Pour 1kg 500. Co, Lou et Tiz trouvent 1500 g. Jac écrit 1000 g 500 et Sa, 15000 g. Je montre alors comment il est possible de passer par $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} / 500 \text{ g} = 500 \text{ g} / 1000 + 500 = 1500 / 1 \text{ kg } 500 = 1500 \text{ g}$ (en inscrivant $1000 + 500 = 1500$ sur le tableau). Toutes les apprenties, sauf Jac qui a écrit 3000 g 300, trouvent 2300 g pour 2 kg 300 (je note à nouveau $2000 + 300 = 2300$). Pour 3 kg 1, Lou et Co trouvent 3001, Tiz et Sa notent 3100, Jac ne note rien. Je propose alors 3kg 100 où Lou, Jac, Tiz et Sa trouvent 3100 et je montre la différence en notant $3000 + 1$ pour 3kg 1 et $3000 + 100$ pour 3 kg 100.

Je passe ensuite aux transformations des grammes en kilos (et me rend vers le deuxième tableau où figure déjà l'inscription "gramme (g)" avec le dessin d'un poids d'un gramme). Tiz redit qu'elle a appris à faire cela en utilisant un tableau de transformation et je lui réponds que je n'ai pas oublié sa proposition dont on reparlera par la suite. J'inscris $1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$, demande aux apprenties d'en prendre note et recommence avec d'autres items à transformer :

gramme (g)

$1000 \text{ g} = 1 \text{ kg}$

$2000 \text{ g} = \dots\dots$

$3000 \text{ g} = \dots\dots$

$900 \text{ g} = \dots\dots$

$200 \text{ g} = \dots\dots$

$20 \text{ g} = \dots\dots$

$2 \text{ g} = \dots\dots$

$1 \text{ g} = \dots\dots$

A nouveau, toutes les apprenties trouvent les correspondances entre 2000g et 2 kg et 3000 g et 3 kg. Pour 900 g, Lou et Tiz trouvent 0,9 kg, Jac renchérit en disant qu'elle est d'accord avec Tiz. Je demande alors si quelqu'un n'a pas trouvé quelque chose comme 0,900 et Co dit que c'est bien son cas. Sa, quant à elle, propose 90 kg. Je lui demande comment elle s'y est prise pour aboutir à 90 et elle répond quelque chose comme " c'est normal qu'il y ait plus de kilos

que de grammes, parce qu'un kilo, c'est plus lourd qu'un gramme". Je réponds que l'idée est intéressante et tente de passer par l'équivalence : $9000\text{ g} = 9\text{ kg}$, pour lui montrer que c'est en le nombre de grammes augmente en même temps que le nombre de kilos, puis je reviens au 900 grammes pour lui expliquer que comme il est inférieur à 1000, il va dès lors falloir trouver une quantité de kg inférieure à 1, soit 0 kg 900 ou 0,900. Je demande ensuite aux apprenties si c'est plutôt 0,900 ou plutôt 0,9 et Lou répond que c'est bien égal, parce qu'on peut enlever les 0 qui se trouvent à droite. Je rétorque que ce n'est pas vraiment toujours le cas, puisque on ne saurait enlever ses deux zéros à 100 (qui deviendrait autrement équivalent à 1), mais elle poursuit en expliquant que c'est lorsqu'il y a une virgule qu'on peut le faire (elle a l'air très sûre de son fait). J'inscris donc 0,900 kg et 0,9 kg sur le tableau, juste à côté de 900 g =. Pour 200g, Lou, Tiz, Jac notent 0,2 kg sur leur feuille, alors que Sa et Co écrivent 0,200 kg. Pour 20 g, Lou, Tiz et Jac notent 0,02 kg, alors que Sa et Co proposent 0,20. J'essaie alors de montrer que 0,20 est pareil à 0,200 (en rajoutant en 0 à droite) et qu'il faut dès lors trouver autre chose : soit 0,02 ou 0,020 pour désigner 20 g avec des kilos. Sa corrige en 0,02 et Co en 0,020 (en intercalant un zéro entre la virgule et le 2). Pour 2 g, Lou, Tiz et Jac trouvent 0,002, tandis que Co note 0,02 et Sa 0,2. Je reviens avec l'ajout des 0 à droite qui donne 0,020 et 0,200 soit des nombres déjà "utilisés" pour 200 et 20 grammes et retenir la proposition de Lou, Tiz et Jac, soit 0,002. Co intercale à nouveau un 0, entre la virgule et le premier 0 de son 0,02, alors que Sa trace son 0,2 pour le remplacer par 0,002. Pour 1 g, toutes les apprenties proposent 0,001 kg.

Je reviens alors vers le premier tableau sur lequel figurent les transformations en grammes de quantités exprimées en kilogrammes et demande comment/par quelle opération il est possible de passer des premières aux secondes. Une apprentie propose de faire $\times 1000$ (que je note en-dessus des deux colonnes de nombres, en l'entourant d'un cercle et avec une flèche) et j'invite les apprenties à vérifier avec la calculette si l'opération fonctionne bien pour tous les couples de nombres. La vérification se fait pour 1/1000, 2/2000, 3/3000. Pour 1kg500/1500, certaines apprenties (dont Co) trouveront 1500000 alors que d'autres proposeront 1500. Et c'est Tiz qui indiquera qu'il s'agit d'entrer 1,500 pour 1kg500 sur la calculette, avant de réaliser la multiplication par 1000. La vérification se poursuivra pour les autres couples de nombres et une discussion aura également lieu autour du 3 kg 1 où il s'agira d'entrer 3,001 pour trouver ensuite 3001 avec la multiplication par mille.

Je passe ensuite au second tableau, soit celui sur lequel figurent les transformations en kilogrammes de quantités exprimées en grammes et demande à nouveau aux apprenties comment/par quelle opération il est possible de passer des premières aux secondes. Une apprentie propose de "faire moins", alors qu'une autre dit qu'il s'agit de diviser par 1000. Je vais vérifier que la seconde proposition fonctionne bien pour les duos 1000/1, 2000/2 et demande aux apprenties de poursuivre la vérification avec l'ensemble des duos de nombres figurant sur le tableau. C'est alors que je prends conscience d'une chose assez particulière : le premier tableau qui comporte les transformations de kg en g appelle la multiplication par 1000 (opération qui en principe correspond à un accroissement/une augmentation), alors même qu'il s'agit de passer de l'unité "la plus lourde" à l'unité "la plus légère" ; tandis que le second tableau, qui comporte les transformations de g en kg, appelle la division par 1000 (opération qui en principe correspond à une réduction/une diminution), alors même qu'il s'agit de passer de l'unité "la plus légère" à l'unité "la plus lourde". Je fais immédiatement part de ma surprise aux apprenties, mais je ne sais si elles parviennent à percevoir de quoi elle retourne. Je dis qu'en tous les cas, c'est ce que j'aurai, de mon côté, appris de cette séance. Mais Tiz me rétorquera que ce n'est sans doute pas vrai, parce que je sais déjà tous ces trucs. Jac me dira en outre qu'elle me trouve super actif durant cette séance, ce à quoi je répondrai que j'ai en effet un peu trop parlé et que je vais leur distribuer maintenant une fiche

d'exercices qui me permettra de me taire un peu et leur donnera l'occasion d'être à leur tour un peu plus actives. Je propose que les fiches puissent se remplir en duo, mais les apprenties préfèrent travailler seules, à l'exception de Sa qui demande à Chris de l'accompagner. Ce travail se poursuivra jusqu'à la fin de la séance, Jac ayant eu le temps de ne marquer que trois résultats, avant de rejoindre la cuisine où elle était de service.

Quand Tiz termine de remplir sa fiche (et que Lou, Co et Sa avec Chris sont encore au travail), je m'approche d'elle pour lui demander de me montrer comment elle utilise un tableau de transformation d'unités, en lui posant deux questions : 0,7 kg -> ... g et 250 g -> ... kg. Elle dessine le tableau sur sa feuille, me demande juste s'il faut mettre d'abord les "hg" ou les "dag" et me montre comment elle s'y prend pour placer les nombres et jouer avec les virgules et les zéros (ce qu'elle fait correctement). Je lui demande alors si elle pourra aider Jac à compléter sa fiche pour la prochaine fois et elle me répond que oui et qu'elle pourra même lui montrer comment fonctionne son tableau. Je lui dis de peut-être attendre d'observer comment Jac s'y prend pour le faire, avant de l'entraîner dans la réalisation d'un tableau, parce que devoir expliquer les dag et hg (que l'on n'utilise pas vraiment en cuisine) n'est pas tout simple. Je demande ensuite à Lou (qui vient de terminer sa fiche) comment je peux m'y prendre pour faire en sorte qu'elle s'ennuie un peu moins durant ces cours qui, pour la plupart, traitent de thèmes qu'elle maîtrise déjà très bien. Elle me répond que cela va très bien comme cela, qu'elle écoute quand elle dessine (elle a passé une bonne partie de la séance à dessiner) et que cela lui permet de réviser des choses (je compte néanmoins trouver d'autres thèmes qui pourraient l'intéresser). Je passe ensuite vers Co (qui a terminé elle aussi) en lui demandant si elle a bien compris. Elle me dit que oui, en m'expliquant qu'elle utilise pour ses transformations le fait qu'il y a toujours trois chiffres après la virgule. Je lui dis que c'est une bonne idée, mais qu'il faut faire un peu attention à cela quand on utilise la calculatrice, parce qu'elle efface systématiquement les zéros qui ponctuent la partie décimale (je lui montre un exemple). Elle me dit qu'elle sait bien que la calculatrice, il faut parfois s'en méfier, parce que parfois "cela peut nous jouer des tours". Je quitte enfin la classe en laissant Chris et Sa terminer le remplissage de la fiche d'exercices (Ly s'étant retirée, pour ne pas contrarier leur interaction).

Narration de la 10^{ème} séance du 19.01.12

Il s'agit d'une séance d'appui sur le thème des transformations de recettes que j'ai organisée à l'intention de Mam, de Jac et des autres apprenties (cela avait été la demande de Tiz, Jad et Co, notamment) qui souhaitent y participer. Je compte néanmoins en profiter pour rendre (à celles, Lou, Tiz, Co, qui ont terminé la fois dernière) et pour reprendre (à celles, Jac, Sa, Jad, qui devaient le faire pour aujourd'hui) les fiches d'exercices sur les transformations d'unités de masse, leur donner les fiches "synthèse" que j'avais préparées à leur intention et leur proposer une nouvelle fiche d'exercices, en vue de l'épreuve d'évaluation qui aura lieu la fois prochaine (26 janvier).

J'avais convenu avec Chris que je viendrai vers 8h40 chercher les apprenties intéressées par cette séance d'appui, mais à 8h20, c'est Tiz qui apparaît dans mon bureau, pour me dire que tout le monde m'attend, Chris et Ly s'attendant à ce que je vienne vers 8h00. Je me rends donc dans la classe de Chris, déclare que j'avais plutôt prévu de venir à 8h40, mais que je peux tout aussi bien commencer maintenant. Chris acceptant ma proposition, je demande quelles apprenties souhaitent m'accompagner pour ce moment d'appui. Toutes les apprenties présentes (elles sont toutes là, sauf Mam qui est à nouveau absente) manifestent leur intention de venir, à l'exception de Lou, ce qui lui fait dire que la séance d'appui peut très bien se dérouler dans la classe de Chris, parce qu'elle n'a pas vraiment envie de rester toute seule avec lui. Elle dit qu'elle continuera à dessiner (elle est en train de réaliser un magnifique loup-garou au crayon gris), qu'il n'y a qu'à ne pas s'occuper d'elle et que ce sera bien mieux comme cela. Je demande alors à Chris ce qu'il pense de la proposition de Lou et il me répond que je peux très bien la suivre (il a en outre quelques téléphones à passer).

Je commence donc la séance en précisant qu'avant de passer au moment d'appui, j'ai plusieurs choses à dire au sujet des transformations d'unités de masse dont nous avons parlé la semaine précédente. Je distribue à Lou, Tiz et Mam leurs fiches d'exercices corrigées. Sa me tend la fiche qu'elle a terminée de compléter avec Chris, Co me dit qu'elle a bien, comme convenu, passé la fiche à Jad (qui n'a pu assister à la séance du 12, parce qu'elle était malade et qu'elle a dû aller s'allonger dans un local à côté de la classe de Chris), mais Jad ne l'a pas complétée et Tiz me dit qu'elle a complètement oublié de remplir la fiche avec Jac (qui avait dû s'absenter fin de séance pour reprendre son service en cuisine), alors qu'elle m'a dit qu'elle pourrait le faire vu qu'elles partagent toutes deux le même appartement.

Je leur rappelle qu'il y aura pourtant bien une évaluation la fois prochaine (i.e. le 26 janvier) sur les transformations de masse (et qu'il s'agit donc bien de s'y préparer) et leur dis que j'ai constitué une fiche-synthèse (cf. annexe) à cet effet (que je leur distribue). Je procède à la lecture de la fiche (aucune des apprenties n'ayant souhaité s'y livrer elle-même) et je remarque une très bonne attention de la part de toutes les apprenties (qui sont concentrées sur leur feuille, à l'exception de Lou qui continue à dessiner). Certaines d'entre elles manifestent un certain étonnement à la lecture du fait que d'autres unités de masse (once/livre) soient utilisées dans d'autres pays comme l'Angleterre. Lou ajoute que la livre est aussi utilisée chez nous. Je dis que cela peut paraître étonnant, mais qu'en Suisse aussi, avant la révolution française, d'autres unités de masse avaient cours dans les différents cantons. On rigole un peu sur le fait que le nombre que l'on utilise pour signifier son poids sera donc plus grand en Angleterre qu'en Suisse et qu'on ne sait pas trop ce que cela peut avoir comme conséquence sur celui qui monte sur une balance pour se peser. Au terme de cette discussion, je propose une nouvelle fiche d'exercices de transformation d'unités de masse pour préparer l'évaluation et Jad, Jac, Co et Sa manifestent le souhait de la prendre.

Nous passons ensuite à la séance d'appui concernant les transformations de recette et je distribue aux apprenties la première fiche d'exercices que j'ai donné à Mam et à Jac deux

semaines auparavant (le 5 janvier, lors de la première séance d'appui consacrée à cet objet). Je leur demande d'essayer de résoudre le premier exercice, puis, à celles qui ont terminé, de passer au deuxième (Jac ne dit rien sur le fait qu'elle a déjà reçu cette fiche). Pendant qu'elles travaillent à la résolution des problèmes, je constitue un tableau récapitulatif, de manière à prendre note des résultats qu'elles auront découverts. Une fois que toutes ont inscrit les résultats au premier problème (sauf Tiz, qui n'a pu entrer en matière, même en se rapportant longuement à l'épreuve d'évaluation qu'elle a conservée dans son classeur, mais à partir de laquelle elle ne parvient pas à reconstituer le cheminement qui lui avait alors permis de résoudre les problèmes qui y figuraient), je dis que je souhaite passer à la mise en commun de leurs recherches, mais Jac me répond que c'est trop tôt, qu'elle veut finir le second problème (elle a repris les fiches qu'elle a réalisées lors de la séance d'appui avec Mam et les utilise pour résoudre ces deux nouveaux problèmes). J'attends donc que Jac ait tout terminé et Jad en profite pour se rendre aux toilettes. A son retour, alors que je souhaitais démarrer la mise en commun, c'est Tiz qui fait mine de s'y rendre à son tour. Je dis qu'il sera impossible de poursuivre la séance dans de bonnes conditions, si à chaque fois que je fais mine de vouloir avancer, il y a quelqu'un qui quitte la classe. Lou proteste en disant que je ne saurai tout de même empêcher Tiz de se rendre aux toilettes. Je rétorque que je ne vais bien sûr pas empêcher quiconque de s'y rendre, mais que je faisais juste remarquer qu'il est difficile de mener une séance d'appui quand les apprenties ne sont pas présentes dans la classe. Tiz retourne finalement à sa place et je procède à la mise en commun.

Celle-ci m'apparaît assez laborieuse (il est difficile de faire en sorte que toutes les apprenties me donnent leurs résultats respectifs quand je les interpelle). Une fois que le tableau est entièrement rempli, Jad remarque à voix haute qu'il y a une grande diversité de résultats. Je réponds qu'en effet, je suis plutôt d'accord avec elle et que le but de la séance est précisément de parvenir à réduire cette diversité. Je montre alors à l'ensemble des apprenties la manière de procéder que l'on a utilisée avec Mam et Jac, lors de la première séance d'appui et les invite à l'utiliser pour contrôler les résultats qu'elles ont découverts. Durant mes explications, Co me demande avec beaucoup d'insistance de modifier la quantité de sucre qu'elle a, dans un premier temps, proposée et que j'ai inscrite au tableau (150 g au lieu de 300 g). Tiz me dit qu'elle ne comprend pas pourquoi il faut diviser par 4, puis multiplier par 6 et que c'est cela dont elle ne parvient jamais à se souvenir. Assez amusée, Jac me dit qu'elle a divisé par 1 au lieu de diviser par 4 (ce qui fait que tous les résultats qu'elle a donnés sont quatre fois trop grands). Afin de répondre au doute exprimé par Tiz, j'essaie de traduire ce mode de faire par un dessin, puis de lier le dessin à l'une des transformations à établir.

Une fois que toutes les quantités pour la recette pour 6 personnes ont été (re)calculées, j'invite les apprenties à contrôler, à l'aide du même procédé, les quantités pour 80 personnes. Je leur demande également de prendre note sur leurs feuilles du procédé lui-même, afin de pouvoir le réutiliser au besoin et notamment durant les examens (c'est à ce moment que Chris me dira ne plus bien souvenir de si les apprenties peuvent prendre leurs notes de cours pour les examens, ce que je lui demanderai de bien vouloir vérifier). Tiz et Sa recopieront assez fidèlement le procédé, alors que Jac, qui l'a déjà relevé lors de la séance d'appui avec Mam (le 5 janvier), s'en abstiendra. Co notera simplement : " $4 \text{ dl} \div 4 \text{ p} = 1 \text{ p}$ et $1 \text{ dl} \times 6 \text{ dl} = 6 \text{ dl}$ ", tandis que Jad écrira : " $4 \div 4 = 1$ pers nobres 1", tout en me demandant si pour le 2^{ème} problème, il s'agit bien de diviser par 6 et multiplier par 80 (je lui donnerai une nouvelle explication du procédé).

Nous complétons enfin le tableau des résultats pour le second problème qui, cette fois, présentent des nombres identiques pour l'ensemble des apprenties. Avant de quitter la classe, je propose une fiche d'exercices supplémentaire que Tiz, Jad, Jac, Sa et Co acceptent de prendre pour s'entraîner. J'observe juste que Jac qui commence à la remplir écrit $\div 4$ pour passer de la recette pour 10 à la recette pour 1 personne...



Notion mathématique : les unités de masse

Découverte : Pour transformer des quantités exprimées en **kilogrammes (kg)** en **grammes (g)**, on procède ainsi :

$$\begin{array}{rclcl}
 1 \text{ kg} & = & 1000 \text{ g} \\
 2 \text{ kg} & = & 2000 \text{ g} \\
 1 \text{ kg } 500 & = & 1,500 \text{ kg} = 1,5 \text{ kg} & = & 1500 \text{ g} \\
 2 \text{ kg } 300 & = & 2,300 \text{ kg} = 2,3 \text{ kg} & = & 2300 \text{ g} \\
 3 \text{ kg } 100 & = & 3,100 \text{ kg} = 3,1 \text{ kg} & = & 3100 \text{ g} \\
 3 \text{ kg } 1 & = & 3,001 \text{ kg} = 3,001 \text{ kg} & = & 3001 \text{ g}
 \end{array}$$



Pour transformer des quantités exprimées en **grammes (g)** en **kilogrammes (kg)**, on procède ainsi :

$$\begin{array}{rclcl}
 1000 \text{ g} & = & 1 \text{ kg} \\
 2000 \text{ g} & = & 2 \text{ kg} \\
 900 \text{ g} & = & 0,9 \text{ kg} & = & 0,900 \text{ kg} = 0 \text{ kg } 900 \\
 200 \text{ g} & = & 0,2 \text{ kg} & = & 0,200 \text{ kg} = 0 \text{ kg } 200 \\
 20 \text{ g} & = & 0,02 \text{ kg} & = & 0,020 \text{ kg} = 0 \text{ kg } 20 \\
 2 \text{ g} & = & 0,002 \text{ kg} & = & 0,002 \text{ kg} = 0 \text{ kg } 2 \\
 1 \text{ g} & = & 0,001 \text{ kg} & = & 0,001 \text{ kg} = 0 \text{ kg } 1
 \end{array}$$



Définition : " Mesurer une quantité, c'est la comparer à une grandeur de même espèce prise comme unité".

Les principales unités que l'on utilise en cuisine pour mesurer des quantités d'aliments sont le **gramme (g)** et le **kilogramme (kg)**.

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} \qquad 1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg}$$

D'autres unités de masse :

Dans d'autres lieux, on utilise d'autres unités pour peser des quantités, comme la **tonne (t)**, le **quintal (q)**...

$$1 \text{ tonne (t)} = 1000 \text{ kg} \qquad 1 \text{ quintal (q)} = 100 \text{ kg}$$

En Angleterre, on utilise aussi l'**once** et la **livre**.

$$1 \text{ once} = 28 \text{ g} \qquad 1 \text{ livre} = 454 \text{ g}$$

Narration de la 11^{ème} séance du 26.01.12

Il s'agit de la onzième séance avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP. Seules cinq apprenties sont présentes en début de cours, soit : Mam, Jac, Lou, Co et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa. Jad est à nouveau malade et Tiz a dû s'absenter pour une réunion. Lou (malade aussi) doit quitter la classe en tout début de séance ; elle reviendra peu après, mais sans pouvoir participer aux activités proposées.

Au fur et à mesure que les apprenties entrent en classe, je leur rends les fiches d'exercices corrigées qu'elles ont complétées la fois dernière et leur demande si elles ont pu effectuer celles qu'elles avaient emportées. Jac et Co me disent qu'elles ont oublié de le faire, et seule Sa a rempli une fiche concernant les transformations d'unités de masses. J'annonce ensuite aux apprenties que je vais leur soumettre une épreuve d'évaluation sur les transformations d'unités de masses (durant la pause, Ly m'a dit qu'elles se rappelaient bien du fait qu'il y avait une évaluation et que Chris leur en avait parlé en début de matinée), sauf à Mam qui était absente les deux séances où nous avons travaillé sur la question. Je dis à Mam que je lui proposerai aujourd'hui une leçon particulière, en remplacement des deux séances qu'elle a manquées, pendant que les autres feront l'évaluation.

Avant de passer à l'épreuve d'évaluation, je distribue aux apprenties présentes une fiche-synthèse (cf. annexe) concernant les transformations de recettes (et j'en donne trois supplémentaires à Chris pour qu'il puisse les transmettre à Lou, Tiz et à Jad). Je procède à la lecture de la fiche-synthèse et fais compléter la première partie (c'est Jac qui propose les nombres, Mam est aussi très active dans l'effectuation des calculs). Au sujet du tableau figurant au bas de la fiche, j'indique qu'il s'agit d'un autre tableau qui permet de passer directement de la première à la troisième recette (Jac me dit que j'ai oublié les points dans la deuxième colonne). J'en profite pour montrer que la chose est également possible dans le tableau du haut, en disant que l'on peut passer directement de la recette pour 10 personnes à la recette pour 30 personnes en multipliant par 3 les quantités de la première pour trouver les quantités de la seconde (je me souviens avoir demandé aux apprenties si elles voyaient comment faire et il me semble me souvenir que Jac a dit qu'il fallait multiplier par quelque chose, mais je n'ai pas réussi à percevoir par combien).

Une fois la lecture de la fiche terminée, je conseille aux apprenties de la conserver précieusement en vue des examens. Je demande à Co et à Sa si elles souhaitent participer à l'épreuve de rattrapage concernant les transformations de recette que je compte proposer à Mam et à Jac la fois prochaine, mais Co et Sa déclinent mon invitation. Je distribue alors les épreuves d'évaluation concernant les transformations d'unités de masse à Sa, Co et Jac (Lou préférant reporter l'épreuve à la prochaine fois, vu qu'elle ne sent vraiment pas bien). Je donne le solde des épreuves à Chris en lui disant que s'il a le temps de les faire passer aux apprenties absentes durant la semaine, ce serait tout cela de gagner. Il me répond qu'il va essayer, mais que ce n'est vraiment pas certain que la chose soit possible. Je lui tends également des fiches comprenant l'exercice n°5 de l'épreuve d'examen (calcul du coût d'une recette), en lui demandant de les proposer aux apprenties une fois que l'épreuve d'évaluation sera terminée (de manière à pouvoir déterminer après coup celles qui ont besoin d'un soutien pour réaliser ce type d'exercices), puis je quitte la classe de Chris accompagné de Mam.

En arrivant dans ma classe (et après avoir rappelé à Mam le thème du jour), je lui montre le fonctionnement d'une balance à plateaux, la position d'équilibre, etc. (qu'elle connaît). Je lui dis que pour peser des quantités, on utilise tantôt des grammes et tantôt des kilogrammes (elle connaît aussi) et l'invite à soupeser d'abord un poids d'un kilogramme, puis un poids d'un gramme (je note les mots suivis de leur abréviations – kg et g – au tableau). Je montre ensuite

comment déterminer le poids d'un dictionnaire, en recourant d'abord à des kilogrammes, puis à des grammes (j'avais à disposition des poids de 500 g, 200 g, 100 g, 20 g, 10 g). Mam a l'air très au clair avec le fait qu'il s'agit tantôt d'enlever, tantôt d'ajouter des poids, pour parvenir progressivement à la position d'équilibre. Une fois que nous y sommes parvenus, Mam me demande alors à quoi cela peut donc bien servir de faire tout cela (i.e. où je veux donc en venir avec ma balance et mes poids). Je lui réponds que comme l'on dispose de deux unités pour peser des quantités, il s'agit d'apprendre non seulement à peser, mais également à transformer des quantités mesurées avec une unité en des quantités mesurées avec d'autres unités. Je dépose à cet effet un poids d'un kilo sur l'un des plateaux de la balance et un poids d'un gramme sur l'autre plateau et lui demande comment réaliser l'équilibre. Elle propose de mettre dix grammes sur le second plateau. Je lui montre et lui fais soupeser un poids de dix grammes, ce qui la fait sourire (car manifestement beaucoup plus léger que le poids d'un kilo). Elle tente alors mille grammes et je lui réponds que c'est bien cela, le rapport qui existe entre les kilos et les grammes (elle me demande si je possède 1000 poids d'un gramme, mais je réponds que je n'en ai malheureusement qu'un seul à disposition). Je note au tableau : $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ en disant que c'est cette relation qui va permettre d'effectuer les transformations (je lui fais remarquer incidemment que si on enlève les unités, on obtient une relation numérique $1 = 1000$ qui ne tient pas la route, mais mes propos n'ont pas l'air de beaucoup l'étonner) et qu'il est donc important de mémoriser.

Mam me confie alors que pour transformer des kilos en grammes, on lui a appris à passer par un tableau. Je lui propose donc de dessiner ce tableau sur une feuille pour me montrer ensuite comment elle procède. Elle me dit que c'est bien là le problème, parce qu'elle ne sait pas trop le faire, et que c'est un peu comme si les choses entraient, puis sortaient de sa tête. Elle consent néanmoins à tenter un dessin du tableau, puis s'arrête, en disant qu'elle croit qu'il n'est pas correct, parce qu'il manque les hectogrammes (mais elle n'est pas sûre). Je lui propose alors d'essayer de construire son tableau sur la relation $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$, en traçant des colonnes entre chaque chiffre du 1000, puis en ajoutant kg au-dessus la première colonne et g au-dessus de la dernière (et lui dis que c'est cela dont il faut qu'elle se rappelle).

kg				g
1	0	0	0	0

Je l'invite alors à commencer par transformer en grammes des quantités mesurées en kilos et que l'on fera ensuite le contraire. Je commence par proposer 4 kg, puis 3 kg, puis 2 kg, puis 1 kg (dont je sais que Mam connaît l'équivalence en grammes) pour faire fonctionner le tableau (i.e. placer le nombre et compléter avec les zéros). On rigole un peu, parce que tout cela paraît bien facile, mais Mam me dit qu'elle sait que cela peut devenir plus compliqué, par exemple quand on doit mettre des virgules. Je propose ensuite 2 kg 570 g qui "entre" parfaitement dans le tableau pour donner 2570 grammes. J'essaie ensuite 2 kg 40 g que Mam inscrit avec hésitation en plaçant 2, 4, 0 et puis 0. Je continue avec 2 kg 400 g, pour lequel Mam écrit à nouveau 2400. Je lui fais remarquer que c'est délicat de transformer 2 kg 400 et 2 kg 40 par le même nombre de grammes, mais elle ne sait pas trop comment modifier. Je lui demande alors d'essayer avec 2 kg 4 g, mais elle ne sait pas trop. Je lui montre donc pour 2 kg 40 g que j'insère dans le tableau en positionnant d'abord le 2 dans la première colonne, puis le 40 dans les deux dernières, puis en rajoutant un 0 dans la deuxième colonne. J'indique qu'ainsi on a deux nombres de grammes différents – 2400 et 2040 – pour signifier deux quantités différentes de kilos différentes. Je lui demande à nouveau d'essayer pour 2 kg 4 g ce qu'elle fait en inscrivant 2, 0, 0, 4 dans le tableau. Je l'invite alors à prendre note du tableau utilisé, tout en lui disant que nous passerons ensuite aux transformations en kilos des quantités exprimées en grammes. J'ajoute que c'est là qu'apparaîtront les virgules, mais Mam me répond

qu'on peut aussi trouver des virgules dans des quantités exprimées en kilos. J'acquiesce à son affirmation, en lui montrant que l'on peut très bien exprimer 2 kg 570 par 2,570 kg (et je poursuis de même pour 2kg 400g, 2 kg 40 g et 2 kg 4 g).

Tandis qu'elle prend note de ce qui figure au tableau, Mam me dit qu'elle sent que j'aurai sans doute envie qu'elle aille plus vite. Je lui réponds qu'en effet, j'aimerais bien pouvoir aborder tout ce que j'ai prévu aujourd'hui avec elle et qu'elle doit en principe rejoindre la classe de Chris vers 11h15. Elle me répond que ce n'est pas top grave si on a un peu de retard, mais je lui rétorque que Chris, de son côté, a lui aussi assurément des tas de choses à lui faire apprendre en vue des examens de fin d'année.

Nous passons ensuite aux transformations en kilogrammes de quantités exprimées en grammes. Je conserve le tableau de transformations en effaçant les nombres qui y figurent. Je commence par noter à côté du tableau $1000\text{ g} = \dots$ et Mam répond 1 kg. Je pose ensuite $2000\text{ g} = \dots$ et Mam propose 2kg. Je poursuis avec $900\text{ g} = \dots$ et Mam vient compléter en inscrivant 9, 0, 0 et dans les colonnes adéquates, puis en ajoutant un 0 dans la première colonne et une virgule juste à côté. Je continue avec 90 g que Mam place à nouveau correctement. Elle complète ensuite les deux premières colonnes avec deux zéros et place la virgule entre le second 0 et le 9 (00,90). Je lui fais remarquer que la virgule doit se trouver après le chiffre de la première colonne (où se trouve l'inscription kg) et Mam la déplace en tenant compte de cette indication. Je termine en écrivant $9\text{ g} = \dots\text{ kg}$ et Mam utilise à nouveau le tableau en positionnant adéquatement le 9, puis en complétant avec la virgule et les trois 000. Juste avant de lui demander de prendre note de ce second tableau, je relève l'équivalence entre 0,900 kg et 0 kg 900 g, 0,090 kg et 0 kg 90 g et 0,009 kg et 0 kg 9 g.

Durant sa copie, je sors une fiche d'exercices, sur laquelle je dessine un nouveau tableau de transformation, semblable à ceux utilisés durant la séance. Je l'invite ensuite à compléter sa fiche et à recourir au tableau, quand elle en aura besoin. Je reste à ses côtés tout au long du remplissage de la fiche pour observer les réussites et les erreurs, en proposant de cas en cas, de recourir au tableau. Une fois la fiche entièrement complétée, nous retournons dans la classe de Chris (il est bientôt 11h30), dans laquelle les apprenties sont encore en train de résoudre l'exercice n°5 de l'épreuve d'examen.

Ly travaille avec Jac, Chris est à son pupitre, Co et Sa sont à l'ouvrage à leur place, alors que Lou s'en est allée. Ly me dit qu'elle trouve cet exercice très difficile et me souhaite "bon courage" pour enseigner cela aux apprenties. Co me dit qu'elle en a marre et Sa manifeste également son désir d'arrêter. Je leur dis que l'on reprendra tout cela lors d'une prochaine séance, puis interpelle Chris en lui demandant si cet exercice correspond à des choses qui se pratiquent en cuisine. Il me répond que c'est bien le cas et qu'il est important de savoir calculer précisément le prix d'un repas. Il précise que généralement cela ne se fait pas au centime près (comme c'est le cas dans l'exercice d'examen), mais qu'une différence de 10 ct peut avoir son importance, lorsque l'on travaille une clientèle importante en nombre.

Avant de quitter la classe, je ramasse les épreuves d'évaluation complétées par Co, Jac et Sa, ainsi que les fiches comprenant les exercices 5 de l'épreuve d'examen qu'elles ont partiellement complétées.



Notion mathématique : la proportionnalité

Découverte : Pour transformer les quantités d'une recette de cuisine, il est possible d'utiliser un tableau.

Recette pour ... personnes	Recette pour 1 personne	Recette pour ... personnes
$\swarrow$ $\circ$ $\searrow$ $\vdots \dots$ $\swarrow$ $\circ$ $\searrow$ $\times \dots$		
.....		
.....		

Définition : Les quantités des recettes figurant dans chaque colonne du tableau sont "proportionnelles" entre elles. Cela signifie que pour passer d'une recette à l'autre, il faut augmenter ou diminuer chaque quantité de la même façon (on dit dans la même "proportion").

Pour **diminuer** les quantités d'une recette, on utilise la **division**. Pour **augmenter** les quantités d'une recette, on emploie la **multiplication**.

Autre manière de procéder :

Il est aussi possible de passer directement de la 1^{ère} à la 3^{ème} colonne du tableau :

Recette pour 4 personnes	Recette pour 1 personne	Recette pour 10 personnes
$\swarrow$ $\circ$ $\searrow$ $: 4$ $\swarrow$ $\circ$ $\searrow$ $\times 10$		
$\swarrow$ $\circ$ $\searrow$ $\times \frac{10}{4}$		
20 g		50 g

Narration de la 12^{ème} séance du 02.02.12

Il s'agit d'une séance supplémentaire avec le groupe des apprenties employées de cuisine AFP, pour y faire passer une épreuve d'évaluation, en vue de la constitution des bulletins semestriels qui doivent être déposés le 10 février prochain. Six apprenties sont présentes en début de cours, soit : Mam, Jad, Tiz, Jac, Co et Sa. Chris, le MSP de cuisine, est là aussi, de même que Ly, l'enseignante de soutien, qui assure la traduction en langues des signes à l'intention de Sa. Lou est toujours malade.

Je commence par rappeler l'enjeu de ma présence (épreuve d'évaluation), tout en distribuant à Tiz et à Jad les fiches d'exercices corrigées qu'elles ont complétées lors de la séance du 19 janvier et à Sa la fiche d'exercices supplémentaires corrigée sur les transformation d'unités de masses qu'elle a complétée à domicile et qu'elle m'a rendue la fois dernière. Je présente ensuite à Tiz et Jad l'épreuve concernant la transformation d'unités de masses (celle que Sa, Co et Jac ont déjà effectuée la fois dernière) en leur indiquant que le premier exercice consiste à transformer en grammes des quantités mesurées en kilogrammes, que le deuxième vise à transformer en kilogrammes, des quantités exprimées en grammes et que le troisième propose un problème qui implique des transformations. Je continue en présentant à Jaq et à Mam les épreuves de rattrapage concernant les transformations de recette, en indiquant que les trois premiers problèmes consistent à transformer des quantités prévues pour un certain nombre de personnes en des quantités prévues pour un autre nombre de personnes (je précise qu'il s'agit d'une recette de cocktail pour le premier, un gratin de pommes de terre pour le deuxième et deux recettes de polenta et de gratin d'aubergines pour le troisième) et qu'il y a à nouveau une question bonus où il s'agit de découper un gratin en un certain nombre de morceaux (une apprentie dit que je leur ai déjà fait faire le même exercice et je réponds que c'est bien le cas, puisqu'il s'agit ici d'une épreuve de rattrapage). Je propose enfin à Sa et à Co (qui n'ont pas souhaité faire l'épreuve de rattrapage) un nouvel exercice de calcul de coût d'une recette (semblable à celui qu'elles ont accompli la fois précédente) toujours tiré d'une épreuve d'examen (et je les vois grimacer toutes les deux). J'indique encore qu'il est possible d'utiliser les feuilles d'exercices et de synthèse que je leur ai donné durant les séances précédentes (et m'enquiers auprès de Chris s'il sait dans quelle mesure ce sera aussi possible pour les examens, mais Chris me répond me répond qu'il ne sait pas encore).

Le travail démarre et je serai une nouvelle fois frappé par le sérieux et l'application que chaque apprentie met alors à l'œuvre. Jad commence par demander à Tiz la suite des unités de masses : kg, hg, dag, g, dg, cg, mg (j'interviens pour lui dire qu'elle est censée travailler seule, comme dans un examen) et se constitue un tableau. Elle m'interpelle ensuite, parce qu'elle ne sait pas trop comment le faire fonctionner. Elle me demande s'il s'agit bien de placer le 4 (premier item) dans la colonne des kg, puis de rajouter les zéros et je lui réponds qu'elle doit tenir compte de l'égalité : $1\text{kg} = 1000\text{g}$ ce qui semble la satisfaire. Elle m'interpellera à nouveau au moment d'aborder le deuxième exercice en me demandant si c'est correct de placer 7 0 0 0 (premier item) de droite à gauche (avec 7 dans la colonne des g) : je lui rappellerai à nouveau l'équivalence $1000\text{g} = 1\text{kg}$ pour l'aider à "retourner" 7000 dans le tableau. Une fois qu'elle aura terminé l'épreuve, elle demandera à se rendre aux toilettes. A son retour, je lui donnerai, ferai lire et compléter la première partie de la fiche synthèse concernant les transformations de quantité dans une recette (distribuée aux autres en son absence la fois dernière).

Tiz complète les deux premiers exercices de transformation, puis s'arrête au moment d'aborder la résolution du problème. Elle se rappelle qu'elle a déjà dû réaliser un problème du même type (avec des carottes, précise-t-elle), mais elle n'arrive pas à remettre la main dessus. Elle hésite beaucoup à s'engager dans la résolution, tergiverse un bon moment avant d'y aller. Elle me dira en me remettant sa feuille qu'elle s'est une nouvelle fois fiée à son instinct. Je

profiterai de ce qu'elle finira son travail avant les autres pour lui donner, faire lire et compléter la première partie de la fiche synthèse concernant les transformations de quantité dans une recette (distribuée aux autres en son absence la fois dernière).

Jac complètera son épreuve sans m'interpeller, sauf au moment d'aborder l'exercice n°3 pour lequel elle me demandera une nouvelle feuille de brouillon (elle a donc d'abord répondu à la question bonus, avant d'effectuer l'exercice n°3). Mam réalisera également les deux premiers exercices de l'épreuve sans mot dire. Au moment d'aborder l'exercice n°3, elle me demandera de venir vers elle en me disant que là, elle ne sait plus bien comment faire. Je lui dis qu'il s'agit à nouveau de deux recettes dont il s'agit de transformer les quantités. Je comprends cependant que la façon de procéder qu'elle a utilisée jusqu'ici ne semble plus bien convenir, sans que je ne parvienne sur le fait à en détecter la raison. Mais peu après que je me sois retiré, j'entends alors Mam radieuse (je lui rappellerai d'ailleurs à la pause qu'elle a sans doute appris/compris quelque chose ce matin, dont il faut qu'elle se rappelle toute sa vie) s'exclamer à haute voix quelque chose "ah, j'ai enfin compris ce truc, que ça faisait longtemps que j'essayais de comprendre " et se mettre à la résolution de ce troisième exercice. Mam me rappellera une seconde fois, alors qu'elle est de s'atteler à la question bonus en me montrant qu'elle a trouvé une solution (cf. annexe) avec une portion en trop. Je l'inviterai donc à faire un nouvel essai en dessinant un second rectangle à côté et elle me dira qu'elle n'a qu'à dessiner des tranches sur la largeur du plat, ce qu'elle réalisera juste.

Co et Sa ne parviennent pas à démarrer seule l'exercice n°6 de l'examen. Je m'approche donc d'elles en leur disant qu'il s'agit de calculer le coût d'une recette de banana split. Je leur explique (en le leur montrant sur leur feuille) qu'elles disposent à chaque fois une certaine quantité d'ingrédients et du prix de l'ingrédient et qu'il s'agit de calculer ce que cela va coûter pour la quantité proposée. Je les encourage à essayer, Co est finalement d'accord de s'y mettre, mais Sa refuse. Je lui dis que c'est à elle de tenter quelque chose et lui demande si elle souhaite travailler avec Co (ce qu'elle refuse aussi). Co résout les deux premiers items en additionnant la quantité et le prix et la quantité figurant sur la feuille. Sa procède de même (mais je soupçonnerai après coup qu'elle a un peu "guigné" sur ce que faisait Co).

Après avoir vu ce que Sa écrit (mais sans avoir repéré qu'il en était de même pour Co), je prends un papier sur lequel je dessine une banane (cf. annexe) à côté de laquelle j'écris 60 ct. Je dessine ensuite deux bananes et demande à Sa combien ces deux bananes vont coûter. Elle tape $0,60 + 0,60$ sur la calculatrice, trouve 1.2 et écrit 12 ct que je corrige immédiatement en 1.20 frs. Je poursuis avec le dessin de trois bananes. Elle calcule (sans calculatrice) et trouve, puis écris 1.60 frs. Je lui montre alors sur la calculatrice $0,60 + 0,60 + 0,60 =$ et remplace 1.60 frs par 1.80 frs, puis lui montre encore $0,60 \times 3$ sur la calculatrice. Je prends alors un nouveau feuillet sur lequel j'écris 1, 2 et 3 en colonne. En face du 1, j'écris 60 ct, en face du 2, j'écris 1.20 frs et en face du 3, j'écris 1.80 frs. Un peu dessous, dans la colonne de gauche, j'écris un 6 et demande (avec un geste) à Sa de chercher ce qu'il faut mettre à droite. J'invite dans le même temps Ly à se retirer et à laisser Sa chercher. Je reviens au bout d'un moment, mais Sa n'a rien écrit. J'intercale alors un 4 entre le 3 et le 6 de la colonne de gauche et demande à Sa (à nouveau d'un geste) de chercher son correspondant dans la colonne de droite. Lorsque je reviendrai un peu plus tard, je verrai alors que Sa a complété, en face du 6, avec un 3.60 ct (que je transformerai en frs). Je poursuis ensuite (toujours en l'absence de Ly) en dessinant 1, puis 2, puis 3 ronds (afin de représenter les boules de glace) en colonnes sur un nouveau feuillet, trois flèches pour indiquer leur correspondant dans la seconde colonne, 40 ct en face du premier rond et trois petits points en face des deux et trois ronds. Je prends ensuite un nouveau papier, en remplaçant les ronds par les nombres 1, 2 et 3, redessinant les flèches et inscrivant à nouveau les 40 ct en face du 1 et les deux fois trois petits points en face du 2 et du 3, demandant à Sa de chercher. Elle trouvera et inscrira 0,80 ct et 1,20. J'écrirai alors un 12 un

peu plus bas dans la première colonne suivi d'une flèche et de trois petits points que Sa complétera avec 4.80 frs. Pour remplir la suite des coûts (crème, sauce au chocolat et amandes) Sa s'appuiera beaucoup sur les interactions que j'ai avec Co. Pour les meringues, elle écrira $0,05 \text{ ct} + 12 = 12,05.-$, puis me fera un signe pour me demander s'il s'agit bien de procéder à la somme de tous les prix découverts, ce à quoi j'acquiescerai ce qui lui permettra d'aboutir à un total de 24,425 CHF.

Co, de son côté, reste assez perplexe face au prix de la crème à calculer. Je lui demande alors si elle connaît la relation qui existe entre 1 litre et 1 décilitre et elle me répond tout d'abord qu'un litre vaut 1000 dl. Je lui dis que cette relation est plutôt celle qui existe entre les kilos et les grammes et nous avons toute une discussion sur les rapports entre litre et décilitre, litre et centilitre et litre et millilitre. Une fois posée l'égalité $1 \text{ l} = 10 \text{ dl}$, se met à écrire au dos de sa feuille 7.20.-, puis $7.20 : 10 \text{ dl} = 0,72 \text{ ct}$, puis $0,72 \times 2 = 1,44.-$. Je lui dis que je trouve que c'est une bonne idée, mais lui signale qu'il s'agit de trouver le prix de 3 dl de crème et non pas deux. Elle fait mine de vouloir multiplier 0,72 par 4, mais je lui indique que comme il s'agit de 3 dl de crème dont il faut trouver le coût, il suffit plutôt de multiplier par 3. Elle poursuivra avec le calcul du prix de la sauce au chocolat, puis le prix des amandes. Pour le premier elle s'appuiera sur la relation $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ pour diviser le prix de la sauce au kilo par 1000 ($9 : 1000 \text{ g} =$), puis en multipliant le résultat 0,009 par 180 g pour trouver 1,62. Enfin, elle fera de même avec les amandes en divisant le prix du kilo par 1000 ($6.50 : 1000 \text{ g}$), un résultat qui la conduira à refaire plusieurs fois son calcul sur la calculette (comme pour vérifier si c'était bien correct). C'est donc moi qui l'ai encouragée à poursuivre sans trop se préoccuper de ce nombre assez bizarre pour qu'elle puisse aboutir au résultat de 0,195, un nombre auquel il lui est à nouveau difficile de donner sens. J'essaierai très maladroitement de lui dire qu'il s'agit de 0,195 francs, ce qui correspond en fait à 0 franc et 195 centimes, avant de me raviser (prenant immédiatement conscience de mon erreur) pour dire qu'il s'agit en fait de 19,5 ct, soit à peu près 20 centimes, ce que Co traduira sur sa feuille par l'inscription 0,19,5ct !

Au moment de quitter la classe, je dis aux apprenties qu'elles m'ont épaté par l'application qu'elles ont mises dans la réalisation des divers travaux que je leur ai proposés. J'ajoute même sur le ton de la boutade que je pourrai être dès lors tenté de leur donner des épreuves d'évaluation durant chaque séance.

ANNEXE N°5

NARRATION D'UNE SEANCE⁵ AVEC EL DURANT L'ANNÉE 2012-2013

Narration de la séance avec EL du 12.12.12

La séance a lieu avec El, apprentie en intendance de deuxième année, un mercredi en fin d'après-midi. El travaille avec moi une heure par semaine, à sa demande, pour faire des progrès en mathématiques. En fin d'année précédente, El a été orientée en formation pratique et elle a depuis lors pris plusieurs initiatives pour tenter de "prouver" au personnel du CFPS qu'elle est capable de faire mieux, c'est-à-dire de suivre une formation débouchant sur une attestation fédérale de formation professionnelle (AFP). C'est à ce titre qu'elle vient "faire des maths" le mercredi après-midi, sur le temps de congé qui lui est octroyé dans son secteur, en compensation du service qu'elle réalise à midi auprès des personnes qui mangent au CFPS.

Au début de nos rencontres, El m'a laissé choisir ce que je souhaitais lui enseigner (tout en insistant pour que je lui donne des brochures d'exercices pour faire des devoirs le soir dans son pavillon), ce qui fait que nous avons travaillé quelques séances sur le thème des fractions. Au bout de quelque temps, c'est El qui a décidé par elle-même d'arrêter le travail sur les fractions, me disant que cela suffisait et que l'on pouvait passer à autre chose, quand elle a eu le sentiment d'avoir compris la signification de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$, soit les signes qui correspondaient aux indications figurant sur le récipient qu'elle utilisait pour effectuer des dosages dans son secteur professionnel (alors même que j'étais en train de m'interroger sur la façon dont je pourrais bien l'aider à établir des liens entre $\frac{1}{2}$ et 0,5, $\frac{3}{4}$ et 0,75 ou encore $\frac{1}{4}$ et 0,25).

Il y a deux semaines, El m'a demandé de pouvoir travailler sur les "transformations de recettes", parce qu'elle ne savait pas toujours comment s'y prendre pour adapter les quantités qui étaient prévues dans un livre de recettes au nombre de personnes effectif pour lesquelles elle devait ensuite préparer un repas.

Lors de la séance précédente, El a choisi une recette tirée de son livre de cuisine - des pâtes à la crème - prévue pour quatre personnes, que je lui ai proposé d'adapter pour douze personnes. Les transformations de quantités ne lui ont pas posé de difficultés particulières, du fait qu'El a tout de suite vu qu'il suffisait de multiplier chaque quantité de la recette par trois - et qu'elle savait le faire - pour obtenir la quantité prévue pour douze personnes. Sauf dans les cas les quantités étaient exprimées avec des $\frac{1}{2}$, comme 2 dl $\frac{1}{2}$ de lait et $\frac{1}{2}$ cc de sel et que là, El ne savait pas comment s'y prendre (comment multiplier $\frac{1}{2}$ par 3 ?), que ce soit par elle-même ou à l'aide d'une calculette. La séance s'est donc poursuivie en regardant comment il était possible de multiplier $\frac{1}{2}$ par 3, soit en utilisant directement le signe $\frac{1}{2}$ pour obtenir $\frac{3}{2}$, soit en passant par son équivalent 0,5 qui, lui, était "utilisable" sur la calculette, permettant d'obtenir 1,5. J'ai également pu observer durant cette séance que si la relation $4 \times 3 = 12$ était bien connue de la part de El, sa réciproque (quand je lui ai proposé de trouver les quantités pour quatre personnes à partir d'une recette prévue pour douze) $12 : 3 = 4$ ne l'était pas : El prétextait qu'elle ne savait pas faire les divisions.

En fin de séance, j'ai proposé à El deux problèmes que j'avais utilisés l'an passé dans une épreuve d'évaluation que j'avais soumise aux apprenties de cuisine à qui je donnais des cours. Il s'agissait de deux problèmes de transformation de quantités d'une recette : le premier proposait à nouveau une transformation de recette pour quatre en une recette pour douze personnes et le second impliquait une transformation de recette pour quatre personnes en une

⁵ Du fait que le chapitre 9, qui correspond aux dix séances de soutien que j'ai entretenues avec El durant l'année 2012-2013 est proposé sous une forme narrative, une seule narration est proposée en annexe, soit celle de la séance qui a lancé le travail autour des transformations d'ingrédients d'une recette.

recette pour quinze personnes. Comme je pouvais m'y attendre, El a effectué sans difficulté le premier problème, mais s'est arrêtée devant le second, disant qu'elle ne savait comment s'y prendre pour passer de quatre à quinze ; elle a précisé qu'elle aurait bien une idée pour seize personnes, mais qu'elle ne savait pas vraiment comment s'y prendre pour quinze. Je lui ai proposé d'emporter le problème avec elle, d'y réfléchir pour la semaine d'après, lui disant que je lui montrerai à cette occasion plusieurs procédés pour le résoudre.

A son arrivée, El a apporté ses brochures d'exercices, mais n'a pas repris le problème de la fois dernière avec elle. Je vais donc lui en faire une photocopie, l'invite à le relire et lui demande si elle a une idée de comment s'y prendre pour lui y apporter une solution. Elle se rappelle bien du fait qu'il faut trouver une manière de « faire fois » pour passer de quatre à quinze, mais sans parvenir à trouver le nombre qui permet d'y aboutir. Après lui avoir demandé de me dicter les quantités qui figurent dans la recette pour que je puisse les noter au tableau, je lui propose, pour se rapprocher de quinze, de chercher tout d'abord les quantités à prévoir dans le cas d'une recette pour huit personnes. Immédiatement, El répond qu'il suffit de "doubler chacune" et trouve par oral, l'une après l'autre, les quantités à prévoir dans le cas de la recette pour huit personnes : elle opère à chaque fois en disant "deux fois n", tandis que, de mon côté, j'inscris $\times 2$ entre les deux colonnes de résultats figurant au tableau.

$\text{---} \times 2 \text{---} \rightarrow$	
4 personnes	8 personnes
6 œufs	12 œufs
10 cs de farine	20 cs
8 v. de lait	16 v.
20 g de beurre	40 g
16 g de sucre	32 g
6 cc de sucre v.	12 cc

C'est El ensuite qui propose de trouver les quantités d'une recette pour seize personnes. Elle dit qu'il faut encore doubler, tout en précisant que cela fera pour seize et non pas pour quinze. Je l'invite à suivre son idée, ce à quoi elle consent en procédant à nouveau par oral, faisant "deux fois n" pour chaque quantité de la recette pour huit personnes. A nouveau, je prends note des quantités qu'elle me dicte au tableau et inscris au terme de ses calculs, un $\times 2$ entre les deux colonnes de résultats. Je demande alors à El, si elle voit comment il serait possible de passer directement de la recette pour quatre personnes à la recette pour seize personnes. Elle réfléchit un moment, puis propose de multiplier par 4, une solution que je lui demande de vérifier en recalculant chaque quantité figurant au tableau. Je note ensuite $\times 4$ entre les deux colonnes de résultats.

$\text{---} \times 4 \text{---} \rightarrow$		
$\text{---} \times 2 \text{---} \rightarrow$	$\text{---} \times 2 \text{---} \rightarrow$	
4 personnes	8 personnes	16 personnes
6 œufs	12 œufs	24 œufs
10 cs de farine	20 cs	40 cs
8 v. de lait	16 v.	32 v.
20 g de beurre	40 g	80 g
16 g de sucre	32 g	64 g
6 cc de sucre v.	12 cc	12 cc

Revenant à la donnée du problème, je lui demande une nouvelle fois comment il serait possible d'établir des quantités pour quinze personnes. Elle suggère d'enlever un œuf à 24 pour parvenir à 23. Je l'invite à poursuivre son idée en soustrayant tour à tour "huit fois un œuf", afin (c'est du moins ce que je souhaite) de l'amener à la contradiction 12 œufs (par

multiplication) / 16 œufs (par soustraction) pour huit personnes ; mais au fil des calculs, j'ai la nette impression de perdre El en chemin qui n'a pas l'air de bien saisir où je l'emmène.

La contradiction ne prenant pas vraiment, j'indique à El que je vais maintenant essayer de lui enseigner l'une des voies (je précise bien qu'il y en a plusieurs) qui permet d'aboutir aux quantités à prévoir pour quinze personnes. Je lui dis qu'on va passer par l'arrière en remontant un peu plus en amont dans ce qui est devenu un tableau et en cherchant les quantités d'ingrédients qu'il faut prévoir pour deux personnes. El dit tout de suite qu'elle sait comment s'y prendre, partageant par deux les quantités prévues dans la recette pour quatre personnes. J'inscris une nouvelle fois chaque résultat qu'elle me dicte au tableau et une fois la liste établie, lui demande si elle voit comment il serait possible de passer d'une recette pour deux personnes à une recette pour quinze personnes.

			$\xrightarrow{x 4}$	
	$\xrightarrow{x 2}$		$\xrightarrow{x 2}$	
2 personnes	4 personnes	8 personnes	15 personnes	16 personnes
3 œufs	6 œufs	12 œufs		24 œufs
5 cs	10 cs de farine	20 cs		40 cs
4 v.	8 v. de lait	16 v.		32 v.
20 g	20 g de beurre	40 g		80 g
16 g	16 g de sucre	32 g		64 g
6 g	6 cc de sucre v.	12 cc		12 cc

El propose de "faire fois cinq", en utilisant le 3 (correspondant au nombre d'œufs) se trouvant au tableau en-dessous du 2 de 2 personnes. Je conteste la suggestion en disant qu'il s'agit bien de passer d'une recette pour deux - et non pour trois - à une recette pour quinze personnes. El propose alors de "faire cinq fois deux" pour trouver dix, ce que je conteste à nouveau en répétant qu'il s'agit de passer d'une recette pour deux à une recette pour quinze (et non d'une recette pour deux à une recette pour dix) personnes. Cherchant d'autres solutions, El propose encore à plusieurs reprises de "faire fois cinq", proposition que je conteste à chaque fois, en reprenant la donnée du passage de deux à quinze. El rit beaucoup de me voir gesticuler au tableau pour effectuer ces rappels successifs, sans pour autant parvenir à trouver la relation multiplicative qui permet de transformer deux en quinze.

J'invite alors El à reprendre le chemin envisagé précédemment en remontant encore un cran dans le tableau, passant d'une recette pour deux personnes à une recette pour une personne. El montre à nouveau qu'elle sait comment s'y prendre. Pour le nombre d'œufs, elle propose d'abord "deux", mais n'est pas bien sûr de son résultat. Je lui rappelle qu'on a vu cela ensemble la fois dernière et lui montre que pour partager trois en deux, on trouve "un et demi" que j'écris au tableau : $1 \frac{1}{2}$. El se rappelle en revanche que $1 \frac{1}{2}$ est équivalent à 1,5, soulignant que c'est moi qui le lui ai appris lors de notre dernière rencontre et qu'elle ne le savait pas auparavant. Je lui demande de poursuivre la transformation des quantités, ce qu'elle fait en me dictant correctement chaque résultat que je note encore au tableau.

			$\xrightarrow{x 4}$	
	$\xrightarrow{x 2}$		$\xrightarrow{x 2}$	
1 personne	2 personnes	4 personnes	8 personnes	15 personnes
1,5 / $1 \frac{1}{2}$	3 œufs	6 œufs	12 œufs	24 œufs
2,5 / $2 \frac{1}{2}$	5 cs	10 cs de farine	20 cs	40 cs
2 v.	4 v.	8 v. de lait	16 v.	32 v.
10 g	20 g	20 g de beurre	40 g	80 g
8 g	16 g	16 g de sucre	32 g	64 g
3 g	6 g	6 cc de sucre v.	12 cc	12 cc

Je demande alors à El si elle peut maintenant passer d'une recette pour une personne à une recette pour quinze personnes, mais elle me répond qu'elle ne sait pas comment s'y prendre. Je l'encourage à essayer un peu, l'invite à chercher sur la calculette, mais El répond qu'elle ne sait comment faire. C'est alors qu'elle propose soudain de "faire quinze fois un". Je lui demande de vérifier sur la calculette, mais elle renonce à le faire, parce qu'elle dit qu'elle sait très bien que cela va marcher.

			— x 2 →	x 4 —————→	————— x 2 —————→	
1 personne	2 personnes	4 personnes	8 personnes	15 personnes	16 personnes	
1,5 / 1 ½	3 œufs	6 œufs	12 œufs	22,5 œufs	24 œufs	
2,5 / 2 ½	5 cs	10 cs de farine	20 cs	37,5 cs	40 cs	
2 v.	4 v.	8 v. de lait	16 v.	30 v.	32 v.	
10 g	20 g	20 g de beurre	40 g	150 g	80 g	
8 g	16 g	16 g de sucre	32 g	120 g	64 g	
1,5 cc	6 cc	6 cc de sucre v.	12 cc	22,5 cc	12 cc	

Je lui explique alors que c'est cela qui est bien quand on a une recette pour une personne, puisqu'il suffit ensuite de multiplier chaque quantité par le nombre de personnes de la recette que l'on souhaite réaliser et que le tour est joué. El me demande si cela fonctionne aussi pour dix-neuf personnes. Je réponds par l'affirmative en disant que cela sera aussi le cas pour tous les nombres que l'on souhaite atteindre (et je l'encourage à essayer la chose sur la calculette). Je demande ensuite à El de chercher les quantités d'ingrédients de la pâte à crêpes pour quinze personnes, ce qu'elle fait en calculant les deux premières avec la calculette, puis en procédant par oral (quinze fois n) pour les quatre suivantes. A la suite de cela, El me demande de pouvoir noter cette manière de procéder quelque part, parce qu'elle a peur de l'oublier. Je prends une feuille et des stylos, viens m'asseoir à ses côtés et me mets à écrire :

Transformer une recette

4 personnes	1 personne
6 œufs	
10 cs de farine	
8 v. de lait	
20 g de beurre	
16 g de sucre	
6 cc de sucre vanillé	

Je rappelle ensuite à El que pour passer d'une recette à quatre personnes à une recette pour une personne, elle a tout d'abord partagé les quantités par deux, puis une nouvelle fois par deux. Je montre ce que cela représente comme calcul à effectuer sur la calculette en faisant successivement $6 \div 2 =$ pour trouver 3, puis $3 \div 2 =$ pour trouver 1,5. Je lui demande si elle saurait maintenant comment faire pour passer d'un seul coup (je précise en une seule opération) d'une recette pour quatre personnes à une recette pour une personne. El répond qu'elle ne sait pas. Je lui tends la calculette, mais elle n'a pas d'idées. J'insiste un peu, mais rien ne vient (pas même une idée de soustraction). Je lui montre donc sur la calculette qu'il s'agit de poser $4 \div 4 =$ pour passer de 4 à 1, l'invite à le faire par elle-même, puis à essayer la chose pour d'autres nombres ($n \div n = 1$). Je lui demande ensuite d'effectuer les transformations des quantités de la recette pour quatre personnes en une recette pour une personne en utilisant ce procédé. El s'applique alors à faire $6 \div 6 = 1$, $10 \div 10 = 1$,... Je l'interromps en lui disant que ce n'est pas vraiment ce qu'elle doit trouver. Je me lève et lui montre au tableau les quantités d'œufs, de farine, de lait qu'elle a précédemment découvert dans le cas d'une recette pour une personne. J'inscris au tableau le $\div 4$ que je viens de lui

montrer pour passer d'une recette pour quatre personnes à une recette pour une personne, mais El semble ne pas comprendre ce que je souhaite lui voir faire. Je reprends donc ce qu'elle avait réalisé auparavant pour passer d'une recette pour quatre à une recette pour huit personnes, puis d'une recette pour quatre à une recette pour seize personnes et c'est alors qu'El me dit qu'elle a compris qu'il s'agit d'opérer $\div 4$ pour chaque quantité d'ingrédients. Je l'invite donc à procéder de la sorte, mais à l'image de ce qu'elle avait fait dans le cas de la multiplication, elle ne procède pas par $n \div 4 =$, mais par $4 \div n =$. Je me vois donc contraint de l'interrompre à nouveau pour lui montrer sur quelques exemples avec la calculatrice la non-commutativité de la division (je lui montre que $6 \div 4 \neq 4 \div 6$, alors même que $6 \times 4 = 4 \times 6$).

J'invite ensuite El à chercher toutes les quantités pour une personne en divisant par quatre les quantités pour quatre personnes, ce qu'elle fait à l'aide de la calculatrice (tandis que je note les résultats obtenus sur sa feuille) ; puis à trouver les quantités d'ingrédients pour quinze personnes qu'elle calcule en opérant $\times 15$ et que j'inscris également sur sa feuille.

Transformer une recette

_____ ÷ 4 _____→	_____ x 15 _____→	
4 personnes	1 personne	15 personnes
6 œufs	1,5 œuf	22,5 œufs
10 cs de farine	2,5 cs de farine	37,5 cs de farine
8 v. de lait	2 v. de lait	30 v. de lait
20 g de beurre	5 g de beurre	75 g de beurre
16 g de sucre	4 g de sucre	60 g de sucre
6 cc de sucre vanillé	1,5 cc de sucre vanillé	22,5 cc de sucre vanillé

La séance se termine alors que j'annonce à El que je lui présenterai d'autres façons de faire la prochaine fois. En consultant mon agenda, je me rends toutefois compte que la prochaine fois ne sera pas vraiment prochaine, puisque le mercredi d'après, c'est la fête de Noël, les deux mercredis suivants sont sur les vacances de Noël et le mercredi encore après, El a un rendez-vous chez la physio. Avec un peu de chance, on se reverra donc le 16 janvier pour reparrer de recettes de cuisine.