La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta

Stueckelberg von Breidenbach, Ernst Carl Gerlach

How to cite

STUECKELBERG VON BREIDENBACH, Ernst Carl Gerlach. La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta. In: Helvetica physica acta, 1942, vol. 15, n° 1, p. 23–37. doi: 10.5169/seals-111289

This publication URL: https://archive-ouverte.unige.ch/unige:161905

Publication DOI: 10.5169/seals-111289

La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quanta

par **E. C. G. Stueckelberg.**

(18. X. 41.)

Résumé. Une légère modification de la mécanique d'Einstein (remplaçant l'extrémum de $\int m\,ds = \int m\sqrt{-\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu}\,d\lambda$ par celui de $\frac{1}{2}\int \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu\,d\lambda$) permet d'établir une nouvelle mécanique relativiste. Ses résultats ne diffèrent pas des résultats obtenus par la forme habituelle, si l'on ne fait intervenir que des champs gravifiques et électromagnétiques. Mais, tout en gardant la covariance de la théorie, on peut introduire des *champs nouveaux* qui ont pour conséquence la *création de particules dans la théorie classique.*

La quantification de la théorie représente l'extension logique de la théorie de Schroedinger aux quatre dimensions de l'espace-temps. Un de ses résultats est la *création de particules par des champs électromagnétiques.*

Exposé général de la théorie[1]).

Théorie classique du mouvement d'un point de masse. — Au cours du temps t, le point matériel décrit une courbe troisdimensionnelle, la *trajectoire*. Celle-ci est déterminée par les trois fonctions $x^i = q^i(\tau)$, qui donnent les valeurs des trois coordonnées $(i = 1, 2, 3)$ x^i au temps $t = \tau$. Si l'on introduit le temps $t = x^4$ comme une quatrième coordonnée, et si, en plus, on considère $t = \tau(\lambda) = q^4(\lambda)$ comme fonction d'un paramètre λ quelconque, la courbe quadridimensionnelle $x^\mu = q^\mu(\lambda)$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ représente la *ligne d'univers* en termes d'un paramètre quelconque λ.

La théorie d'Einstein (§ 1) donne une loi qui permet de construire ces lignes d'univers, si le *champ de gravitation* $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x)\big)$ et le *champ électromagnétique* $\big(B^{\mu\nu}(x) = -B^{\nu\mu}(x)\big)$ sont donnés comme fonctions d'espace-temps $\big(B^{\mu\nu}(x) = B^{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4)\big)$. Une telle ligne est entièrement déterminée si 1° la position $\vec{x} = \vec{q}$ $(= q^1, q^2, q^3)$ et la vitesse $\vec{v}$ $(= dq^1/d\tau, dq^2/d\tau, dq^3/d\tau)$ sont données pour un certain temps initial $t = q^4$ et si 2° un certain nombre e/m (rapport entre la charge électrique et la masse de repos) qui caractérise le point matériel est connu.

Ne sont admises dans la théorie d'Einstein, que les lignes d'univers ayant *une seule intersection* avec un hyperplan $t = x^4 =$

= const (cf. ligne A en fig. 1)*). En effet, ce ne sont que ces lignes qui correspondent à la conception habituelle de causalité: La seule intersection $x^i = q^i(t = \text{const})$ est l'endroit où l'on trouve la particule au temps t. D'autres lignes (par ex. la ligne B en fig. 1) montrent deux intersections pour des plans $t = x^4 = \text{const} \ll 0$ et aucune intersection pour $t = x^4 = \text{const} \gg 0$. Si, au moment de l'établissement de la théorie d'EINSTEIN, de telles lignes n'étaient pas discutées, c'était parce que le phénomène de la création et de l'annihilation de paires de particules échappait encore aux expérimentateurs et aux théoriciens. Or la ligne B de la fig. 1[1]) décrit une telle annihilation mutuelle de deux particules au moment $t \sim 0$.

Tandis que la mécanique d'EINSTEIN n'admettait donc que des courbes du type A, la mécanique proposée au § 2 se libère de cette restriction. Son résultat sera que, en plus des lignes A, des courbes du type B ou C peuvent apparaître. Les deux partenaires d'une paire ainsi créée ou anéantie ont des charges électriques opposées. Pourtant, les phénomènes B et C ne font apparition que si l'on admet, en plus des champs électromagnétiques et gravifiques, un champ d'un type nouveau $K^\mu(x)$ (§ 3). En l'absence de ce champ, la mécanique proposée ne présente pas de nouveaux phénomènes. Il en sera tout autrement dans la nouvelle mécanique quantifiée.

Théorie quantique du mouvement d'un point de masse. — La mécanique proposée permet une quantification en quatre dimensions analogue à celle introduite par SCHROEDINGER pour les trois dimensions spatiales en théorie non relativiste. Le rapport entre la mécanique classique et la mécanique quantique (§ 5) est alors celui entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire dans le continu quadridimensionnel de l'espace-temps. Pour en donner un exemple, nous considérons le cas où, au temps $t = 0$, un champ électrique homogène très fort E_1 (parallèle à l'axe x^1) apparaît pendant un intervalle très court δt. Cet événement peut être décrit par un potentiel vecteur Φ^μ à une seule composante $\Phi^1 = E_1 \delta t$ pour $t < 0$, qui disparaît pour $t > 0$. L'hypersurface $t = 0$ représente ainsi une surface de discontinuité dans le continu spatiotemporel. Un rayon au sens de l'optique géométrique est *réfracté* sur cette surface (cf. fig. 2). La réfraction n'est pas autre chose que le changement de vitesse dû à l'accélération subie par la particule pendant l'intervalle δt. La ligne d'univers de la mécanique classique correspond à ce rayon réfracté. Mais l'optique ondula-

*) Les figures ont été publiés à l'occasion de l'anniversaire de M. A. HAGENBACH dans le numéro précédent. Helv. Phys. Acta **14**, 588 (1941).

toire montre qu'à toute *réfraction* est liée une *réflexion* d'une intensité non nulle. Ce rayon réfléchi est du type C (ou B) de la fig. 1. Notre nouvelle mécanique montre ainsi que, en théorie des quanta, le champ électromagnétique a la propriété de créer et d'annihiler des paires de particules.

Remarquons, pour terminer cette introduction, que la mécanique d'EINSTEIN ne permettait pas de quantification. *L'électron de Dirac* n'est pas la quantification du point matériel d'EINSTEIN, mais celle d'un *système plus complexe* (point de masse avec des degrés de liberté intérieurs)[2]). D'autre part, l'équation de SCHROEDINGER-GORDON n'est pas une quantification du point de masse non plus, mais la *théorie d'un continu scalaire* à deux composantes (= une composante complexe). La *quantification de ce continu*, par PAULI et WEISSKOPF[3]), montre alors le phénomène de la création et de l'annihilation de paires de quanta de charges opposées.

La mécanique ici présentée nous semble donc être la seule mécanique relativiste du point de masse qui permet la quantification directe.

§ 1. La mécanique d'Einstein.

Soit $g_{\mu\nu}(x)$ les composantes covariantes du tenseur fondamental (= potentiel gravifique) et dq^μ les différences de deux événements voisins sur la ligne d'univers $x^\mu = q^\mu(\lambda)$ qui est parcourue par le point matériel. La grandeur $(ds)^2 = -g_{\mu\nu}(q)\,dq^\mu dq^\nu$ peut alors être positive, nulle ou négative. Deux événements sont situés temporellement l'un vis-à-vis de l'autre si $(ds)^2 > 0$. dq^4 ne peut jamais devenir zéro sur une ligne où l'on a partout $(ds)^2 > 0$. Sur une telle ligne, le temps propre est défini par

$$ds = \pm \sqrt{g_{\mu\nu}\,dq^\mu\,dq^\nu} \text{ suivant que } dq^4 \gtrless 0 \tag{1,1}$$

L'équation fondamentale de la mécanique d'EINSTEIN prend alors la forme «masse au repos» par «accélération propre» égale à «force gravifique plus force électromagnétique». On définit d'abord la quadrivitesse normalisée $u^\mu = dq^\mu/ds$; $w_\mu w^\mu = -1$. La loi, pour une particule de masse de repos m et de charge électrique e s'écrit sous forme

$$m\,\frac{dw^\mu}{ds} = -m\,\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\;w^\alpha\;w^\beta + e\,B^{\mu\nu}\;w_\nu \tag{1,3}$$

Cette loi dérive d'un principe de variation $\delta I = 0$, où I se compose de deux parties $I = I_{\text{mat}} + I_{\text{int}}$.

$$I_{\text{mat}} = m\int_{q'}^{q''} ds\;;\quad I_{\text{int}} = e\int_{q'}^{q''} dq^\mu\,\Phi_\mu(q) \tag{1,4}$$

Sont à varier les lignes d'univers $q^\mu = q^\mu(\lambda)$ reliant l'événement q' à q'' $(q' = (q^{1'}, q^{2'}, q^{3'}, q^{4'}))$. $B_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ sont les dérivées des potentiels $\Phi_\mu(x)$ et $g_{\mu\nu}(x)$

$$\mathrm{B}_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu}\ ; \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{d x^\lambda}\right) \tag{1,5}$$

évaluées pour $x^\mu = q^\mu$.

§ 2. La mécanique nouvelle.

Nous désignons les dérivées de $q^\mu(\lambda)$ par rapport au paramètre λ par $\dot q^\mu = \frac{dq^\mu}{d\lambda}$. Alors les équations fondamentales sont:

$$\frac{d}{d\lambda}\, \dot q^\mu = -\, \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, \dot q^\alpha\, \dot q^\beta + e\, B^{\mu\nu}\, \dot q_\nu \tag{2,1}$$

et, pour $\dot q_\mu = g_{\mu\nu}\, \dot q^\nu$

$$\frac{d}{d\lambda}\, \dot q_\mu = \tfrac{1}{2}\, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\, \dot q^\alpha\, \dot q^\beta + e\, B_{\mu\nu}\, \dot q^\nu \tag{2,2}$$

Elles dérivent d'un principe de variation analogue à celui du du § 1. I_{int} a la forme identique à (1,4), mais

$$I_{\text{mat}} = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, \tfrac{1}{2}\, \dot q_\mu\, \dot q^\mu = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, L_{\text{mat}}(q^\mu, \dot q^\mu) \tag{2,3}$$

On vérifie d'abord que la quantité

$$m^2 = -\, \dot q_\mu\, \dot q^\mu \tag{2,4}$$

est une *constante d'intégration* associée à la ligne d'univers. Donc, pour autant que cette constante est choisie positive $(m^2 > 0)$, la ligne est une succession de points situés temporellement les uns relativement aux autres. A une augmentation $d\lambda$ correspond alors une variation $dq^4 \gtrless 0$ suivant que $\dot q^4 \gtrless 0$. Introduisant le ds de la définition (1,1), on trouve $(m = +\sqrt{m^2})$

$$ds = \pm\, m\, d\lambda \quad \text{suivant que} \quad \dot q^4 \gtrless 0 \tag{2,5}$$

La substitution de (2,5) en (2,1) donne l'équation identique à celle d'Einstein (1,3), mais avec les *deux possibilités du signe de e,* soit les équations d'Einstein pour la *particule* (m, e) et pour l'*antiparticule* $(m, -e)$. Notre théorie contient donc les deux charges d'une façon absolument symétrique.

Nous étudions alors les équations décrivant la réaction de la particule sur les champs.

Ce sont les équations de gravitation $G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}$ et les équations de MAXWELL. Pour que les premières soient possibles, il faut démontrer l'existence d'un tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ satisfaisant à

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \tag{2,6}$$

en vertu de l'équation de mouvement (2,1) et des équations de MAXWELL

$$\frac{\partial [H^{\mu\nu}]}{\partial x^{\nu}} = 4\pi [J^{\mu}]\,; \qquad \frac{\partial [J^{\mu}]}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{2,7}$$

$[F] = \sqrt{-\| g \|}\, F$ est la densité tensorielle associée à un tenseur F. $\| g \|$ est le déterminant des $g_{\mu\nu}$. La première équation (2,7) dérive d'un principe de variation invariant

$$\delta \iiiint (d\,x)^4 [\mathfrak{L}] = 0 \tag{2,8}$$

avec

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\text{él}} = \mathfrak{L}_{\text{maxw}} + \mathfrak{L}_{\text{int}}$$

$$\mathfrak{L}_{\text{maxw}} = -\frac{1}{16\pi} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}\,; \quad H^{\mu\nu} = -8\pi \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial B_{\mu\nu}} \tag{2,9}$$

$$\mathfrak{L}_{\text{int}} = J^{\mu} \Phi_{\mu}$$

Les fonctions $\Phi_{\mu}(x)$ sont à varier. Pour définir J^{μ} nous introduisons la fonction singulière de DIRAC $[\varrho(x)]$[1]) ayant la propriété

$$\iiiint_{\Omega} (d\,x)^4 [\varrho(x)]\, f(x) = f(0) \quad \text{ou} \quad = 0 \tag{2,10}$$

suivant que le point $x^{\mu} = 0$ est contenu en Ω ou non. Si nous ajoutons à $\mathfrak{L}_{\text{él}}$ un $\mathfrak{L}_{\text{mat}}$ défini par

$$[\mathfrak{L}_{\text{mat}}] = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, g_{\mu\nu}(x) \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} [\varrho(x - q(\lambda))] \tag{2,11}$$

et, si nous définissons en $[\mathfrak{L}_{\text{int}}]$ le courant $[J^{\mu}]$ par

$$[J^{\mu}(x)] = e \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \dot{q}^{\mu} [\varrho(x - q(\lambda))] \tag{2,12}$$

---

*) $[\varrho]$ a en effet les propriétés d'une « densité tensorielle » scalaire. $(d\,x)^4 = d\,x^1\, d\,x^2\, d\,x^3\, d\,x^4$.

les équations de la mécanique (2,1) et (2,2) partent du même principe (2,8) avec

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\text{maxw}} + \mathfrak{L}_{\text{mat}} + \mathfrak{L}_{\text{int}} \tag{2,13}$$

En plus, des fonctions $\Phi_\mu(x)$, les fonctions $q^\mu(\lambda)$ sont à varier. La grandeur

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\|g\|}} \left(\frac{\partial[\mathfrak{L}]}{\partial g_{\mu\nu}}\right)_{\Phi_\mu,\; q^\mu = \text{const}} \tag{2,14}$$

satisfait alors à (2,6). $T^{\mu\nu}$ est, en vertu de l'indépendance de $\mathfrak{L}_{\text{int}}$ des $g_{\mu\nu}$, la somme $T^{\mu\nu}_{\text{maxw}} + T^{\mu\nu}_{\text{mat}}$. $T^{\mu\nu}_{\text{maxw}}$ a la forme habituelle du tenseur d'énergie-impulsion électromagnétique. La densité d'énergie correspondante T^{44}_{maxw} est donc positive. Il en est de même pour

$$[T^{\mu\nu}_{\text{mat}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \dot{q}^\mu\, q^\nu\, [\varrho(x - q(\lambda))] \tag{2,15}$$

pour autant que $\dot{q}^4 \neq 0$. La grandeur

$$W(t) = \iiint_V (dx)^3 [T^{44}(x^1, x^2, x^3, x^4 = t)] = \pm\, \dot{q}^4 = m w^4 \tag{2,16}$$

$$= \frac{m}{+\sqrt{1 - |\vec{v}(t)|^2}} \quad \text{suivant que } \dot{q}^4 \gtrless 0$$

est en effet *toujours* positive. Elle représente l'énergie totale portée par la matière. L'intégrale est à prendre sur un volume spatial V entourant la ligne d'univers à l'instant t.

La charge totale de la particule vaut, à ce même instant:

$$e(t) = \iiint_V (dx)^3 [J^4(x^1, x^2, x^3, x^4 = t)] = \pm\, e \tag{2,17}$$

$$\text{suivant que } \dot{q}^4 \gtrless 0$$

Remarquons ici une différence fondamentale entre la mécanique habituelle et la nôtre: la particule habituelle est caractérisée par *deux constantes m et e*. Pour prédire la ligne d'univers, il suffit de mesurer, à un certain moment $t = q^4$, les trois coordonnées q^i et les trois composantes de sa vitesse $v^i = \delta q^i / \delta q^4$. Dans notre modèle, la particule est caractérisée par *une seule constante e*. Nous mesurons d'abord, comme dans la théorie habituelle, à un certain moment $t = q^4$, les trois coordonnées q^i et, à un moment plus tard $q^4 + \delta q^4 (\delta q^4 > 0)$, la position $q^i + \delta q^i$. Ensuite, dans une expérience de déflection, nous observons son e/m; e étant donné, $m^2 = -\delta q_\mu \delta q^\mu \mid \delta\lambda \mid^{-2}$ déterminera la valeur absolue de

$\delta\lambda$. Le signe de $\delta\lambda$ est déterminé par le signe de e/m. De cette manière les q^μ et les $\dot{q}^\mu$ sont déterminés pour une valeur initiale de λ (par ex. $\lambda = 0$) et la ligne d'univers peut être prédite sous sa forme $x^\mu = q^\mu(\lambda)$ en résolvant l'équation différentielle (2,1).

§ 3. La production de paires de particules par des champs non électromagnétiques en mécanique classique.

Si l'on ajoute aux seconds membres de (2,1) un terme $K^\mu(q)$ dû à un champ $K^\mu(x)$, la valeur de $m^2 = -\dot{q}_\mu\dot{q}^\mu$ ne reste plus constante*). Ce nouveau champ a donc pour effet de changer « la masse de repos » de la particule. Si, en particulier, on a $K_\mu = \partial U/\partial x^\mu$, la grandeur

$$R = -\tfrac{1}{2} m^2 + U = \tfrac{1}{2}\dot{q}_\mu q^\mu + U(q) \tag{3,1}$$

jouera le rôle de *constante d'intégration.* La fig. 1 illustre l'exemple où seule la composante K^4 diffère de zéro dans l'intervalle $t_2 - t_1$ avec $U(t > t_2) = 0$ et $U(t < t_1) = \text{const} \neq 0$.

La courbe A montre un changement de la masse de repos de la particule, accompagné d'une accélération. Si le champ K^4 est plus fort, la ligne se déforme en la forme B. Si le champ est de signe opposé, nous trouverons des lignes du type C. Dans les régions où le champ K_4 disparaît et où U reste constant, les lignes B et C représentent, en vertu de (3.1), des paires de particules de même masse m, mais, comme le démontre (2.17), de charges opposées. Un champ K^μ d'ordre plus général, créera des particules de charges opposées mais de masses différentes. La théorie, complétée par ce nouveau champ K^μ, garde naturellement son invariance relativiste. Mais elle montre des phénomènes qui semblent être *contraires à nos conceptions de causalité.* Pour démontrer ceci, considérons la ligne B de la fig. 1: Une mesure de q^μ et $\dot{q}^\mu$ pour $\lambda = 0$ a été faite, suivant les indications à la fin du § 2. Cette mesure est marquée comme l'événement (1) dans la fig. 1. Ensuite, je produis, au moment t_1, le champ K^4 pendant l'intervalle $t_2 - t_1$. La ligne d'univers, que je peux prédire en me basant sur les résultats de la mesure (1) et sur ma connaissance de l'intensité du champ produit, est du type A ou B. Si elle est du type B, je sais que, pour $t < t_1$, il y a toujours existé une *antiparticule* telle qu'elle rencontrera, à l'instant $t \sim 0$, la particule observée pour s'annihiler avec elle. Ces prévisions me semblent être contraires à nos notions de causalité. Remarquons enfin que les parti-

*) Voir l'éq. (2) de I.

cules peuvent atteindre des vitesses supérieures à celle de la lumière. Par une transformation de LORENTZ, on vérifie que ce dernier phénomène n'est qu'une description alternative de cette même série d'événements.

Ces considérations d'ordre causal nous semblent ainsi interdire l'existence de tels champs.

§ 4. Forme canonique.

L'équation de mouvement sans le champ K^μ (2,1) dérive d'un principe d'HAMILTON $\delta \int d\lambda L = 0$ avec

$$L = \tfrac{1}{2}\, \dot{q}_\mu \dot{q}^\mu + e\, \Phi_\mu(q) \dot{q}^\mu \tag{4,1}$$

Nous introduisons les variables conjuguées $p_\mu = \partial L / \partial \dot{q}^\mu = \dot{q}_\mu + e\, \Phi_\mu$ et définissons l'hamiltonienne par

$$\begin{aligned} R(p, q) &= -L + p_\mu \dot{q}^\mu = \tfrac{1}{2}\, \pi_\mu\, \pi^\mu \\ \text{avec} \quad \pi_\mu(p, q) &= p_\mu - e\, \Phi_\mu(q) \end{aligned} \tag{4,2}$$

La définition habituelle des parenthèses de POISSON $\{F, G\} = (\partial F / \partial p_\mu)(\partial G / \partial q^\mu) - (\partial F / \partial q^\mu)(\partial G / \partial p_\mu)$ fournit les relations

$$\{\pi_\mu, \pi_\nu\} = -e\, B_{\mu\nu}(q)\,; \quad \{\pi_\mu, f(q)\} = \partial f / \partial q^\mu \tag{4,3}$$

La loi de mouvement

$$\dot{F} = \{R, F\} \tag{4,4}$$

permet d'écrire (2,1) sous forme canonique

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu &= \{R, q\} = \pi^\mu \\ \dot{\pi}_\mu &= \{R, \pi_\mu\} = -\tfrac{1}{2}\, \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q^\mu}\, \pi_\alpha\, \pi_\beta + e\, B_{\mu\nu}\, \pi^\nu \end{aligned} \tag{4,5}$$

L'hamiltonienne elle-même est une constante d'intégration et définit la masse: $2\,R = -m^2$. Le signe de $\pi^4 = \dot{q}^4$ détermine le signe de la charge.

§ 5. La quantification formelle.

En analogie parfaite avec la théorie de SCHROEDINGER, nous introduisons une amplitude de probabilité scalaire et complexe

$$\psi(q^1, q^2, q^3, q^4, \lambda) = \psi(q, \lambda) \tag{5,1}$$

satisfaisant à l'équation

$$R(p, q)\psi = -\frac{h}{j}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = hj\dot{\psi} \tag{5,2}$$

$p_\mu = -jh\partial/\partial q^\mu$ est l'opérateur de différentiation. D'un opérateur hermitéique $F(p, q)$ opérant sur ψ et défini par une série de puissances en p_μ et q^μ, on forme l'espérance mathématique

$$\overline{F}(\lambda) = (\psi, F\psi) = \iiiint (dq)^4 \psi^*(q, \lambda,) \left(F\psi(q, \lambda)\right). \tag{5,3}$$

ψ est normalisé à $(\psi, \psi) = 1$.

On vérifie que $\dot{\overline{F}} = \partial\overline{F}(\lambda)/\partial\lambda$ est l'espérance mathématique $\overline{\dot{F}}$ d'un opérateur $\dot{F}$ défini par le commutateur $([A, B] = AB - BA)$:

$$\dot{F} = \frac{j}{h}[R, F] = \{R, F\} \tag{5,4}$$

La dernière égalité suit des lois de commutation de p_μ et q^μ. Elle assure la correspondance entre la mécanique classique et quantique (cf. éq. (4.4)).

Nous nous limitons au cas où les $g_{\mu\nu}$ sont des constantes avec $-\|g\| = 1$. La différence entre $[F]$ et F disparaît. La fonction singulière $\varrho(x-q)$, définie par la limite d'une série de puissances en q^μ, permet alors de définir les opérateurs

$$S^\mu(x) = \frac{e}{2}\left(\pi^\mu\varrho(x-q) + \varrho(x-q)\pi^\mu\right) \tag{5,5}$$

et

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu}(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\pi^\mu\varrho(x-q)\pi^\nu + \pi^\nu\varrho(x-q)\pi^\mu\right) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\pi_\alpha\varrho(x-q)\pi^\alpha - R\varrho(x-q) - \varrho(x-q)R\right) \end{aligned} \tag{5,6}$$

Leurs espérances mathématiques $\overline{S}^\mu(x; \lambda)$ et $\overline{A}^{\mu\nu}(x, \lambda)$ formées par des intégrations (5,3) dépendent de λ. On en forme les espérances mathématiques indépendantes de λ:

$$\overline{J}^\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \overline{S}^\mu(x, \lambda) \tag{5,7}$$

$$\overline{T}^{\mu\nu}_{\text{mat}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \overline{A}^{\mu\nu}(x, \lambda) \tag{5,8}$$

qui satisfont aux équations:

$$\frac{\partial \overline{J}^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0 \tag{5,9}$$

$$\frac{\partial\, \overline{T}^{\mu\nu}_{\text{mat}}(x)}{\partial x^\nu} = \tfrac{1}{2}\left(B^{\mu\nu}\overline{J}_\nu(x) + \overline{J}_\nu(x)B^{\mu\nu}\right) \tag{5,10}$$

Les définitions (5,7) et (5,8), ainsi que les lois (5,9) et (5,10) montrent leur correspondance avec les grandeurs classiques (2,12) (densité du courant électrique) et (2,15) (tenseur d'énergie-impulsion)*).

Remarquons enfin que l'espérance mathématique de la densité de charge

$$\overline{J}^4(x) = \overline{J}^4(\vec{x}, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{eh}{2j} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi(\vec{x}, t, \lambda) - \psi^* \frac{\partial \psi(\vec{x}, t, \lambda)}{\partial t} \right)$$

$$- e^2 \Phi^4(\vec{x}, t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \mid \psi(\vec{x}, t, \lambda) \mid^2 \qquad (5,11)$$

peut être *positive ou négative.* Elle est partout positive si $\psi(\vec{q}, \tau, \lambda) = u(\vec{q}, \lambda) e^{-j\omega\tau}$ avec $\omega > 0$ et si l'«énergie totale» $h\omega$ est partout plus grande que l'«énergie potentielle» $e\Phi^4$.

L'espérance mathématique de la densité d'énergie matérielle peut être exprimée par

$$T^{44}_{\text{mat}}(\vec{x}, t) = \tfrac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \sum_1^4 \mid \pi^\alpha \psi(\vec{x}, t, \lambda) \mid^2 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta d\beta \mid \varphi_\beta(\vec{x}, t) \mid^2 \qquad (5,12)$$

$\varphi_\beta(q) = \varphi_\beta(\vec{q}, q^4)$ est le coefficient de Fourier dans la série

$$\psi(q, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, \varphi_\beta(q) e^{-j\beta\lambda}$$

---

*) La relation classique $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ implique en effet que

$$\partial T^{\mu\nu}_{\text{mat}}/\partial x^\nu = - \partial T^{\mu\nu}_{\text{maxw}}/\partial x^\nu = B^{\mu\nu} J_\nu(x).$$

Les relations (5,9) et (5,10) se démontrent de la manière suivant. On a d'abord (a):

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = - e \dot{\varrho} \qquad \text{(a)}$$

Si l'espérance mathématique de ϱ disparaît pour $\lambda = \pm \infty$ (ce qui est le cas pour tout événement fini) (5,9) suit immédiatement. Pour démontrer (5,6) on décompose $A^{\mu\nu}$ en deux termes

$$A^{\mu\nu} = A_0^{\mu\nu} + A_1^{\mu\nu} \qquad \text{(b)}$$

avec

$$e A_0^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} (\pi^\mu S^\nu + S^\nu \pi^\mu)$$

$$A_1^{\mu\nu} = \frac{h^2}{4} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

La divergence $\partial A_1^{\mu\nu} / \partial x_\nu = 0$ disparaît identiquement, tandisque en vertu de (a)

$$\frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = - \tfrac{1}{2} (\pi^{\mu\,\cdot} + \dot{\varrho}\, \pi^\mu)$$

L'intégration partielle des espéarnces mathématiques fournit (5,10), si on se sert de la relation

$$\dot{\pi}^\mu = \tfrac{1}{2} e (B_{\mu\nu} \pi^\nu + \pi^\nu B_{\mu\nu}).$$

Pour autant que le paquet d'ondes ψ est composé essentiellement d'ondes correspondant à des valeurs propres de $R = \beta = -\frac{m^2}{2} < 0$, c'est-à-dire à des « masses réelles », l'espérance mathématique de la densité d'énergie est partout positive.

Nous avons ainsi démontré que la théorie quantifiée permet d'évaluer les espérances mathématiques de grandeurs physiques associées à la particule par ex. leur charge et leur énergie. On ne trouvera que des particules à *énergie positive*, mais, en général, des *deux charges* $\pm e$. Au paragraphe suivant, nous étudierons un cas particulier, qui permettra une interprétation probabiliste des résultats formels de ce paragraphe.

§ 6. Production de paires de particules (m, e) et (m, — e) par un champ électrique en mécanique quantique.

Nous voulons démontrer qu'un phénomène, très analogue au phénomène classique de production de paires, étudié au § 3, apparaîtra en théorie quantique, sans qu'on introduise un nouveau champ. Pour pouvoir interpréter les résultats du § 5, nous devons d'abord préciser ce que nous appellons une mesure en théorie quantique; la mesure classique a été exposée au § 2.

Dans une région d'espace-temps, où il n'y a pas de champ électromagnétique, les mesures de q^μ et de $\dot{q}^\mu = \pi^\mu$ peuvent être faites avec la seule limite de précision

$$\Delta q^\mu \, \Delta \dot{q}^\mu \geqslant h. \tag{6,1}$$

Le résultat de la mesure correspond, comme dans le cas classique, au résultat trouvé pour $\lambda = 0$. Il est représenté par un paquet d'ondes

$$\psi(q, 0) = \psi(\vec{q}, \tau, 0) = (2\pi)^{-2} \iiint (dk)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{j(\vec{k}\vec{q} - \omega\tau)} \varphi(\vec{k}, \omega) \tag{6,2}$$

avec

$$\iiiint (dq)^4 \, |\psi|^2 = \iiint (dk)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, |\varphi|^2 = 1. \tag{6,3}$$

ψ ne diffère de zéro que dans un petit volume quadridimensionnel entourant le point q_0^μ (c'est le paquet (ψ_1) en fig. 2). De même, $\varphi(k, \omega)$ ne diffère de zéro que dans un petit volume de l'espace impulsion-énergie autour de $\vec{k} = \vec{k}_0$ et $\omega = \omega_0$ ($\omega_0 < 0$ en fig. 2). Ceci correspond en effet à un paquet ψ donnant des espérances mathématiques $\overline{q}^\mu \sim q_0^\mu$; $\overline{\dot{q}}^\mu = (\overline{\dot{\vec{q}}}, \overline{\dot{q}^4}) \sim h(\vec{k}_0, \omega_0)$ avec des incertitudes correspondant à (6,1), qui représente un *électron négatif* si $\omega_0 < 0$.

La fonction $\psi(q, 0)$ étant ainsi trouvée par une première observation, la fonction $\psi(q, \lambda)$ peut être déterminée pour tout λ en résolvant l'équation de SCHROEDINGER (5,2) (l'évolution spatiotemporelle des champs $\Phi_\mu(x)$ étant connue). Ensuite, les espérances mathématiques des grandeurs physiques (par ex. $\overline{J^4}(\vec{x}, t)$) peuvent être prédites.

Regardons de plus près l'exemple illustré par la fig. 2. C'est un champ électrique $\vec{E}$ homogène à composantes $E_1 = B_{14} = -\partial \Phi_1(t)/\partial t$, $E_2 = E_3 = 0$, qui n'existe que pendant l'instant δt. Dans la limite $\delta t = 0$ ce champ peut être décrit par le potentiel discontinu: $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$; $\Phi_1 = h\gamma/e$ pour $t < 0$, $\Phi_1 = 0$ pour $t > 0$. Les fonctions

$$u_{\vec{k},\omega}(q, \lambda) = \begin{cases} 1\, e^{j(\vec{k}\vec{q} - \omega\tau - \beta\lambda)} + A\, e^{j(\vec{k}\vec{q} + \omega\tau - \beta\lambda)} & \ldots \text{pour } \tau = q^4 > 0 \\ B\, e^{j(\vec{k}\vec{q} - \nu\tau - \beta\lambda)} & \ldots \text{pour } \tau = q^4 < 0 \end{cases} \tag{6,4}$$

$$\omega = \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + 2h^{-1}\beta}\ ;\quad \nu = \pm \sqrt{(k^1 - \gamma)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2 + 2h^{-1}\beta} \tag{6,5}$$

$$A(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega - \nu}{\omega + \nu}\ ;\quad B(\vec{k}, \omega) = \frac{2\,\omega}{\omega + \nu}\ ;\quad \frac{\omega}{\nu} > 0 \tag{6,6}$$

satisfont à (5,2). La somme

$$\begin{aligned} \psi(q, \lambda) = (2\pi)^{-2} \iiint (dk)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, u_{\vec{k}\omega}(q, \lambda)\, \varphi(\vec{k}, \omega) \\ = \psi_1 + \psi_A + \psi_B \end{aligned} \tag{6,7}$$

est la solution de (5,2) avec les conditions initiales correspondant à la mesure $\psi(q, 0) = \psi_1$.(6,7) représente un paquet d'ondes qui suit (à une certaine dispersion près) le rayon spatiotemporel en fig. 2. Au « moment » $\lambda = \Lambda_1$, une partie du paquet (ψ_A) est réfléchi. Son intensité vaut (pour $\lambda \gg \Lambda_1$)

$$\iiiint (dq)^4\, |\psi_A|^2 = W_A = \overline{A^2} \sim A(\vec{k}_0, \omega_0)^2 \tag{6,8 A}$$

Une autre partie suit le rayon réfracté avec l'intensité (pour $\lambda \gg \Lambda_1$)

$$\iiiint (dq)^4\, |\psi_B|^2 = W_B = \overline{B^2 \frac{d\omega}{d\nu}} \sim B(\vec{k}_0, \omega_0)^2 \frac{\nu_0}{\omega_0} \tag{6,8 B}$$

$d\omega/d\nu = \nu/\omega$ et (6,6) montrent que

$$W_A + W_B = 1;\quad W_A, W_B \geqslant 0 \tag{6,9}$$

Passons à l'évaluation de l'espérance mathématique de la charge électrique contenue dans un volume spatial entourant les rayons (les lignes d'univers de fig. 2) et d'une dimension grande par rapport à la dimension spatiale des paquets ψ_1, ψ_A et ψ_B, mais petite par rapport aux distances entre les rayons ψ_1 et ψ_A. On trouvera les valeurs suivantes:

$\bar{e}_1$, l'espérance mathématique de la charge électrique qui suit la ligne d'univers ψ_1 vaut (pour tout $t \gg 0$) $\bar{e}_1 = -e$.

$\bar{e}_B$, l'espérance mathématique de la charge totale qui suit la ligne d'univers ψ_B, vaut (pour tout $t \ll 0$) $\bar{e}_B = -eW_B$.

$\bar{e}_A$, l'espérance mathématique de la charge totale qui suit la ligne d'univers ψ_A, vaut (pour tout $t \gg 0$) $\bar{e}_A = +eW_A$.

Naturellement, l'espérance mathématique de la charge totale pour $t < 0$ est égale à celle pour $t > 0$. L'identité (6,9) n'est pas autre chose que

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_A = -e + e\,W_A = -e\,W_B = \bar{e}_B \qquad (6,10)$$

L'interprétation physique semble être la suivante:

1⁰ $|\psi|^2 (dq)^4 = dW$ est la probabilité que la particule se trouve, au «moment λ», dans le volume spatiotemporel $(dq)^4$. Il en est de même pour $|\varphi|^2 (dk)^3 d\omega$ dans l'espace d'impulsion-énergie.

2⁰ Notre *première mesure* est exécutée pour une valeur déterminée de λ ($\lambda = 0$). Toute autre mesure, que nous proposons de faire ultérieurement, ne peut évidemment pas être associée à une valeur bien définie de λ. C'est là une différence essentielle entre la théorie classique et la théorie quantifiée.

3⁰ Des mesures de grandeurs physiques (par ex. densité de courant $J^\mu(\vec{x}, t)$, densité d'énergie $T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)$) faites à un endroit $\vec{x}$ au temps t ne dépendent pas de λ en théorie classique. Les espérances mathématiques $\bar{J}^\mu$ et $\bar{T}^{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ du § 5 expriment donc les espérances mathématiques correspondant à des mesures de ces grandeurs physiques.

Ceci montre que dans notre problème, il y a une probabilité W_A de trouver un *électron positif* sur n'importe quel point (ou plutôt n'importe quelle région) de la ligne d'univers ψ_A et une probabilité W_B de trouver un électron négatif sur la ligne ψ_B. Autrement dit, notre théorie fournit une probabilité W_A que l'électron négatif actuellement observé pour $\lambda = 0$ (ψ_1) soit le partenaire d'une paire (ψ_1 et ψ_A) créée à l'instant $t = 0$ par le champ $\vec{E}$ et une probabilité $W_B = 1 - W_A$ que l'électron négatif observé ait déjà existé au passé ($t < 0$) et ait été accéléré par le champ $\vec{E}$ à l'instant $t = 0$.

Cette interprétation n'est pas opposée à nos notions de causalité. W_A n'est autre chose que *la probabilité que le champ* *considéré ait produite une paire de particules* qui suivent les trajectoires ψ_1 et ψ_A. Le résultat numérique correspond à celui de PAULI et WEISSKOPF [3][6]). L'exemple contraire «j'observe un électron positif à un instant $t < 0$» est déjà un peu plus délicat. (Pour son illustration, on a qu'à changer le signe de l'axe t en fig. 2). Il y a alors une probabilité W_A que l'électron positif observé pour $t < 0$ s'anéantisse sous l'influence du champ $\vec{E}$ à l'instant $t = 0$, avec un partenaire ψ_A et la probabilité $W_B = 1 - W_A$ que l'électron observé continue d'exister pour $t > 0$ et poursuive un mouvement accéléré à l'instant $t = 0$ par ce champ $\vec{E}$. Ce second exemple rappelle un peu l'exemple du § 3, où l'observation d'une particule (1) (ligne B en fig. 1) et l'existence d'un champ K^μ à une période future à l'observation (1) nécessitait l'existence d'une antiparticule, qui poursuit un chemin bien défini pour tout $t < 0$. En effet, l'exemple quantique ci-dessus implique une probabilité bien définie (espérance mathématique $\bar{e}_A = -e\, W_A$) qu'une *antiparticule* existait au temps $t < 0$. Cet effet n'est autre chose que la *fluctuation* de la densité de charge dans la théorie du champ quantifié.

§ 7. Conclusions.

Il est possible d'établir une mécanique classique covariante par rapport aux transformations de la théorie de relativité générale, qui ne fait pas intervenir la racine carrée $ds = \sqrt{-\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu}\, d\lambda$. Ses résultats sont identiques à ceux de la mécanique habituelle, pour autant que l'on ne fait pas intervenir de nouveau champs (§ 3). La quantification de la théorie introduit une densité de probabilité quadridimensionnelle et invariante $|\psi|^2$ normalisée à $\iiiint |\psi|^2 (dq)^4 = 1$. Une interprétation physique est possible (§ 6) et fait prévoir la production de paires de particules. La difficulté de la théorie de DIRAC (énergies négatives) ne se présente pas, la racine carrée étant éliminée.

La réaction des particules sur le champ a été étudiée, elle aussi, et fera l'objet d'une publication ultérieure. Elle n'est possible en théorie quantifiée qu'en suivant les méthodes de WENTZEL[4]) et de DIRAC[5]). Une difficulté d'interprétation physique apparaît alors: Si le champ produit par la particule (m, e) est le *champ retardé habituel d'une charge* e, celui de l'antiparticule$(m, -e)$ est le *champ avancé d'une charge* $-(-e) = e$. Les deux champs ont pourtant le même effet de freinage.

Institut de Physique de l'Université de Genève.

Littérature.

[1]) cf. Résumé Soc. Suisse de Physique, Helv. Phys. Acta **14**, 51 (1941), et l'exposé général de la théorie, Helv. Phys. Acta **14**, 588 (1941), mentionné comme I.

[2]) Une étude à ce sujet est en préparation pour la publication dans les Helvetica Physica Acta.

[3]) PAULI et WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta **7**, 709 (1934).

[4]) WENTZEL, Ztschr. f. Phys. **86**, 479 et 635 (1934).

[5]) DIRAC, Ann. Inst. Henri Poincaré (1939).

[6]) Pour démontrer ceci dans la théorie du champ quantifié de PAULI et WEISSKOPF on doit faire des considérations analogues à telles que fait M. F. HUND (Ztschr. f. Phys. **117**, 1 [1940]).