



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

Archive ouverte UNIGE

<https://archive-ouverte.unige.ch>

Thèse

2004

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

Sur la topologie et la géométrie des courbes algébriques réelles

Gabard, Alexandre Pierre Joseph

How to cite

GABARD, Alexandre Pierre Joseph. Sur la topologie et la géométrie des courbes algébriques réelles. Doctoral Thesis, 2004. doi: [10.13097/archive-ouverte/unige:273](https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:273)

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:273>

Publication DOI: [10.13097/archive-ouverte/unige:273](https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:273)

© This document is protected by copyright. Please refer to copyright holder(s) for terms of use.

Sur la topologie et la géométrie
des courbes algébriques réelles

THÈSE

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur ès sciences, mention mathématiques

par
Alexandre GABARD
de
Genève (GE)

Thèse N° 3521

GENÈVE
Atelier de reproduction de la Section de physique
2004

Table des matières

Introduction

Chapitre 0: Topologie des courbes réelles abstraites: l'action de Galois sur le lieu complexe

- 0.1 La surface symétrique attachée à une courbe réelle lisse
- 0.2 La classification topologique des surfaces symétriques
- 0.3 Les petites déformations des courbes planes nodales (Brusotti)
- 0.4 Le théorème de Klein via Brusotti

Chapitre 1: Problème analogue pour les surfaces et présentation de quelques kleinéennes

- 1.1 Les kleinéennes du plan et des quadriques
- 1.2 Les nombres de Betti des kleinéennes: pas de contraintes!
 - 1.2a) La relation fondamentale pour b_1
 - 1.2b) Effet d'un éclatement sur les nombres de Betti d'une kleinéenne
 - 1.2c) Conclusion sur les nombres de Betti des kleinéennes
- 1.3 $S^1 \times S^3$ vu comme une kleinéenne
- 1.4 $S^2 \times S^2$ vu comme une kleinéenne et un aperçu des travaux de Donaldson-Wang
- 1.5 Nos tentatives de géométrisation échouent: l'obstruction issue des formules de Letizia

Chapitre 2: Topologie des courbes réelles planes: une question de Klein

- 2.1 Position du problème de Klein
- 2.2 Quelques contraintes: l'inégalité de Rohlin
- 2.3 La génétique chez les courbes planes réelles
- 2.4 Construction de courbes
 - 2.4.1 Les courbes de degré pair
 - 2.4.2 Les courbes de degré impair

Chapitre 3: Une caractérisation des courbes séparantes

- 3.1 Introduction
- 3.2 L'exemple de la Gürtelkurve
- 3.3 La notion de morphisme saturé et formulation du problème d'existence
- 3.4 Le cas facile des courbes Harnack-maximales
- 3.5 Reformulation du problème au moyen de l'équivalence linéaire
- 3.6 Résolution du problème via le théorème d'Abel
- 3.7 Amélioration quantitative du théorème d'Ahlfors
- 3.8 Excursion chez les courbes complexes et preuve heuristique du théorème d'existence raffiné
- 3.9 Démonstration du théorème d'inversion de Jacobi via la topologie combinatoire
- 3.10 Démonstration du théorème d'existence raffiné

Introduction

Dans ce travail on a essayé d'étudier les formes qui proviennent de la géométrie algébrique. Il s'agit là d'un bien vaste programme, qui reste une problématique toujours aussi fascinante du fait qu'elle contribue à préciser le lien entre les formes qui existent explicitement (la géométrie algébrique étant précisément un de ces modes de génération automatique de formes, mais qui ne demande qu'à être renouvelé et enrichi par d'autres modes de construction) et la totalité des formes définie seulement implicitement.

Plus précisément je me suis principalement intéressé à ce qui se passe en dimension 1, c'est-à-dire pour les courbes algébriques. La situation est dans ce cas parfaitement comprise (depuis Riemann) sur les complexes: *Toute surface fermée orientable est réalisable comme une courbe algébrique.* Ici, et dans tout ce qui suit, nous supposons toujours les courbes projectives.

On peut alors se demander ce qui se produit sur les réels. Notre motivation originelle était simplement de comprendre comment la partie réelle d'une courbe algébrique *réelle*† est dessinée sur la surface de genre g , image du lieu complexe de la courbe. Il s'agit alors essentiellement de savoir comment l'algèbre dessine des cercles sur un bretzel. On s'est toujours borné au cas lisse. Sans hypothèse de lissité certains cercles peuvent s'agglutiner pour former des huit ou s'évanouir sur des points; penser aux cubiques (cf. Figure 1).

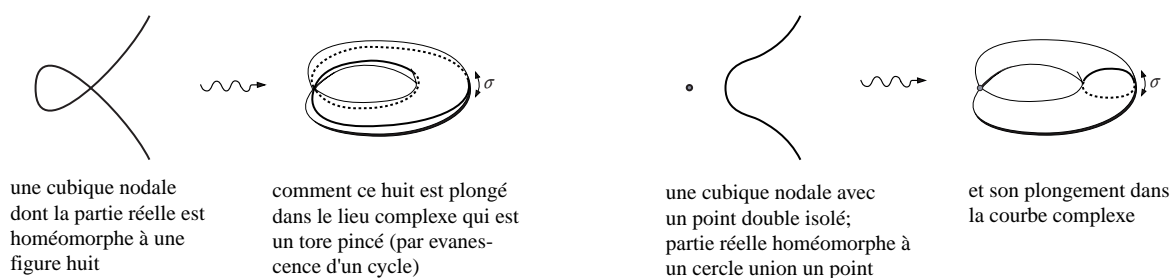


Figure 1

A priori on pourrait par exemple s'imaginer qu'une cubique plane lisse—dont on sait que le lieu complexe est une surface de genre 1—et dont la partie réelle possède 1 composante, soit un cercle trivialement dessiné sur le tore, où par trivialement on entend en bordant un disque (cf. Figure 2). Mais une telle circonstance est facilement écartée en tenant compte du fait que le cercle formé de la partie réelle de la courbe doit être le lieu fixe d'une involution (celle induite par la conjugaison complexe), qui devrait donc échanger un disque avec un tore troué.

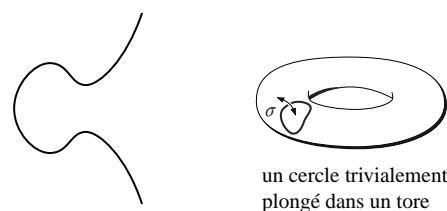


Figure 2

Le bon point de vue n'est donc pas des cercles tracés sur une surface, mais une involution (qui renverse l'orientation) sur une surface. Une fois ce point de vue adopté, on peut montrer que toutes les formes topologiques, qui sont des *surfaces symétriques*, c'est-à-dire des surfaces orientables munies d'une involution qui renverse l'orientation, sont en fait réalisables algèbro-géométriquement, soit comme l'action de la conjugaison complexe sur le lieu complexe d'une courbe réelle lisse. Ce fait fut observé par Klein, et il confirme qu'en dimension (complexe) 1, toutes les formes topologiques sont en fait réalisables par l'algèbre. [Tout ce que la topologie autorise, l'algèbre le réalise]. Le Chapitre 0 donne une explication de ce fait en s'appuyant sur un théorème de Brusotti; que l'on conçoit essentiellement comme un instrument permettant de singer en géométrie algébrique la flexibilité absolue des chirurgies topologiques. [Ce faisant on s'expose bien sûr à une petite critique d'ordre historique, du fait que le théorème italien est de 40 ans postérieur à celui de Klein, mais on peut se protéger très facilement en prétendant que le théorème de Brusotti (1921) n'est en réalité

† Plus généralement à chaque fois que l'on parlera d'une *variété réelle*; nous entendrons par là que l'on s'est donné un système d'équations polynomiales dont tous les coefficients sont des nombres réels, ainsi une variété réelle ne doit pas être confondue avec l'ensemble de ses points réels, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les solutions réelles du système d'équations envisagé. On se devait de le préciser, du fait que cette convention de langage n'est pas universellement suivie.

que l'aboutissement formalisé d'une idée qui était dans le vent bien avant même que Klein n'entre en scène, puisque qu'elle se manifeste déjà dans les travaux de 1876 de Harnack ([Ha]), et semble trouver sa source plus antérieurement encore chez Plücker (1839) (cf. par exemple les observations de Klein dans [K3], p. 11).]

Une autre façon rigolote d'énoncer le résultat de Klein est de dire que toute surface (topologique) qu'elle soit orientable ou non, avec ou sans bord, est réalisable par la géométrie algébrique en ce sens que si la surface donnée est fermée et orientable on peut la réaliser comme lieu complexe d'une courbe complexe, et que sinon on peut toujours la réaliser comme le quotient (du lieu complexe) d'une courbe réelle par la conjugaison complexe.

Une fois ce phénomène observé, il m'a semblé attrayant d'étudier s'il se reproduit en dimension supérieure. Il s'agit alors dans un premier temps de décider, si toute variété de dimension 4 est réalisable par la géométrie algébrique en ce sens précis, calqué du cas des courbes, qu'elle serait toujours réalisable (disons homéomorphiquement) soit comme une *riemannienne* (i.e. l'espace topologique sous-jacent au lieu complexe d'une surface algébrique) ou soit comme une *kleinéenne* (i.e. l'espace topologique quotient du lieu complexe d'une surface algébrique réelle par la conjugaison complexe). Bien sûr ici les kleinéennes des surfaces réelles sont toujours des variétés topologiques (sans bord!) et qui de surcroît sont toujours *orientables*, du fait que dans ce cas la conjugaison complexe préserve l'orientation. Ceci nous oblige d'entrée de jeu à restreindre notre tentative de géométrisation aux variétés de dimension 4 qui sont orientables, ce qui constitue déjà une petite déception vis-à-vis de la flexibilité absolue qui se manifestait chez les courbes. Mais bien sûr cette tentative de géométrisation (qui repose sur rien de plus solide qu'un simple décalquage de ce qui se passe pour les courbes) s'est complètement effondrée, lorsque j'ai pris connaissance (dans des travaux de Letizia, Silhol et Donaldson) de quelques petites formules, issues d'une combinaison des théories de Smith et de Hodge, reliant les invariants holomorphes (q, p_g) de la riemannienne d'une surface algébrique réelle aux invariants topologiques (b_1, b_2^+) de sa kleinéenne. C'est là (entre autres) l'un des buts poursuivis dans le Chapitre 1, qui contient par ailleurs une présentation de quelques kleinéennes de surfaces. On y expose en particulier les résultats connus concernant la connaissance complète des kleinéennes des surfaces dans \mathbb{P}^3 de degré ≤ 4 . Cette connaissance pour le cas du degré 4 est le fruit d'une idée très astucieuse de Donaldson, à savoir la possibilité de déformer la structure complexe jusqu'à rendre l'involution donnée par la conjugaison complexe holomorphe! Par ailleurs c'est l'unique chapitre du travail qui ne s'occupe pas des courbes.

Décrivons maintenant l'objet du Chapitre 2, et pour cela revenons aux courbes. Compte tenu du fait observé par Klein—qui ne fournit rien de moins qu'une compréhension définitive de la topologie des courbes algébriques réelles lisses—une prochaine question, moins intrinsèque, mais qui se pose néanmoins naturellement est de savoir ce qu'il advient lorsque l'on se restreint aux courbes *planes* lisses, dont on est après tout tenté de prétendre que ce sont celles dont le mode de génération est le plus immédiat. Mais cette facilité du mode de génération s'est avérée être assez trompeuse quant à l'exploration de leur topologie qui est quelque peu plus sinieuse que ne l'était celle des courbes abstraites. Précisons d'abord notre question:

Problème de Klein. *Caractériser les surfaces symétriques réalisables comme l'action de la conjugaison complexe sur le lieu complexe d'une courbe réelle lisse du plan.*

La question fut soulevée par Felix Klein lui-même, puis par d'autres auteurs dont notamment Gross-Harris en 1981 (cf. [GrHa], p. 177). Klein pose cette question dans une note en bas de page (que nous reproduisons ci-dessous) ajoutée à ses œuvres complètes (cf. [K3], p. 155), où il semble pressentir l'existence de contraintes non triviales; sans pour autant préciser leur nature—se contentant seulement de justifier son intuition en invoquant la particularisation des modules réalisés par les courbes planes d'un degré donné, au sein de la totalité des courbes de genre correspondant:

Es hat mir immer vorgeschwebt, dass man durch Fortsetzung der Betrachtungen des Textes Genaueres über die Gestalten der reellen ebenen Kurven beliebigen Grades erfahren könne, nicht nur, was die Zahl ihrer Züge, sondern auch, was deren gegenseitige Lage angeht. Ich gebe diese Hoffnung auch noch nicht auf, aber ich muss leider sagen, dass die Realitätstheoreme über Kurven beliebigen Geschlechtes (welche ich aus der allgemeinen Theorie der Riemannschen Flächen, speziell der "symmetrischen" Riemannschen Flächen ableite) hierfür nicht ausreichen, sondern nur erst einen Rahmen für die zu untersuchenden Möglichkeiten abgeben. In der Tat sind ja die doppelpunktslosen ebenen Kurven n -ten Grades für $n > 4$ keineswegs die allgemeinen Repräsentanten ihres Geschlechtes, sondern wie man leicht nachrechnet, durch $(n-2)(n-4)$ Bedingungen partikularisiert. Da man

über die Natur dieser Bedingungen zunächst wenig weiss, kann man noch nicht von vornherein sagen, dass alle die Arten reeller Kurven, die man gemäss meinen späteren Untersuchungen für $p = \frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ findet, bereits im Gebiete besagter ebener Kurven n -ter Ordnung vertreten sein müssten,...

Personnellement, je me suis heurté (en faisant des tentatives de construction) à la difficulté expérimentale de construire une quintique (courbe de degré 5) *séparante* [ceci signifie que la partie réelle disconnecte le lieu complexe] et dont la partie réelle ne possède qu'une seule composante. Et ensuite comme je l'ai appris grâce à un article d'Alexis Marin ([Mar1]), une telle courbe ne peut en fait exister, comme il résulte d'une inégalité due à V. A. Rohlin—bien qu'on n'en trouve pas de mention explicite dans ses travaux†—qui affirme la chose suivante:

Inégalité de Rohlin. *La partie réelle d'une courbe plane séparante possède toujours au moins autant de composantes que la moitié de son degré.*

(Une quintique séparante doit donc au moins posséder 2,5 composantes connexes!) La technique utilisée par Rohlin pour mettre en évidence ce résultat est simplement celle de l'étude de l'intersection des classes d'homologies définies par les deux moitiés de la courbe séparante convenablement rebouchées. Cette brève indication suggère déjà que l'instrument qui faisait défaut à Klein était la théorie de l'intersection, élaborée comme on le sait seulement un peu plus tard par Poincaré. (J'ignore s'il existe une démonstration de l'inégalité de Rohlin qui repose seulement sur les techniques de la géométrie algébrique du 19^{ème} siècle.)

Cette restriction étant notée, il est alors relativement facile de montrer que c'est essentiellement *la seule* qui entrave la topologie des courbes planes réelles (mise à part bien entendu les contraintes triviales sur le genre qui doit être de la forme $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ et le fait que pour les degrés impairs le nombre de composantes de la partie réelle doit au moins être égal à un). On obtient de la sorte une réponse complète à la question de Klein; en décrivant donc exactement les surfaces symétriques susceptibles d'une réalisation comme l'action de la conjugaison complexe sur le lieu complexe d'une courbe réelle lisse plongée dans le plan. Je tiens juste à préciser que ce résultat n'avait pas échappé à V. M. Kharlamov et O. Ya. Viro (tous deux étudiants de Rohlin), et qui étaient arrivés dans leur séminaire à cette même conclusion—mais qu'ils se sont abstenus de publier du fait que la résolution du problème de Klein nécessite seulement le recours à la méthode classique de construction dite de la petite perturbation (ce que nous appelons le théorème de Brusotti). Voilà donc pour l'objet du Chapitre 2.

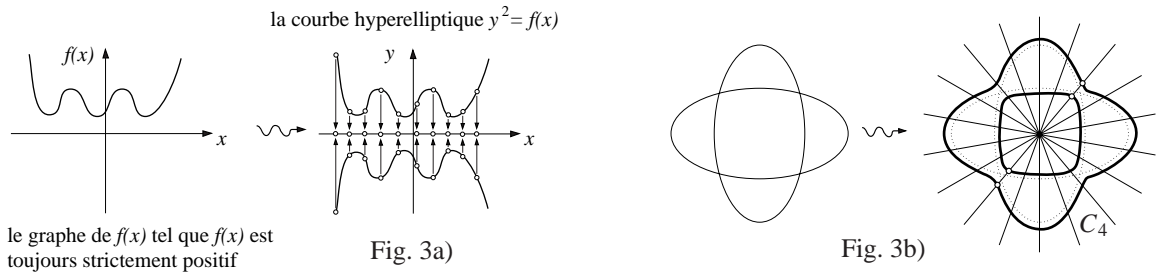
Le Chapitre 3 est né lui d'une observation très simple. Grâce à Klein, on sait que la topologie d'une courbe réelle est assujettie à la dichotomie être *séparante* ou non, suivant que la partie réelle $C(\mathbb{R})$ de la courbe disconnecte ou non son lieu complexe $C(\mathbb{C})$. A chaque fois que l'on voit une courbe réelle, on est en droit de se demander si elle est ou non séparante, et on voudrait notamment disposer de critères permettant de détecter l'éventuel caractère séparant d'une courbe algébrique réelle donnée.

Si la courbe est plane, et si en outre elle est construite via le procédé de Brusotti de petite variation des coefficients, alors on verra dans le Chapitre 2 comment un théorème "génétique" dû à T. Fiedler fournit la réponse. [J'ignore par contre toujours s'il existe une procédure permettant, à partir de la donnée de l'équation d'une courbe plane, qui est une forme ternaire $F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k$ à coefficients réels, de décider si la courbe qu'elle définit est ou non séparante.]

Mais pour une courbe réelle quelconque (non nécessairement plane), je me suis aperçu qu'un critère souvent utile pour mettre en évidence son éventuel caractère séparant consiste à exhiber un morphisme réel vers la droite projective \mathbb{P}^1 (munie de sa structure réelle standard) dont les fibres au-dessus des points réels sont toutes exclusivement formées de points réels. Il s'agit là d'une propriété très spéciale pour le morphisme exprimant une sorte de "principe de conservation du nombre" miraculeusement valide même au niveau réel; qui permettrait d'affirmer grosso modo qu'une courbe réelle, dont la partie réelle se comporte comme une courbe complexe est séparante.

Un morphisme réel jouissant de cette propriété a été qualifié de *saturé*. On peut par exemple faire usage de ce critère pour mettre en évidence le caractère séparant d'une courbe hyperelliptique réelle d'équation $y^2 = f(x)$ avec $f(x) > 0$ (pour tout x réel), vu que dans ce cas la projection hyperelliptique (celle sur l'axe

† Mais comme nous l'expliquerons plus loin, cette inégalité suit très facilement d'une formule de Rohlin, qui elle figure explicitement dans ses travaux publiés.



des x) est un morphisme saturé (cf. Fig. 3a)); ainsi que pour une quartique plane $C_4 \subset \mathbb{P}^2$ avec deux ovals emboîtés, en la projetant depuis un centre de perspective situé à l'intérieur du nid (cf. Fig. 3b)).

Il restait alors à savoir si ce critère est infaillible, c'est-à-dire s'il permet de détecter toutes les courbes séparantes; ou encore:

Problème d'existence posé par les courbes séparantes. *Étant donné une courbe séparante, peut-on toujours trouver un morphisme saturé vers la droite?*

On a réussi à vérifier que tel est bien le cas. La résolution de ce problème d'existence s'est avérée assez délicate en général. Dans le cas particulier des courbes séparantes qui sont *Harnack-maximales* (i.e. les courbes qui réalisent la borne de Harnack, cf. Chapitre 0, Proposition 2.2), le résultat est plus facile à établir, et faisait entre autres l'objet d'un travail de Johannes Huisman, cf. [Hui2]. J'ai aussi appris tout dernièrement que ce problème avait en fait déjà été abordé par Riemann (cf. [Rie]), du moins dans le cas particulier des surfaces à bord planaires qui dans notre langage correspondent aux courbes Harnack-maximales. Cette étude fut ensuite reprise par Schottky (cf. [Sch]).

Pour résoudre le problème en général, j'ai finalement trouvé un argument qui permet (moyennant seulement l'usage du théorème d'Abel†) de réduire cette question d'existence à un principe de nature purement topologique; dont la simplicité est telle que je ne peux résister à le mentionner dans cette introduction déjà:

Principe d'irrigation. *Sur un tore (réel) de dimension g (équipé d'une loi de groupe), on suppose tracées g courbes fondamentales (i.e. qui forment une base du H_1), alors tout point du tore peut s'écrire comme une somme de (au moins) g points situés sur les g courbes tracées. [De manière imagée: si on irrigue un tore topologiquement, alors on l'engendre algébriquement.]*

Une fois ce problème d'existence résolu, je me suis aperçu qu'un résultat essentiellement équivalent avait déjà été obtenu par L. V. Ahlfors (en collaboration avec son étudiant P. Garabedian) en 1950 (cf. [Ah]), et ce dans la catégorie (parallèle) des *surfaces de Riemann à bord*‡. Evidemment avec un peu de bon sens on doit juste admettre—pour saisir l'équivalence de notre énoncé avec celui d'Ahlfors—que l'identité classique entre surfaces de Riemann fermées et courbes algébriques projectives se “prolonge” en une correspondance entre surfaces de Riemann à bord et courbes réelles séparantes, bon sens qui d'ailleurs peut être complètement éliminé si on prend la peine par exemple de consulter le travail de formalisation d'Alling-Greenleaf [AG2].

En fait je n'ai pas réussi à m'extirper de ce problème d'existence, sans un renseignement de nature quantitative (à savoir un contrôle sur le degré du morphisme)—et ma grande surprise fut alors que mon résultat coïncidait avec celui d'Ahlfors non seulement dans sa substance existentielle-qualitative, mais était aussi rigoureusement identique du point de vue quantitatif. Mais mettons cet aspect (bassement) quantitatif un instant de côté, pour y revenir un peu plus tard, désirant plutôt pour l'instant essayer de dégager quelques applications de la solution apportée à ce problème d'existence en vue de la voir non seulement comme une curiosité, mais aussi comme un outil.

Quelques applications de la solution apportée au problème d'existence.

- Il y a tout d'abord l'application à la théorie elle-même—qui consiste simplement à observer que ce résultat fournit une caractérisation purement géométrique des courbes réelles séparantes, notion qui à l'origine était

† Dont on utilise toutefois l'implication non triviale, qui en réalité est due à Riemann—cf. par exemple les remarques de H. Weyl dans [We], p. 126.

‡ C'est-à-dire une surface à bord munie d'une structure de surface de Riemann sur son intérieur.

de nature topologique, mais qui finalement s'avère être équivalente à la condition strictement géométrique (il serait peut-être même plus précis de dire \mathbb{R} -arithmétique) d'existence d'un morphisme saturé vers \mathbb{P}^1 , condition qui ne fait plus du tout référence à la topologie—ce qui permettrait à la rigueur de définir pour tout corps k une notion de *courbe séparante sur k* , comme étant simplement une courbe définie sur k qui admet un morphisme saturé vers \mathbb{P}^1 , c'est-à-dire dont les fibres au-dessus des points k -rationnels de la droite sont toutes exclusivement formées de points k -rationnels de la courbe.

- Une autre application potentielle me semblait résider dans la recherche d'une généralisation de la notion des courbes séparantes aux variétés de dimension supérieures[†]. De façon plus précise, j'ai essayé d'étudier, si la notion de courbe séparante et l'énoncé d'Ahlfors (considérés comme un tout) se généralisent aux variétés de dimensions supérieures—dans ce sens qu'il existerait une définition des variétés réelles séparantes—qui jouisse de cette double aptitude à être de nature topologique, tout en étant équivalente à la notion purement géométrique d'admettre un morphisme saturé vers une variété "cible", qui jouerait le rôle tenu par \mathbb{P}^1 dans le cas des courbes. Pour l'instant il s'agit là d'une problématique qui n'a pas encore reçu de réponse satisfaisante. J'ignore donc si l'identité substantielle entre "être séparante" et "admettre un morphisme saturé vers \mathbb{P}^1 " est un phénomène spécifique aux courbes ou si au contraire c'est la manifestation particulière d'un phénomène plus général.

- Une application plus palpable réside dans le fait qu'elle répond à une question soulevée par G. Wilson qui était (cf. [Wil], p. 67):

I do not know if one can tell whether or not X divides by examining only the real part $X_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}P^2$.

Auquel le théorème d'Ahlfors (ou plus exactement sa formulation en terme de courbes réelles) permet de répondre qu'*une courbe plane est séparante si et seulement si il existe un pinceau saturé de courbes planes, c'est-à-dire un pinceau dont les membres réels découpent sur la courbe donnée exclusivement des points réels*. (En fait je l'énonce ainsi pour faire simple, mais en réalité il se pourrait que le pinceau présente des points bases imaginaires conjugués situés sur la courbe, si bien qu'à priori on doit se contenter de l'énoncé suivant: *une courbe plane est séparante si et seulement si il existe un pinceau de courbes planes, dont les membres réels découpent sur la courbe donnée des points qui dès que mobiles sont réels*.) D'où une réponse par l'affirmative à la question de Wilson, et d'ailleurs cette possibilité de voir le caractère séparant d'une courbe réelle à partir de la seule inspection de son lieu réel n'est nullement spécifique au cas des courbes planes. Mais comme le montrent les exemples suivants il faut avoir de bons yeux (et surtout beaucoup de yeux...)

Après l'exemple de la quartique C_4 avec deux ovales emboîtés de la Fig. 3b), on peut considérer l'exemple d'une quartique C_4 avec 4 composantes (cf. Fig. 4a)). Dans ce cas on a bien sûr de la peine à trouver un centre de perspective, duquel toute droite issue n'aurait que des points d'intersection réel avec la quartique—mais le recours à un pinceau de coniques passant par 4 points situés à l'intérieur des 4 ovales (cf. Fig. 4b)), nous donne un pinceau saturé (puisque chaque conique réelle du pinceau découpe sur la quartique 8 points réels)—ce qui révèle le caractère séparant de la courbe C_4 envisagée.

Un exemple un peu plus sophistiqué nécessitant le recours à un pinceau de cubiques est le suivant; on considère la sextique C_6 de la Fig. 5a) avec 9 composantes, obtenue en lissifiant une réunion de 3 coniques transverses. On peut alors envisager un pinceau de cubiques engendré par deux cubiques dégénérées réunion de 3 droites par un même point (et individuellement définies sur \mathbb{R}) et dont les 9 points d'intersection sont soigneusement positionnés à l'intérieur des 9 ovales de la sextique C_6 (cf. Fig. 5b)).

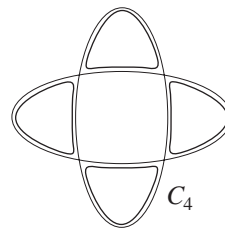


Fig. 4a)

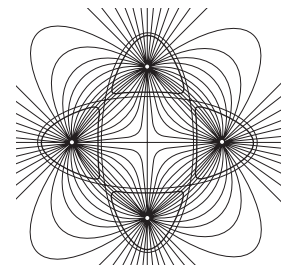


Fig. 4b)

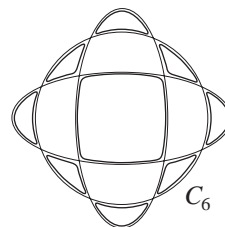


Fig. 5a)

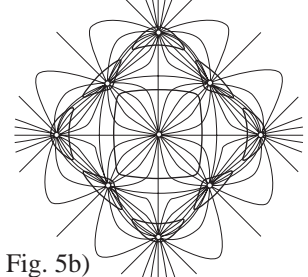


Fig. 5b)

[†] Signalons que cette problématique avait déjà été abordée, notamment par O. Ya. Viro, qui propose comme définition simplement l'annulation dans l'homologie du lieu complexe de la classe fondamentale modulo 2 définie par la partie réelle (cf. [Vi2], p. 263).

Du fait que tous les membres réels de ce pinceau sont de partie réelle connexe comme le montre la Figure 6, on déduit que chaque membre réel du pinceau coupe, pour d'évidentes raisons topologiques, la courbe C_6 en au moins $2 \cdot 9 = 18$ points réels, soit en le nombre maximum de points autorisé vu que 18 est aussi égal à $3 \cdot 6$, ce qui montre que le pinceau envisagé est saturé, et donc que la sextique donnée C_6 est séparante. Ainsi on voit, du moins en théorie, que notre théorème fournit une réponse à la question de Wilson, mais il n'en demeure pas moins que les choses deviennent vite compliquées, et qu'il reste une grande part de flair dans la procédure qui consiste à débusquer un pinceau saturé révélateur du caractère séparant de la courbe donnée. Un principe semblant tout de même se dégager est d'imposer des points base situés à l'intérieur des ovales les plus profonds, c'est-à-dire les éléments minimaux pour la relation d'ordre donnée par l'emboîtement.

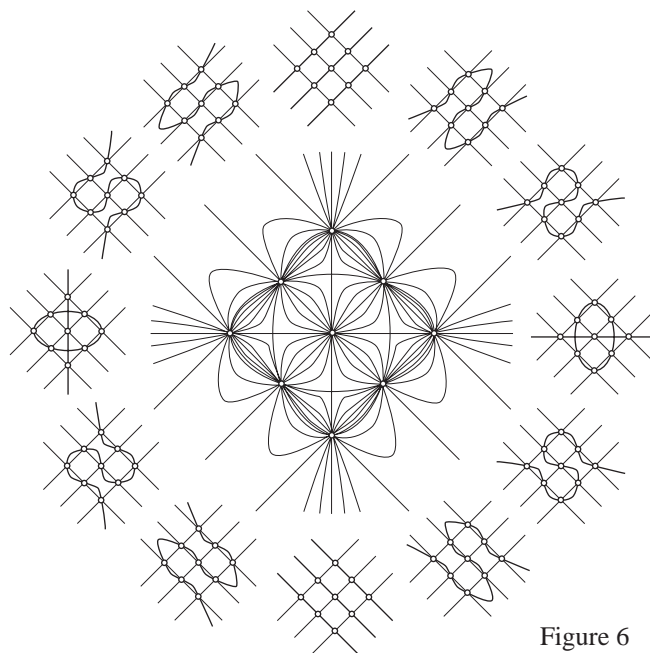


Figure 6

Donnons enfin un dernier exemple illustrant explicitement le fait que la méthode n'est pas réservée aux courbes planes. On considère deux quadriques dans l'espace \mathbb{P}^3 dont les parties réelles sont (disons) des sphères et dont l'intersection définit une courbe C_4 de \mathbb{P}^3 de degré 4 avec deux composantes (Fig. 7a)). En prenant le pinceau des plans autour d'une droite l bien choisie (Fig. 7b)) on définit un morphisme saturé de C_4 vers \mathbb{P}^1 .

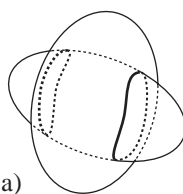


Fig. 7a)

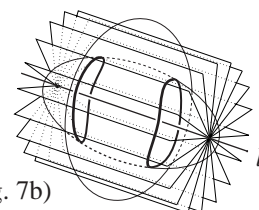


Fig. 7b)

Il faut cependant se garder de croire que le type topologique du plongement $C(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ suffit à lui seul à déterminer la connaissance du plongement $C(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{C})$, autrement dit l'alternative séparante ou non. Un exemple illustrant ceci est donné par les deux sextiques de la Figure 8 dont l'une d'elles est séparante et l'autre non†, bien que toutes deux présentent la même "configuration", à savoir 9 ovales non emboîtés.

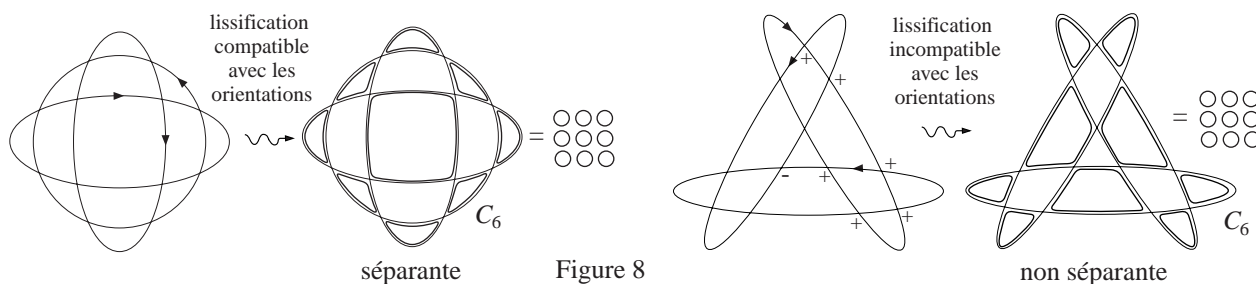


Figure 8

Ainsi dans notre réponse à la question de Wilson, c'est vraiment la connaissance exacte du plongement $C(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ au sens "rigide" qui est requise pour extraire l'information séparante ou non, par le biais de la possibilité ou non d'exposer la courbe à un pinceau auxiliaire saturé.

• On aurait aussi pu espérer déduire certaines propriétés spéciales des courbes séparantes (et notamment l'inégalité de Rohlin relative à la topologie des courbes planes séparantes) de cette géométrisation de la condition séparante en terme de morphismes saturés. Il s'agirait là certes d'une application modeste, mais

† Comme on le verra au Chapitre 2 le simple fait que les lissifications effectuées soient compatibles ou non avec les orientations assure que la courbe est séparante ou non.

qui permettrait déjà de tester l'utilité de notre énoncé sur un terrain concret. En outre ceci me semble ne pas être complètement dénué d'intérêt du fait que l'approche de Rohlin est malheureusement entachée—comme on le verra dans le Chapitre 2—d'une division en fonction de la parité du degré†. Mais je dois reconnaître qu'en dépit de nombreuses tentatives, je ne suis pas parvenu à dénicher un argument qui fasse apparaître l'inégalité de Rohlin comme corollaire de l'existence de morphismes saturés vers \mathbb{P}^1 . Je vais tout de même exposer ci-dessous une tentative de relier Ahlfors à Rohlin pour indiquer la difficulté que l'on rencontre (ou du moins celle que je n'ai pas su contourner).

Soit donc $C_m \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré m séparante. On note r le nombre de composantes connexes de $C_m(\mathbb{R})$, et il s'agit de montrer $r \geq \frac{m}{2}$. D'après le résultat d'existence, l'hypothèse séparante se traduit en l'existence d'un morphisme saturé $f : C_m \rightarrow \mathbb{P}^1$. On a alors la relation

$$(1) \quad d = \sum_{i=1}^r d_i$$

entre d le degré du morphisme f et d_i le degré de l'application $f(\mathbb{R})|_{C_i} : C_i \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ en restriction à la composante C_i de $C_m(\mathbb{R})$. La courbe étant en outre supposée plane ce morphisme est induit par un pinceau \mathfrak{d} de courbes planes de degré disons k . On peut en outre supposer le pinceau \mathfrak{d} sans point base sur la courbe C_m , si bien que $d = km$. On est alors tenté par l'assertion suivante:

Assertion nébuleuse. Chaque composante de $C_m(\mathbb{R})$ peut être “remplacée” par une conique ou une droite suivant qu'il s'agisse d'un ovale ou d'une pseudo-droite‡. De façon précise, supposons (juste pour fixer les idées) le degré de la courbe m pair, si bien que chaque composante est un ovale. On affirme alors que pour chaque ovale C_i il existe une conique E_i telle que l'ovale s'applique difféomorphiquement sur la conique $E_i(\mathbb{R})$ en longeant les feuilles du feuilletage (avec singularités) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ défini par le pinceau \mathfrak{d} .

Cette assertion est facile à illustrer sur les exemples explicites que nous avons donné (cf. Figure 9), mais est malheureusement délicate à justifier en général.

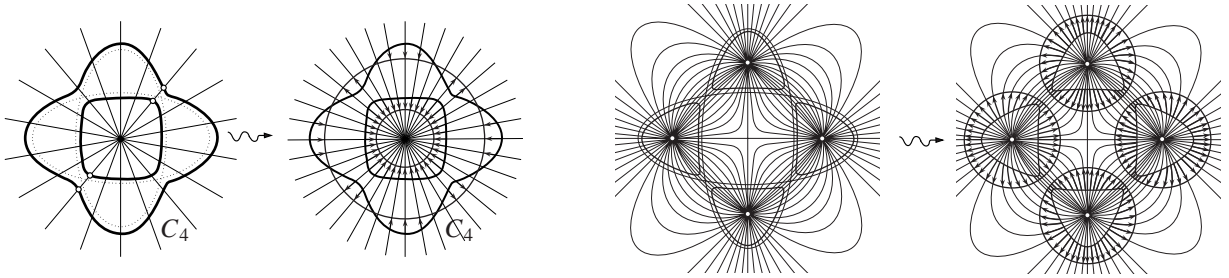


Figure 9

En l'admettant, on obtient alors la majoration $d_i \leq 2k$, vu que le nombre d_i peut être exprimé, après avoir choisi Γ_k un membre réel quelconque du pinceau \mathfrak{d} , comme:

$$\begin{aligned} d_i &= \text{card}(C_i \cap \Gamma_k(\mathbb{R})) \\ &= \text{card}(E_i(\mathbb{R}) \cap \Gamma_k(\mathbb{R})) \quad [\text{d'après l'assertion}] \\ &\leq \text{card}(E_i(\mathbb{C}) \cap \Gamma_k(\mathbb{C})) = 2k. \end{aligned}$$

D'où, en tenant compte de (1), l'inégalité $km = d = \sum_{i=1}^r d_i \leq 2rk$, qui simplifiée par $k \geq 1$ donne l'inégalité de Rohlin $r \geq \frac{m}{2}$. Mais on est bien entendu seulement à moitié convaincu et en particulier on éprouve un sentiment de déception que le chemin d'Ahlfors vers Rohlin soit aussi rocailleux.

† Je peux même avouer que c'est entre autres l'espoir d'obtenir une démonstration unifiée de l'inégalité de Rohlin qui me motivait à établir le théorème d'existence de morphismes saturés.

‡ Rappelons qu'un cercle plongé dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est nommé *ovale* ou *pseudo-droite* suivant qu'il borde ou non un disque dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

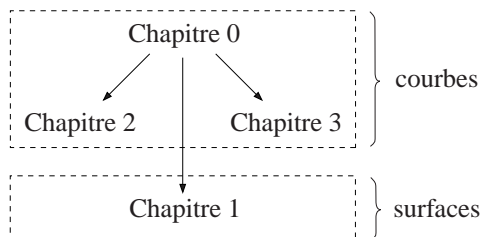
Enfin les derniers paragraphes du Chapitre 3, sont consacrés à la possibilité d’améliorer quantitativement le théorème d’Ahlfors. Mais pour ne pas faire paraître la chose plus technique qu’elle ne l’est en réalité; je dois m’autoriser une petite excursion chez les courbes complexes. D’abord, le principe d’irrigation, que l’on a invoqué pour établir le théorème d’existence de morphismes saturés, est de nature suffisamment générale, pour que son domaine d’applicabilité ne se limite pas qu’à cette seule question de géométrie réelle. Il permet aussi par exemple de s’appliquer à la situation plus dépouillée, d’une courbe complexe livrée avec son plongement dans la jacobienne. Dans ce contexte très bien étudié, il livrait malheureusement seulement la surjectivité de l’application d’Abel-Jacobi en degré $2g$, alors que comme on le sait bien depuis le milieu du 19^e siècle (Jacobi-Riemann), la surjectivité vaut déjà dès que les dimensions l’autorisent, c’est-à-dire en degré g (c’est le fameux *théorème d’inversion de Jacobi* †).

On a alors vite remarqué qu’une petite variante de la méthode d’irrigation livre en fait une démonstration immédiate du théorème d’inversion de Jacobi. L’idée étant simplement que pour ce qui concerne le plongement d’une courbe (de genre $g \geq 1$) dans sa jacobienne, tout se passe comme si la courbe était un bouquet de g tores bidimensionnels qui irriguent le tore de dimension réelle $2g$ image de la jacobienne. [Cette intuition se formalise sans peine au moyen de l’homologie, et plus spécifiquement grâce à la notion du *produit de Pontrjagin*, qui est simplement l’opération qui apparaît sur l’homologie d’un espace qui est un groupe.] La morale c’est que l’existence de Jacobi aurait été bien simplifiée s’il avait vécu après Poincaré et Brouwer.

Evidemment je me suis vite rendu compte que cette démonstration purement topologique (et donc très élémentaire) du théorème d’inversion de Jacobi, n’était pas restée inconnue. Mais parmi tous les livres qui traitent de la question, je n’en connais qu’un seul, celui de C. H. Clemens (cf. [Cl], pp. 131–132) qui adopte cette approche pourtant tellement efficace.

C’est cette petite excursion chez les courbes complexes qui m’a suggéré la possibilité d’améliorer le premier théorème d’existence, et conduit en retour à un théorème de représentation conforme plus précis que celui d’Ahlfors.

Indiquons enfin par le Leitfaden qui suit les rapports logiques entre les divers chapitres, qui montre en particulier qu’après la lecture du Chapitre 0, l’ordre de lecture des 3 chapitres restants est complètement arbitraire. La numérotation des énoncés, ainsi que celles des figures est ré-initialisée au début de chaque chapitre, si bien que la référence à un énoncé ou à une figure est toujours implicitement relative au chapitre courant, sauf précision expresse du chapitre concerné.



Signalons qu’une partie des résultats de cette thèse avait déjà fait l’objet d’un article paru à l’Enseignement Mathématique (cf. [Gab]), dont le contenu recouvre les Chapitres 0 et 2 du présent exposé. On a cependant ici rajouté quelques détails, notamment au paragraphe 2.2 (du Chapitre 2) où l’on a essayé de rédiger une démonstration complète de l’inégalité de Rohlin (du moins pour les courbes de degré pair).

Je tiens finalement à remercier les membres de la Section de Mathématiques de Genève pour l’atmosphère très stimulante dont j’y ai bénéficié, en particulier M. Kervaire, F. Ronga et C. Weber pour leur aide. Je remercie aussi J. Huisman, A. Marin (et l’organisation *RAAG*) pour les invitations à la participation d’exposés, qui ont toujours été une source de clarification; ainsi que V. M. Kharlamov et O. Ya. Viro dont les remarques—m’indiquant avec beaucoup de précision leur façon de résoudre le problème de Klein—m’ont permis de condenser la présentation du Chapitre 2. Je remercie également F. Ronga, J. Huisman et F. Mangolte d’avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse. Enfin, j’exprime ma reconnaissance au professeur D. Coray pour son aide tout au long de la préparation de ce travail.

† Démonstré par Jacobi dans le cas hyperelliptique et par Riemann en général, via les fonctions theta.

Chapitre 0: Topologie des courbes réelles abstraites: l'action de Galois sur le lieu complexe

0.1 La surface symétrique attachée à une courbe réelle lisse

Une courbe algébrique projective complexe $C \subset \mathbb{P}^n$ lisse et irréductible est pour la topologie transcendante une surface connexe compacte orientable, et donc une sphère avec un certain nombre g d'anses.

Si en outre on suppose C *réelle* (i.e. définies par des équations à coefficients réels), alors la conjugaison complexe, par le biais de son action sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ coordonnée par coordonnée $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_n})$, préserve globalement le lieu complexe $C(\mathbb{C})$ en fixant point par point le lieu réel, que l'on note $C(\mathbb{R})$.

A une courbe réelle C est donc associée une *surface symétrique*† (X, σ) , c'est-à-dire une surface connexe compacte orientable X munie d'une involution σ qui renverse l'orientation (vu que cette dernière se souvient d'avoir été antiholomorphe et que nous travaillons en dimension complexe 1).

Remarque. En général pour X une variété algébrique réelle de dimension n , l'involution $\sigma : X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ induite par la conjugaison complexe renverse l'orientation pour n impair, et la préserve sinon; comme on le voit en écrivant la matrice de $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})$ relativement à la \mathbb{R} -base canonique de $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

L'objet du présent chapitre est de montrer, par analogie avec le cas complexe où l'on sait que toute surface de genre g est réalisable comme le lieu complexe d'une courbe, que tout objet topologique admissible est réalisable algèbro-géométriquement: autrement dit dans le cas présent (où l'on fait une hypothèse de réalité) que *toute surface symétrique est réalisable comme l'action de la conjugaison complexe sur le lieu complexe d'une courbe réelle*‡. Notre approche est la suivante:

- On commence par rappeler la classification (topologique) des surfaces symétriques en termes de trois invariants: le genre, le nombre de composantes fixes et l'alternative séparante ou non (la définition précise sera donnée au paragraphe suivant). On va en outre exhiber une chirurgie qui permet de construire récursivement toutes les surfaces symétriques.

- Cette façon dynamique de penser à la totalité des surfaces symétriques va nous permettre de redémontrer le théorème de Klein: simplement en effectuant une "déformation" de courbes algébriques qui singe la chirurgie à laquelle nous venons de faire allusion. Pour ce faire on invoquera un résultat dû à Brusotti, qui stipule que l'on peut lissifier de façon indépendante les nœuds d'une courbe plane dont les seules singularités sont nodales. Cette preuve du théorème de Klein nous semble présenter l'avantage d'éviter tout transit par les surfaces de Riemann: on préfère travailler directement sur leurs manifestations projectives.

0.2 La classification topologique des surfaces symétriques

On va d'abord classer les surfaces symétriques (X, σ) à *homéomorphisme équivariant* près. [C'est la relation naturelle vu qu'un morphisme défini sur \mathbb{R} entre variétés algébriques réelles est équivariant pour les actions de Galois]. Une façon de résoudre cette question de classification est simplement de noter l'existence d'une correspondance canonique entre les surfaces symétriques qui nous intéressent et les surfaces à bord, ou plus exactement une certaine classe d'entre elles. Précisons cette correspondance:

Tout d'abord étant donné une surface symétrique (X, σ) , du fait que σ renverse l'orientation, son action se linéarise au voisinage d'un point fixe comme une symétrie plane par rapport à une droite. Il en résulte que le quotient $Y = X/\sigma$ est une surface connexe à bord, dont le bord s'identifie à $\text{Fix}(\sigma)$. Remarquons que $\text{Fix}(\sigma)$ peut d'ailleurs être vide; tel est le cas par exemple pour la surface symétrique donnée par la sphère S^2 munie de l'involution antipodale. Ainsi le terme surface à bord doit être compris au sens large ci-dessus, en admettant—comme d'ailleurs la définition de la notion de variété à bord l'indique sans ambiguïté—que les surfaces à bord englobent les fermées, comme cas particulier.

† La terminologie est inspirée de Klein qui parlait de "symmetrischen Riemannschen Flächen".

‡ Noter que ceci résout complètement la question de la topologie des courbes réelles, et justifie par là même le titre (du présent chapitre) qui pourrait sembler prétentieux, par exemple compte tenu du fait que le problème de Hilbert (relatif à la position mutuelle des ovales) est très loin d'être résolu, mais ce dernier n'entre pas dans le cadre stricte que l'on s'est fixé puisque la donnée n'est pas seulement celle d'une courbe réelle, mais aussi celle d'un plongement dans le plan.

Inversement, nous allons montrer qu’une surface à bord Y (supposée inorientable si sans bord) détermine une surface symétrique en prenant son “revêtement des orientations”. D’ordinaire cette notion est définie pour les variétés sans bord, mais elle admet une extension évidente au cas des variétés à bord:

Construction générale: le revêtement des orientations d’une variété à bord. Soit Y une variété à bord quelconque (on peut la supposer momentanément de dimension arbitraire). Pour chaque point y intérieur à une telle variété Y il y a deux façons d’orienter une petite sphère (de codimension 1) autour de y , tandis qu’autour d’un point du bord ∂Y il n’y a pas de telle sphère et donc a fortiori pas de procédé de “dédoublage” du point par les orientations locales. On définit \tilde{Y} comme l’ensemble des points de Y avec enrichissement—lorsque cela est possible—du choix d’une orientation locale. On dispose alors sur \tilde{Y} d’une involution τ qui échange les deux orientations locales et fixe la copie de ∂Y , ainsi que d’une projection $\tilde{Y} \rightarrow Y$ donnée par l’oubli des orientations locales. Après avoir muni \tilde{Y} de la topologie évidente (la moins fine qui rende la projection $\tilde{Y} \rightarrow Y$ continue), on vérifie que \tilde{Y} est une variété fermée orientable sur laquelle τ reverse l’orientation. On appelle $\tilde{Y} \rightarrow Y$ par extension de langage *le revêtement des orientations de la variété à bord Y* . (Noter bien sûr que si Y est sans bord on retrouve la définition usuelle du revêtement des orientations).

En particulierisant ceci à notre situation où Y est une surface à bord et si on suppose en outre que cette dernière n’est pas un *bretzel* (=surface fermée orientable), alors \tilde{Y} est connexe de sorte que (\tilde{Y}, τ) définit une surface symétrique.

Vérifions maintenant que l’on établit ainsi un dictionnaire entre la totalité des surfaces symétriques et une certaine classe de surfaces à bord, à savoir celles qui si elles sont fermées sont inorientables—autrement dit celles qui ne sont pas des *bretzels*†.

Proposition 2.0. *Il existe une correspondance canonique entre les surfaces symétriques et les surfaces à bord qui ne sont pas des bretzel donnée en associant à une surface symétrique (X, σ) son quotient X/σ , et dans l’autre sens en associant à une surface à bord qui n’est pas un bretzel Y son revêtement des orientations \tilde{Y} muni de l’involution τ d’échange des orientations locales.*

Preuve. En effet étant donné une surface symétrique (X, σ) , il s’agit de vérifier que le revêtement des orientations (\tilde{Y}, τ) du quotient $Y = X/\sigma$ est équi-homéomorphe à la surface symétrique (X, σ) donnée. On munit tout d’abord X d’une orientation globale (c’est possible puisque X est supposée orientable). On note ensuite que la projection $\pi : X \rightarrow Y$ se relève au revêtement des orientations \tilde{Y} via le procédé qui consiste à associer à chaque point x de X l’image par la projection canonique $\pi : X \rightarrow Y$ de l’orientation locale en x (induite par l’orientation globale fixée) ce qui définit une orientation locale en le point $y = \pi(x)$ et donc un point de \tilde{Y} . Comme σ reverse l’orientation, l’application ainsi définie $X \rightarrow \tilde{Y}$ est équivariante, et c’est clairement un homéomorphisme (puisque c’est une bijection continue d’un compact vers un séparé).

Il suit de là en particulier que le quotient $Y = X/\sigma$ d’une surface symétrique (X, σ) ne peut pas être un *bretzel*. En effet si Y était un *bretzel*, du fait que (X, σ) peut être reconstruite comme le revêtement des orientations de Y on aurait que X possède deux composantes connexes (contraire à l’hypothèse faite sur X dans la définition de surface symétrique).

Dans l’autre sens étant donné une surface à bord Y , il s’agit de vérifier que le quotient de l’espace total \tilde{Y} de son revêtement des orientations modulo l’involution τ d’échange des orientations locales est la surface à bord donnée Y . C’est clair: la projection $\tilde{Y} \rightarrow Y$ passe tautologiquement au quotient et donne une application continue $\tilde{Y}/\tau \rightarrow Y$ qui est un homéomorphisme (pour la même raison qu’avant). \square

En outre le caractère fonctoriel de ce dictionnaire relativement aux morphismes évidents‡ montre que la classification des surfaces symétriques peut être ramenée à celles des surfaces à bord.

† Je signale en passant une petite imprécision à ce sujet dans mon exposé antérieur (cf. [Gab], p. 141) où j’affirmais de manière trop simpliste la présence d’un dictionnaire entre surfaces symétriques et surfaces à bord. Notons aussi qu’il aurait peut-être été plus désirable—pour ne pas avoir à endurer cette restriction au niveau des surfaces à bord—d’envisager des surfaces symétriques plus générales (qui incluerait comme objet l’union disjointe de 2 copies d’un *bretzel* avec l’involution qui échange les deux copies). C’est d’ailleurs sur cette notion de surfaces symétriques que ne serions tombé si au lieu d’envisager des courbes réelles irréductibles sur \mathbb{C} , nous les avions considéré tout au début comme irréductibles sur le corps de définition \mathbb{R} .

‡ À savoir les applications continues équivariantes d’une part et les applications qui préservent le bord d’autre part.

D'autre part en relevant sur X une triangulation du quotient Y , on voit que $\chi(X) = 2\chi(Y)$, car la projection $X \rightarrow Y$ est "plissée" le long des cercles invariants de caractéristique d'Euler nulle.

Revenons au point de vue surface symétrique. Pour une telle surface (X, σ) l'observation fondamentale est la suivante:

Lemme 2.1. *La surface privée des cercles fixes $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ a au plus deux composantes connexes, et si elle en a deux elles sont échangées par σ .*

Preuve. Il suffit d'observer que la base du revêtement à 2 feuilles $X \setminus \text{Fix}(\sigma) \rightarrow Y \setminus \partial Y$ est connexe, ce qui résulte du fait qu'une surface connexe à bord privée de son bord reste connexe. \square

On note g le genre de X et r le nombre de composantes de $\text{Fix}(\sigma)$, l'ensemble des points de X fixes par σ .

Proposition 2.2 (Borne de Harnack). *Soit (X, σ) une surface symétrique, alors $r \leq g + 1$.*

Preuve. L'argument suivant est de Klein (cf. [K1], p. 72). Par le lemme précédent, la surface X privée de tous les cercles fixes sauf un est encore connexe, vu que le cercle que l'on conserve soude les éventuelles 2 composantes connexes de $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$. Ainsi si $r > g + 1$, on pourrait effectuer $g + 1$ coupures sur X sans la disconnecter, ce qui contredit la *définition de Riemann du genre* comme étant le nombre maximal de coupures que l'on peut pratiquer sur la surface sans la morceler. \square

Exemple. Un miroir sur une "somme connexe rectiligne" de g tores fournit une surface symétrique réalisant la borne de Harnack (cf. Figure 1).

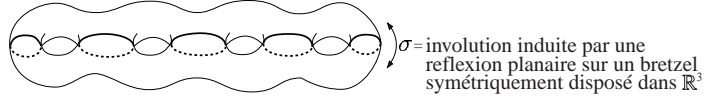


Figure 1

Définition (Klein). *Une surface symétrique (X, σ) est séparante ($a = 0$) si $\text{Fix}(\sigma)$ disconnecte X , et non-séparante ($a = 1$) sinon. Dans le cas séparant on appelle moitié de (X, σ) l'une des deux composantes de $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$.*

Notons qu'une surface symétrique avec $r = g + 1$ cercles fixes, est nécessairement séparante. C'est immédiat avec la définition de Riemann du genre.

Observons aussi qu'une surface symétrique (X, σ) est séparante si et seulement si le quotient $Y = X/\sigma$ est orientable. En effet dans le cas séparant, le quotient s'identifie à l'adhérence d'une des moitiés (via l'opération qui consiste à prendre la trace d'une orbite sur l'adhérence de la moitié), et est donc orientable car plongé dans X . La réciproque est claire si on raisonne avec le revêtement des orientations.

Proposition 2.3 (Congruence de Klein). *Si (X, σ) est séparante, alors $r \equiv g + 1 \pmod{2}$.*

Preuve. Le quotient $Y = X/\sigma$ est orientable et possède r composantes de bord, il est donc le résultat de l'excision de r disques ouverts disjoints dans une surface orientable Y^* sans bord de genre disons $p \geq 0$; par suite $\chi(Y) = \chi(Y^*) - r = (2 - 2p) - r$. Or $\chi(X) = 2 - 2g$, et la relation $\chi(X) = 2\chi(Y)$ donne $1 - g = 2 - 2p - r$, d'où $r = g + 1 - 2p \equiv g + 1 \pmod{2}$. \square

En se servant du dictionnaire entre surfaces symétriques et surfaces à bord, et en se souvenant que ces dernières sont classées par les 3 invariants que sont la caractéristique d'Euler, le nombre de composantes de bord et l'orientabilité (cf. p. ex. [Mas1], p. 42), on retrouve le:

Théorème 2.4 (Klein-Weichold). *Deux surfaces symétriques sont équi-homéomorphes si et seulement si elles ont mêmes invariants (g, r, a) .*

Nous allons montrer par des exemples que les restrictions recensées jusqu'ici sur les invariants (g, r, a) , à savoir

- 1) $r \leq g + 1$
- 2) $r = g + 1$ entraîne $a = 0$
- 3) $a = 0$ entraîne $r \equiv g + 1 \pmod{2}$
- 4) $r = 0$ entraîne $a = 1$

sont les seules. Pour l'instant leurs valeurs admissibles sont schématisées sur le *diagramme des involutions* (cf. Figure 2), qui pour une valeur fixée du genre comporte 2 étages: le premier étage correspond aux surfaces séparantes ($a = 0$) et le second aux non-séparantes ($a = 1$). La structure combinatoire de ce diagramme montre que l'opération numérique

$$(g, r, a) \mapsto (g + 1, r + 1, a)$$

(symbolisée par des flèches sur la Figure 2) fournit un mode de génération exhaustif des invariants des surfaces symétriques à partir des modèles minimaux symbolisés par des pastilles noires sur la Figure 2.

Cette opération n'est autre que l'*attachement d'une anse baguée*, dont voici la description: Soit (X, σ) une surface symétrique d'invariants (g, r, a) . On lui attache une anse baguée basée en deux points symétriques distincts p et p^σ de la surface (cf. Figure 3). On peut alors prolonger à l'anse l'involution donnée sur X en fixant exactement la bague, d'où une nouvelle surface symétrique d'invariants $(g + 1, r + 1, a)$. Noter que cette opération préserve bien l'invariant a , par exemple car elle revient à faire un trou (=exciser un disque ouvert) dans le quotient, ce qui préserve l'orientabilité.

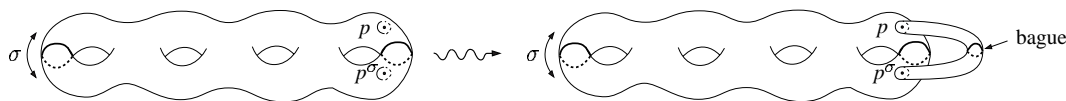


Figure 3

Les surfaces symétriques minimales relativement à cette opération sont de deux "types":

1. Les surfaces symétriques avec $r = 0$ (et donc non-séparantes), s'obtiennent respectivement à partir de la *sphère antipodale* et du *tore antipodal* en leur attachant récursivement une "paire d'oreilles" (cf. Figure 4). En particulier, pour toutes les valeurs du genre, il existe une surface symétrique sans point fixe. [Par *tore antipodal* on entend, comme le suggère la Figure 4, la surface symétrique obtenue par exemple en restreignant l'action de l'antipodie $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ de \mathbb{R}^3 , à un tore de révolution d'axe de révolution une droite vectorielle de \mathbb{R}^3].

2. Les surfaces symétriques séparantes avec $r = 1$ et donc avec $g \equiv 0 \pmod{2}$ (d'après la congruence de Klein), peuvent se déduire de la *sphère équatoriale* en lui attachant récursivement une paire d'oreilles comme l'indique la Figure 5. [Par *sphère équatoriale*, on entend bien sûr la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ munie de l'involution $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ de réflexion planaire].

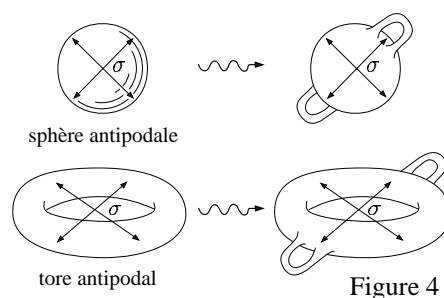


Figure 4

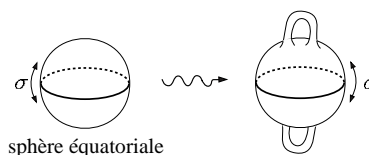


Figure 5

0.3 Les petites déformations des courbes planes nodales (Brusotti)

Notre outil principal est le théorème de Brusotti sur l'indépendance de la simplifications des nœuds

(=points doubles ordinaires) d'une courbe plane (cf. [Br] ou [BR], pp.269-275). On va en faire un double usage, aussi bien pour les courbes abstraites, que pour les courbes du plan:

- D'abord, en ce qui concerne les courbes abstraites, pour faire du plan \mathbb{P}^2 l'habitable de déformations explicites de courbes algébriques réelles, permettant en particulier d'imiter dans l'algébrique l'opération topologique d'attachement d'une anse baguée, et on va obtenir ainsi une démonstration purement projective du théorème de Klein affirmant que toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de la conjugaison complexe sur une courbe réelle (cf. le paragraphe suivant 0.4).

- Et ensuite comme outil de construction de courbes réelles lisses dans le plan: la méthode classique (inaugurée par Harnack) consiste à se donner deux courbes réelles transverses (dont la topologie est bien comprise, typiquement des droites ou des coniques) puis de lissifier la réunion de leur partie réelle; le théorème de Brusotti assure alors l'existence d'une courbe algébrique réelle dont la partie réelle réalise toutes les lissifications prescrites. Cette remarquable flexibilité graphique des courbes planes réelles nodales va jouer un rôle crucial pour répondre à la question de Klein, dans le Chapitre 2.

Théorème 3.1 (Brusotti 1921). • Soit $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ une courbe plane de degré d (non nécessairement irréductible) dont les seules singularités sont des nœuds p_1, \dots, p_δ . Alors pour tout choix de points doubles $S \subset \{p_1, \dots, p_\delta\}$, il existe une courbe plane Δ de même degré d voisine de la courbe donnée Γ qui simplifie les nœuds prescrits S et conserve les nœuds restants (modulo mouvements infinitésimaux).

- Si en outre la courbe Γ est réelle, alors la courbe simplifiée Δ peut elle aussi être choisie réelle, pour autant que chaque simplification d'un nœud imaginaire s'accompagne de celle du nœud imaginaire conjugué.

De plus chaque nœud réel (qu'il soit isolé ou non†) admet deux modes de simplifications (cf. Figure 6) que l'on peut prescrire de façon indépendante.

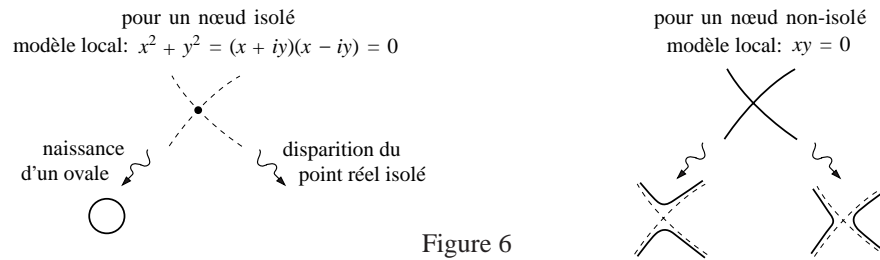


Figure 6

0.4 Le théorème de Klein via Brusotti

La classification topologique des surfaces symétriques étant effectuée, on se demande maintenant lesquelles proviennent de l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. La réponse est donnée par le:

Théorème 4.1 (Klein 1882). Toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de Galois sur le lieu complexe d'une courbe algébrique réelle irréductible et lisse.

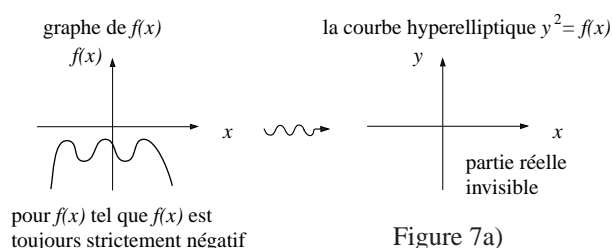
Preuve. Notre stratégie est, rappelons-le, basée sur l'inspection de la structure combinatoire du diagramme des involutions (Figure 2, p. 14), qui nous a suggéré cette façon dynamique de penser à la totalité des surfaces symétriques, comme engendrée par l'opération d'attachement d'une anse baguée à partir de certains modèles minimaux. Notre démonstration se décompose donc en deux étapes qui consistent, d'abord à réaliser les modèles minimaux, puis de singer algèbro-géométriquement la chirurgie d'attachement d'une anse baguée.

- 1^{ère} Etape: Réalisation des modèles minimaux.

On considère des courbes hyperelliptiques réelles $\Gamma_0 : y^2 = f(x)$ où $f(x)$ est un polynôme réel de degré $2g + 2$ ayant des racines distinctes. La normalisée $\tilde{\Gamma}$ de la courbe projective $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ associée à Γ_0 est alors une courbe réelle de genre g (comme on le voit par exemple avec la formule de Riemann-Hurwitz ou ce qui revient au même via un argument de caractéristique d'Euler).

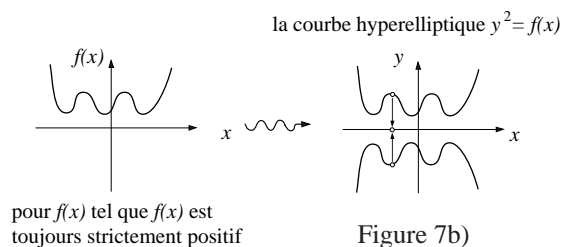
† Isolé en tant que point de la partie réelle $\Gamma(\mathbb{R})$ bien sûr.

1. Les surfaces symétriques minimales avec $r = 0$ peuvent alors être réalisées comme suit: si $f(x)$ est choisi tel que $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\Gamma_0(\mathbb{R})$ est vide et donc $\tilde{\Gamma}(\mathbb{R})$ aussi. On obtient de la sorte (en considérant $\tilde{\Gamma}$) pour tout entier g une courbe réelle de genre g avec $r = 0$. Autrement dit pour toutes les valeurs du genre, il existe une courbe réelle sans point réel.



2. Quant aux surfaces symétriques minimales avec $r = 1$ on va les obtenir en choisissant $f(x)$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'abord l'hypothèse de positivité faite sur f assure que les fibres de la projection $\pi : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{A}^1$ sur l'axe des x au-dessus des points réels sont exclusivement formées de points réels. Il en résulte que la courbe $\tilde{\Gamma}$ est séparante.

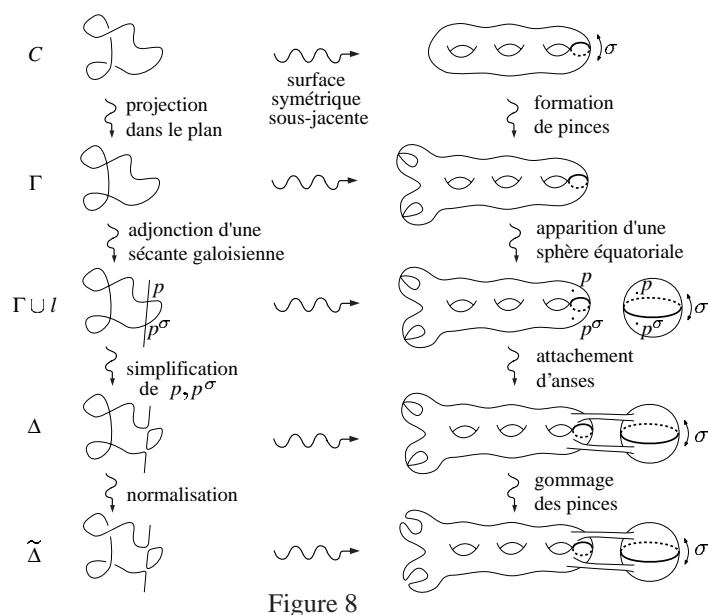
[En effet π induit un morphisme $\tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{P}^1$ défini sur \mathbb{R} et qui jouit de la propriété remarquable que ses fibres au-dessus des points réels sont toutes exclusivement formées de points réels (Figure 7b)). Autrement dit un point imaginaire n'est jamais envoyé sur un point réel, π se restreint donc en une application $\tilde{\Gamma}(\mathbb{C}) \setminus \tilde{\Gamma}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ entre les lieux imaginaires. Or le but ayant 2 composantes connexes, on en déduit que la source possède elle aussi 2 composantes connexes, d'où l'assertion. Il s'agit là en fait d'une observation de caractère général, et qui constitue le point de départ du Chapitre 3.]



La congruence de Klein entraîne alors que $r \equiv g + 1 \pmod{2}$. Mais la restriction de $\pi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{P}^1$ aux points réels induit un revêtement de degré 2 du cercle, si bien que $r(\tilde{\Gamma})$ ne peut valoir que 1 ou 2. En particulier on voit que pour tout entier g pair, il existe (avec $\tilde{\Gamma}$) une courbe séparante de genre g avec $r = 1$; d'où la réalisabilité cherchée des surfaces symétriques minimales avec $r = 1$.

• 2^{ème} Etape: Modélisation algébro-géométrique de l'opération d'attachement d'une anse baguée.

Soient C une courbe réelle lisse et $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ un modèle \mathbb{R} -birationnel plan de C ayant au pire des singularités nodales, que l'on déduit de C moyennant une succession de projections génériques. On choisit $p \in \Gamma(\mathbb{C}) \setminus \Gamma(\mathbb{R})$ un point imaginaire lisse, de sorte que p admette un conjugué strict $p^\sigma \neq p$. On trace alors la "sécante galoisienne" $l := \overline{pp^\sigma}$, qui pour un choix générique de p sera transverse à Γ . Une telle droite est définie sur \mathbb{R} (car invariante par Galois), la surface symétrique correspondante $(l(\mathbb{C}), \sigma)$ est donc une sphère équatoriale. [En effet l étant une droite, la surface symétrique correspondante peut soit être une sphère équatoriale ou antipodale, seconde possibilité que l'on exclut du fait que l est non seulement une droite abstraite, mais est plongée dans \mathbb{P}^2 de façon linéaire et possède donc des points réels]. On peut ensuite, d'après le théorème de Brusotti, simplifier simultanément les deux points doubles p et p^σ sur la courbe réductible $\Gamma \cup l$. On obtient ainsi Δ une courbe réelle irréductible, dont la normalisée $\tilde{\Delta}$ se déduit topologiquement de la courbe originale C précisément en attachant une anse baguée en deux points symétriques comme le montre la Figure 8. \square



Remarque (de J. Huisman). On peut aussi démontrer le Théorème 4.1 par des méthodes transcendentes (i.e. via structures presque complexes équivariantes et puis GAGA). On renvoie pour cette approche à [Hui1] (cf. Theorem 15.1, p. 163).

Une manière rigolote de résumer le Théorème de Klein (4.1), ou plus exactement d'en faire une synthèse avec celui de Riemann, est de dire que

Théorème de géométrisation mixte. *Toute surface, qu'elle ait du bord ou non, qu'elle soit orientable ou pas, est en un certain sens réalisable par la géométrie algébrique. Plus précisément si la surface est orientable et sans bord, on peut (d'après Riemann) la réaliser comme le lieu complexe $C(\mathbb{C})$ d'une courbe algébrique complexe C , et sinon on peut toujours (d'après Klein) la réaliser comme le quotient $C(\mathbb{C})/\sigma$ pour C une courbe algébrique réelle convenable.*

Ainsi tout ce que la topologie autorise l'algèbre le réalise (géométrisation mixte riemanno-kleinéenne). Il nous a semblé intéressant de savoir si ce phénomène (i.e. la possibilité d'une telle géométrisation) se reproduit en dimension supérieure. On va y apporté une réponse complète dans le chapitre suivant. Evidemment la possibilité d'une telle géométrisation, qui concernerait donc d'abord les variétés de dimension 4, serait une chose très remarquable puisqu'elle comblerait ce qui semble-t-il demeure une des grandes lacunes à ce jour, à savoir l'absence (même à un niveau seulement conjectural[†]) d'un programme de géométrisation pour les variétés de dimension 4 (cf. p. ex. [FM2], p. 2).

[†] Ceci pourrait sembler un peu erroné compte tenu de la spéculation (qui remonterait à R. Thom, cf. [FM1], p. 15) qui voudrait que toute variété compacte de dimension 4 simplement connexe soit difféomorphe à une somme connexe d'un nombre fini de surfaces algébriques (éventuellement munies de l'orientation opposée à celle induite par la structure complexe). Mais cette géométrisation est limitée au cas simplement connexe! Par exemple $S^1 \times S^3$ n'aucune chance d'être réalisée à la Thom vu que b_2 d'une surface algébrique est strictement positif. On verra cependant au chapitre suivant que $S^1 \times S^3$ peut être réalisée à la Klein, i.e. comme le quotient $S(\mathbb{C})/\sigma$ pour S une surface réelle. Rappelons par ailleurs que cette spéculation de Thom s'est effondrée en 1993 grâce à un travail de Gompf et Mrowka (cf. [GoMr]).

Chapitre 1: Problème analogue pour les surfaces et présentation de quelques kleinéennes

On commence par poser ci-dessous une question relative aux surfaces qui peut sembler naïve puisque calquée sur les courbes, mais qui a cependant constitué pour moi une source de motivation importante pour le passage au cas des surfaces réelles. C'est pourquoi je tiens à la soulever ci-après, et à lui apporter une réponse complète dans ce qui suit. Bien que la réponse à cette question s'avèrera négative, ceci aura tout de même de positif de fournir un premier renseignement partiel au problème de décrire les types de difféomorphie de dimension 4 réalisables comme le quotient du lieu complexe d'une surface réelle sous l'action de Galois.

Rappelons d'abord que nous avons conclu le Chapitre 0 en observant que toute surface (à bord) est réalisable par la géométrie algébrique. D'autre part en dimension 4 on ne dispose pas d'une classification pour les variétés (le π_1 s'y oppose), d'où la spéculation de dire que c'est la géométrie algébrique qui fournit la "classification" ou tout au moins une géométrisation pour la totalité des variétés de dimension 4. De façon précise, le phénomène observé pour les courbes conduit à soulever la:

Question (Géométrisation mixte). *Est-ce que toute variété M^4 fermée orientable de dimension 4 est réalisable soit comme $S(\mathbb{C})$ pour S une surface algébrique complexe, ou comme le quotient $S(\mathbb{C})/\sigma$ du lieu complexe par la conjugaison complexe, pour S une surface algébrique réelle?*

Commentaire. D'abord il est bien connu que si S est une surface algébrique réelle, alors le quotient $S(\mathbb{C})/\sigma$ est une variété différentiable (sans bord!) de dimension 4 (cf. [Hir3], p. 253, [Mar2] ou [Don1]), qui en outre est orientable car dans ce cas l'involution $\sigma : S(\mathbb{C}) \rightarrow S(\mathbb{C})$ préserve l'orientation. [Raison pour la lissité du quotient: l'involution σ se \mathbb{R} -linéarise au voisinage d'un point fixe, comme la transformation de matrice diagonale $(1, -1, 1, -1)$, et donc $(1, 1, -1, -1)$, soit dans le second facteur \mathbb{R}^2 comme une rotation de 180° , ce qui donne un quotient lisse.]

Terminologie. Convenons d'appeler *riemannienne* d'une variété algébrique complexe X lisse la variété topologique (voire différentiable) sous-jacente à son lieu complexe $X(\mathbb{C})$, et *kleinéenne* d'une variété algébrique réelle X , l'espace topologique $Y = X(\mathbb{C})/\sigma$ quotient de son lieu complexe par l'involution induite par la conjugaison complexe.

Et en fait, après avoir observé que contrairement aux riemanniennes des surfaces, il n'y a pas de contraintes sur les nombres de Betti des kleinéennes des surfaces réelles (cf. §1.2 pour les détails), on a même été conduit à espérer que notre tentative de géométrisation des M^4 puisse aboutir en se passant des lieux complexes, autrement dit en faisant l'économie des riemanniennes:

Question bis (Géométrisation purement kleinéenne). *Est-ce que toute variété M^4 fermée orientable de dimension 4 est déjà réalisable comme $S(\mathbb{C})/\sigma$ pour S une surface algébrique réelle?*

Note. Bien sûr pour donner un sens précis à ces questions on doit préciser la catégorie envisagée: la topologique (TOP) ou la différentiable (DIFF). Si on se place dans TOP, la réponse (à ces deux questions) est "trivialement" négative compte tenu de l'existence de variétés topologiques de dimension 4 qui n'admettent pas de structure différentiable. [Rappel: ceci suit des résultats de Freedman (1982) et Rohlin (1952); en effet d'après Freedman toute forme unimodulaire est réalisable comme la forme d'intersection d'une M^4 topologique simplement connexe (cf. [Fr], pp. 368–369); et donc en particulier la forme E_8 paire de signature 8 est réalisable par une variété notée $|E_8|$. Mais une telle variété (qui est unique en fait, mais peu importe) n'est pas lissifiable, compte tenu du théorème de Rohlin qui veut que la signature d'une M^4 lisse simplement connexe et à forme d'intersection paire est divisible par 16 (cf. [R1] ou pour un argument plus élémentaire par exemple [Mat]).] Ainsi si on connaît beaucoup de topologie en dimension 4 la réponse est trivialement non dans TOP, et donc la question se pose dans DIFF. Dans ce qui suit nous allons montrer que même dans DIFF la réponse est négative, et en particulier notre argument montrera de façon plus élémentaire l'énoncé dans TOP.

Un des rares renseignements que j'ai rencontré dans la littérature à ce sujet est celui apporté par un article de Donaldson ([Don1], p. 22):

...the problem of understanding the diffeomorphism type of the quotient seems to be quite open.
ainsi que la formulation

An attractive feature of this class of manifolds is that one can...

dont j'avais de la peine à déchiffrer la signification exacte, du fait qu'elle ne précisait pas explicitement si la classe en question est stricte.

En réalité, on va montrer que les questions ci-dessus admettent toutes des réponses négatives, comme il devient assez évident une fois que:

- l'on regarde la kleinéenne comme une M^4 canoniquement orientée,
- et que l'on dispose de la connaissance—issue d'une combinaison des théories de Smith et de Hodge—de quelques petites formules dues à M. Letizia reliant (en les identifiant!) les invariants holomorphes (q, p_g) de la riemannienne d'une surface algébrique réelle S aux invariants topologiques (b_1, b_2^+) de sa kleinéenne (vue avec son orientation canonique).
- et enfin lorsque l'on joint à ceci quelques considérations géographiques classiques sur les invariants (q, p_g) des surfaces algébriques (en ce sens qu'elles remontent à Castelnuovo-de Franchis).

Le lecteur désirant seulement se convaincre du caractère restreint des kleinéennes des surfaces au sein de la totalité des M^4 fermées orientables—ou ce qui revient au même à des détails techniques près désirant apporter des réponses négatives aux questions ci-dessus—est invité à lire seulement le §1.2a) (où l'on montre que le b_1 de la riemannienne d'une variété réelle et égale au double du b_1 de sa kleinéenne), puis le §1.5 (où l'on montre d'abord que le genre géométrique $p_g = h^{2,0}$ de la riemannienne d'une surface réelle et égale au nombre de carrés positifs b_2^+ de la forme d'intersection de sa kleinéenne, puis où l'on explique ensuite comment ces deux formules permettent de mettre en évidence le caractère restreint des kleinéennes au sein des M^4 orientables). On sera alors en mesure de préciser un peu la formulation de Donaldson en insistant sur le fait que cette classe de variétés est *stricte*. Ce renseignement bien que n'étant finalement qu'un corollaire assez instantané des formules de Letizia n'avait à ma connaissance jamais été énoncé explicitement. Ainsi notre travail, qui pourrait sembler négatif, contient tout de même ceci de positif d'indiquer qu'il est illusoire d'espérer réaliser toute variété de dimension 4 comme une kleinéenne, et fournit de la sorte un premier renseignement au problème suivant:

Problème (Letizia–Donaldson). *Caractériser les variétés de dimension 4 réalisables comme kleinéenne d'une surface.*

On notera par ailleurs que les formules de Letizia montrent—outre l'impossibilité de réaliser toute M^4 orientable comme une kleinéenne—que le problème de Letizia–Donaldson contient comme sous-problème celui de la géographie des invariants (q, p_g) des surfaces algébriques (qui à ma connaissance n'a pas encore reçu de solution complète). Ceci indique déjà la difficulté du problème, qui au stade des connaissances actuelles semble bien loin de recevoir une solution complète. Plus modestement il est déjà intéressant de se limiter à l'étude de quelques cas particuliers de kleinéennes qui donnent souvent de très jolis exemples de variétés de dimension 4. Pour ne citer qu'un exemple signalons la variété de dimension 4 envisagée par N. Habegger (définie comme le quotient de la quartique de Fermat $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ par l'involution $(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto (\overline{x_1}, -x_0, \overline{x_3}, -x_2)$, cf. [Hab])—dont la vertu essentielle est de montrer que l'on ne peut s'affranchir de l'hypothèse de simple connexité dans le théorème de Rohlin†—est précisément (par construction) une kleinéenne. Ainsi les kleinéennes des surfaces, plutôt que de vouloir toutes les classer (assez anecdotique), apparaissent peut-être avant tout comme un précieux mode de génération de variétés différentiables de dimension 4 susceptible de raffiner notre compréhension des variétés lisses (=différentiables) de dimension 4, qui reste encore très fragmentaire‡, en dépit des énormes développements des 20 dernières années. Il s'agit là d'un espoir maintes fois formulé par Donaldson (cf. [Don1], p. 21 et [Don2], p. 144).

Par ailleurs notre exposé contient une description des types de difféomorphie réalisables comme kleinéenne de surfaces de petit degré dans \mathbb{P}^3 allant jusqu'au degré 4. Il s'agit là de résultats connus, mais dont on propose souvent des démonstrations un peu différentes—et il nous semble parfois plus simple que celles qui étaient connues (tel est surtout le cas pour l'exemple le plus simple qui soit à savoir la kleinéenne du plan qui est comme on sait S^4). La présentation de ces exemples culmine avec le cas du degré 4 (qu'il est commode d'intégrer dans le contexte plus général des surfaces $K3$) qui nécessite le recours à certaines

† Relatif à la divisibilité par 16 de la signature d'une variété différentiable de dimension 4 simplement connexe et à forme d'intersection paire.

‡ Rappelons par exemple que l'on ne sait toujours pas si il y a ou non unicité de la structure différentiable sur S^4 .

techniques sophistiquées (conjecture de Calabi, structure quaternionique sur les surfaces $K3$, etc...) qui merveilleusement misent bout à bout par Donaldson livrent (en particulier) une connaissance complète des kleinéennes des quartiques de \mathbb{P}^3 †.

Nous allons commencé par décrire quelques exemples explicites de kleinéennes de surfaces algébriques réelles (en commençant donc par le plan \mathbb{P}^2 et les quadriques dans \mathbb{P}^3). De ces exemples élémentaires se dégagera déjà le principe selon lequel la considération des kleinéennes permet d’attraper, par le biais de la géométrie algébrique, des variétés de dimension 4, qui semblaient très étrangères à la géométrie algébrique—du moins lorsque l’on se limitait aux riemanniennes.

1.1 Les kleinéennes du plan et des quadriques

Il est bien connu d’après Kuiper-Massey (cf. [Ku] ou [Mas2], et aussi [Mar2]) que l’on a l’homéomorphisme suivant (en fait il s’agit même d’un difféomorphisme):

Théorème 1.1 (Kuiper-Massey 1974). On a $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/\sigma \cong S^4$, autrement dit la kleinéenne du plan projectif est la sphère de dimension 4.

On présente ci-dessous deux démonstrations de l’isomorphisme de Kuiper-Massey, basées toutes deux sur la possibilité de voir $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ comme la variété des groupes de deux points sur la sphère S^2 , ce qui permet essentiellement de raisonner de façon bidimensionnelle, et donc (peut-être) de convivialiser quelque peu les arguments originaux de Kuiper-Massey. En fait via l’identification entre $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et la variété des groupes de deux points sur la sphère, il y a deux façons équivalentes de penser à l’involution de conjugaison complexe sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ suivant qu’on la considère comme induite par la structure réelle standard sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (sphère équatoriale) ou par la structure invisible (sans point réels) sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (sphère antipodale). Ensuite l’idée c’est de considérer une application “trace”, qui à un point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (i.e. un groupe de deux points $D = p + q$ de la sphère $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) associe la somme (formelle) de D avec son conjugué. Cette trace, suivant le point de vue adopté, exhibera la kleinéenne du plan d’abord comme revêtement à deux feuillets de la boule de dimension 4 ramifié le long de son bord, tandis que le second point de vue l’exhibera lui comme un vrai revêtement de l’espace projectif réel de dimension 4. La seconde démonstration me semble plus jolie (compte tenu de l’absence de ramification de la trace), mais nécessite la connaissance d’un tout petit fait “d’algèbre linéaire” à savoir l’unicité de la structure réelle sur les espaces projectifs complexes de dimension paire.

Preuve (selon le point de vue: Kuiper-Massey au pays des groupes de 2 points qui gigotent sur la sphère de Riemann). On utilise l’isomorphisme entre la n -ème puissance symétrique $\mathbb{P}^{1(n)}$ de la droite projective \mathbb{P}^1 et l’espace projectif \mathbb{P}^n , donné par prendre le lieux des zéros d’une forme binaire

$$f(x_0, x_1) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} x_1 + \dots + a_{n-1} x_0 x_1^{n-1} + a_n x_1^n$$

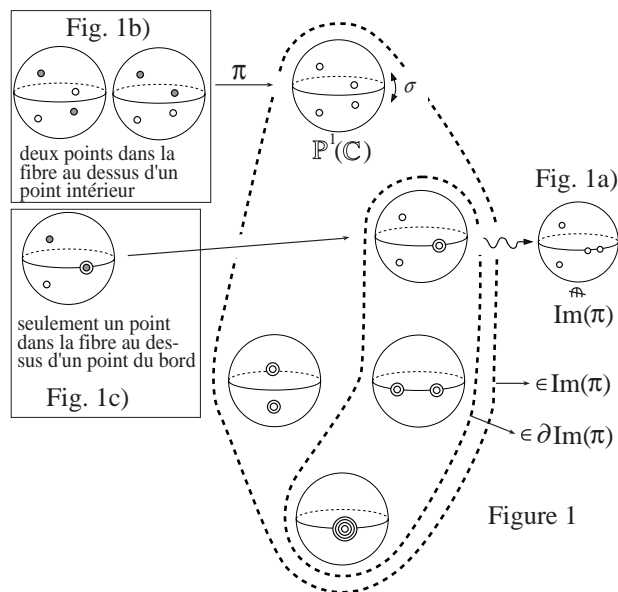
de degré n . On peut donc en particulier réinterpréter $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ comme la variété $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^{(2)}$ des groupes de deux points sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$. L’isomorphisme $\mathbb{P}^{1(n)} \cong \mathbb{P}^n$ étant défini sur \mathbb{R} (vu que les racines du polynôme conjugué sont les conjuguées des racines d’un polynôme donné), l’involution σ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ correspond à l’involution sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^{(2)}$ induite par l’involution standard sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On considère alors l’application “trace”

$$\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})/\sigma \longrightarrow \mathbb{P}^{1(4)}(\mathbb{R})$$

induite par celle qui à un groupe D de deux points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ associe $D + D^\sigma$ la somme avec son conjugué, qui est un groupe de 4 points symétrique, et défini donc un point de $\mathbb{P}^{1(4)}(\mathbb{R})$, que l’on pourrait identifier à $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$. On observe ensuite que π n’est pas surjective: par exemple un groupe de 4 points avec 2 points réels distincts et deux points conjugués (cf. Fig. 1a)), n’est pas dans l’image de π .

† Signalons en passant que cette connaissance permettra en particulier de reconnaître que la variété envisagée par Habegger n’est en réalité pas autre chose qu’une surface d’Enriques.

En fait, l'image de π est constituée des groupes de 4 points symétriques suivants (cf. sur la Figure 1 les 5 configurations délimitées par la grosse ceinture). L'intérieur de l'image de π est formée des groupes de 4 points symétriques qui sont tous imaginaires (car dès que $D + D^\sigma$ a un point réel, alors ce point réel est double, mais alors en le dédoublant sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ on obtient un diviseur symétrique qui n'est plus dans l'image de π , cf. Fig. 1a)). Or la variété de ces groupes de 4 points (ceux qui correspondent à l'intérieur de l'image de π) s'identifie aux groupes de deux points situés dans l'hémisphère nord de la sphère, et donc aux groupes de deux points d'une 2-cellule e^2 , et donc à une 4-cellule [car en identifiant la 2-cellule à \mathbb{C} , on voit en utilisant une fois de plus la correspondance entre racines et coefficients d'un polynôme que se donner un groupe de deux points sur \mathbb{C} revient à se donner un polynôme unitaire de degré 2, et donc un point de \mathbb{C}^2].



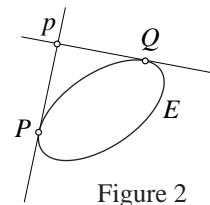
On affirme que le bord $\partial \text{Im}(\pi)$ de l'image de π est une sphère de dimension 3, de sorte que l'image de π est homéomorphe à une boule B^4 de dimension 4. En résumé π exhibe la kleinéenne du plan $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/\sigma$ comme revêtement double de la boule B^4 ramifié le long de son bord $\partial B^4 = S^3$; vu qu'un diviseur intérieur à l'image peut s'écrire de deux manières comme $D + D^\sigma$ (cf. Fig. 1b)), alors que la fibre d'un diviseur situé sur le bord de l'image est réduite à un point (cf. Fig. 1c)). Ce qui permet de conclure que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/\sigma \cong S^4$.

Il nous reste donc à vérifier que $\partial \text{Im}(\pi) \cong S^3$. Pour cela, on note d'abord que le bord de l'image de π s'identifie (via une projection de la sphère de Riemann sur le plan de son équateur) à la variété M^3 des groupes de deux points du disque unité $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, tels que l'un d'eux au moins est situé sur le cercle unité $\partial D^2 = S^1$. Et cette dernière variété M^3 n'est qu'un léger déguisement de S^3 , comme le montre l'argument suivant:

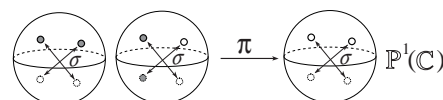
- Étant donné un point de S^3 , conçu comme un couple (a, b) de nombres complexes tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$, on lui associe un point de M^3 en considérant une normalisation simultanée des deux racines du polynôme $z^2 + az + b$ qui sont non toutes nulles.

- Inversément étant donné un point $\alpha + \beta$ de M^3 (notation divisorielle), on lui associe les coefficients $(-(\alpha + \beta), \alpha\beta)$ du polynôme $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)$, convenablement normalisés de sorte qu'ils définissent un point de S^3 . [Si on opère sur α, β avec une homothétie réelle de facteur λ , alors les coefficients de $P(z)$ se voient multipliés par λ et λ^2 respectivement, et c'est donc relativement à cette action "tordue" de $\mathbb{R}_{>0}$ sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ qu'il convient de normaliser les coefficients, pour obtenir l'inverse de la flèche précédente $S^3 \rightarrow M^3$.] \square

Variante encore plus simple pour Kuiper-Massey. Au lieu de penser à \mathbb{P}^2 comme la variété des groupes de deux points sur la sphère de Riemann avec sa structure réelle standard, on peut aussi y penser comme la variété des groupes de deux points sur la sphère avec sa structure réelle "twistée", i.e. celle qui est sans point réels. Raison: l'isomorphisme entre \mathbb{P}^2 et $\mathbb{P}^1(2)$ admet aussi une description géométrique: on fixe une conique E (lisse) dans \mathbb{P}^2 et on considère étant donné un point p du plan les deux points de tangences des deux droites issues de p qui sont tangentes à la conique E (cf. Figure 2). Maintenant sur les réels on dispose de deux choix pour la conique E que l'on peut choisir avec ou sans point réels, second choix qui conduit à l'identification $\mathbb{P}^2 \cong E^{(2)}$ cherchée.

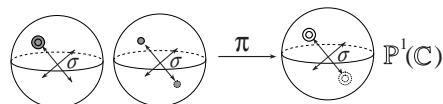


On considère ensuite comme avant l'application π qui à un groupe de deux points D associe $D + D^\sigma$, qui est un groupe de 4 points symétrique pour l'involution antipodale. Ainsi π va de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/\sigma$ dans $E^{(4)}(\mathbb{R})$. Mais $E^{(4)}$ est isomorphe (sur \mathbb{C}) à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et donc à \mathbb{P}^4 . Or compte tenu du fait bien connu qu'il y a unicité de la structure réelle sur les espaces projectifs de dimension paire (cf. détails ci-dessous), on en déduit que l'isomorphisme $E^{(4)} \cong \mathbb{P}^4$ tient même sur \mathbb{R} ; en particulier $E^{(4)}(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel de dimension 4. Par ailleurs on voit facilement (cf. Figure 3) que π est surjective et mieux que c'est un revêtement (à deux feuillettes) ce qui permet de conclure (connexité de la kleinéenne) que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/\sigma$ est homéomorphe à la sphère S^4 . \square



deux points dans la fibre au dessus d'un groupe de 4 points symétrique formé de points distincts

Fig. 3a)



deux points aussi dans la fibre au dessus d'un groupe de 4 points symétrique formé de points agglutinés

Fig. 3b)

On obtient de la sorte une démonstration très élémentaire de Kuiper-Massey, modulo juste la connaissance de l'unicité de la *structure réelle* (=involution antiholomorphe) sur les espaces projectifs complexes de dimension paire, fait qui remonte à C. Segre (1891) (cf. [Se], pp. 430–432), mais qui est plus explicitement énoncé par A. Comessatti (cf. [Co], pp. 13–14), et dont on reproduit ci-dessous la démonstration:

Proposition (Segre 1891). Pour n pair, il y a unicité (à isomorphisme réel près) de la structure réelle sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Preuve. Soient donc σ, τ deux structures réelles sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, il s'agit de montrer l'existence d'un automorphisme f de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ équivariant relativement à σ et τ , c'est-à-dire faisant commuter le diagramme ci-contre. On va construire cet automorphisme en spécifiant son image sur un groupe ordonné de $n + 2$ points génériques.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

Rappelons d'abord que le groupe des automorphismes de \mathbb{P}^n opère de façon simplement transitive sur les groupes ordonnés de $n + 2$ points de l'espace \mathbb{P}^n qui sont génériques; ce qui dans le cas présent signifie que la suppression d'un point quelconque du groupe conduit toujours à un groupe de $n + 1$ points de \mathbb{P}^n qui n'est contenu dans aucun hyperplan de \mathbb{P}^n (cf. par exemple [vdW], p. 14). Il suffit alors de choisir un groupe p_1, \dots, p_{n+2} de $n + 2$ points conjugués deux à deux sous σ (ce qui est possible du fait que n est supposé paire), ainsi qu'un même tel groupe de points q_1, \dots, q_{n+2} mais cette fois conjugués deux à deux sous τ . Il existe alors un unique automorphisme f qui prolonge une bijection équivariante choisie entre ces deux groupes de points. Mais alors les automorphismes f et $\tau f \sigma$ ont même restriction au groupe de $n + 2$ points, et sont donc égaux. D'où l'automorphisme équivariant cherché. \square

Complément (dont on aura pas à faire usage). Pour n impair, il existe par contre exactement deux structures réelles sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ce qui est évident, c'est que l'on a d'abord l'existence de deux structures réelles distinctes: la standard induite par

$$\sigma : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (\overline{x_0}, \dots, \overline{x_n})$$

et la "twistée" induite par l'involution

$$\tau : (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (\overline{x_1}, -\overline{x_0}, \dots, \overline{x_n}, -\overline{x_{n-1}})$$

dont un modèle plus convivial est fourni par la n -ème puissance symétrique de la sphère de Riemann munie de l'involution antipodale, qui sont distinctes du fait que la première a des points réels, alors que la seconde n'en a point. Et ce sont les seules car si τ est une structure réelle sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, alors

- si τ possède des points fixes, alors du fait que n est impair on peut choisir un groupe de $n + 2$ points symétrique avec un point réel et les autres conjugués deux à deux, et alors le même argument qu'avant montre que cette structure réelle est isomorphe à la standard.
- Par contre si τ est sans point fixe, l'argument est plus délicat.

Note historique. En fait l'histoire de Kuiper-Massey semble être un terrain fertile à la controverse. Par exemple déjà en 1971 dans un fameux article d'Arnol'd, on trouve mention de $\mathbb{C}P^2/\sigma \cong S^4$ (cf. [Ar], p. 175). Il semblerait en fait même que Pontrjagin dès les années 30 mentionnait le résultat (cf. [Fin2], p. 120). Quoi

qu'il en soit la seconde démonstration proposée, qui exhibe l'énoncé de Kuiper-Massey comme corollaire instantané de l'unicité de la structure réelle sur les espaces projectifs complexes de dimension paire, suggère même de faire remonter l'origine de Kuiper-Massey à C. Segre.

Ensuite il est instructif d'étudier les kleinéennes des surfaces quadriques $S = S_2 \subset \mathbb{P}^3$. On distingue alors 3 cas, suivant la signature de la forme quadratique qui définit la quadrique en question, ou suivant la topologie de la partie réelle, les équations typiques étant:

- 1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
- 2) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$
- 3) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$

Remarque. En fait ce n'est pas la signature qui intervient mais seulement sa valeur absolue, car les formes

- 4) $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$
- 5) $-x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$

sont homothétiques aux précédentes (via multiplication par -1 et éventuelle permutation des coordonnées) et ne livrent donc pas de nouvelle quadrique.

Proposition 1.2 (Letizia).

- 1) La kleinéenne de la quadrique S telle que $S(\mathbb{R}) = \emptyset$ est la grassmannienne \mathcal{G} des droites réelles de \mathbb{P}^3 .
- 2) La kleinéenne de la quadrique S telle que $S(\mathbb{R}) \cong S^2$ est une sphère, est diffeomorphe à la variété des groupes de deux points sur la sphère S^2 , et donc au plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$ †.
- 3) La kleinéenne de la quadrique S telle que $S(\mathbb{R}) \cong S^1 \times S^1$ est un tore, est diffeomorphe à la sphère S^4 .

Preuve de 1). Pour la quadrique sans point réel, l'argument est particulièrement simple, presque tautologique. En effet, étant donné un point du quotient $Y = S(\mathbb{C})/\sigma$, c'est-à-dire une paire de points conjugués $\{p, p^\sigma\}$ de $S(\mathbb{C})$ (qui est stricte, i.e. $p \neq p^\sigma$ du fait que $S(\mathbb{R}) = \emptyset$), on considère la droite $l = \overline{pp^\sigma}$ passant par cette paire de points conjugués. La droite l est donc réelle. Inversement, étant donné une droite réelle l de \mathbb{P}^3 , son lieu complexe $l(\mathbb{C})$ découpe sur $S(\mathbb{C})$ une paire de points conjugués (car l et S sont toutes deux définies sur \mathbb{R} et du fait que les situations dégénérées l tangente à S , voire l contenue dans S sont incompatibles avec $S(\mathbb{R}) = \emptyset$). D'où l'assertion 1). □

Preuve de 2). Un point du quotient Y est soit une paire de points conjugués stricte $\{p, p^\sigma\}$ de $S(\mathbb{C})$ ou un point de la partie réelle $p \in S(\mathbb{R}) \cong S^2$. Dans le premier cas, on peut tracer la droite réelle l par p et p^σ , et on obtient ainsi une droite "farouche", i.e. dont la partie réelle $l(\mathbb{R})$ est disjointe de $S(\mathbb{R})$ [car sinon $l(\mathbb{C})$ couperait $S(\mathbb{C})$ en 3 points au moins, et serait donc contenue dans $S(\mathbb{C})$. Mais ceci est impossible vu que les droites sur S ne sont pas invariantes par la conjugaison σ]. Ensuite dans le pinceau des plans contenant la droite l il y en a exactement deux qui sont tangents à la sphère $S(\mathbb{R})$, dont les lieux de tangence déterminent deux points P, Q sur la sphère $S(\mathbb{R})$ (cf. Figure 4).

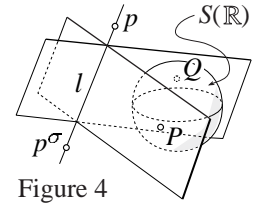


Figure 4

Inversement la donnée de deux tels points $P, Q \in S(\mathbb{R})$ permet de récupérer l une droite farouche (comme l'intersection des plans tangents à S en ces deux points), et donc en intersectant l avec S une paire de points conjugués de S . Cette correspondance se prolonge de façon naturelle au second cas, faisant correspondre à $p \in S(\mathbb{R})$, le groupe de 2 points $2p$ de $S(\mathbb{R})$. En résumé on voit que Y s'identifie à $(S^2)^{(2)}$ la variété des groupes de deux points sur la sphère S^2 .

Enfin en identifiant $S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on peut aussi y reconnaître $\mathbb{C}P^2$, en utilisant la correspondance $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^{(2)} \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ donnée par prendre le lieu des zéros d'une forme quadratique binaire $ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2$. □

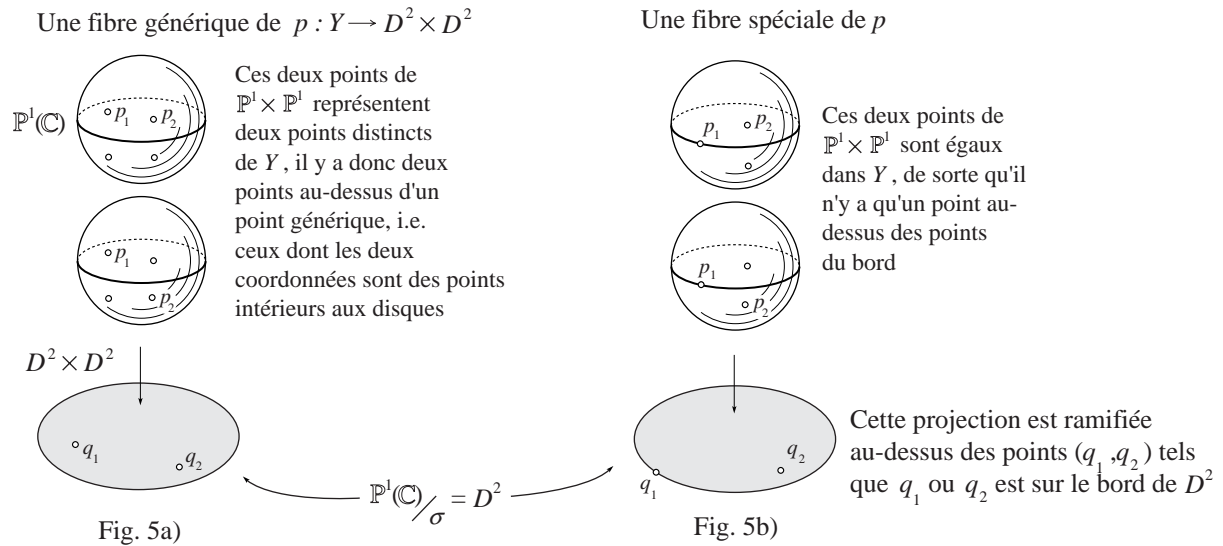
Preuve de 3). Pour une telle quadrique on sait que $S \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est le produit de deux droites réelles standard. On note p_1, p_2 les deux projections $S \rightarrow \mathbb{P}^1$, qui induisent (par functorialité de la kleinéenne) $\overline{p}_i : Y \rightarrow D^2$ et dont le produit donne une application

$$p : Y \rightarrow D^2 \times D^2.$$

† On verra plus loin que si l'on regarde la kleinéenne avec son orientation canonique, elle est en réalité positivement-diffeomorphe à $\overline{\mathbb{C}P}^2$ (qui est la variété $\mathbb{C}P^2$ munie de l'orientation opposée à celle spécifiée par la structure complexe).

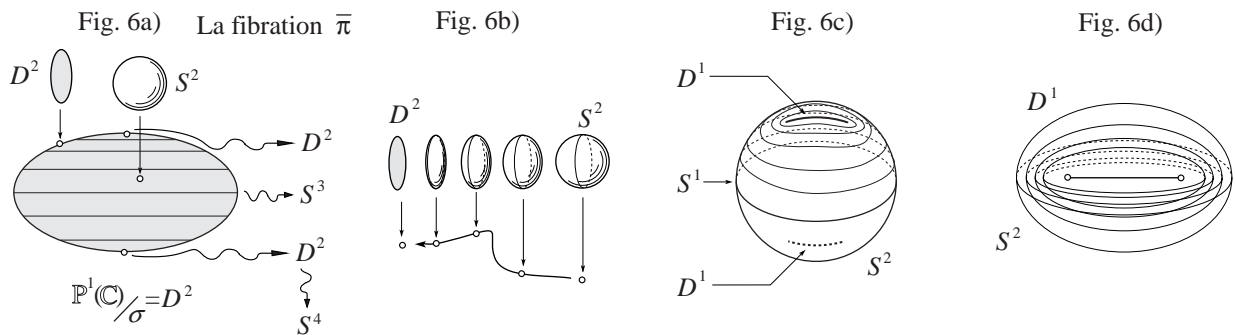
La fibre au-dessus d'un point $(q_1, q_2) \in D^2 \times D^2$ générique est constituée de deux points de Y , où générique signifie qu'aucun des deux points n'est situé sur le bord d'un disque (cf. Fig. 5a)). En effet dans ce cas il y a au niveau de $S(\mathbb{C})$, 4 points de $S(\mathbb{C})$ au-dessus du point (q_1, q_2) de $D^2 \times D^2$. Mais parmi ces 4 points qui se projettent sur (q_1, q_2) et qui sont donc de la forme $(p_1, p_2), (p_1^\sigma, p_2^\sigma)$ et $(p_1^\sigma, p_2), (p_1, p_2^\sigma)$, il y en a seulement 2 qui donnent des points distincts de Y .

Si par contre un des deux points $(q_1, q_2) \in D^2 \times D^2$ est situé sur le bord d'un disque, alors la fibre de p se réduit à un point (cf. Fig. 5b)).



Ainsi l'application p exhibe Y comme revêtement double de la 4-cellule $D^2 \times D^2$ ramifié au-dessus de $(S^1 \times D^2) \cup (D^2 \times S^1)$, qui n'est autre que le bord de $D^2 \times D^2$, compte tenu de la formule générale qui veut que le bord d'un produit $X \times Y$ soit $\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$. [D'ailleurs au passage on retombe sur la représentation de S^3 comme la réunion de deux tores pleins recollés de façon standard le long du tore $S^1 \times S^1$.] Ainsi le lieu de ramification de p coïncide avec le bord de son but. Ce qui permet finalement de reconnaître que Y n'est autre que S^4 , en utilisant la description de la sphère S^n comme revêtement double de la cellule D^n ramifié le long de son bord $\partial D^n = S^{n-1}$. \square

Variante pour la preuve de 3). On utilise encore le fait que $S \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est le produit de deux droites réelles standard. La projection $p : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ sur un des facteurs est donc définie sur \mathbb{R} , et induit donc une application entre les kleinéennes $\bar{p} : Y \rightarrow D^2$. Les fibres de cette applications sont des sphères S^2 au-dessus des points intérieurs au disque D^2 et des disques au-dessus des points du bord ∂D^2 (cf. Fig. 6a)). Ainsi en restreignant cette fibration à un segment horizontal, on voit un film débutant par D^2 qui se gonfle instantanément sur S^2 pour ce réécraser sur D^2 , ce qui génère S^3 (cf. Fig. 6a)). Pour l'instant on se contente d'observer que c'est vrai si on abaisse toutes les dimensions d'une unité comme le suggère la Fig. 6c), qui montre un film débutant par D^1 se gonflant sur S^1 , pour finalement se réécraser sur D^1 génère la sphère S^2 .



Et finalement en laissant varier verticalement ce segment horizontal (cf. Fig. 6a), on obtient un film débutant par D^2 se gonflant sur S^3 pour finalement se réécraiser sur D^2 , ce qui montre que Y est S^4 . En effet si on abaisse les dimensions d'une unité on peut voir D^1 se gonfle sur S^2 comme la famille des ellipsoïdes équifocales dans un espace euclidien de dimension 3 (cf. Fig. 6d).

On généralise ensuite cette construction en disposant dans l'espace euclidien \mathbb{R}^4 de dimension 4, un cercle contenu dans un plan H et comme avant on construit un solide ellipsoïdal en considérant pour chaque plan contenant H l'ellipsoïde dans H de foyer le cercle S^1 . \square

Ces exemples montrent déjà que la considération des kleinéennes permet d'élargir considérablement la classe des variétés de dimension 4 réalisables par la géométrie algébrique, vu que des variétés telles que S^4 ou \mathcal{G} ont $b_2 = 0$ † et sont donc hors d'atteinte de la géométrie algébrique "classique", mais sont cependant réalisables comme kleinéenne.

Ils montrent aussi que contrairement à ce qui se produisait pour les courbes [où riemanniennes et kleinéennes peuplaient des territoires disjoints], une variété différentiable donnée M^4 de dimension 4 peut être simultanément réalisable comme une riemannienne et une kleinéenne. Par exemple la variété $\mathbb{C}P^2$ apparaît à la fois comme la riemannienne du plan projectif \mathbb{P}^2 , mais aussi comme la kleinéenne d'une quadrique dont la partie réelle est une sphère, comme nous venons de le voir avec le point 2) de la Proposition 1.2.

Objection possible. En fait si on regarde la kleinéenne comme une variété orientée, la kleinéenne de la quadrique sphérique (i.e. celle de partie réelle S^2) n'est en réalité pas $\mathbb{C}P^2$, mais $\overline{\mathbb{C}P^2}$ qui désigne la variété orientée obtenue en renversant l'orientation naturelle sur $\mathbb{C}P^2$; celle spécifiée par la structure complexe. Ceci résulte par exemple de la formule $b_2^+(Y) = p_g(X)$ que l'on verra plus loin (cf. §1.5, Formule 5.1). Ceci démolit l'exemple ci-dessus de géométrisation simultanée de $\mathbb{C}P^2$ comme riemannienne et kleinéenne. Mais on verra plus loin (comme conséquence de travaux de Wang, cf. §1.4) que $\mathbb{C}P^2$ vu comme variété orientée est néanmoins réalisable comme kleinéenne; et ce comme kleinéenne d'une surface $K3$ réelle, de partie réelle homéomorphe à S_{10} une surface de genre 10.

1.2 Les nombres de Betti des kleinéennes: pas de contraintes!

On se propose maintenant d'étudier quels sont les nombres de Betti réalisables par les kleinéennes.

Il est d'abord utile de rappeler que tout couple d'entiers (b_1, b_2) est réalisable comme les deux premiers nombres de Betti d'une variété M^4 orientable. [En effet il suffit d'observer que S^4 réalise $(0, 0)$, et que $\mathbb{C}P^2$ réalise $(0, 1)$ et $S^1 \times S^3$ réalise $(1, 0)$, puis de faire des sommes connexes].

Par contre on sait bien que si M^4 est une riemannienne, i.e. la variété différentiable sous-jacente au lieu complexe d'une surface algébrique (projective), alors on a les contraintes suivantes:

- 1) $b_2 > 0$
- 2) $b_1 \equiv 0 \pmod{2}$ [Picard, Lefschetz ou Hodge]

qui montrent que les riemanniennes sont très loin d'être les M^4 les plus générales qui soient. Par exemple les variétés S^4 et $S^1 \times S^3$ ne sont pas réalisables comme riemannienne d'une surface algébrique complexe.

Note. En passant on peut signaler (bien que nous n'allons pas en faire usage) que ces deux contraintes ne constituent par un système complet de contraintes pour les (b_1, b_2) des riemanniennes, comme on peut le déduire assez facilement du théorème de Castelnuovo-de Franchis qui impose la contrainte supplémentaire:

- 3) si $b_2 = 1$ alors $b_1 = 0$

Il n'est pas difficile alors de vérifier que 1), 2) et 3) est un système complet de contraintes pour les nombres de Betti des riemanniennes.

Cela étant dit, on va montrer qu'en revanche pour les kleinéennes il n'y a aucune contraintes sur leurs deux premiers nombres de Betti (b_1, b_2) . Pour le montrer on va s'appuyer sur deux observations:

- a) une formule de duplication pour les nombres de Betti impairs.
- b) le comportement des nombres de Betti d'une kleinéenne sous l'effet d'un éclatement.

† Le fait que $b_2(\mathcal{G}) = 0$ peut se voir de la façon suivante: d'abord la projection $\pi : S(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}$ est un vrai revêtement à 2 feuillets, et c'est donc le revêtement universel, vu que l'espace total est difféomorphe à $S^2 \times S^2$. Par suite le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}_2$ et donc $b_1(\mathcal{G}) = 0$. On a aussi $\chi(S(\mathbb{C})) = 2\chi(\mathcal{G})$, et donc $4 = 2(2 - 2b_1(\mathcal{G}) + b_2(\mathcal{G}))$, d'où $b_2(\mathcal{G}) = 0$.

1.2a) La relation fondamentale pour b_1

En fait pour S une surface algébrique réelle, on a la relation suivante entre le premier nombre de Betti de sa riemannienne $X = S(\mathbb{C})$ et celui de sa kleinéenne $Y = S(\mathbb{C})/\sigma$:

Théorème 2.1 (Formule de Letizia-Silhol). $b_1(X) = 2 b_1(Y)$.

Elle se démontre en combinant les théories de Smith et de Hodge.

Preuve. On note $\pi : X = S(\mathbb{C}) \rightarrow Y = S(\mathbb{C})/\sigma$ la projection canonique.

- D'abord la théorie de Smith nous dit que $\pi^* : H^*(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{C})$ est un isomorphisme sur son image qui est formée des éléments fixes par $\sigma^* : H^*(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{C})$.
- D'autre part l'involution $\sigma^* : H^*(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{C})$ préserve la décomposition de Hodge

$$H^i(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X)$$

(pour s'en convaincre on pense à la description explicite de cette décomposition en terme de formes harmoniques et l'assertion résulte alors du caractère isométrique de l'action de Galois vis-à-vis de la métrique induite par celle de Fubini-Study sur l'espace projectif complexe ambiant), et étant induite par $\sigma : X \rightarrow X$ qui est antiholomorphe elle le fait en échangeant les types, i.e. $\sigma^*(H^{p,q}) \subset H^{q,p}$. De ce fait l'application

$$\begin{aligned} \varphi : H^{1,0}(X) &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{C})^{inv} \\ \omega &\longmapsto \omega + \sigma^*\omega \end{aligned}$$

(où $H^1(X, \mathbb{C})^{inv}$ désigne le sous-espace de $H^1(X, \mathbb{C})$ fixe sous σ^*) est un isomorphisme d'inverse ψ donné par $\omega \mapsto \omega^{1,0}$, c'est-à-dire la restriction à $H^1(X, \mathbb{C})^{inv}$ de la projection

$$\pi^{1,0} : H^1(X, \mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X) \rightarrow H^{1,0}(X)$$

sur la composante de type $(1,0)$. En effet $\psi\varphi\omega = \psi(\omega + \sigma^*\omega) = \omega$ puisque $\sigma^*\omega$ est de type $(0,1)$. Et inversement pour $\omega \in H^1(X, \mathbb{C})^{inv}$, on voit, en écrivant $\omega = \omega^{1,0} + \omega^{0,1}$ et en identifiant la composante de type $(0,1)$ dans $\sigma^*(\omega) = \omega$, que $\sigma^*(\omega^{1,0}) = \omega^{0,1}$. Par suite $\varphi\psi\omega = \varphi(\omega^{1,0}) = \omega^{1,0} + \sigma^*\omega^{1,0} = \omega$.

En combinant ces deux renseignements le théorème en résulte, puisque

$$\begin{aligned} b_1(X) &= \dim H^1(X, \mathbb{C}) = 2 \dim H^{1,0}(X) && \text{[d'après Hodge]} \\ &= 2 \dim H^1(X, \mathbb{C})^{inv} && \text{[compte tenu de l'iso. } \varphi \text{ ci-dessus]} \\ &= 2 \dim H^1(Y, \mathbb{C}) && \text{[d'après Smith]} \\ &= 2 b_1(Y). \quad \square \end{aligned}$$

Remarques. • Cette démonstration est exposée dans Silhol, cf. [Si], pp.10–12.

• On peut s'interroger sur la possibilité de trouver une démonstration de la formule de duplication (2.1) qui soit purement topologique, indépendante de tout recours à la théorie de Hodge, car alors on disposerait d'une nouvelle démonstration du fait que le b_1 d'une surface algébrique complexe est pair. [Modulo évidemment le principe qui veut que toute surface définie sur \mathbb{C} , peut moyennant une variation continue de ses coefficients être "déformée" sans altérer le type d'homéomorphie de son lieu complexe en une surface qui est définie sur \mathbb{R} .] Mais une telle possibilité est certainement illusoire du fait qu'il existe des surfaces de Hopf réelles. Si on y parvenait, alors on assisterait à un curieux renversement de situation, à savoir la possibilité d'exploiter la géométrie algébrique réelle comme outil pour l'étude de la topologie des variétés projectives complexes, alors que traditionnellement (et ce essentiellement depuis Klein) c'est le processus inverse qui prédomine. Il pourrait s'agir là d'une première étape de récupération de résultats standard, en espérant même que cette méthode de réalité deviennent à long termes un outil pour attaquer la difficile question de la topologie des variétés projectives complexes, et notamment pour trancher la question de savoir si la topologie des variétés projectives se réduit à de la géométrie différentielle à la Kähler-Hodge ou si au contraire on peut lui insuffler un petit parfum \mathbb{R} -arithmétique. De façon précise on pourrait espérer que ce point de vue apporte quelques

précisions sur la question suivante (qui semble malheureusement toujours ouverte, mais importante ne serait ce que pour justifier le reflexe très répandu de nos jours consistant à approcher la question de la topologie des variétés projectives complexes dans le contexte élargi des variétés kähleriennes):

Question (Kodaira). *Est-ce que toute variété kählerienne compacte est homéomorphe (voire difféomorphe) au lieu complexe d'une variété projective?*

• Le même argument montre plus généralement que pour V une variété projective réelle et lisse de dimension arbitraire, les nombres de Betti impairs de sa riemannienne $V(\mathbb{C})$ sont égaux aux doubles de ceux de sa kleinéenne $V(\mathbb{C})/\sigma$, i.e.

$$b_{2i+1}(V(\mathbb{C})) = 2 b_{2i+1}(V(\mathbb{C})/\sigma).$$

Il suffit, en effet, de choisir un scindement de la cohomologie complexe $H^{2i+1}(X, \mathbb{C}) = W \oplus \overline{W}$ en deux morceaux échangés par la conjugaison complexe—par exemple

$$W = H^{2i+1,0}(X) \oplus \dots \oplus H^{i+1,i}(X)$$

et de répéter mot pour mot l'argument précédent.

Exemple. Il est notamment rigolo d'illustrer ceci avec l'exemple des courbes elliptiques réelles C : dans ce cas la kleinéenne $Y = C(\mathbb{C})/\sigma$ est soit une bouteille de Klein, un ruban de Möbius, ou une couronne suivant que $r = 0, 1$ ou 2 , et dans tous les cas on a bien $b_1(Y) = 1$.

1.2b) Effet d'un éclatement sur les nombres de Betti d'une kleinéenne

Soit S une surface algébrique réelle. On peut toujours

- a) éclater une paire de points conjugués p, p^σ ,
- b) et si en outre $S(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ on peut éclater un point réel.

On obtient ce faisant une nouvelle surface réelle \tilde{S} , et on se propose de décrire l'évolution subie par les nombres de Betti de la kleinéenne pour chacune de ces deux opérations.

Dans le premier cas, la partie réelle est clairement inchangée, tandis que dans le second, elle se déduit de $S(\mathbb{R})$ en faisant sa somme connexe avec $\mathbb{R}P^2$, i.e.

$$\tilde{S}(\mathbb{R}) \cong S(\mathbb{R}) \# \mathbb{R}P^2.$$

[En effet la partie réelle de l'éclatée se déduit de celle de S , en ôtant un disque contenant p , et en recollant à sa place un fibré en intervalle de base un cercle dont le bord est connexe, c'est-à-dire un ruban de Möbius; qui par ailleurs est bien le résultat de l'excision d'un disque ouvert dans $\mathbb{R}P^2$, d'où l'assertion.]

D'autre part le revêtement $\pi : X \rightarrow Y$ ramifié le long de $S(\mathbb{R})$ montre que:

$$(0) \quad \chi(X) = 2\chi(Y) - \chi(S(\mathbb{R})),$$

et donc (vu que la dualité de Poincaré sévit également sur la kleinéenne Y , du fait que cette dernière est aussi orientable)

$$(1) \quad 2 - 2b_1(X) + b_2(X) = 2(2 - 2b_1(Y) + b_2(Y)) - \chi(S(\mathbb{R}))$$

ce qui, compte tenu de la relation fondamentale $b_1(X) = 2b_1(Y)$, peut se réécrire comme:

$$(2) \quad b_2(X) = 2 + 2b_2(Y) - \chi(S(\mathbb{R}))$$

On est maintenant en mesure de décrire l'effet des deux manières d'éclater une surface algébrique réelle sur les nombres de Betti de sa kleinéenne. D'abord compte tenu de la relation fondamentale (2.1) et de l'invariance du b_1 du lieu complexe par éclatement, on voit que le b_1 de la kleinéenne n'est pas affecté dans les deux cas.

Proposition 2.2. Soit S une surface algébrique réelle.

a) Si on éclate une paire de points conjugués, les nombres de Betti de la kleinéenne se transforment comme

$$(b_1, b_2) \rightsquigarrow (b_1, b_2 + 1).$$

b) Tandis que si on éclate un point réel, les nombres de Betti de la kleinéenne restent inchangés

$$(b_1, b_2) \rightsquigarrow (b_1, b_2).$$

Preuve. En effet pour a), le membre de gauche de la formule (2) ci-dessus subit un accroissement de 2 unités, alors que $\chi(S(\mathbb{R}))$ reste inchangée; et donc $b_2(Y)$ subit un accroissement d'une unité.

Pour b) le membre de gauche de (2) augmente de 1, alors que $\chi(S(\mathbb{R}))$ diminue de 1 [car $\tilde{S}(\mathbb{R}) = S(\mathbb{R}) \# \mathbb{R}P^2$]; de sorte que $b_2(Y)$ reste inchangé. \square

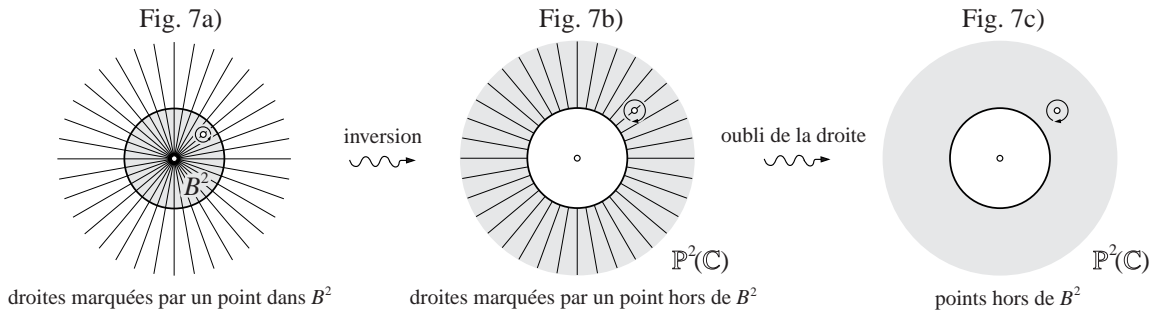
Remarque. En fait on peut préciser la Proposition 2.2 en décrivant exactement la modification subie par le type de difféomorphie de la kleinéenne sous l'effet d'un éclatement (et ce sans utiliser la relation fondamentale).

Il suffit en effet d'abord de se souvenir du:

Fait (Hirzebruch(1951)–Mandelbaum-Moishezon(1976). (cf. [Hir1], p. 80, et [MM])) *Éclater un point d'une surface (complexe) revient (au niveau de sa riemannienne) à effectuer une opération de somme connexe avec $\overline{\mathbb{C}P^2}$ (qui est la variété de dimension 4 orientée obtenue à partir de $\mathbb{C}P^2$ en renversant son orientation complexe).*

Preuve. En effet la surface éclatée \tilde{S} se déduit de S , en lui ôtant une boule U de dimension 4 contenant le point p centre de l'éclatement $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$, et en recollant à sa place l'espace $V^4 = \pi^{-1}(U)$ qui est fibré en disque D^2 de base une sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (correspondant à la droite exceptionnelle de l'éclatement) et de bord S^3 . Or le résultat de l'excision dans le plan $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'une boule autour du point base d'un pinceau de droites fournit aussi un tel fibré (de bord S^3) et donc par unicité, V^4 est ce fibré (nécessite donc la connaissance des D^2 -fibrés au-dessus de S^2). Ceci montre déjà que \tilde{S} est la somme connexe de S avec $\mathbb{C}P^2$ ou $\overline{\mathbb{C}P^2}$. On peut alors s'appuyer sur le théorème de la signature de Hodge, en vertu duquel $b_2^+ = 2p_g + 1$, relation qui compte tenu de l'invariance birationnelle de p_g , établit celle de b_2^+ ; et permet d'écartier l'éventualité que \tilde{S} soit $S \# \mathbb{C}P^2$, éventualité qui aurait pour effet d'augmenter b_2^+ d'une unité. \square

Variante plus concrète. Compte tenu de la nature locale de l'opération d'éclatement, on peut identifier le fibré $\pi^{-1}(U)$ à la variété des couples (q, l) tel que le point q est simultanément sur la droite l et dans la boule $B^2 = \{(z, w) \mid |z|^2 + |w|^2 \leq 1\} \subset \mathbb{C}^2$ "fibrée" par le pinceau des droites vectorielles de \mathbb{C}^2 (cf. Fig 7a)).



Or moyennant une inversion par rapport à la sphère $S^3 = \partial B^2$ (cf. Fig. 7b)), ce fibré est isomorphe (en tant que fibré) à la variété des couples (q, l) tel que le point q est dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus B^2$. Or cet espace s'identifie (via oubli de la droite) à la variété des points q de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus B^2$ (cf. Fig. 7c)). Enfin du fait que l'inversion renverse l'orientation complexe, on voit que \tilde{S} se déduit de S par une opération de somme connexe avec $\overline{\mathbb{C}P^2}$. \square

De ce fait on déduit alors aisément, de la possibilité d’exciser des boules adaptées à l’involution σ , la proposition suivante qui décrit la modification subie par la kleinéenne d’une surface réelle sous l’effet des deux manières d’éclater une telle surface :

Proposition 2.3. *Soit S une surface algébrique réelle.*

a) *Éclater une paire de points conjugués revient au niveau de la kleinéenne à faire une opération de somme connexe avec $\overline{\mathbb{C}P^2}$.*

b) *Alors qu’éclater un point réel revient au niveau de la kleinéenne à effectuer une opération de somme connexe avec $\overline{\mathbb{C}P^2}/\sigma \cong S^4$ [en utilisant Kuiper-Massey], ce qui ne modifie pas le type de difféomorphie.*

Application: les kleinéennes des surfaces cubiques.

Muni de ce seul renseignement on pourrait espérer pousser notre connaissance des kleinéennes des surfaces algébriques réelles de \mathbb{P}^3 jusqu’à englober le degré 3. Mais il y a une petite subtilité qui tient au fait que l’on doit se limiter à celles qui sont \mathbb{R} -birationnellement triviales. Rappelons d’abord qu’une surface cubique dans \mathbb{P}^3 pouvant toujours être représentée comme le plan éclaté en 6 points génériques (cf. par exemple [GH], p. 489), on en déduit qu’une surface cubique réelle qui \mathbb{R} -birationnellement équivalente au plan, est toujours représentable comme le plan \mathbb{P}^2 éclaté en 6 points (génériques) symétriques pour l’action de la conjugaison complexe, soit donc

- en 6 points réels,
- ou en 4 points réels et une paire de points conjugués,
- ou en 2 points réels et 2 paires de points conjugués
- ou enfin en 3 paires de points conjugués.

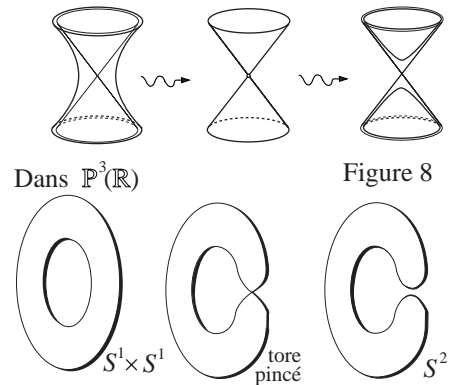
Les kleinéennes respectives sont S^4 , $\overline{\mathbb{C}P^2}$, $\overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2} = 2\overline{\mathbb{C}P^2}$ et enfin $\overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2} = 3\overline{\mathbb{C}P^2}$, [en utilisant la notation usuelle kM pour la somme connexe de k copies de la variété M].

Mais il existe d’autre part dans \mathbb{P}^3 des surfaces cubiques (lisses) de partie réelle non connexe—par exemple une petite perturbation d’une quadrique de partie réelle sphérique et d’un plan de partie réelle disjointe—et qui de ce fait ne peuvent être birationnellement équivalente sur \mathbb{R} au plan. Ainsi si on désire pousser notre connaissance des kleinéennes jusqu’au degré 3 on doit traiter aussi ce cas—pour lequel on invoque la :

Proposition 2.4 (Letizia 1984). *Lorsqu’une surface réelle de \mathbb{P}^3 franchit l’hypersurface discriminant en assistant à l’évanescence d’un cercle au niveau de sa partie réelle, sa kleinéenne subit une opération de somme connexe avec $\overline{\mathbb{C}P^2}$.*

Justification heuristique. On utilise le principe que la chirurgie subie par la kleinéenne ne dépend pas du “patient” auquel elle s’applique, c’est-à-dire le fait que toutes les surfaces lorsqu’elles traversent le discriminant (de la façon indiquée dans l’énoncé) subissent le même traitement; de sorte qu’il suffit d’étudier ce qu’il advient pour une surface “test” que l’on peut choisir à notre convenance. On peut donc—contrairement à l’usage—se ramener à un problème global. Par ailleurs la chirurgie subie est clairement une opération de somme connexe comme on le voit en fixant une boule euclidienne autour du point singulier de la surface de transition. On considère alors comme surface test, la surface quadrique réelle de partie réelle homéomorphe à un tore, et sa

déformation vers une quadrique sphérique (cf. Figure 8). Du fait que la kleinéenne de la première surface est S^4 et que celle de la seconde est $\overline{\mathbb{C}P^2}$, on en déduit bien l’assertion. \square



On peut alors décrire le type de difféomorphie de la kleinéenne de la dernière cubique S_3 de partie réelle non connexe; simplement en la concevant comme le résultat de l’évanescence d’un cercle sur une cubique de

partie réelle homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$ (cf. Figure 9, qui représente un pinceau de surfaces cubiques—que l'on peut obtenir comme le résultat de la révolution de la partie réelle de cubiques planes (représentées ci-contre)—et donc d'équation (affine) $x^2 + y^2 = f(z)$ avec $f(z) = f(z, \lambda)$ un polynôme de degré 3 qui dépend d'un paramètre λ , et ayant pour des valeurs successives de λ , une seule, puis trois racines réelles, e.g. $f(z, \lambda) = f(z) - \lambda$ avec $f(z)$ un polynôme cubique avec une racine réelle et présentant une bosse, i.e. avec deux extremums locaux.)

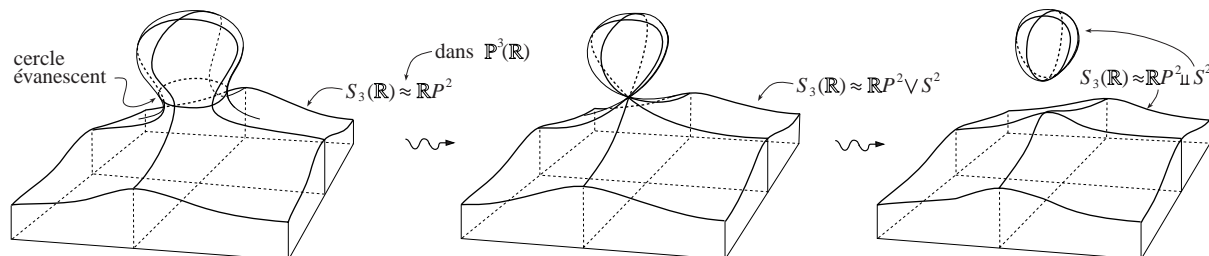
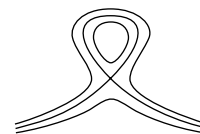


Figure 9

Or la cubique de départ n'est autre du fait que sa partie réelle est $\mathbb{R}P^2$, que le plan \mathbb{P}^2 éclaté en 6 points imaginaires conjugués, dont la kleinéenne est $3\overline{\mathbb{C}P}^2$. La Proposition 2.4 montre alors que la kleinéenne de la cubique non connexe est $4\overline{\mathbb{C}P}^2$. En résumé, on obtient ainsi, tenant compte aussi du fait classique en vertu duquel l'espace des surfaces cubiques réelles lisses possède exactement 5 composantes connexes†, l'énoncé suivant:

Théorème 2.5 (Letizia 1984). *Les kleinéennes des surfaces cubiques lisses de \mathbb{P}^3 réalisent 5 types de difféomorphie, qui sont S^4 et $\alpha\overline{\mathbb{C}P}^2$ avec $1 \leq \alpha \leq 4$.*

1.2c) Conclusion sur les nombres de Betti des kleinéennes

La kleinéenne Y de \mathbb{P}^2 est S^4 et réalise donc $(b_1, b_2) = (0, 0)$. [Cela peut aussi se déduire (en évitant Kuiper-Massey) de la relation fondamentale qui donne $b_1(Y) = \frac{1}{2}b_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 0$; et de la formule (2); qui spécialisée à \mathbb{P}^2 donne $1 = 2 + 2b_2(Y) - 1$, d'où $b_2(Y) = 0$.]

Ensuite, en éclatant des paires de points conjugués sur \mathbb{P}^2 , la Proposition 2.2 a) montre que tous les couples d'entiers de la forme $(0, n)$ sont réalisables comme les nombres de Betti (b_1, b_2) d'une kleinéenne.

En considérant ensuite une surface $S = C_g \times \mathbb{P}^1$, produit d'une courbe C_g de genre g par une droite, on obtient une surface, dont la riemannienne a pour deux premiers nombres de Betti $(b_1, b_2) = (2g, 2)$. Si en outre C_g et \mathbb{P}^1 sont réelles, alors S sera une surface réelle avec $\chi(S(\mathbb{R})) = 0$ [car $S(\mathbb{R}) = C_g(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ qui est soit vide ou une union disjointe de tores $S^1 \times S^1$]. D'après la relation fondamentale (2.1), le premier nombre de Betti de la kleinéenne est $b_1(Y) = g$. Et la formule (2) se réduit à $b_2(X) = 2 + 2b_2(Y)$, d'où on tire que $b_2(Y) = 0$. En résumé les deux premiers nombres de Betti de la kleinéenne d'une surface de la forme $S = C_g \times \mathbb{P}^1$ sont $(g, 0)$, et ce indépendamment des structures réelles introduites sur les deux courbes facteurs.

Petite remarque. Il ne faut pas croire que ceci contredit le fait que pour la quadrique $S_2 \subset \mathbb{P}^3$ (qui est donc isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) dont la partie réelle est une sphère S^2 , la kleinéenne est $\mathbb{C}P^2$ (Proposition 1.2 2)) de nombres de Betti $(0, 1)$ (qui n'est pas de la forme $(g, 0)$!). Mais il n'en est rien car cette quadrique n'est pas le produit de deux droites réelles avec la structure réelle produit [car si c'était le cas, du fait que $S_2(\mathbb{R})$ est non vide, S_2 ne pourrait qu'être le produit de deux droites réelles équipées de la structure réelle standard, mais alors la partie réelle serait un tore, et non une sphère.]

† Fait qui remonte d'ailleurs aussi à Klein (cf. [K3], pp. 11–62).

Il suffit alors d'éclater des paires de points conjugués sur une surface de la forme $S = C_g \times \mathbb{P}^1$, pour réaliser tout couple d'entiers (m, n) comme nombres de Betti (b_1, b_2) de la kleinéenne d'une surface algébrique réelle convenable (cf. Figure 10).

Bien sûr, cela—à défaut d'établir notre spéculation sur la géométrisation des M^4 —montre déjà que les invariants topologiques les plus simples que sont les nombres de Betti ne suffisent pas à déceler le caractère restreint des kleinéennes au sein des M^4 orientables; et illustre une fois de plus la flexibilité topologique accrue des kleinéennes vis-à-vis des riemanniennes.

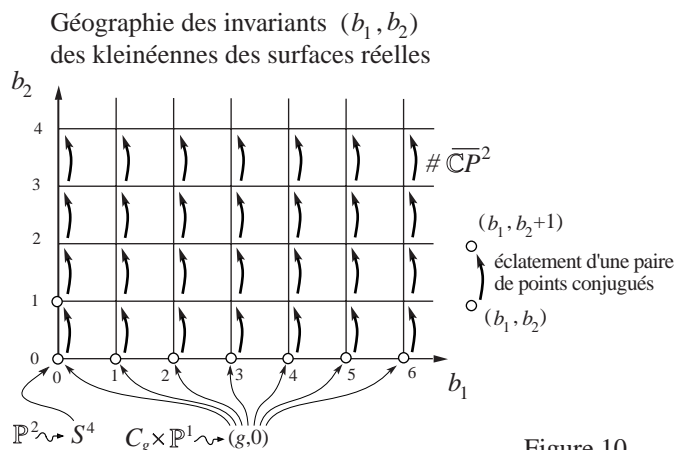


Figure 10

1.3 $S^1 \times S^3$ vu comme une kleinéenne

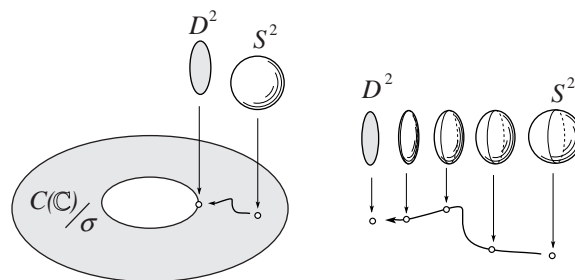
Pour que notre tentative de géométrisation ait des chances d'être vraie, on devrait pouvoir attraper la variété $S^1 \times S^3$ comme une kleinéenne. C'est ce que l'on se propose de faire dans ce petit paragraphe. (Rappelons que $S^1 \times S^3$ n'est pas réalisable comme riemannienne; ceci illustre donc une fois encore la flexibilité des kleinéennes).

Nous sommes donc à la recherche d'une surface réelle S telle que la kleinéenne associée $S(\mathbb{C})/\sigma$ soit $S^1 \times S^3$. On va localiser un candidat S en se servant des nombres de Betti (b_1, b_2) comme lunette de visée; i.e. on utilise la géographie des nombres de Betti pour localiser grossièrement un candidat S , puis on raffine le tir en étudiant le type de difféomorphie de sa kleinéenne. Compte tenu du paragraphe précédent (§1.2c), on sait que le vecteur de Betti de $S^1 \times S^3$ qui est $(b_1, b_2) = (1, 0)$ est réalisable comme les nombres de Betti de la kleinéenne d'une surface de la forme $S = C \times \mathbb{P}^1$ avec C une courbe elliptique (de genre 1).

On va montrer que moyennant introduction de structures réelles convenables sur les courbes facteurs, on peut non seulement satisfaire à l'égalité des nombres de Betti, mais aussi à celle des types de difféomorphie.

- Si on prend des structures réelles sur C et \mathbb{P}^1 telles que l'une d'elles au moins ne possède pas de points réels, alors la surface S sera sans point réel de sorte que la projection $\pi : S(\mathbb{C}) \rightarrow Y = S(\mathbb{C})/\sigma$ est un vrai revêtement (sans ramification) à deux feuillets. De ce fait le groupe fondamental de $S(\mathbb{C})$ qui est abélien libre de rang 2 s'injecte dans $\pi_1(Y)$, ce qui exclut la possibilité que $Y \cong S^1 \times S^3$.

- Si on prend par contre pour C une courbe elliptique réelle avec deux composantes et pour \mathbb{P}^1 la droite réelle standard, alors on va montrer que la kleinéenne correspondante est $S^1 \times S^3$. Pour le voir on considère la projection sur le premier facteur $p : S \rightarrow C$. C'est un morphisme défini sur \mathbb{R} , qui induit donc une application entre les kleinéennes $\bar{p} : Y \rightarrow C(\mathbb{C})/\sigma$. Or la kleinéenne $C(\mathbb{C})/\sigma$ de la courbe C est un cylindre ou ce qui revient au même une couronne. Les fibres de \bar{p} au-dessus des points intérieurs à la couronne sont des sphères S^2 , alors que celles au-dessus des points situés sur le bord de la couronne sont des hémisphères nord

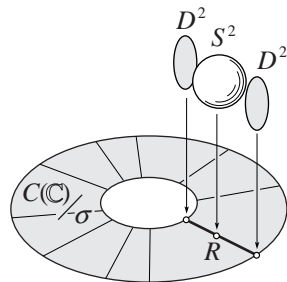


La fibration \bar{p}

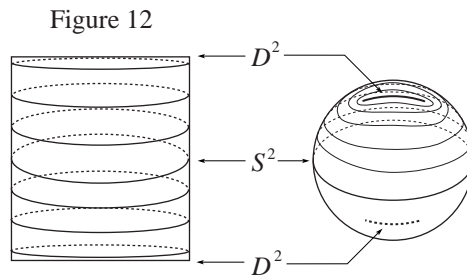
Figure 11

de la sphère de Riemann, c'est-à-dire des disques (cf. Figure 11). La dégénérescence de la fibre générique vers une fibre au-dessus d'un point du bord, peut être pensée comme une sphère S^2 qui s'aplatit de plus en plus pour finalement s'écraser sur un disque (cf. Figure 11).

Ensuite lorsque l'on restreint la fibration \bar{p} à un rayon R de la couronne, on assiste (en regardant les fibres au-dessus d'un point mobile qui parcourt ce rayon R) à un film, qui commence par un disque D^2 , qui se gonfle instantanément en une sphère S^2 , pour finalement se réécraser sur un disque. La forme engendré par un tel film est bien sûr la sphère S^3



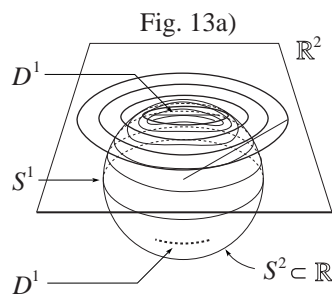
La fibration \bar{p} restreinte à un rayon R



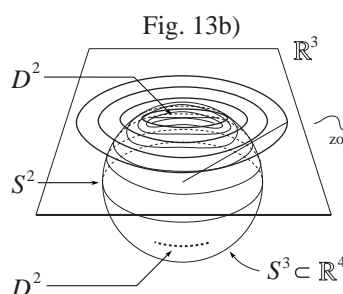
La sphère S^3 vue comme un coussin

La sphère S^3 vue comme un coussin lissifié

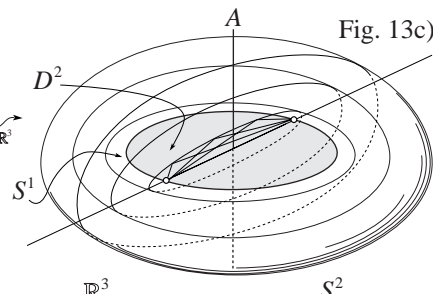
(comme le suggère la Figure 12 qui représente la situation avec des dimensions abaissées d'une unité), et par suite $\bar{p}^{-1}(R)$ est une sphère S^3 . Et ceci vaut même dans la catégorie différentiable comme le suggère le coussin lissifié: en dimension 2 un difféomorphisme explicite se construit facilement en voyant les courbes de niveau sur la sphère S^2 comme l'image via une projection centrale d'une famille d'ellipses équi focales tracées sur le plan (euclidien) tangent au pôle nord de la sphère sur l'hémisphère nord de la sphère S^2 , cf. Fig. 13a).



La famille des ellipses équi focales et sa projection sur la sphère S^2



La famille des ellipsoïdes équi focales



La famille des ellipsoïdes équi focales

Cette construction en dimension 2 se généralise naturellement en dimension qui nous intéresse en considérant dans \mathbb{R}^3 euclidien, la famille des ellipsoïdes équi focales de foyer un cercle S^1 , cf. Fig. 13c) que l'on peut définir comme le résultat d'un mouvement de révolution autour de l'axe A orthogonal au plan du cercle et passant par son centre de la famille des ellipses équi focales tracées dans un plan H contenant l'axe A et de foyers $H \cap S^1$.

Enfin en laissant varier le rayon R , on voit que $Y \cong S^1 \times S^3$. En fait notre argument montre dans un premier temps que Y est un fibré en sphère de dimension 3 de base un cercle S^1 . Mais on sait d'après la classification de tels fibrés qu'il y a au-dessus de S^1 exactement deux fibrés en sphère, le trivial et une sorte de bouteille de Klein généralisée (cf. par exemple Steenrod, [St] p. 134). En outre on sait que l'espace total de cet unique fibré non trivial n'est pas orientable (excepté dans le cas où la fibre est une S^0), et comme d'autre part Y , en tant que kleinéenne d'une surface est orientable, on en tire bien que Y est le fibré trivial.

Remarque. En fait on se rend compte maintenant que l'on aurait tout aussi bien pu prendre pour C une courbe elliptique réelle avec $r = 1$, on obtient alors une surface $S = C \times \mathbb{P}^1$ ayant la même kleinéenne. [En effet dans ce cas la couronne de l'exemple précédent est remplacée par un ruban de Möbius, mais alors le même argument qu'avant, qui utilisait en réalité seulement le fait que $C(\mathbb{C})/\sigma$ est un fibré en intervalle de base un cercle, montre à nouveau que $Y \cong S^1 \times S^3$.]

1.4 $S^2 \times S^2$ vu comme une kleinéenne et un aperçu des travaux de Donaldson-Wang

Pour que notre tentative de géométrisation purement kleinéenne ait des chances d'aboutir, on devrait pouvoir attraper la variété $S^2 \times S^2$ comme une kleinéenne. Si on adopte la même méthode qu'avant, consistant à utiliser la lunette de visée donnée par les nombres de Betti, on obtient (du fait que les nombres

de Betti de $S^2 \times S^2$ sont $(b_1, b_2) = (0, 2)$) le candidat: S le plan \mathbb{P}^2 éclaté en deux paires de points conjugués. Mais pour ce candidat S , la kleinéenne correspondante Y est compte tenu de la Proposition 2.3, difféomorphe à $S^4 \# \overline{\mathbb{C}P}^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2 = 2\overline{\mathbb{C}P}^2$, en particulier sa forme d'intersection est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc $H_2(Y, \mathbb{Z})$ contient des éléments de self-intersection -1 . Or sur $S^2 \times S^2$ toute classe d'homologie est de self-intersection paire, ce qui exclut la possibilité que Y soit difféomorphe à $S^2 \times S^2$. Le même argument montre aussi que l'autre candidat: S une quadrique dont la partie réelle est une sphère S^2 que l'on éclate en une paire de points conjugués ne réalise pas $S^2 \times S^2$. En conclusion la méthode bête échoue à exhiber une variété aussi simple que $S^2 \times S^2$ comme une kleinéenne.

En fait comme je l'ai appris grâce à l'article de Wang [Wa], la variété $S^2 \times S^2$ est réalisable comme kleinéenne d'une surface quartique dans \mathbb{P}^3 . En fait on dispose même d'une connaissance explicite des variétés de dimension 4 réalisables comme kleinéenne de surfaces quartiques dans \mathbb{P}^3 . Cette connaissance est basée sur une remarque de Donaldson (connue sous le nom de *Donaldson's trick*). Il s'agit du raisonnement suivant (dont on expose d'abord la structure dans ses grandes lignes, pour ensuite combler les détails techniques dans l'espoir de ne pas noyer le lecteur):

- **Etape 0:** *L'argument dans ces grandes lignes.* Soit S une surface $K3$ (=surface analytique complexe compacte simplement connexe et de fibré canonique trivial) que l'on suppose en outre munie d'une involution antiholomorphe $\sigma : S \rightarrow S$. On dira alors que S est *réelle*, et noterons avec un léger abus de notation $S(\mathbb{R})$ le lieu fixe de σ . Notre surface $K3$ est donc en particulier une *variété de Calabi-Yau* (=variété analytique complexe de type kählerien et de fibré canonique topologiquement trivial ou ce qui revient au même à première classe de Chern nulle $c_1 = 0$). La solution apportée par S.-T. Yau à la conjecture de Calabi entraîne que l'on peut munir S d'une structure quaternionique (ou hyperkähler), qui induit une famille paramétrée par S^2 (=les racines de -1 dans le corps des quaternions \mathbb{H} de Hamilton) de structures complexes sur S . On va alors montrer qu'il existe au sein de cette famille de structures complexes—que l'on pourrait interpréter comme un "twisteur" de Penrose—une nouvelle structure complexe (que l'on pourrait qualifier de *mutante*) rendant l'involution donnée $\sigma : S \rightarrow S$ holomorphe. Ceci a pour mérite de convertir la kleinéenne S/σ en une riemannienne—et en particulier va conduire à une description complète des types de difféomorphie réalisés comme kleinéenne d'une surface $K3$ réelle. On munit dorénavant S d'une telle structure complexe mutante. On va alors montrer que:

- Si σ est sans point fixe, alors le quotient S/σ est une surface d'Enriques.
- Et sinon le critère de rationalité de Castelnuovo montre que le quotient S/σ est une surface rationnelle, et est donc difféomorphe à $S^2 \times S^2$ ou à $\mathbb{C}P^2 \# \alpha \overline{\mathbb{C}P}^2$ avec $\alpha \geq 0$. On pourra même ensuite expliciter les valeurs possibles pour le paramètre α .

Au ralenti, les détails sont les suivants:

- **Etape 1:** *Holomorphisation de l'involution.* Essayons d'abord de comprendre un peu plus en détail, cette fabuleuse possibilité d'"holomorphiser" l'involution antiholomorphe donnée. Avant tout il est utile d'oublier l'involution σ , et de rappeler alors comment le résultat de Yau, joint à une observation de Hitchin permet de munir une surface $K3$ quelconque S (avec un marquage d'une classe de Kähler ω) d'une structure quaternionique, et donc en particulier d'une sphère S^2 de structures complexes. (Cette construction est exposée dans [BPV], pp. 264–266). L'idée est la suivante:

comme $c_1(S) = 0$, le résultat de Yau livre l'existence d'une unique métrique kählerienne g (pensée ici comme riemannienne) Ricci-plate telle que la forme de Kähler associée ω_g soit ω . Ensuite comme S est simplement connexe et compte tenu du fait que la courbure de la connexion induite sur le fibré canonique $K_S = \bigwedge^2 TS^*$ par la connexion de Levi-Civita (sur le fibré tangent) n'est autre que la courbure de Ricci, la condition Ricci-plate assure que le transport parallèle (au niveau du fibré canonique) est invariant par homotopie, ce qui permet par transport parallèle de construire une section parallèle du fibré canonique K (se souvenir de la description de la condition Kähler en terme du parallélisme de la structure complexe). On note ω_I cette section parallèle, qui en particulier est donc holomorphe relativement à la structure complexe

donnée sur S , notée I . Disposant de ω_I , on construit ensuite une nouvelle structure presque complexe J définie comme un multiple réel convenable de l'opérateur J_1 donné par:

$$g(J_1(Y), Z) = \operatorname{Re}(\omega_I(Y, Z))$$

Ceci munit S d'une structure presque quaternionique, i.e. une paire $\{I, J\}$ de structures presque complexes qui anticommulent ($I \circ J = -J \circ I$). Mais en fait J est parallèle (puisque construite à partir de ω_I qu'il l'est)—ce qui assure l'intégrabilité de J . [En effet compte tenu du critère d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg, il suffit pour établir l'intégrabilité d'une structure presque complexe J de vérifier qu'elle est sans torsion, où la *torsion de J* (=tenseur de *Nijenhuis*) est définie par

$$N(X, Y) = 2\{[JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\}.$$

Or si en outre J est parallèle relativement à une connexion de torsion T , on a la formule suivante (cf. [KN], vol. II, p. 145) pour la torsion de J en terme de la torsion de la connexion

$$-\frac{1}{2}N(X, Y) = T(JX, JY) - J(T(JX, Y)) - J(T(X, JY)) - T(X, Y)$$

qui montre en particulier que si la connexion est sans torsion, la structure presque complexe J l'est aussi. Ce qui montre plus généralement, qu'une structure presque complexe, parallèle relativement à une connexion sans torsion est intégrable.] D'où la structure quaternionique annoncée sur S , et qui la muni en particulier d'une sphère S^2 (constituée de tous les opérateurs de la forme $bI + cJ + dK$ où $K = I \circ J$, et $b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 + c^2 + d^2 = 1$) de structures complexes comprenant I comme structure particulière. En outre cette sphère de structures complexes ne dépend que du couple (S, ω) .

Maintenant si en outre S , la surface $K3$ donnée, est munie d'une involution antiholomorphe $\sigma : S \rightarrow S$, alors en choisissant la forme de Kähler ω adaptée à l'involution (i.e. telle que $\sigma^*(\omega) = -\omega$ ou ce qui revient au même telle que σ est une isométrie pour la métrique riemannienne g correspondante), la construction ci-dessus (de Hitchin-Yau) livre une sphère S^2 de structures complexes; qui hérite d'une involution $\sigma : S^2 \rightarrow S^2$ induite par $\sigma : S \rightarrow S$; et explicitement donnée par $Q^\sigma = \sigma Q \sigma$ pour $Q \in S^2$. Ainsi $\sigma : S^2 \rightarrow S^2$ fixe les structures complexes telles que σ est holomorphe et antifixe celles telles que σ est antiholomorphe. Enfin le petit calcul ci-dessous montre (en choisissant une ω_I réelle, i.e. telle que $\omega_I(\sigma Y, \sigma Z) = \overline{\omega_I(Y, Z)}$) que $J^\sigma = J$, d'où l'existence cherchée d'une structure complexe *mutante*, c'est-à-dire rendant σ holomorphe. [En effet comme σ est une isométrie pour g , on a

$$g(\sigma J_1 \sigma Y, Z) = g(J_1 \sigma Y, \sigma Z) = \operatorname{Re}(\omega_I(\sigma Y, \sigma Z)) = \operatorname{Re}(\overline{\omega_I(Y, Z)}) = \operatorname{Re}(\omega_I(Y, Z)) = g(J_1 Y, Z),$$

d'où par non dégénérescence $\sigma J_1 \sigma = J_1$.]

En fait sachant que $J^\sigma = J$, on peut même s'intéresser à la question de l'unicité d'une telle structure *mutante*; il suffit en effet d'écrire $\sigma : S^2 \rightarrow S^2$ en coordonnées, et on s'aperçoit alors que σ est une rotation de 180° , qui fixe donc deux points et antifixe un cercle de points. De sorte qu'il y a en fait dans S^2 exactement deux structures (J et $-J$) qui rendent σ holomorphe, et tout un cercle de structures (passant par la structure originelle I) relativement auxquelles σ continue d'être antiholomorphe.

• **Etape 2: Structure géométrique sur la kleinéenne.** Ensuite du fait que $\operatorname{Fix}(\sigma)$ en tant que lieu fixe d'une involution antiholomorphe est (s'il est non vide) de codimension réelle 2 dans S , il résulte que relativement à la nouvelle structure complexe introduite sur S (rendant σ holomorphe), l'involution σ se \mathbb{C} -linéarise au voisinage d'un point fixe comme $(z, w) \mapsto (z, -w)$. De ce fait le quotient S/σ hérite d'une structure complexe compatible (i.e. rendant la projection canonique $\pi : S \rightarrow S/\sigma$ holomorphe), puisque que les fonctions z, w^2 invariantes (sous σ) passent au quotient et fournissent un atlas holomorphe sur l'espace quotient S/σ . En résumé on voit que σ ait des points fixes ou non, le quotient admet toujours une structure complexe compatible.

Ensuite (ayant en vue d'appliquer le critère de rationalité de Castelnuovo), il serait désirable de se convaincre que cette structure complexe sur S/σ est en réalité sous-jacente à une structure de surface projective, et cette assertion vaut même lorsque la surface $K3$ de départ S n'est pas algébrique! La raison est la suivante:

du fait qu'une surface $K3$ est toujours Kähler (théorème de Siu, cf. [Siu] ou [Be2]), le quotient S/σ hérite lui aussi d'une structure Kähler. Pour établir la projectivité de Y , il suffit, compte tenu d'un corollaire bien connu du théorème de plongement de Kodaira, [en vertu duquel toute variété kählérienne compacte avec $h^{2,0} = 0$ est projective (cf. [KM], Theorem 8.3)], de voir que $p_g(Y) = 0$. Or Y étant Kähler on a d'après Hodge la relation $b_2^+(Y) = 2p_g(Y) + 1$, qui combinée à la formule générale de Letizia $p_g(X) = b_2^+(Y)$ [que nous démontrerons au paragraphe suivant], montre que $p_g(Y) = 0$ (puisque $p_g(X) = 1$). D'où la projectivité du quotient Y .

Cela étant

- si σ est sans point fixe, il est bien connu que Y est une surface d'Enriques (cf. [Be], p.100).
- et sinon Y est une surface projective avec $q = P_2 = 0$, et alors le critère de rationalité de Castelnuovo nous dit que S est rationnelle.

L'annulation de ces deux invariants s'obtient de la manière suivante:

– Pour $q(Y)$, on a du fait que Y est kählérienne $b_1(Y) = 2q(Y)$, qui combinée à la formule de duplication $b_1(X) = 2b_1(Y)$ donne $b_1(X) = 4q(Y)$. Or vu que $b_1(X) = 0$, cela donne l'annulation cherchée de $q(Y)$.

– Pour montrer que $P_2(Y) = 0$, l'argument est le suivant: d'abord la formule de Riemann-Hurwitz généralisée (cf. par exemple [BPV], p.41) appliquée au revêtement ramifié $\pi : X = S \rightarrow Y = S/\sigma$ donne

$$K_X = \pi^*K_Y + R$$

où R est le diviseur de ramification qui dans le cas présent est $\text{Fix}(\sigma)$. Vu que $2R = \pi^*(\pi(R))$ cela entraîne, $2K_X = \pi^*(2K_Y + \pi(R))$. Or $K_X = 0$, ce qui compte tenu de l'injectivité de π^* (cf. détails ci-dessous) permet de conclure que $2K_Y = -\pi(R)$, et donc à la négativité de $2K_Y$, d'où l'annulation cherchée de $P_2(Y)$. [Il reste donc à établir l'injectivité de π^* ; c'est là une conséquence immédiate de la functorialité de la suite exacte longue de cohomologie induite par la suite de l'exponentielle $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 1$. En effet le morphisme (holomorphe) $\pi : X \rightarrow Y$ induit:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow \pi^* & \circlearrowleft & \uparrow H^2(\pi) \\ \dots & \longrightarrow & H^1(Y, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(Y, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Or la flèche $H^1(Y, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(Y, \mathbb{Z})$ est injective (car $q(Y) = 0$), et la flèche verticale $H^2(\pi)$ est aussi injective, d'après la théorie de Smith. La commutativité du carré \circlearrowleft permet alors d'en déduire l'injectivité annoncée de $\pi^* : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$.]

Etape 3: Topologie des surfaces rationnelles. Enfin quant à la dernière assertion—qui à partir de la rationalité de Y permet d'en déduire sa topologie—elle résulte du théorème suivant bien connu†:

Proposition 4.1 (conséquence de Steenrod-Hirzebruch-Vaccaro-Andreotti 1945-1957). *Toute surface rationnelle est difféomorphe à une somme connexe $\mathbb{C}P^2 \#_\alpha \overline{\mathbb{C}P}^2$ pour un certain entier $\alpha \geq 0$, ou à $S^2 \times S^2$.*

Preuve. On s'appuie sur le résultat dû à Vaccaro-Andreotti selon lequel toute surface rationnelle S se déduit, moyennant une succession d'éclatements, du plan \mathbb{P}^2 ou d'une surface d'Hirzebruch Σ_n avec $n \geq 0$ (cf. [Va], [An] ou [GH], p.520). Rappelons que pour $n \geq 0$, Σ_n est définie comme la sous-variété de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \ni (x, y)$ (avec $x = (x_0, x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$) d'équation $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$ (cf. [Hir1]). La restriction de la projection sur le second facteur à Σ_n définit un morphisme $\pi_n : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{P}^1$, qui exhibe Σ_n comme \mathbb{P}^1 -fibré au-dessus de \mathbb{P}^1 , et donc comme espace fibré en sphères S^2 au-dessus de S^2 . Par ailleurs la classification de Steenrod (cf. [St], p.134) nous apprend qu'il n'y a que deux tels fibrés (car $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$). Or π_0 et π_1 sont deux tels fibrés, et qui en outre sont distincts du fait que leurs espaces totaux le sont, puisqu'il s'agit respectivement de $\Sigma_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong S^2 \times S^2$ et de $\Sigma_1 = Bl_p(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$, qui se distinguent par la parité de leurs formes d'intersections. Ainsi pour tout entier n , Σ_n est homéomorphe à $\Sigma_0 \cong S^2 \times S^2$

† Souvent énoncé (cf. p. ex. [FM1], p.7), mais jamais avec une preuve complète, c'est pourquoi on ressent le besoin d'en donner une ci-après.

ou $\Sigma_1 = Bl_p(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ ‡. Maintenant le résultat de Vaccaro-Andreotti (=la description des modèles minimaux des surfaces rationnelles) montre qu’une surface rationnelle S (quelconque) est difféomorphe soit à $\mathbb{C}P^2 \# \alpha \overline{\mathbb{C}P}^2$ ou à $\Sigma_n \# \beta \overline{\mathbb{C}P}^2$. Dans le premier cas, on tombe sur une variété de la forme annoncée, et dans le second on doit distinguer deux cas, suivant que Σ_n est homéomorphe à Σ_0 ou à Σ_1 :

- si $\Sigma_n \cong \Sigma_1$, alors on tombe sur $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2 \# \beta \overline{\mathbb{C}P}^2 = \mathbb{C}P^2 \# (\beta + 1) \overline{\mathbb{C}P}^2$, qui est de la forme annoncée.
- sinon $\Sigma_n \cong \Sigma_0$, et alors on obtient $(S^2 \times S^2) \# \beta \overline{\mathbb{C}P}^2$, qui dès que $\beta \geq 1$ est de la forme requise compte tenu du difféomorphisme classique $(S^2 \times S^2) \# \overline{\mathbb{C}P}^2 \cong \mathbb{C}P^2 \# 2 \overline{\mathbb{C}P}^2$ [qui se montre en projetant une quadrique lisse de \mathbb{P}^3 depuis l’un de ses points, et en résolvant la singularité de cette application rationnelle par le biais d’un éclatement]. D’où la proposition. \square

• **Etape 4: Détermination des valeurs possibles pour α .** Dans le cas où $Y \cong \mathbb{C}P^2 \# \alpha \overline{\mathbb{C}P}^2$, on peut même préciser les valeurs admissibles pour α , en s’appuyant sur l’inégalité de Comessatti. Il s’agit du résultat général suivant:

Proposition 4.2 (Comessatti-Petrovsky-Oleinik-Kharlamov). *Soit S une surface projective lisse réelle (voire plus généralement une surface kählérienne compacte munie d’une structure réelle). Alors la caractéristique d’Euler de la partie réelle satisfait $|\chi(S(\mathbb{R})) - 1| \leq h^{1,1} - 1$.*

Preuve. On se permet de rappeler l’argument, surtout du fait que l’énoncé est valide dans un contexte plus général (cf. [Kh2] ou [Wil], pp. 62–63), mais l’argument se simplifie pour les surfaces. Une fois de plus l’énoncé s’obtient en combinant un énoncé topologique à la théorie de Hodge, et résulte plus précisément d’une inspection de l’action de Galois sur la décomposition de Hodge. En effet, la *formule de la trace de Lefschetz* appliquée à l’involution $\sigma : S(\mathbb{C}) \rightarrow S(\mathbb{C})$ (on suppose dans un premier temps que l’on se trouve dans le cas algébrique) nous permet d’exprimer la caractéristique d’Euler du lieu fixe $\chi(S(\mathbb{R}))$ comme la somme alternée des traces des endomorphismes induit en (co)-homologie (le “co” comme copain, étant préférable ici à l’homologie pour pouvoir ensuite copiner avec Hodge, qui nous invite aussi à travailler avec des coefficients complexes):

$$\chi(S(\mathbb{R})) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{Trace}(H^i(\sigma))$$

Il suffit maintenant pour chaque i d’expliciter les traces correspondantes.

- Pour $i = 0, 4$, on a trivialement $\text{Trace}(H^i(\sigma)) = 1$ (puisque σ préserve l’orientation).
- Pour $i = 1, 3$, on a $\text{Trace}(H^i(\sigma)) = 0$, car $H^i(\sigma)$ échange les deux composantes de la décomposition de Hodge.
- Enfin pour $i = 2$, l’action de σ sur $H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ préserve cette décomposition en permutant les types—elle laisse invariant les sous-espaces $H^{1,1}$ et $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$. En restriction à ce dernier, l’endomorphisme ne laisse pas de trace pour la même raison qu’avant (cas $i = 1, 3$). Ceci montre que $\text{Trace}(H^2(\sigma))$ est égal à la trace de $H^2(\sigma)$ restreinte à $H^{1,1}$. Ensuite du fait que la classe d’une section hyperplane définie sur \mathbb{R} voit son orientation se renversée sous σ , l’endomorphisme possède au moins un vecteur propre de valeur propre -1 . Par suite

$$-h^{1,1} \leq \text{Trace}(H^2(\sigma)) \leq h^{1,1} - 2.$$

D’où d’après Lefschetz, $2 - h^{1,1} \leq \chi(S(\mathbb{R})) = 2 + \text{Trace}(H^2(\sigma)) \leq h^{1,1}$, ce qui équivaut bien au résultat annoncé. \square

Remarque. Si on désire l’énoncé dans le cas kählérien, il suffit à partir d’une métrique kählérienne quelconque de la moyenniser via l’involution σ , pour obtenir une nouvelle métrique kählérienne “adaptée” à l’involution, et dont la forme de Kähler ω vérifiera alors $\sigma^*(\omega) = -\omega$, ce qui permet ensuite de reproduire l’argument ci-dessus (après avoir troqué la section hyperplane contre la classe de Kähler).

‡ En fait Hirzebruch décrit même (*loc. cit.* p. 81) comment en fonction de la parité de n , les types d’homéomorphie des surfaces Σ_n se répartissent entre Σ_0 et Σ_1 , mais on peut pour notre objet faire l’économie de cette précision.

De manière plus détaillée, l'involution antiholomorphe σ donnée sur S , induit pour tout point $p \in S$, une application antilinéaire $\sigma : T_p S \rightarrow T_{p\sigma} S$ entre les espaces tangents holomorphes (encore notée σ pour ne pas trop alourdir les notations). Il est alors naturel d'exiger d'une métrique hermitienne h sur S qu'elle soit équivariante, i.e. qu'elle fasse commuter le diagramme ci-contre:

$$\begin{array}{ccc} T_p S \times T_p S & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \\ \sigma \times \sigma \downarrow & & \downarrow \text{conj} \\ T_{p\sigma} S \times T_{p\sigma} S & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \end{array}$$

En formule cette condition d'équivariance s'écrit $h(\sigma(u), \sigma(v)) = \overline{h(u, v)}$; et elle entraîne aussitôt l'anti-invariance cherchée de ω (i.e. $\sigma^*(\omega) = -\omega$), puisque la forme de Kähler ω se déduit de h , essentiellement en prenant sa partie imaginaire (en fait avec la convention usuelle on a $\omega = -\frac{1}{2}\text{Im}(h)$, cf. par ex. [GH], p. 28).

Ainsi il reste à montrer que l'on peut toujours introduire sur S une métrique kählerienne équivariante. Ce qui est très simple; partant d'une métrique kählerienne quelconque h , il suffit d'envisager \tilde{h} définie par:

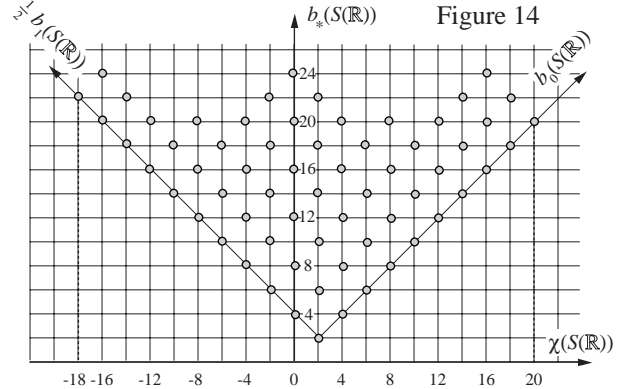
$$\tilde{h}(u, v) = h(u, v) + \overline{h(\sigma(u), \sigma(v))}$$

et on vérifie alors sans peine (tenant compte de l'antilinéarité de σ) que \tilde{h} définit une métrique hermitienne, qui en outre est kählerienne et qui enfin (par construction) jouit de la propriété d'équivariance requise.

On peut maintenant revenir à la détermination des valeurs possibles pour le paramètre α . Comme $b_2(Y) = 1 + \alpha$ et vu que pour une surface $K3$ on a (comme pour une surface quartique) $b_2(X) = 22\ddagger$, la relation (2) qui était $b_2(X) = 2 + 2b_2(Y) - \chi(S(\mathbb{R}))$ donne

$$b_2(Y) = \frac{20 + \chi(S(\mathbb{R}))}{2}.$$

D'autre part, en particulierisant l'inégalité de Comessatti $2 - h^{1,1} \leq \chi(S(\mathbb{R})) \leq h^{1,1}$ à notre surface $K3$, on voit (vu que $h^{1,1} = 20$ pour une surface $K3$) que $\chi(S(\mathbb{R}))$ varie entre -18 et 20 . En outre toutes les valeurs intermédiaires (paires bien sûr) sont atteintes. On donnera plus loin un argument pour établir ce renseignement. Par suite α varie entre 0 et 19 . En fait en consultant par exemple le livre de Silhol (cf. [Si], p. 189), on apprend même (grâce surtout aux travaux de l'école russe) que la table ci-contre représente la totalité des valeurs possibles pour les invariants $(\chi(S(\mathbb{R})), b_*(S(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2))$ des surfaces $K3$ réelles (de partie réelle non vide) [b_* désignant le nombre total de Betti].



Mais pour notre objet—qui rappelons-le—est de fournir une description complète des kleinéennes des surfaces $K3$, on n'aura pas vraiment besoin du renseignement très précis apporté par la Figure 14; mais en même temps notre objet nécessite (pour des raisons que nous allons expliquer prestement) le recours à un renseignement encore plus précis dans le cas très exceptionnel $(\chi, b_*) = (-16, 20)$.

Observons tout d'abord que l'invariant $\chi(S(\mathbb{R}))$ —ou ce qui revient au même $b_2(Y)$ —détermine univoquement le type topologique de la kleinéenne Y , compte tenu de la liste très restreinte dans laquelle l'argument de Donaldson a déjà permis de canaliser la topologie de la kleinéenne d'une surface $K3$ —sauf dans le cas où $b_2(Y) = 2$ (qui correspond à $\chi(S(\mathbb{R})) = -16$), où les deux possibilités $S^2 \times S^2$ et $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ peuvent se présenter. Ce qui va nous permettre de les distinguer (et par là même ensuite de montrer que les deux possibilités se produisent effectivement), c'est la condition relative à la surface S d'être *séparante au sens de Viro* (ou de type I_0 ou I_{abs} dans la terminologie russe), c'est-à-dire la condition (qui généralise la condition séparante pour les courbes), obtenue en exigeant outre la non-vacuité de $S(\mathbb{R})$, la nullité de la classe d'homologie fondamentale de $S(\mathbb{R})$ modulo 2 dans $S(\mathbb{C})$. Le résultat précis est le suivant:

† En général cela résulte de la formule de Noether $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K^2 + \chi(S))$.

Lemme 4.3 (Wang 1995). *Soit S une surface $K3$ réelle avec une kleinéenne ambiguë, i.e. telle que $\chi(S(\mathbb{R})) = -16$, de sorte que Y est $S^2 \times S^2$ ou $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$. Alors sa kleinéenne $Y = S/\sigma$ est $S^2 \times S^2$ si et seulement si S est séparante au sens de Viro (i.e. $S(\mathbb{R}) \sim 0 \in H_2(S(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_2)$).*

Preuve. D'abord on observe que ce qui distingue les deux quotients Y possibles, c'est la divisibilité par deux de la classe canonique K_Y dans le groupe $\text{Pic}(Y)$; qui est divisible par deux lorsque $Y \cong S^2 \times S^2$ et ne l'est pas sinon. Par ailleurs on rappelle que l'on a

$$(3) \quad K_X = \pi^* K_Y + R.$$

où R est le diviseur de ramification de la projection $\pi : X \rightarrow Y$ qui n'est autre que $\text{Fix}(\sigma) = S(\mathbb{R})$.

[\Rightarrow] Ainsi si $Y \cong S^2 \times S^2$, K_Y est divisible par deux et alors en considérant l'image de la relation $K_X = \pi^* K_Y + R \in \text{Pic}(X)$ par l'homomorphisme composé $\text{Pic}(X) \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ [la première flèche étant donnée par la construction de la classe fondamentale d'un diviseur] on voit que $S(\mathbb{R}) \sim 0$.

[\Leftarrow] Réciproquement si $S(\mathbb{R}) = 0 \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$, la relation (3) montre que la réduction modulo 2 de $\pi^* K_Y$ est 0, et donc que $[\pi^* K_Y]$ est divisible par 2 dans $H_2(X, \mathbb{Z})$. Il suit de là que $[K_Y]$ est aussi divisible par 2 dans $H_2(Y, \mathbb{Z})$. [En effet le pull-back $\pi^* : H = H_2(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow G = H_2(X, \mathbb{Z})$ est injectif (car suivi de l'homomorphisme naturel $G \rightarrow H$ il donne la multiplication par 2 qui est injective puisque H est sans torsion). En outre l'image de π^* est $\text{Fix}(\sigma_*)$. Ainsi si $\alpha \in H \subset G$ est égal à 2β avec $\beta \in G$, alors $\alpha = 2\sigma_*\beta$, et donc $2(\beta - \sigma_*\beta) = 0$, d'où $\beta - \sigma_*\beta = 0$ (car G sans torsion), i.e. $\beta \in H$.] On en déduit donc que $Y \cong S^2 \times S^2$. \square

Ensuite on rappelle qu'une M -surface, c'est-à-dire une surface réalisant la borne de Harnack-Smith-Thom

$$(4) \quad b_*(S(\mathbb{R})) \leq b_*(S(\mathbb{C}))$$

de type $K3$ (ou plus généralement à première classe de Chern réduite modulo 2 nulle, e.g. toute surface de degré pair dans \mathbb{P}^3) est automatiquement séparante (cf. [Vi2], pp. 264–266).

[L'argument peut se résumer comme suit: il suffit (en vertu de la dualité de Poincaré) de voir que $S(\mathbb{R}) \cdot \alpha = 0$ pour tout $\alpha \in H_2(S(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_2)$. Or en choisissant un cycle a représentant α de manière à ce qu'il soit transverse à son conjugué $\sigma(a)$, on voit que $S(\mathbb{R}) \cdot \alpha = \alpha \cdot \sigma_*(\alpha)$; puisque $a \cap \sigma(a)$ ne peut contenir, outre les points de a fixes sous σ , que des paires de points conjugués, dont la présence (éventuelle) n'affecte pas le nombre d'intersection modulo 2. Par ailleurs, la suite exacte de Smith montre (outre l'inégalité (4) ci-dessus) que dans le cas Harnack-maximal (i.e. si (4) est une égalité), l'action $\sigma_* : H_*(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(X, \mathbb{Z}_2)$ induite en homologie mod. 2 par l'involution $\sigma : X \rightarrow X$ est triviale (cf. [R3], pp. 302–303 ou [BR], p. 306), de sorte que le nombre d'intersection $S(\mathbb{R}) \cdot \alpha$ à évaluer, se réduit finalement à la self-intersection $\alpha \cdot \alpha$ de la classe α . La nullité de cette dernière est standard; elle résulte de la formule de Wu (cf. [MS], p. 132), qui fournit la caractérisation suivante de la seconde classe de Stiefel-Whitney w_2 (d'une M^4 orientée) en terme du cup-produit:

$$w_2 \smile a[M^4] = a \smile a[M^4] \quad \text{pour tout } a \in H^2(M^4, \mathbb{Z}_2),$$

ainsi que du fait que c_1 réduite modulo 2 n'est autre que w_2 (cf. [Hir2], p. 71).]

Ce fait (combiné au Lemme de Wang) montre qu'une surface $K3$ réelle avec $\chi(S(\mathbb{R})) = -16$ et qui en outre est une M -surface possède une kleinéenne diffeomorphe à $S^2 \times S^2$.

Pour construire explicitement une telle surface on peut s'appuyer sur le mode de génération de surfaces $K3$ que procure la considération d'un revêtement double de \mathbb{P}^2 ramifié au-dessus d'une sextique lisse $C_6 \subset \mathbb{P}^2$ (cf. [GH], p. 593 pour une démonstration du fait qu'un tel revêtement définit bien une surface $K3$). Si en outre C_6 est réelle, alors on sait qu'il existe sur la surface $K3$ deux structures réelles, dont les parties réelles respectives recouvre doublement chacune des deux régions du plan $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ en lesquelles le signe d'une forme ternaire $F(x_0, x_1, x_2)$ définissant C_6 morcelle le plan. Ainsi une C_6 réelle détermine, non pas une, mais deux surfaces $K3$ réelles; celle dont la partie réelle recouvre la région non orientable sera dite, déduite de la sextique par *extériorisation*—et l'autre (dont la partie réelle recouvre la région orientable) sera dite déduite par *intériorisation*.

On considère alors la sextique C_6 suivante (cf. Figure 15). Le revêtement double correspondant à l'extériorisation de C_6 définit une surface $K3$ réelle (algébrique) de partie réelle $S(\mathbb{R}) \cong S_{10} \sqcup S^2$, l'union disjointe

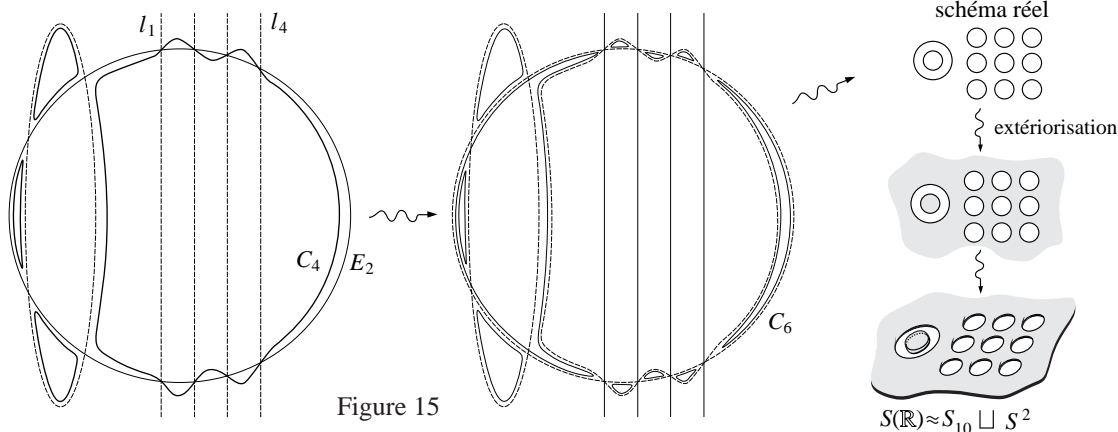


Figure 15

d'une surface de genre 10 et d'une sphère de dimension 2. Ainsi cette surface possède bien $\chi(S(\mathbb{R})) = (2 - 2 \cdot 10) + 2 = -16$, et est en outre Harnack-maximale [puisque $b_*(S(\mathbb{R})) = 2 + 2 \cdot 10 + 2 = 24$, qui est égal à $b_*(S(\mathbb{C}))$]. D'où une surface réelle de kleinéenne $S^2 \times S^2$, ce que nous cherchions.

Si on désire non seulement une surface $K3$, mais une quartique dans \mathbb{P}^3 , on peut invoquer un argument de déformation:

Fait 4.4 (La méthode de Kharlamov 1975). (cf. [Kh2], [Ris] ou [Si], p.193) *Toute surface $K3$ réelle peut être déformée en préservant l'hypothèse de réalité vers une quartique réelle lisse de \mathbb{P}^3 .*

Remarque. Alternativement, et ce de façon bien plus élémentaire, la surface quartique cherchée de partie réelle $S_{10} \sqcup S^2$, et livrant donc $S^2 \times S^2$ comme kleinéenne peut être construite à la main, sans avoir recours à la théorie des déformations des structures analytiques complexes. C'est ce que fait Hilbert dans [Hil].

Et enfin les travaux des Russes indiquent (malheureusement sans donner d'arguments) que pour $\chi(S(\mathbb{R})) = -16$ et dans le cas non maximal, il existe aussi bien des surfaces séparantes que des non séparantes (cf. [Vi1], p. 73 ou [DIK], pp. 84–85, Figure 3). Cette dernière précision permet d'énoncer le:

Théorème 4.5 (Wang 1995). *La kleinéenne d'une surface quartique lisse dans \mathbb{P}^3 (ou plus généralement d'une surface $K3$ réelle) est difféomorphe soit à une surface d'Enriques, soit à $\mathbb{C}P^2 \#_{\alpha} \overline{\mathbb{C}P}^2$ avec $0 \leq \alpha \leq 19$ ou à $S^2 \times S^2$, et toutes ces possibilités se produisent effectivement. En particulier il existe exactement 22 types de difféomorphie réalisables comme kleinéenne d'une surface quartique dans \mathbb{P}^3 .*

Preuve. Compte tenu de tout ce qui a été dit il nous reste à vérifier deux choses:

1. Que toutes les valeurs intermédiaires $-18 \leq \chi(S(\mathbb{R})) \leq 20$ (paires) sont réalisées.
2. Que pour $\chi(S(\mathbb{R})) = -16$ et dans le cas non maximal, il y a aussi bien existence de surfaces séparantes que de non séparantes. En fait il suffit, pour établir le théorème de Wang, d'exhiber une surface non séparante.

• L'assertion 1. peut se démontrer de façon assez conceptuelle sans avoir à entreprendre une laborieuse réalisabilité de chaque invariant au cas par cas. Pour cela on s'appuie de façon essentielle sur la méthode de Kharlamov, qui rappelons-le permet toujours de convertir une $K3$ en une quartique, du moins tant qu'on s'intéresse seulement à sa topologie. L'idée est de construire deux surfaces $K3$ extrémales (relativement à l'inégalité de Comessatti), i.e. avec $\chi(S(\mathbb{R})) = -18$ et 20 respectivement, puis de considérer essentiellement une "déformation" de l'une vers l'autre, ce qui aura pour effet de balayer toutes les valeurs intermédiaires.

D'abord on exhibe facilement deux surfaces $K3$ extrémales par la méthode du revêtement double de \mathbb{P}^2 ramifié le long d'une sextique C_6 avec 10 ovales non emboîtés (cf. Figure 16).

Puis la méthode de Kharlamov nous les convertit en des quartiques S_1 et S_2 dans \mathbb{P}^3 ayant même topologie équivariante, et donc en particulier mêmes parties réelles. On peut alors parler du pinceau $\pi = \overline{S_1, S_2}$ de quartiques qu'elles engendrent, et quitte à le perturber un peu, on peut le rendre transverse au discriminant $\Delta \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)|$ [de degré 108, mais peu importe si ce n'est que ça risque de fluctuer beaucoup...], de sorte qu'en joignant S_1 à S_2 dans son lieu réel $\pi(\mathbb{R})$ on a un segment de quartiques réelles, dont la partie réelle

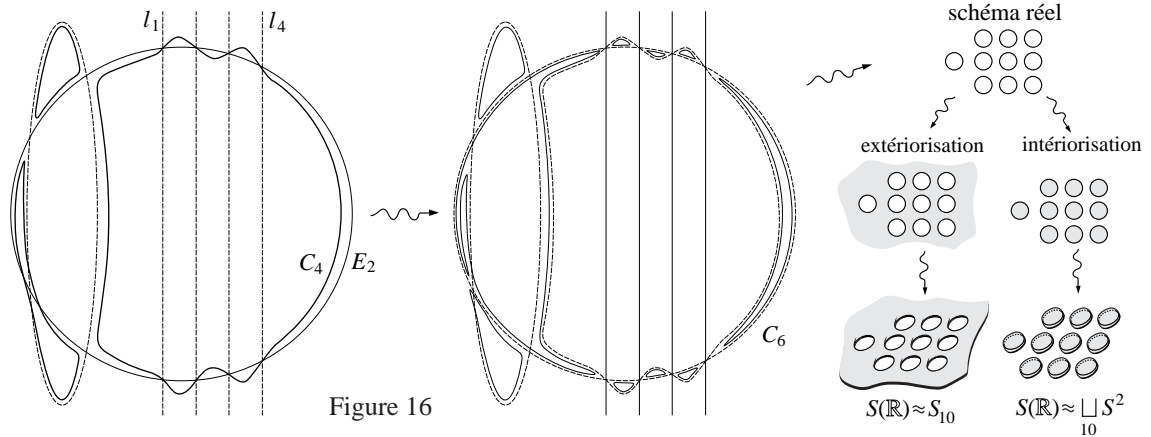


Figure 16

subit (à chaque fois que l'on franchit le discriminant) des “chirurgies de Morse” (i.e. $S(\mathbb{R})$ se modifie soit par l'évanescence d'un cercle ou d'une sphère ou leur processus spatio-temporel inverse). Mais quelque soit la modification subie par la partie réelle $S(\mathbb{R})$, sa caractéristique d'Euler $\chi(S(\mathbb{R}))$ subit (invariablement) une fluctuation de ± 2 . Ainsi reliant S_1 à S_2 par un chemin dans $\pi(\mathbb{R}) \cong S^1$, on voit que toutes les valeurs intermédiaires de $\chi(S(\mathbb{R}))$ sont effectivement réalisées.

• Quant à la seconde assertion (relative à l'existence d'une surface $K3$ réelle avec $\chi(S(\mathbb{R})) = -16$ et qui soit non séparante), on peut l'établir comme suit: à nouveau on considère un revêtement double du plan ramifié le long d'une sextique de schéma réel “un ovale qui entoure 9 ovales non emboîtés” (cf. Figure 17), ce qui définit—après avoir opté pour l'intériorisation—une surface $K3$ réelle S de partie réelle S_9 une surface de genre 9 (cf. Figure 17).

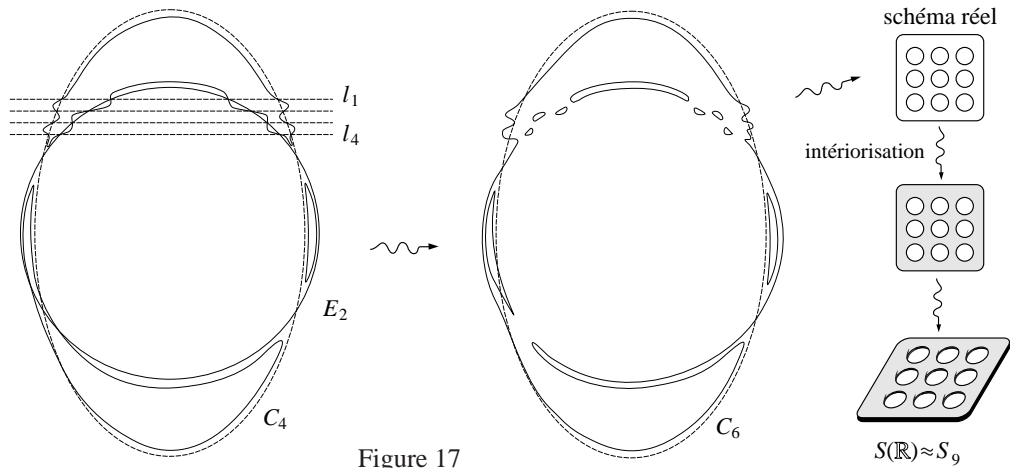


Figure 17

Le fait que C_6 soit non séparante (car $r = 10$ et compte tenu de la congruence de Klein, cf. Proposition 2.3 du Chapitre 0) entraîne que S est à son tour non séparante. [Esquisse de l'argument: Il s'agit de voir que $S(\mathbb{R})$ n'est pas homologue à zéro modulo 2. On va le montrer en exhibant un 2-cycle qui coupe $S(\mathbb{R})$ transversalement en un seul point. Comme C_6 est non séparante, il existe un cercle ε tracés sur $C_6(\mathbb{C})$ qui coupe le lieu réel $C_6(\mathbb{R})$ en un seul point q_0 . Compte tenu de la simple-connexité de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ce cercle borde un disque δ tracé sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, et en outre on peut s'arranger pour que ce disque évite $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, à l'exception du point q_0 . Ensuite du fait que ce disque δ est de bord contenu dans le lieu de ramification du morphisme $S \rightarrow \mathbb{P}^2$, son image inverse par le morphisme $S \rightarrow \mathbb{P}^2$ définit un 2-cycle sur $S(\mathbb{C})$, noté γ . Ensuite quitte à bouger δ on peut supposer γ lisse et transverse à $S(\mathbb{R})$. D'où alors (avec γ) un 2-cycle qui coupe $S(\mathbb{R})$ en un seul point de façon transverse, ce que nous cherchions.] \square

On peut résumer notre connaissance des kleinéennes des surfaces lisses de degré d dans \mathbb{P}^3 par le tableau:

d	type de difféomorphie de la kleinéenne de $S_d \subset \mathbb{P}^3$	nombre de type de difféomorphie	auteur(s)
1	S^4	1	Kuiper-Massey
2	G =grassmannienne des droites réelles dans \mathbb{P}^3 , $\overline{\mathbb{C}P}^2$ et S^4	3	Letizia
3	$\alpha \overline{\mathbb{C}P}^2$ avec $0 \leq \alpha \leq 4$	5	
4	surface d'Enriques, $S^2 \times S^2$ et $\mathbb{C}P^2 \# \alpha \overline{\mathbb{C}P}^2$ avec $0 \leq \alpha \leq 19$	22	Donaldson-Wang

1.5 Nos tentatives de géométrisation échouent: l'obstruction issue des formules de Letizia

En réalité la kleinéenne d'une surface algébrique réelle S est non seulement une variété de dimension 4 orientable, mais vient même équipée d'une orientation canonique, héritée de l'orientation complexe sur $S(\mathbb{C})$, qui passe au quotient compte tenu de ce que l'involution de conjugaison complexe préserve l'orientation.

Cette remarque étant faite, on peut se demander:

Question (Géométrisation kleinéenne orientée). *Est-ce que toute M^4 orientée est réalisable comme une kleinéenne dans la catégorie orientée?*

En fait il est assez facile de voir que la réponse est négative, ce qui aura ensuite pour conséquence de ruiner les deux tentatives de géométrisation initiales. On va le déduire simplement de la considération des invariants (b_1, b_2, b_2^+) attachables à toute M^4 orientée, où b_2^+ désigne le nombre de carrés positifs de la forme d'intersection

$$H_2(M, \mathbb{R}) \times H_2(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Comme on sait à une surface réelle S sont attachés deux objets: la riemannienne $X = S(\mathbb{C})$ et la kleinéenne $Y = S(\mathbb{C})/\sigma$. Et leurs invariants sont reliés par les formules:

$$b_1(X) = 2b_1(Y) \quad \text{et} \quad b_2(X) = 2 + 2b_2(Y) - \chi(S(\mathbb{R}))$$

Si en outre on regarde la kleinéenne avec son orientation, alors on dispose de l'invariant $b_2^+(Y)$, qui est relié à X par la formule suivante [dont j'ai pris connaissance grâce à [Don1], p. 21, mais qui en réalité se trouve déjà dans l'article de Letizia (cf. [Let], p. 308)]:

Formule de Letizia-Donaldson 5.1.

$$(5) \quad p_g(X) = b_2^+(Y)$$

où $p_g(X)$ désigne le *genre géométrique* de X , c'est-à-dire le nombre de 2-formes holomorphes linéairement indépendantes sur X .

Esquisse de démonstration de la formule (5). La projection $X \xrightarrow{\pi} Y$ induit $H^2(X) \xleftarrow{\pi^*} H^2(Y)$, qui induit un isomorphisme sur son image, qui est formée des éléments invariants par $\sigma^* : H^2(X) \rightarrow H^2(X)$. Donc les éléments qui viennent d'en bas Y sont invariants par σ , et si en outre ils sont positifs ils habitent soit dans $H^{2,0}$ ou dans $H^{1,1}$ où il n'y a qu'un carré positif, concrétisé par la classe d'une section hyperplane pour un certain plongement projectif. Or en fixant un plongement réel, cette section est une courbe réelle dont l'orientation est renversée par la conjugaison complexe, et n'est donc pas invariante par σ^* . Ainsi les classes qui sont à la fois invariantes et positives sont en correspondance avec $H^{2,0}$. D'où la formule annoncée, qui est donc une fois de plus une conséquence d'une combinaison des théories de Smith et de Hodge. \square

Remarque. Wang suggère aussi une démonstration de cette formule basée sur la formule d'Hirzebruch permettant de calculer la signature d'un revêtement ramifié (cf. [Wa], p. 60), mais sauf malentendu de ma part cette démonstration livre le résultat seulement en présence de l'hypothèse superflue de l'orientabilité de la partie réelle. En outre, du fait que cet argument de Wang nécessite aussi le recours à la théorie de Hodge, la démonstration ci-dessus (qui est en fait celle de Letizia) me semble restée nettement plus désirable.

Ce renseignement étant acquis il est maintenant facile de voir le caractère restreint des kleinéennes (vue avec leur orientation canonique) au sein des M^4 orientées, simplement en comparant les géographies respectives de leurs invariants (b_1, b_2, b_2^+) .

• D'abord en ce qui concerne les M^4 orientées, on a bien sûr la contrainte $b_2^+ \leq b_2$, et c'est la seule comme on le voit aisément en faisant des sommes connexes de $\overline{\mathbb{C}P^2}$, $\mathbb{C}P^2$ et de $S^1 \times S^3$. En effet étant donné un triple ordonné d'entier (b_1, b_2, b_2^+) tel que $b_2^+ \leq b_2$, la somme connexe

$$b_1(S^1 \times S^3) \# b_2^+ \mathbb{C}P^2 \# (b_2 - b_2^+) \overline{\mathbb{C}P^2}$$

définit une M^4 orientée dont les nombres de Betti orientés sont les entiers donnés (b_1, b_2, b_2^+) .

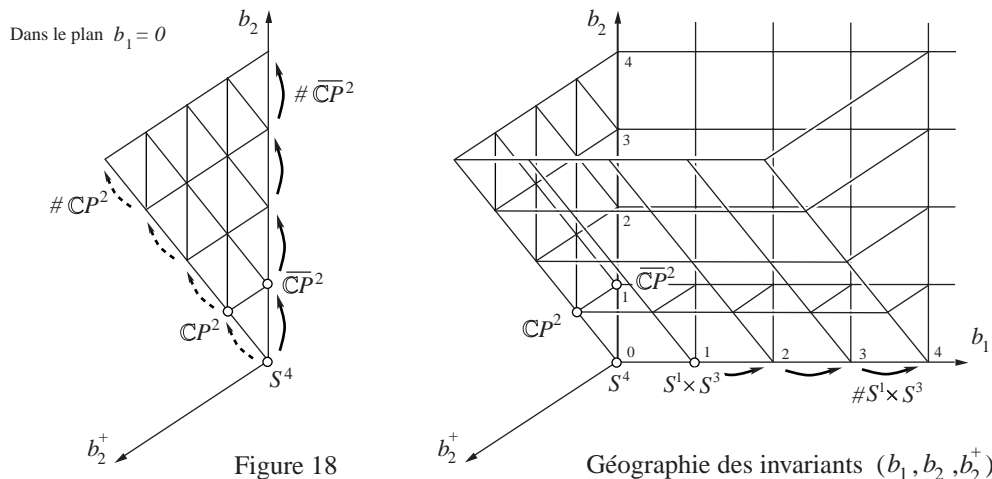


Figure 18

Géographie des invariants (b_1, b_2, b_2^+)

• D'autre part en ce qui concerne les kleinéennes on a $b_1(Y) = \frac{1}{2}b_1(X) = q(X)$ où $q(X)$ désigne l'irrégularité de X (la dernière égalité résultant de la théorie de Hodge), et la formule (2) reliant $b_2(Y)$ et $b_2(X)$ modulo la connaissance de $\chi(S(\mathbb{R}))$. Mais cette dernière étant relativement nébuleuse, je propose tout simplement d'ignorer ce renseignement. Et enfin on dispose de la très précise relation (5). En résumé

$$(b_1, b_2^+)(Y) = (q, p_g)(X).$$

Ainsi toute contrainte sur la géographie des invariants (q, p_g) d'une surface algébrique complexe, se traduit en une contrainte sur les invariants (b_1, b_2^+) des kleinéennes. Or on sait en s'appuyant sur la classification des surfaces algébriques complexes que la géographie des invariants (q, p_g) est fortement entravée. De manière précise on sait que les surfaces S classées en fonction de leur dimension de Kodaira κ se distribuent dans 4 classes suivant que $\kappa = -1, 0, 1, 2$. Pour les deux premières classes $\kappa = -1, 0$ la classification est suffisamment explicite pour donner une connaissance exacte des valeurs possibles de (q, p_g) , et pour les deux classes restantes ($\kappa = 1, 2$) on dispose, à défaut d'une connaissance exacte† des valeurs possibles, de l'inégalité $p_g \geq q - 1$, renseignement qui suffit à mettre en évidence le caractère particulier des invariants (q, p_g) , et donc de montrer le caractère restreint des kleinéennes au sein des M^4 orientées.

$\kappa(S)$	structure	$\chi(O_S) = 1 - q + p_g$	q	p_g
-1	rationnelle	1	0	0
	réglée sur une courbe de genre $q \geq 1$	$1 - q$	q	
0	surface K3	2	0	1
	surface d'Enriques	1	0	0
	surface abélienne	0	2	1
	surface hyperelliptique	0	1	0
1	proprement elliptique	$\chi(O_S) \geq 0$	$p_g \geq q - 1$	
2	de type général	$\chi(O_S) > 0$	$p_g > q - 1$	

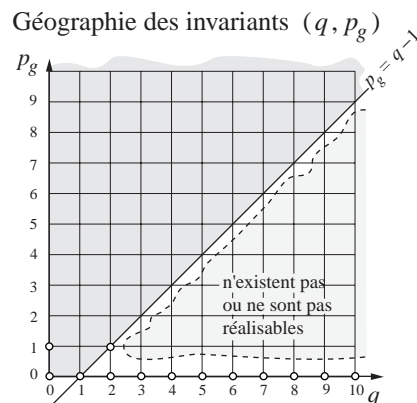


Figure 19

† J'ignore si on connaît la géographie de (q, p_g) .

En réalité, il n'est certainement pas inutile de se remémorer avec précision les arguments de la théorie des surfaces algébriques complexes qui imposent cette grosse contrainte sur les invariants (q, p_g) . C'est ce qu'on fait dans la proposition suivante, dont l'ingrédient essentiel est le théorème de Castelnuovo-de Franchis.

Proposition 5.2. *Soit S une surface algébrique avec $\chi(\mathcal{O}_S) < 0$, alors $p_g(S) = 0$.*

Preuve. D'abord la formule de Noether

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{K^2 + \chi(S)}{12}$$

montre que $K^2 < 0$ ou $\chi(S) < 0$. Mais dans les deux cas, il est bien connu qu'alors S est *réglée*, i.e. birationnellement équivalente au produit $C \times \mathbb{P}^1$ d'une courbe par une droite, cf. par exemple [GH], p. 558 et 554 respectivement. Et donc en particulier $p_g(S) = 0$.

- En fait dans le cas où $K^2 < 0$, on peut arriver à la conclusion cherchée $p_g = 0$, sans avoir à préciser la structure birationnelle de S . L'argument est simplement le suivant: si $p_g \neq 0$, alors il existe $D \in |K|$ un diviseur effectif. Mais alors comme $K^2 < 0$, on a $K \cdot D < 0$, et donc en écrivant $D = \sum n_i C_i$ avec $n_i > 0$, on voit que $K \cdot C_i < 0$ pour un certain i . Mais alors $D \cdot C_i < 0$ entraîne, compte tenu de $C_i \cdot C_j \geq 0$ pour $i \neq j$, que $C_i^2 < 0$. En résumé on a $K \cdot C_i < 0$ et $C_i^2 < 0$, ce qui implique via la formule d'adjonction

$$2g(C) - 2 = K \cdot C + C^2$$

que $g(C_i) = 0$ et que $C_i^2 = -1$, et donc que C_i est une courbe exceptionnelle. Ce qui contredit l'hypothèse de minimalité, qu'il est loisible de faire sur S .

- Pour le second cas, i.e. si $\chi(S) < 0$ alors on déroule simplement le subtil argument de Castelnuovo-de Franchis (cf. pp. 555–558 de [GH]).

Etape 1. S'il existe deux 1-formes holomorphes ω_1, ω_2 linéairement indépendantes sur S telles que $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, alors S est réglée.

Etape 2. Si $\chi(S) < 0$, alors il existe deux 1-formes holomorphes ω_1, ω_2 linéairement indépendantes sur S telles que $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$.

De là on tire que S est réglée, et donc en particulier que $p_g = 0$ □

En résumé nous avons montré:

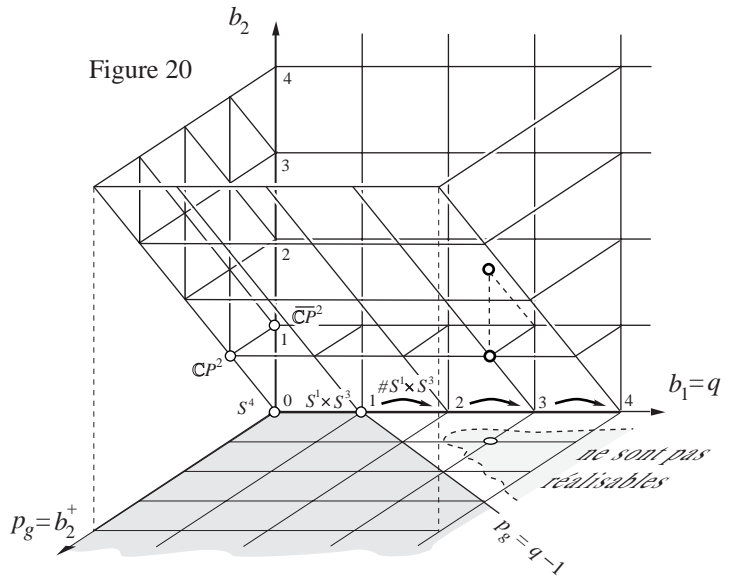
Proposition 5.3. *Toute variété M^4 de dimension 4 orientée dont les nombres de Betti orientés (b_1, b_2, b_2^+) satisfont $0 < b_2^+ < b_1 - 1$ n'est pas réalisable comme kleinéenne d'une surface algébrique réelle.*

Le premier exemple explicite qui vient à l'esprit d'une telle variété est

$$3(S^1 \times S^3) \# \mathbb{C}P^2,$$

compte tenu de la combinatoire combinée des Figures 18 et 19, que l'on peut amalgamer moyennant les formules de Letizia ($q(X) = b_1(Y)$ et $p_g(X) = b_2^+(Y)$), pour obtenir la Figure 20.

- Cela étant, on s'est placé dans la catégorie orientée pour mettre en évidence le caractère topologiquement restreint des kleinéennes, mais on pourrait espérer que notre tentative de géométrisation soit néanmoins vraie dans la catégorie non-orientée. Mais il résulte de ce qui vient d'être dit que tel ne peut pas être le cas, comme le montre l'argument suivant:



On se restreint simplement aux variétés de dimension 4 orientables pour lesquelles on peut définir un invariant b_2^+ , c'est-à-dire les variétés qui sont dans l'image par le foncteur qui oublie l'orientation, des variétés M^4 orientées de signature $\tau = b_2^+ - b_2^-$ nulle.

Pour ces variétés orientables on peut définir l'invariant b_2^+ , et les invariants (b_1, b_2, b_2^+) réalisables par de telles variétés correspondent au plan $b_2 = 2b_2^+$. La combinatoire montre que la projection $(b_1, b_2, b_2^+) \mapsto (b_1, b_2^+)$ est surjective en restriction à ces variétés. On voit donc que toute variété orientable anonyme (i.e. telle qu'une fois orientée elle est de signature nulle) telle que $0 < b_2^+ < b_1 - 1$ n'est pas réalisable comme une kleinéenne dans la catégorie non-orientée. Le premier exemple qui vient à l'esprit est $3(S^1 \times S^3) \# \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$. Cette variété n'est pas homéomorphe à une kleinéenne. Voilà qui montre que la tentative de géométrisation purement kleinéenne est trop optimiste.

- Cela étant on peut maintenant revenir à notre question initiale de géométrisation “mixte”, qui était de savoir si toute M^4 orientable est réalisable soit comme une riemannienne, soit comme une kleinéenne; spéculation qualifiée de mixte, du fait qu'elle combine riemannienne et kleinéenne—et rappelons aussi que c'est cette tentative de géométrisation qui nous intéresse le plus, puisque c'est elle qui calque au mieux le phénomène qui se produisait pour les courbes.

Mais dans ce cas aussi on voit que les variétés anonymes qui ont $0 < b_2^+ < b_1 - 1$ et en outre b_1 impair (par exemple celle que nous avons déjà envisagée plus haut $3(S^1 \times S^3) \# \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$) ne sont ni réalisables comme riemannienne [vu que b_1 est impair], ni comme kleinéenne [vu que (b_1, b_2^+) sont dans le “triangle des Bermudes” $\Delta = \{(b_1, b_2^+) \mid 0 < b_2^+ < b_1 - 1\}$ qui interdit la réalisabilité comme kleinéenne]. Ce qui répond par la négative à notre question.

Conclusion. Les 3 questions admettent toutes des réponses négatives.

Il reste la possibilité que la géométrisation riemanno-kleinéenne soit récupérable si au lieu de se placer dans la catégorie algébrique projective, on se place dans celle des variétés analytiques complexes—qui, comme on le sait bien depuis Hopf ([Ho]), est strictement plus vaste (à partir de la dimension complexe 2); on tombe alors sur la question:

Question. *Est-ce que toute M^4 fermée orientable est réalisable comme la riemannienne d'une surface analytique complexe compacte S , ou comme la kleinéenne S/σ d'une surface analytique complexe S réelle, c'est-à-dire munie une involution antiholomorphe σ ?*

Chapitre 2: Topologie des courbes réelles planes: une question de Klein

2.1 Position du problème de Klein

Comme nous l'avons fait observer dans le Chapitre 0, Felix Klein disposait non seulement de la classification topologique des surfaces symétriques, mais il savait aussi qu'elles sont toutes réalisables comme l'action de la conjugaison complexe sur le lieu complexe d'une courbe algébrique réelle. Cela étant Klein se demandait ce qu'il advient si l'on se restreint aux courbes *planes* (cf. [K3], p. 155, note en bas de page); de façon précise:

Problème de Klein. *Caractériser les surfaces symétriques réalisables comme l'action de la conjugaison complexe sur le lieu complexe d'une courbe réelle lisse du plan.*

Ce problème fut reposé par Gross et Harris en 1981 (cf. [GrHa], p. 177). Il revient à étudier les plongements possibles de $C(\mathbb{R})$ dans le lieu complexe $C(\mathbb{C})$ d'une courbe plane $C \subset \mathbb{P}^2$; alors que le plongement de $C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est l'objet du très difficile 16^e problème de Hilbert, qui reste ouvert à ce jour pour les degrés $d \geq 8$, et l'objet du présent chapitre est de résoudre le problème de Klein pour *tous* les degrés.

L'exposé s'organise de la façon suivante:

- On commence par rappeler certains travaux de V.A. Rohlin, desquels résultent (entre autres) une restriction qui affirme qu'une courbe plane séparante possède beaucoup de composantes, en fait au moins autant que la moitié de son degré.
- Ensuite, quelques variations autour d'une méthode classique de Hilbert (originellement conçue pour la construction de courbes Harnack-maximales) vont nous permettre de construire des courbes planes qui réalisent tous les invariants non prohibés par Rohlin, obtenant ainsi une solution complète à la question de Klein-Gross-Harris.

2.2 Quelques contraintes: l'inégalité de Rohlin

Pour une courbe *plane* lisse $C \subset \mathbb{P}^2$, le genre est $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$, où d désigne le degré de la courbe C . On va donc se restreindre aux genres de cette forme, et il devient maintenant commode de substituer aux invariants (g, r, a) les invariants (d, r, a) .

Pour les degrés d impairs, une courbe plane réelle a toujours des points réels (considérer l'intersection avec une droite définie sur \mathbb{R}); si bien qu'il est impossible de réaliser la surface symétrique sans point fixe. Je me référerai à cette restriction sous le terme de *restriction de Galois*.

Ensuite en prolongeant les travaux de Klein sur le dénombrement des caractéristiques-theta réelles impaires (cf. [K2]), Gross et Harris ont mis en évidence une restriction plus subtile: si $d \equiv 5 \pmod{8}$ (auquel cas $g \equiv 0 \pmod{2}$), alors il n'existe pas de courbe plane séparante avec $r = 1$ (cf. [GrHa], Prop. 7.1, p. 173). Noter pourtant qu'une telle surface symétrique existe abstraitement puisque g est pair (cf. Figure 1). Ainsi déjà en degré 5, les courbes planes présentent des lacunes vis-à-vis des invariants (d, r, a) : impossibilité de fabriquer une quintique (plane réelle lisse) séparante n'ayant qu'une composante.

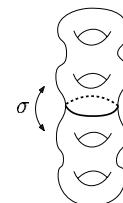


Figure 1

En fait on a une restriction beaucoup plus forte due à Rohlin (dont j'ai pris personnellement connaissance grâce à un article d'A. Marin, cf. [Mar1], p. 59):

Théorème 2.1 (Inégalité de Rohlin). *Si C est une courbe plane réelle lisse séparante de degré d , alors le nombre r de composantes de sa partie réelle $C(\mathbb{R})$ satisfait $r \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$; ou ce qui revient au même $r \geq \frac{d}{2}$.*

Preuve. Etant donné une courbe séparante C , Rohlin observe que la partie réelle $C(\mathbb{R})$ admet deux orientations de signes opposés comme bord des moitiés de $C(\mathbb{C}) \setminus C(\mathbb{R})$ et parle d'*orientations complexes*. En supposant maintenant la courbe plane, il compare pour chaque paire d'ovales emboîtés, les orientations complexes de ses deux ovales à celles comme bord des orientations de l'anneau délimité par la paire dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Lorsque ces orientations coïncident il parle d'une *paire positive*, et dans le cas contraire d'une *paire négative*, et note Π^+ et Π^- leur nombre respectif. En calculant l'intersection dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ des deux moitiés (rebouchées par les adhérences des intérieurs des ovales) il obtient la formule:

$$(1) \quad 2(\Pi^+ - \Pi^-) = r - k^2$$

où $k = \frac{d}{2}$ et où l'on suppose le degré d pair (le cas des degrés impairs nécessite une discussion parallèle effectuée par Mishachev [Mi]). Pour plus de détails on renvoie à [R4], où la formule (1) est démontrée dans le cas particulier des courbes Harnack-maximales (aussi appelées *M-courbes*), et pour l'énoncé général, on consultera [R5], p. 91.

Ensuite il est purement formel à partir de la *formule de Rohlin* (1) de déduire l'inégalité de Rohlin. En effet, si $\Pi = \Pi^+ + \Pi^-$ désigne le nombre total de paires d'ovales emboîtés, on a $\Pi \leq \binom{r}{2}$, et alors d'après (1):

$$r = k^2 + 2(\Pi^+ - \Pi^-) \geq k^2 - 2\Pi^- \geq k^2 - 2\Pi \geq k^2 - 2\binom{r}{2} = k^2 - r(r-1).$$

En se concentrant sur les membres extrêmes, on en tire $r^2 \geq k^2$, et donc $r \geq k$. Ce qui est précisément l'inégalité de Rohlin pour d pair. On laisse au soin du lecteur, la tâche analogue pour les degrés impairs en utilisant cette fois la formule de Mishachev (cf. [R5], p. 91). \square

La suite du Chapitre 2 est consacrée à la démonstration du théorème suivant qui répond complètement à la question de Klein:

Théorème Principal 2.2 (Kharlamov, Viro). *Les restrictions de Galois (si $d \equiv 1 \pmod{2}$ alors $r \geq 1$) et de Rohlin (si $a = 0$ alors $r \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$) sont les seules contraintes sur les invariants (d, r, a) de Klein pour les courbes algébriques planes réelles lisses.*

Compte tenu de la position centrale occupée par l'inégalité de Rohlin dans le problème de Klein, on tient juste ci-dessous à en fournir une preuve directe, exactement adaptée à notre objet (et qui notamment évite de transiter par le renseignement plus fin qu'est la formule de Rohlin). L'idée utilisée est cependant exactement celle de Rohlin, dont on ne fait qu'extraire le strict nécessaire requis pour la problématique de Klein.

Preuve directe de l'inégalité de Rohlin. Soit donc $C = C_d$ une courbe plane réelle lisse séparante de degré d . Si le degré d est pair, on peut reboucher les deux moitiés C^+ et C^- par les r disques D_i intérieurs aux ovales de $C(\mathbb{R})$. On munit C^+ et C^- de l'orientation induite par l'orientation naturelle de $C(\mathbb{C})$ induite par la structure complexe. On laisse ensuite ces orientations se propager sur les disques de colmatages D_i (cf. Figure 2), ce qui munit chaque disque D_i de 2 orientations opposées. On note D_i^+ et D_i^- ces deux disques orientés suivant que l'orientation est induite par C^+ ou C^- . On obtient ainsi deux 2-cycles entiers $\Gamma^+ = C^+ + \sum_{i=1}^r D_i^+$ et $\Gamma^- = C^- + \sum_{i=1}^r D_i^-$ du plan $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ qui sont tels que $\Gamma^+ + \Gamma^- = C(\mathbb{C})$ vu que les orientations sur les disques de colmatages se compensent deux à deux.

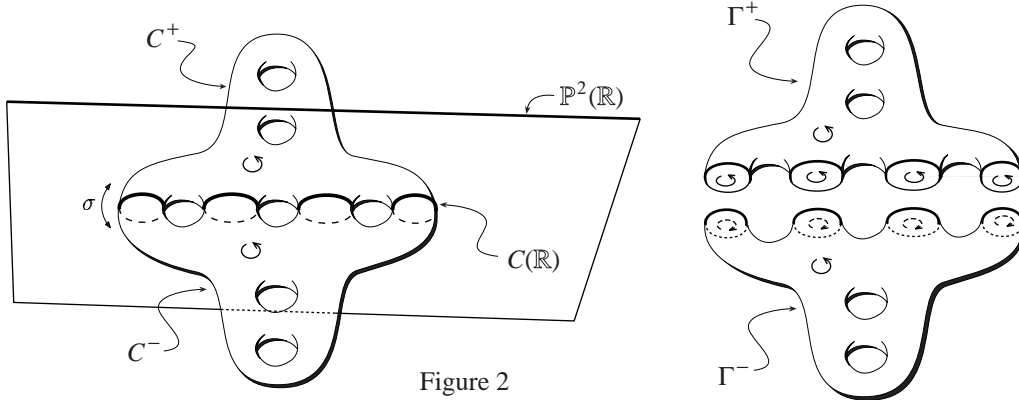


Figure 2

Comme l'involution σ renverse l'orientation de $C(\mathbb{C})$, l'image du cycle Γ^+ par $\sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est $-\Gamma^-$. Par suite vu que σ induit la multiplication par -1 sur $H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ [puisqu'elle renverse l'orientation du lieu complexe H d'une droite définie sur \mathbb{R}] on en déduit que $\Gamma^+ \sim \Gamma^-$. Il suit de là (en tenant compte de $\Gamma^+ + \Gamma^- = C(\mathbb{C}) \sim dH$) que $\Gamma^+ \sim \frac{d}{2}H$. Autrement dit le degré d'une moitié rebouchée est égal à la moitié du degré de $C(\mathbb{C})$. Calculons maintenant l'intersection des deux cycles Γ^+ et Γ^- . Vu qu'ils sont tous deux homologues à $\frac{d}{2}H$, leur nombre d'intersection $\Gamma^+ \cdot \Gamma^-$ vaut $(\frac{d}{2})^2$.

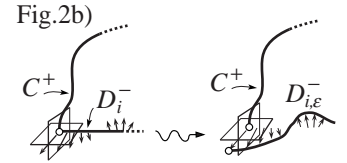
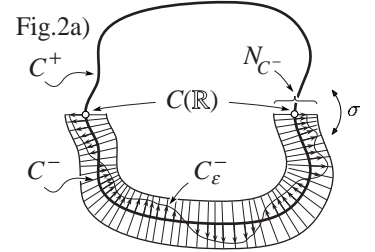
Mais d'autre part on affirme que le nombre $\Gamma^+ \cdot \Gamma^-$ est majoré par r^2 . (Noter que l'inégalité de Rohlin $r \geq \frac{d}{2}$ s'ensuivra.) Pour le voir on va mettre les deux cycles Γ^+ et Γ^- en position "plus transverse" en

poussant l'un d'eux (disons Γ^-) par un champ de vecteurs v "normal" à Γ^- . L'idée est de construire un champ v qui permet d'éliminer des points d'intersection sans en créer de nouveaux.

Construction de v . On part d'un champ de vecteurs tangent u à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'ayant que des zéros isolés, ne s'annulant pas sur $C(\mathbb{R})$ et qui en outre est normal à $C(\mathbb{R})$. On considère ensuite le champ iu (déduit du précédent via multiplication par i) et qui est donc normal à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et donc en particulier à la chaîne de colmatage $\sum_{i=1}^r D_i^-$. Puis du fait que u est normal à $C(\mathbb{R})$, il suit que iu est normal à $C(\mathbb{C})$ le long de $C(\mathbb{R})$; ceci résulte du fait que l'on munit $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'une métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rendant aussi bien l'involution σ , que la multiplication par i isométrique. [En effet si ξ est un vecteur tangent (non nul) à $C(\mathbb{R})$ en un point $p \in C(\mathbb{R})$, on a par hypothèse $\langle u(p), \xi \rangle = 0$ et donc aussi $\langle iu(p), i\xi \rangle = 0$ compte tenu du caractère isométrique de la multiplication par i . Par ailleurs on a (en utilisant successivement σ isométrie, puis l'antilinearité de σ) $\langle iu(p), \xi \rangle = \langle (iu(p))^\sigma, \xi^\sigma \rangle = \langle -iu(p)^\sigma, \xi^\sigma \rangle = \langle -iu(p), \xi \rangle$, d'où $\langle iu(p), \xi \rangle = 0$. En résumé $iu(p)$ est simultanément orthogonal à ξ et $i\xi$; ce qui établit—vu que les deux vecteurs ξ et $i\xi$ forment une \mathbb{R} -base de l'espace tangent $T_p C(\mathbb{C})$ —l'orthogonalité annoncée de iu à $C(\mathbb{C})$ le long de $C(\mathbb{R})$.] De ce fait iu peut être prolongé normalement à la moitié C^- et donne un champ de vecteurs normal à Γ^- . On note v ce champ.

Mise en position transverse. Ensuite en poussant le cycle Γ^- le long des trajectoires géodésiques générées par ce champ v , on obtient une petite perturbation Γ_ε^- de Γ^- qui coupe Γ^+ seulement en des points isolés. En outre pour un temps d'intégration suffisamment court, l'intersection $\Gamma^+ \cap \Gamma_\varepsilon^-$ ne peut qu'être localisée sur les disques de colmatages de Γ^+ , autrement dit en poussant Γ^- on élimine des points d'intersection sans en créer de nouveaux. Ceci résulte de la construction:

- D'abord la moitié C^- ayant été poussée par un champ de vecteurs normal à $C(\mathbb{C})$, sa perturbation C_ε^- reste au sein de la restriction N_{C^-} à la moitié C^- d'un voisinage tubulaire N fixé de $C(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (cf. Fig.2a ci-contre), ce qui assure en particulier que C_ε^- ne rencontre pas C^+ .
- D'autre part C^+ ne rencontre pas $\sum_{i=1}^r D_{i,\varepsilon}^-$. Ceci résulte du fait que D_i se fait pousser par un champ de vecteurs qui sur $C(\mathbb{R})$ est non nul et simultanément normal à $C(\mathbb{C})$ et à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. [On se contente ici de suggérer la raison par la Fig.2b) qui illustre—avec des dimensions abaissées d'une unité—le fait requis, à savoir que pousser par un champ de vecteurs simultanément normal et non nul sur l'intersection rend disjoint.] C'est la même raison qui assure aussi que $\sum_{i=1}^r D_i^+$ ne rencontre pas C_ε^- .



Majoration du nombre $\Gamma^+ \cdot \Gamma^-$. Ainsi le nombre $\Gamma^+ \cdot \Gamma^-$ est égal $\Gamma^+ \cdot \Gamma_\varepsilon^-$ (vu que Γ_ε^- est homologue à Γ^-) et ce dernier est égal à la somme des indices d'intersection locaux. D'après ce qui précède les seules contributions apportées à ce nombre proviennent des chaînes de colmatages $\sum_{i=1}^r D_i^+$ et $\sum_{j=1}^r D_{j,\varepsilon}^-$. Or la contribution apportée par chaque paire ordonnée de disques $D_i^+, D_{j,\varepsilon}^-$ n'est pas autre chose (à un éventuel signe près) que la somme des indices du champ de vecteurs tangent u sur le disque $D^2 = D_i \cap D_j$, à moins que $D_i \cap D_j$ ne soit vide, auquel cas la contribution est bien sûr nulle.

[En effet si ξ_1, ξ_2 est une base de l'espace tangent $T_p \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ représentant l'orientation de D_j^- , la \mathbb{R} -base de $T_p \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ correspondant à l'indice d'intersection en p noté $\iota(D_i^+ \cdot D_{j,\varepsilon}^-)_p$ est $\xi_1, \xi_2, \xi_1 + \varepsilon iu(\xi_1), \xi_2 + \varepsilon iu(\xi_2)$ (à une éventuelle permutation de ξ_1, ξ_2 près suivant que l'orientation de D_i^+ coïncide ou non à celle de D_j^-) qui définit la même orientation que $\xi_1, \xi_2, iu(\xi_1), iu(\xi_2)$ et qu'il s'agit de comparer à l'orientation $\xi_1, i\xi_1, \xi_2, i\xi_2$ spécifiée par la structure complexe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; mais ces deux bases ne diffèrent que d'un signe moins et de l'indice du champ u en p (noté $\iota_p(u)$), si bien que $\iota(D_i^+ \cdot D_{j,\varepsilon}^-)_p = \pm -\iota_p(u)$ (le signe \pm ne dépendant que de i, j et non de p). D'où en sommant $\sum_p \iota(D_i^+ \cdot D_{j,\varepsilon}^-)_p = \pm \sum_p -\iota_p(u)$.]

Cette contribution (celle apportée par la paire $D_i^+, D_{j,\varepsilon}^-$) est donc soit nulle ou égale (au signe près) à la caractéristique d'Euler d'un disque et vaut alors ± 1 .

Comme il y a r^2 telles paires la majoration cherchée $\Gamma^+ \cdot \Gamma^- \leq r^2$ en résulte. \square

Ceci fournit une démonstration de l'inégalité de Rohlin du moins pour les courbes de degré pair. Pour les degrés impairs, il y a deux attitudes possibles: soit on essaye d'adapter l'argument topologique de Rohlin, c'est ce que fait Mishachev, soit on se ramène au cas de degré pair moyennant une petite perturbation convenable du doublage de la courbe. C'est l'idée de Makeev (cf. [R5], p. 91).

Note heuristique. On voudrait mentionner une autre justification de l'inégalité de Rohlin, qui présenterait l'avantage (si on parvenait à la justifier) d'être uniforme en la parité du degré. Le genre d'une courbe plane lisse C_d est comme on sait $\frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + (d-2)$, ainsi lorsque le degré augmente d'une unité, le genre subit un accroissement qui une fois sur deux est impair. Or la courbe étant supposée séparante, on est tenté de dire qu'elle se déduit d'une courbe de degré un de moins en attachant une succession de paires d'oreilles ou d'anses baguées (ce qui augmente r d'une unité) [cf. Figures 3,4,5 du Chapitre 0 pour la description de ces opérations]. Il s'ensuit que pour une courbe plane séparante, r est au moins égal à la moitié du degré (vu qu'une fois sur deux l'accroissement du genre est impair, il provoque nécessairement le recours à l'attachement d'une anse baguée). Cet argument peut-il être rendu rigoureux?

2.3 La génétique chez les courbes planes réelles

Avant de construire des courbes, notre problème exige une compréhension du comportement de l'invariant a lorsque l'on "accouple" deux courbes planes réelles lisses transverses en simplifiant tous leurs points d'intersection à la Brusotti.

Il est peut-être instructif (avant d'énoncer le résultat général qui répond à cette question) de commencer par un exemple explicite: on considère à cet effet une paire de coniques $C_1 \cup C_2$ que l'on lissifie de deux manières distinctes (cf. Figure 3). Il s'agit de décider pour chacune de ces quartiques C_4 si elle est ou non séparante.

La méthode est très simple: on dessine les courbes complexes correspondants aux deux coniques qui sont deux sphères équatoriales, et on utilise le fait que chaque point double lissifié revient à attacher une anse. A ce stade, on voit déjà que la quartique est de genre 3. Puis en regardant de plus près comment est lissifiée la partie réelle, on peut à l'intérieur de chacune de ces anses dessiner en plus la partie réelle qui donne deux brins tracés sur l'anse et de là on tire la connaissance du plongement de $C_4(\mathbb{R})$ dans $C_4(\mathbb{C})$.

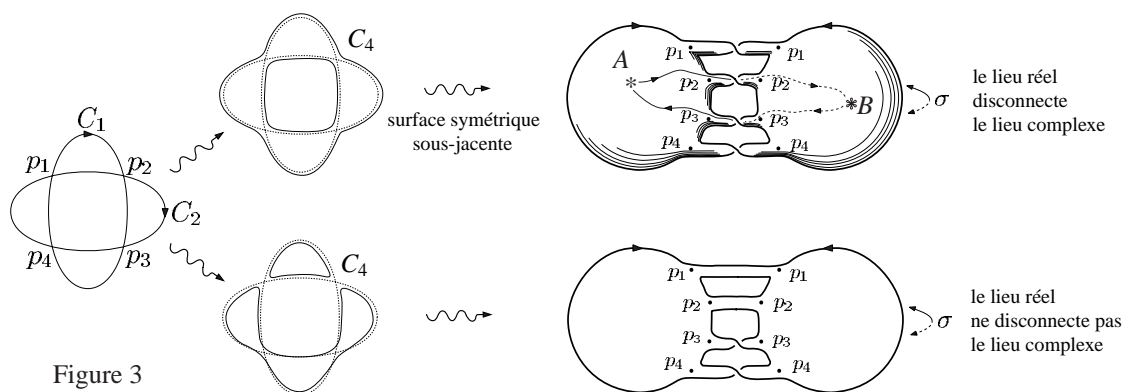


Figure 3

Pour le premier choix de simplification effectué, toutes les simplifications sont compatibles avec les orientations, et la surface symétrique correspondante est représentée par le premier dessin de la Figure 3, sur lequel on voit manifestement que le lieu réel disconnecte le lieu complexe. (En effet partant d'un point imaginaire A situé dans l'ex-hémisphère nord d'une des sphères équatoriales et en se déplaçant en évitant la partie réelle au travers d'une anse on atterrit dans un hémisphère de l'autre sphère (position B sur la Figure), puis en réempruntant une anse on retombe nécessairement [du fait que toutes les anses sont twistées] dans le même hémisphère d'origine, de sorte que l'on explore seulement une moitié du lieu imaginaire $C_4(\mathbb{C}) \setminus C_4(\mathbb{R})$, ce qui prouve que la courbe est séparante.) Par contre pour le second choix de simplification, il y a de la mixité [certaines anses twistées, d'autres non], de sorte que le lieu imaginaire est connexe.

En général, on a le résultat suivant dû à Fiedler (cf. [Fi], pp. 7-9):

Théorème 3.1 (Fiedler 1978). Soient C_1, C_2 deux courbes planes de degrés respectifs d_1, d_2 réelles, lisses et transverses, et C une courbe réelle lisse de degré $d = d_1 + d_2$ voisine de $C_1 \cup C_2$ qui simplifie (de façon non-précisée pour l'instant) tous les points doubles de $C_1 \cup C_2$.

• Il suffit qu'une des deux courbes C_1 ou C_2 soit non-séparante, pour que la courbe C le soit, et ce indépendamment des simplifications effectuées. Autrement dit en termes génétiques, non-séparant est un caractère dominant.

• Si par contre les courbes C_1 et C_2 sont de caractères récessifs, c'est-à-dire séparantes, et si en outre tous les $d_1 \cdot d_2$ points d'intersection de C_1 avec C_2 sont réels (cette condition pourra être satisfaite dans les constructions à venir) alors, d'après Brusotti, la courbe $C_1 \cup C_2$ peut être simplifiée de $2^{d_1 \cdot d_2}$ façons distinctes, mais parmi tous ces choix de simplifications, exactement deux livrent des courbes séparantes, à savoir celui qui est toujours positif, respectivement toujours négatif, relativement à des orientations complexes fixées de C_1 et C_2 . De plus pour un tel choix de simplifications dicté par les orientations complexes, l'orientation complexe de la courbe simplifiée C se déduit par transfert de celle de l'un de ses deux parents.

Preuve. Seule la seconde assertion nécessite une explication. La simplification de chaque nœud de $C_1 \cup C_2$ (qui sont tous réels et non-isolés) revient à attacher une anse contenant deux brins réels sur l'union disjointe de $C_1(\mathbb{C})$ avec $C_2(\mathbb{C})$. Cette anse privée des brins réels relie une moitié de C_1 avec une moitié de C_2 (ainsi que les moitiés conjuguées correspondantes). Ainsi pour que la courbe simplifiée C soit séparante, il faut (et il suffit) que toutes les simplifications effectuées correspondent à des attachements d'anses reliant systématiquement les mêmes moitiés. Ainsi notre seule liberté, si on aspire à fabriquer une courbe C séparante, réside dans le choix des deux moitiés que l'on relie initialement, et il est clair que l'on dispose de deux tels choix. \square

2.4 Construction de courbes

On va commencer par traiter le cas des degrés pairs, le cas des degrés impairs admettra ensuite un traitement similaire.

Les constructions qu'on va entreprendre se décomposent en les étapes suivantes:

Étape 0. On commence par s'entraîner avec les petits degrés $d = 2, 4$.

Étape 1. On rappelle la *méthode de Hilbert* de construction de courbes Harnack-maximales.

Étape 2. Ensuite en vertu de Brusotti, on va explorer d'autres choix de simplifications qui vont livrer des courbes *non-séparantes* avec moins d'ovales.

Étape 3. On disposera alors déjà d'un système d'invariants permettant d'attraper toutes les non-séparantes, via une opération simple qui consiste à rajouter une *petite conique*.

Étape 4. A ce stade, il nous restera à réaliser les courbes *séparantes* non prohibées par Rohlin, qui s'obtiendront en exploitant les 2 choix de simplifications compatibles avec les orientations complexes.

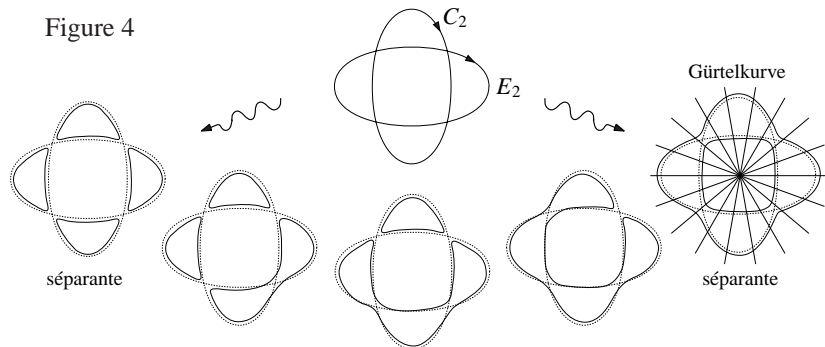
Étape 5. Enfin, en répertoriant les invariants ainsi réalisés, on constatera qu'il nous manque encore quelques invariants non prohibés par Rohlin, que l'on attrapera cependant par de petites constructions ad hoc.

2.4.1 Les courbes de degré pair

Étape 0. • Pour $d = 2$ on a $g = 0$, et il n'y a alors que deux surfaces symétriques qui sont la sphère équatoriale et antipodale, respectivement réalisées par $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = -1$.

Observer plus généralement que $x^d + y^d = -1$ livre les invariants $(d, r = 0, 1)$ pour tout d pair.

• Pour $d = 4$, on considère une paire de coniques réelles $C_2 \cup E_2 \subset \mathbb{P}^2$ s'intersectant en 4 points réels, que l'on peut déformer en les quartiques réelles lisses de la Figure 4. D'après Fiedler la première et la dernière de ces courbes (que Klein appelait la *Gürtelkurve*) sont séparantes (les simplifications effectuées étant compatibles avec les orientations complexes) et toutes les autres sont non-séparantes.



En se souvenant des 6 surfaces symétriques de genre $g = 3$ (cf. Figure 2 du Chapitre 0), on observe que pour $d = 4$ il n'y a pas de restrictions aux invariants de Klein.

Un argument plus synthétique pour révéler le caractère séparant de la Gürtelkurve, consiste à regarder le pinceau des droites passant par un point p réel choisi le plus à l'intérieur du nid (cf. Figure 4). Ce pinceau jouit de la propriété remarquable que tous ses membres réels (qui sont des droites réelles par p) découpent sur C_4 exclusivement des points réels. Le morphisme correspondant $C_4 \rightarrow \mathbb{P}^1$ est donc *saturé*, c'est-à-dire que ses fibres au-dessus des points réels sont toutes exclusivement formées de points réels. Par suite, il envoie les points imaginaires de C_4 sur des points imaginaires du pinceau, autrement dit il induit une application continue entre les lieux imaginaires $C_4(\mathbb{C}) \setminus C_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Le but de cette application étant formé de deux composantes connexes (puisque la surface symétrique sous jacente à \mathbb{P}^1 est une sphère équatoriale), et tenant compte de l'équivariance de cette application vis-à-vis des actions de Galois (=conjugaison complexe), il s'ensuit que le lieu imaginaire $C_4(\mathbb{C}) \setminus C_4(\mathbb{R})$ doit lui aussi posséder deux composantes connexes; d'où le caractère séparant de la Gürtelkurve C_4 .

Remarque. C'est là exactement le même argument que celui donné au Chapitre 0 pour détecter le caractère séparant d'une courbe hyperelliptique $y^2 = f(x)$ avec $f(x) > 0$ (pour tout x réel). Et ces deux exemples ont constitué pour moi le point de départ de tout le discours du Chapitre 3.

Ce même argument montre plus généralement que la borne inférieure de Rohlin est toujours réalisée, i.e. pour tout degré d il existe une courbe plane réelle lisse séparante avec $r = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ composantes. En effet, en perturbant un peu une réunion de k cercles concentriques, on peut obtenir une courbe C_d lisse de degré pair $d = 2k$ avec $r = k$ composantes. Une telle courbe est séparante, il suffit comme plus haut de considérer le pinceau des droites par un point choisi le plus à l'intérieur du nid, qui à nouveau induit un morphisme saturé de C_d vers \mathbb{P}^1 . Pour les degrés impairs, il suffit simplement de rajouter à la configuration précédente une droite réelle à l'infini (et de lissifier le tout).

Note. En fait cet argument montre aussi qu'une courbe ayant cette configuration est automatiquement séparante. Ceci répond à une question soulevée par Marin (cf. [Mar1], p. 59):

Est-ce qu'une courbe ayant cette disposition [dont tous les ovales sont emboîtés les uns dans les autres] sépare sa complexifiée?

Étape 1. Rappelons maintenant la *méthode de Hilbert* de construction de M -courbes (cf. par exemple [Gu], p. 20) qui s'effectue séparément suivant la parité du degré.

Considérons deux coniques réelles C_2 et E_2 s'intersectant en 4 points réels p_1, p_2, p_3, p_4 , et C_4^0 une quartique voisine de $C_2 \cup E_2$ avec $r = 4$. Soit $\vartheta_4 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot l_4$ une quartique réunion de 4 droites réelles intersectant chacune l'arc de $E_2(\mathbb{R})$ délimité par p_1 et p_2 en 2 points (cf. Figure 5), et considérons alors $C_4 := C_4^0 + \varepsilon \vartheta_4$ où ε désigne un petit nombre réel. Cette petite perturbation a pour effet de faire "vibrer" un des ovales de notre quartique C_4^0 relativement à la conique E_2 (cf. Figure 5). On applique ensuite Brusotti à la courbe $C_4 \cup E_2$ et le choix de simplifications de la Figure 5 fournit une courbe lisse C_6 qui possède $r = 4 + (3 + 4) = 11$ ovales, ce qui constitue la borne de Harnack pour $d = 6$.

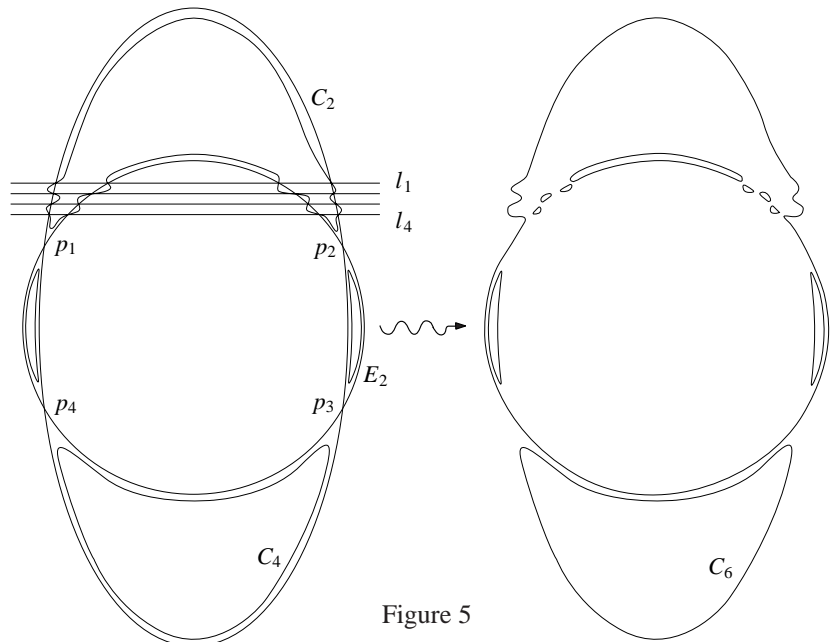


Figure 5

La méthode de Hilbert peut se schématiser par le dessin de la Figure 6 qui fournit un mode de représentation plus commode des oscillations de la Figure 5; qui y sont représentées de façon "zoomée", ce qui demeure

néanmoins topologiquement fidèle. En exploitant les 2 choix de simplifications de $C_4 \cup E_2$ compatibles avec des orientations complexes on obtient deux courbes séparantes avec $r = 4 + (3 + 4) = 11$ et $r = 4 + 1 = 5$ respectivement (cf. Figure 6).

Remarque. Noter ici qu'il n'est même pas nécessaire de connaître explicitement l'orientation complexe de C_4 , vu que l'intersection $C_4 \cap E_2$ est monopolisée par un seul ovale de C_4 . Il suffit d'orienter (arbitrairement) les ovales de $C_4(\mathbb{R})$ et de $E_2(\mathbb{R})$ se rencontrant, et ces orientations "locales" (i.e. d'un ovale sur chaque courbe) se prolongeront univoquement en des orientations complexes des ovales restants, mais qu'il est inutile d'expliciter vu qu'elles n'influenceront pas le choix de simplifications.

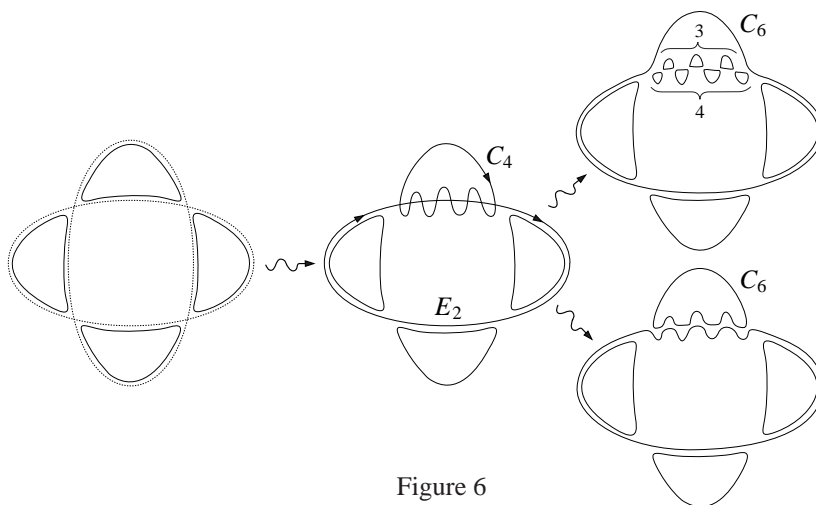


Figure 6

Etape 2. L'observation importante est maintenant qu'en faisant varier le choix des simplifications de la courbe $C_4 \cup E_2$ de la Figure 6 (ce qui est loisible d'après Brusotti), on peut aussi obtenir les courbes de la Figure 7, qui sont toutes non-séparantes (les deux choix séparants ayant déjà été exploités). Observer que l'invariant r diminue successivement d'une unité $r = 10, 9, \dots, 4$ jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré pair précédent. Je parle de *grignotage d'ovales dans une M-courbe de Hilbert*.

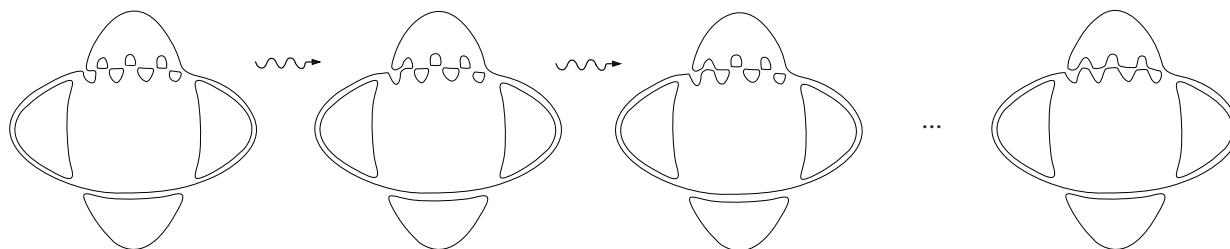


Figure 7

On itère ensuite la construction de Hilbert en faisant vibrer un ovale de la M -courbe C_6 de la Figure 6, ce qui fournit une nouvelle courbe C_6 de degré 6 qui oscille à travers E_2 au voisinage de l'ovale excité (cf. Figure 8). Ensuite en simplifiant les points doubles de $C_6 \cup E_2$, on peut obtenir la courbe C_8 de degré 8 de la Figure 8, qui possède $r = 11 + (5 + 6) = 22$ ovales.

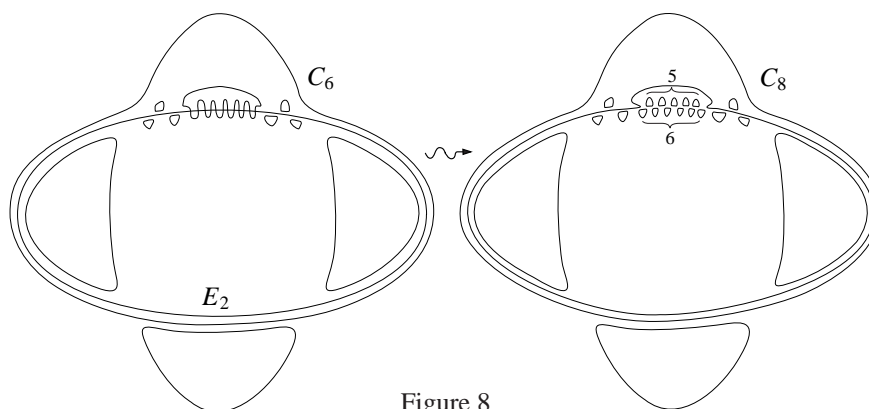


Figure 8

Remarque. On observe que l'on rajoute toujours à l'invariant r deux entiers consécutifs, ce qui permet de se convaincre que les courbes C_d construites par Hilbert réalisent bien toujours la borne de Harnack, puisque $r = (1 + 2) + (3 + 4) + \dots + (d - 3) + (d - 2) + 1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 = g + 1$.

Faisons le point sur le diagramme des involutions, que l'on a restreint aux degrés pairs, des valeurs des invariants (d, r, a) obtenus par cette méthode de grignotage dans une M -courbe de Hilbert (cf. Figure 9), qui représente les invariants ainsi réalisés par des pastilles noires.

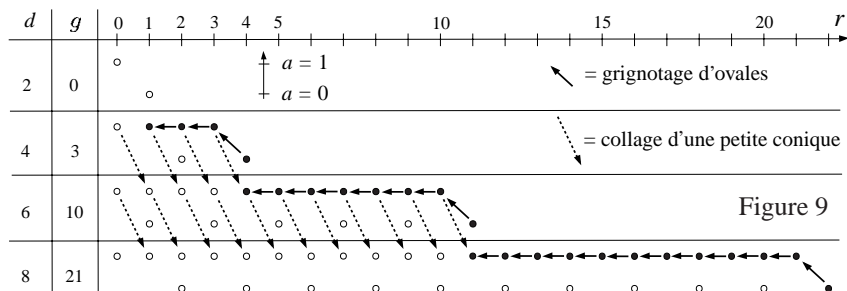


Figure 9

Cette méthode fournit des courbes non-séparantes C_d avec un invariant r décroissant successivement d'une unité jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré pair précédent, i.e. $M(d-2) = g(d-2) + 1$.

Étape 3. Ensuite étant donné une courbe non-séparante C_d , on peut toujours lui rajouter une *petite conique* C_2 , c'est-à-dire une conique réelle, ayant des points réels, mais de partie réelle disjointe de celle de C_d et (de complexifiée) transverse à C_d . La courbe $C_d \cup C_2$ possède alors $2d$ nœuds imaginaires conjugués dont la simplification fournit une courbe C_{d+2} non-séparante (non-séparant étant un caractère dominant) et qui possède un ovale de plus que la courbe donnée, i.e. $r(C_{d+2}) = r(C_d) + 1$. On baptise cette opération le *collage d'une petite conique*.

Remarque. Pour fabriquer une telle petite conique, il suffit de choisir un point p de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à $C_d(\mathbb{R})$ et de perturber un peu le produit d'une droite imaginaire l passant par p et transverse à C_d avec sa droite conjuguée l^σ de sorte que le point réel isolé p de la conique dégénérée $l \cup l^\sigma$ se transforme en un petit ovale autour de p . On peut déjà observer que cette opération s'appliquera également lorsque d sera impair.

Ainsi il est aisé (au niveau des courbes non-séparantes) de réaliser l'opération $(d, r, 1) \mapsto (d+2, r+1, 1)$. D'autre part, comme les non-séparantes avec $r=0$ s'obtiennent en considérant l'équation $x^d + y^d = -1$, on constate avec satisfaction en contemplant le diagramme des involutions (cf. Figure 9), que l'on dispose déjà d'un système de courbes non-séparantes permettant, moyennant itération successive de l'opération de collage d'une petite conique, d'attraper toutes les courbes non-séparantes restantes. Ceci montre qu'en degré pair tous les invariants des courbes non-séparantes sont réalisables dans le plan.

Étape 4. A ce stade il ne nous reste plus qu'à construire les courbes séparantes non prohibées par Rohlin, i.e. avec r tel que:

$$\frac{d}{2} \leq r \leq g(d) + 1 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \quad \text{et} \quad r \equiv g(d) + 1 \pmod{2}.$$

L'idée pour attraper d'autres valeurs intermédiaires de r consiste à appliquer la même technique de vibration d'un ovale, mais cette fois à une courbe séparante non nécessairement Harnack-maximale. Explicitement, au lieu de démarrer avec une M -courbe de degré 4, on considère la quartique C_4 de la Figure 10 avec $(d, r, a) = (4, 2, 0)$ (la Gürtelkurve). On peut faire vibrer un ovale de C_4 relativement à E_2 (cf. Figure 10), et les 2 choix de simplifications de $C_4 \cup E_2$ compatibles avec des orientations complexes livrent des courbes séparantes avec $r = 2 + (3 + 4) = 9$ et $r = 2 + 1 = 3$ ovales respectivement (cf. Figure 10).

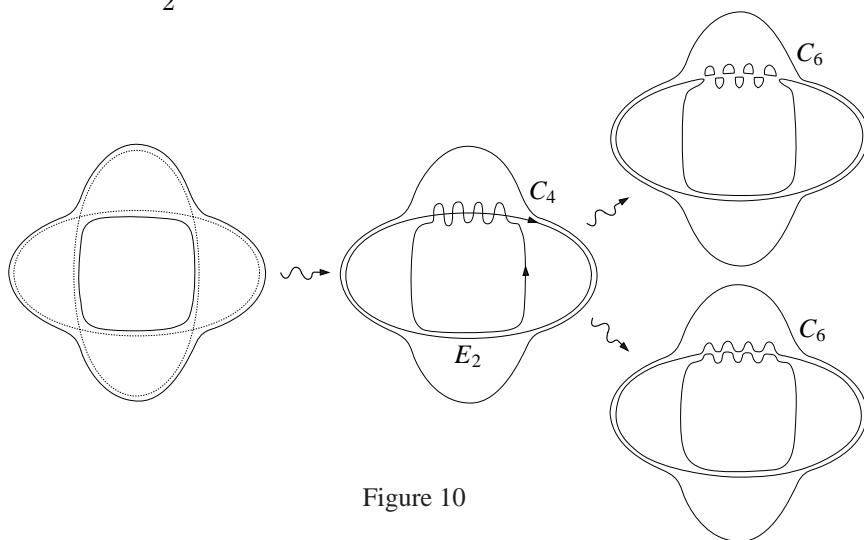


Figure 10

Plus généralement, la même technique (de vibration d'un ovale de C_d relativement à une conique génératrice E_2 , suivie des 2 simplifications de $C_d \cup E_2$ compatibles avec des orientations complexes) permet de construire à partir d'une courbe d'invariants $(d, r, 0)$ deux courbes séparantes d'invariants $(d+2, r+2d-1, 0)$ et $(d+2, r+1, 0)$ avec r croissant respectivement à la vitesse de la borne de Harnack (*lissification maximale*) et à vitesse 1 (*lissification atténuée*).

Visualisons les invariants ainsi réalisés sur le diagramme des involutions (cf. Figure 11). On observe que pour $d = 8$, les lissifications atténuées et maximales effectuent une "jonction" (cf. Figure 11), qui ne fera que s'accroître pour les degrés supérieurs. Ce qui garantit que l'on a mis la main sur presque tous les invariants Rohlin-admissibles pour les courbes séparantes.

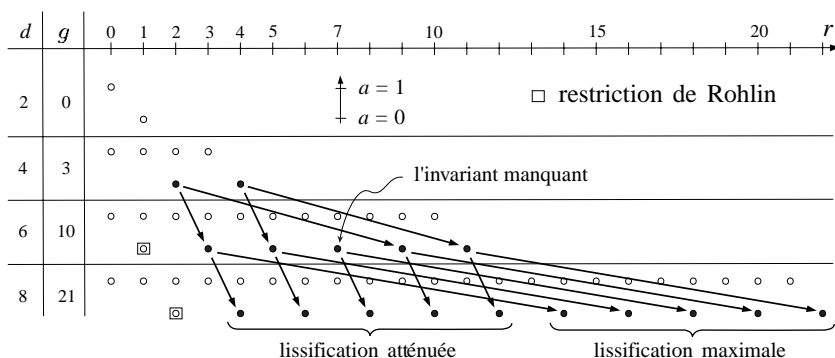


Figure 11

Étape 5. On note cependant que pour $d = 6$, il nous manque encore la courbe d'invariants $(d, r, a) = (6, 7, 0)$ qui échappe à cette méthode. Il n'est cependant pas difficile d'imaginer une petite construction ad hoc qui colmate cette lacune éphémère. On considère à cet effet la configuration de 3 coniques transverses de la Figure 12, dont la déformation proposée fournit la courbe C_6 manquante d'invariants $(d, r, a) = (6, 7, 0)$. (Noter que c'est l'unique endroit dans tout l'argument où il est nécessaire de connaître explicitement une orientation complexe).

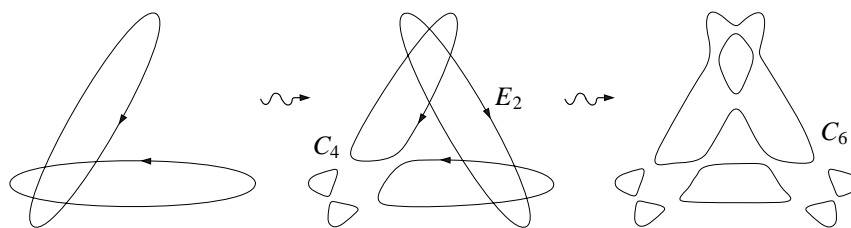


Figure 12

En résumé nous avons démontré:

Théorème 4.1. *Pour les courbes planes réelles lisses de degré pair, la restriction de Rohlin est la seule sur les invariants (d, r, a) .*

2.4.2 Les courbes de degré impair

Il nous reste maintenant à traiter le cas des courbes de degré impair; les valeurs admissibles des invariants (d, r, a) sont alors répertoriées dans la Figure 13. (La structure de l'argument proposé étant rigoureusement identique au cas des degrés pairs; on sera plus bref.)

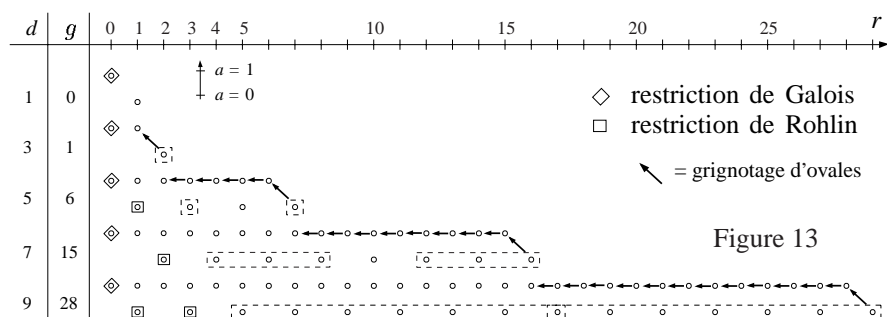


Figure 13

A nouveau on utilise la méthode de Hilbert, qui pour les degrés impairs démarre avec C_1 une droite réelle et E_2 une conique réelle rencontrant C_1 en deux points réels. La déformation de $C_1 \cup E_2$ de la Figure 14 fournit une M -courbe C_3 de degré 3.

Ensuite on construit une M -courbe C_5 de degré 5 en faisant vibrer une des composantes de C_3 , ce qui fournit une nouvelle cubique C_3 oscillant relativement à la conique génératrice E_2 (cf. Figure 14). La simplification dessinée des points doubles de $C_3 \cup E_2$ fournit la M -courbe C_5 cherchée.

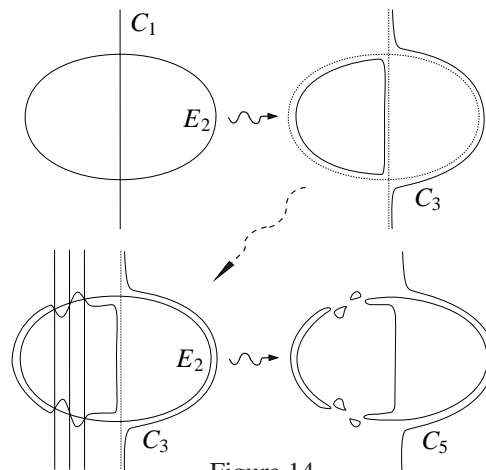


Figure 14

Ensuite la même technique de grignotage des ovals nouveau-nés dans une M -courbe de Hilbert, fournit des courbes non-séparantes avec un invariant r décroissant successivement d'une unité jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré impair précédent, i.e. $M(d-2)$. Les invariants (d, r, a) ainsi réalisés sont schématisés par des flèches sur la Figure 13. Ensuite en complétant la famille des courbes ainsi obtenues avec les courbes de Fermat de degré impair $F_d : x^d + y^d = 1$ qui ont $r = 1$ et qui sont non-séparantes pour $d \geq 3$ (d'après l'inégalité de Rohlin par exemple), on met à nouveau la main sur un système de courbes permettant d'engendrer toutes les non-séparantes via l'opération de collage d'une petite conique. Ainsi la restriction de Galois est la seule pour les courbes non-séparantes de degré impair.

Pour les séparantes, la même méthode qu'avant fournit les invariants délimités par la ligne en tirets sur le diagramme des involutions (cf. Figure 13). On observe cette fois que l'on manque deux invariants Rohlin-admissibles, à savoir $(d, r, a) = (5, 5, 0)$ et $(d, r, a) = (7, 10, 0)$: le premier s'obtient en rajoutant une droite à une courbe d'invariants $(d, r, a) = (4, 4, 0)$, puis en simplifiant de façon compatible avec les orientations complexes (cf. Figure 15).

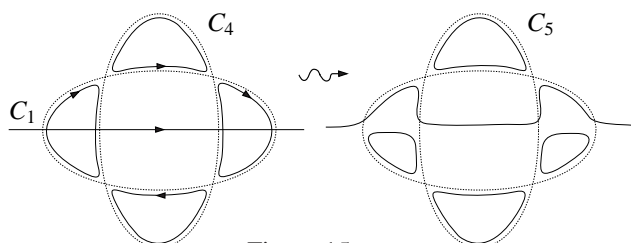


Figure 15

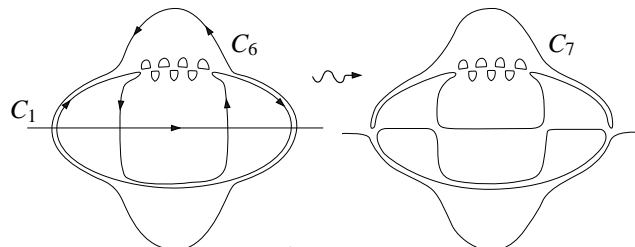


Figure 16

Le second s'obtient de la même manière à partir de la courbe de la Figure 10 d'invariants $(d, r, a) = (6, 9, 0)$ (cf. Figure 16).

En résumé nous avons montré:

Théorème 4.2. *Pour les courbes planes réelles lisses de degré impair, les restrictions de Galois et de Rohlin sont les seules sur les invariants (d, r, a) .*

Cela résout donc complètement le problème de Klein de la caractérisation des surfaces symétriques réalisables comme courbes réelles lisses dans le plan.

Chapitre 3: Une caractérisation des courbes séparantes

3.1 Introduction

Soit C une courbe algébrique réelle projective, lisse et géométriquement irréductible de genre g . La conjugaison complexe induit une involution σ sur le lieu complexe $C(\mathbb{C})$, qui fixe le lieu réel $C(\mathbb{R})$. Il en résulte que le lieu imaginaire $C(\mathbb{C}) \setminus C(\mathbb{R})$ est soit connexe, ou formé de deux composantes, auquel cas on dit que C est *séparante*. L'objet de ce chapitre est d'établir le fait suivant: *dire qu'une courbe réelle est séparante équivaut à l'existence d'une fonction algébrique réelle qui prend des valeurs réelles seulement sur le lieu réel de la courbe.*

Il nous semble que ce résultat est à rapprocher d'un théorème de Witt, qui affirme que les courbes réelles sans points réels, sont exactement celles qui admettent une paire de fonctions réelles dont la somme des carrés vaut -1 (cf. [Wi], Satz 2).

En fait, comme je l'ai appris grâce aux articles de Alling-Greenleaf [AG1] et de Geyer-Martens [GM], un résultat équivalent fut démontré par L.V. Ahlfors en 1950, qui déduit d'un problème d'extrémalisation la possibilité de représenter toute *surface de Riemann à bord* comme revêtement holomorphe du disque, en appliquant seulement le bord de la surface sur le bord du disque (cf. [Ah], §4, pp. 122–133). [L'équivalence de cet énoncé avec le nôtre résulte de la correspondance naturelle (fondée sur le principe de symétrie de Schwarz et le double de Schottky) entre surfaces de Riemann à bord et surfaces de Riemann fermées munies d'une involution antiholomorphe dont le lieu fixe disconnecte la surface.]

Il y a donc une passerelle entre les problèmes de représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et la géométrie algébrique réelle sur une courbe séparante.

On propose ici un argument on l'espère plus direct qui permet, moyennant seulement le théorème d'Abel, de ramener cette question d'existence au simple fait topologique; selon lequel tout point d'un tore $T^g = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$ peut s'écrire comme somme de g points situés sur g lacets fondamentaux, c'est-à-dire qui forment une base de l'homologie de T^g .

Cette première méthode fournit exactement le même degré $g + 1$ que celui obtenu par Ahlfors. Ensuite on va montrer qu'en raffinant un peu l'étude, notre méthode livre en fait une amélioration quantitative du théorème original d'Ahlfors, qui reflète parfaitement la topologie de la surface de Riemann à bord S , qui est déterminée par les deux entiers p (=le genre de la surface à bord S) et r (=le nombre de contours† de S). Plus précisément, on va montrer qu'il est possible d'abaisser le degré $r + 2p$ obtenu par Ahlfors à $r + p$.

3.2 L'exemple de la Gürtelkurve

On commence par décrire l'exemple qui a motivé originellement ce travail. On considère une quartique $C_4 \subset \mathbb{P}^2$ réelle obtenue en lissifiant une paire de coniques réelles comme l'indique la Figure 1. On se demande si cette courbe, que Klein appelle la *Gürtelkurve*, est ou non séparante.

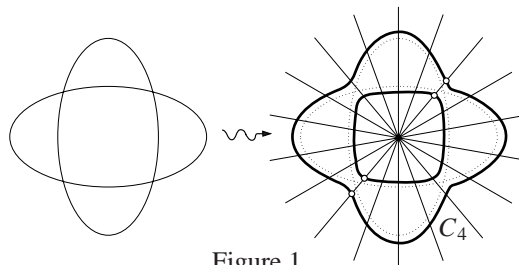


Figure 1

Proposition 2.1. *La Gürtelkurve est séparante.*

Preuve. Les membres réels du pinceau des droites passant par un point réel choisi à l'intérieur de l'ovale le plus profond du nid (cf. Figure 1), découpent sur la courbe C_4 seulement des points réels. Le morphisme correspondant $f : C_4 \rightarrow \mathbb{P}^1$ possède donc des fibres au-dessus des points réels qui sont toutes seulement formées de points réels. Par suite f induit une flèche continue $C_4(\mathbb{C}) \setminus C_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ entre les lieux imaginaires, d'où il résulte que C_4 est séparante, vu que \mathbb{P}^1 l'est. \square

3.3 La notion de morphisme saturé et formulation du problème d'existence

Définition 3.1. *Un morphisme $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ défini sur \mathbb{R} est dit saturé si ses fibres au-dessus des points réels sont toutes seulement formées de points réels.*

† Par contour on entend une composante connexe du bord ∂S .

Remarque 3.2. On vérifie facilement qu'un tel morphisme ne peut avoir de point de ramification réel. [En effet le comportement local de f est donné par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , $z \mapsto w = z^k$ avec k entier, dont les fibres au-dessus des points réels w sont toutes réelles seulement lorsque $k = 1$.] Par suite $f(\mathbb{R}) : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est un revêtement topologique du cercle. En particulier le degré d d'un morphisme saturé $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est toujours au moins égal au nombre r de composantes de $C(\mathbb{R})$.

Le raisonnement ci-dessus pour la Gürtelkurve fournit plus généralement le critère suivant:

Proposition 3.3. *Si une courbe réelle C admet un morphisme saturé vers \mathbb{P}^1 , alors C est séparante[†].*

On est alors tenté par la réciproque:

Problème 3.4. *Pour C une courbe séparante, existe-t-il toujours un morphisme saturé de C vers \mathbb{P}^1 ?*

Dans ce qui suit, on va montrer que la réponse à cette question est affirmative.

3.4 Le cas facile des courbes Harnack-maximales

On propose d'abord de résoudre le Problème 3.4 pour les courbes qui réalisent la borne de Harnack, i.e. celles avec $r = g + 1$ ovals. Ces courbes sont automatiquement séparantes, car le genre peut se définir comme le nombre maximal de courbes disjointes que l'on peut enlever à la surface sans la disconnecter.

Proposition 4.1 (Huisman). *Soit C une courbe réelle avec $r = g + 1$ (et donc séparante). Il existe alors un morphisme saturé $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré $g + 1$.*

Preuve. On rappelle que tout diviseur effectif D_0 de degré $d = g + 1$ sur une courbe C de genre g bouge, i.e. $\dim |D_0| \geq 1$ [ceci résulte de l'inégalité de Riemann $\dim |D_0| \geq \deg(D_0) - g$]. Vu que $r = g + 1$, on peut choisir D_0 un groupe[‡] de $d = g + 1$ points avec un point sur chaque composante de $C(\mathbb{R})$, cf. Figure 2.

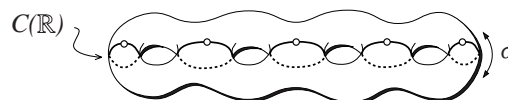


Figure 2

On choisit ensuite une série g_d^1 réelle dans $|D_0|$ contenant D_0 . Quitte à lui soustraire son éventuel lieu base B , on obtient une g_δ^1 qui induit un morphisme $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ réel. Lorsqu'on bouge $D_0 - B$ dans le cercle $g_\delta^1(\mathbb{R})$, on génère une famille de diviseurs symétriques dont les points restent par continuité prisonniers de leurs ovals respectifs. Ceci montre déjà que f est saturé de degré $\delta \leq g + 1$. Or d'après la Remarque 3.2, le degré de f est au moins égal au nombre d'ovales $r = g + 1$, et lui est donc égal. \square

Note. En fait on trouve des traces de ce raisonnement par continuité déjà dans [EC], Libro Terzo p. 264; mais ces derniers ne s'intéressant pas à la notion de morphisme saturé ils en déduisent seulement une démonstration de la borne de Harnack. Par contre l'énoncé ci-dessus figure explicitement dans un travail de J. Huisman (cf. [Hui2], Prop. 3.2, p. 87).

Remarque. Malheureusement cette démonstration ne s'étend pas aux courbes qui ne sont pas Harnack-maximales, car alors en choisissant nos $g + 1$ points sur les r ovals, le principe des tiroirs nous contraint d'en disposer deux au moins sur un même ovale; d'où une "surpopulation" qui ne nous met pas à l'abri d'une éventuelle collision entre ces deux points, qui après s'être produite les propulserait dans le lieu imaginaire, ruinant notre tentative "bon marché" de construction d'un morphisme saturé.

3.5 Reformulation du problème au moyen de l'équivalence linéaire

Ce petit paragraphe est une simple retraduction de la condition d'existence d'un morphisme saturé en termes de l'équivalence linéaire sur les groupes de points de la courbe. Réunissons d'abord quelques:

Définitions 5.1. *Si C est séparante, une moitié de C est l'une des deux composantes de $C(\mathbb{C}) \setminus C(\mathbb{R})$. Un diviseur effectif est dit unilatéral si son support est entièrement contenu dans une moitié de C .*

Pour résoudre le Problème 3.4, on va s'appuyer sur l'observation suivante:

[†] On peut bien sûr dans cet énoncé remplacer \mathbb{P}^1 par une courbe séparante quelconque.

[‡] Par groupe de points on entend un diviseur effectif.

Lemme 5.2. *Soit C une courbe séparante. L'existence d'un morphisme saturé $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ équivaut à celle d'un diviseur unilatéral D sur C linéairement équivalent à son conjugué D^σ .*

Preuve. $[\Rightarrow]$ Si $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un morphisme saturé, f induit une application $C(\mathbb{C}) \setminus C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ continue entre les lieux imaginaires, et applique donc chaque moitié de C sur une moitié de \mathbb{P}^1 . Le pull-back $f^*(q)$ d'un point imaginaire $q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est donc un diviseur unilatéral D tel que $D \sim D^\sigma$.

$[\Leftarrow]$ Réciproquement si un tel diviseur D existe, on peut parler de la g_d^1 engendrée par D et D^σ , qui est réelle et sans point base (vu que les supports de D et D^σ sont disjoints). Le morphisme correspondant $f : C \rightarrow g_d^1$ est donc réel. En particulier $g_d^1 \cong \mathbb{P}^1$ est la droite réelle standard, vu que $C(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, puisque C est supposée séparante.

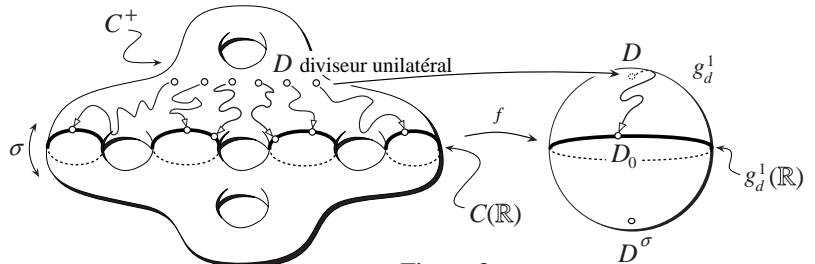


Figure 3

Il en résulte que lorsque D circule dans g_d^1 en évitant $g_d^1(\mathbb{R})$, on génère des diviseurs dont les points n'ayant le droit de franchir $C(\mathbb{R})$, restent dans la moitié de C , qui contient D . Ainsi en laissant dégénérer D sur un point $D_0 \in g_d^1(\mathbb{R})$ situé sur l'équateur (cf. Figure 3), on voit que D_0 est limite de diviseurs unilatéraux; mais étant aussi symétrique, il en résulte que D_0 est seulement formé de points réels. Enfin D_0 pouvant être arbitrairement choisi dans $g_d^1(\mathbb{R})$, cela montre bien que le morphisme construit f est saturé. \square

Tout revient donc à exhiber un diviseur unilatéral D tel que $D \sim D^\sigma$. Pour ce faire on va s'appuyer sur le *théorème d'Abel*, qui permet de réduire les questions d'équivalence linéaire à la géométrie du plongement d'une courbe dans sa jacobienne: *deux diviseurs de même degré sont linéairement équivalents si et seulement les sommes de leurs points vus dans la jacobienne coïncident.*

3.6 Résolution du problème via le théorème d'Abel

Notons $C^{(d)}$ la d -ième puissance symétrique de la courbe C et $J = \mathbb{C}^g / \Lambda$ sa jacobienne, où Λ est le réseau des périodes d'une base fixée $\omega_1, \dots, \omega_g$ de l'espace des 1-formes holomorphes sur C , c'est-à-dire

$$\Lambda = \left\{ \left(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g \mid \gamma \in H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \right\}.$$

On considère le morphisme d'Abel $\mu : C^{(d)} \rightarrow J$ défini pour $D = \sum_{i=1}^d p_i$ par

$$\mu(D) = \left(\sum_{i=1}^d \int_{p_0}^{p_i} \omega_1, \dots, \sum_{i=1}^d \int_{p_0}^{p_i} \omega_g \right)$$

où $p_0 \in C(\mathbb{C})$ est un point base.

Vu qu'on suppose la courbe C définie sur \mathbb{R} , on peut choisir une base $\omega_1, \dots, \omega_g$ formée de différentielles réelles. [Dire qu'une différentielle ω est *réelle* signifie que la fonctionnelle d'intégration correspondante $\int \omega$ est équivariante pour la conjugaison complexe, i.e. $\int_{\gamma^\sigma} \omega = \overline{\int_\gamma \omega}$.] La jacobienne J hérite alors naturellement d'une structure réelle, induite par $\sigma : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^g$ le produit de g conjugaisons complexes, vu que l'hypothèse de réalité faite sur les ω_i entraîne la stabilité du réseau Λ par σ . Si en outre on choisit p_0 réel, le morphisme μ est défini sur \mathbb{R} , c'est-à-dire équivariant pour les conjugaisons complexes.

Cela étant, la condition requise $D \sim D^\sigma$ équivaut d'après le théorème d'Abel à $\mu(D) = \mu(D^\sigma)$, ou encore μ étant équivariant à $\mu(D) = \mu(D)^\sigma$, i.e. à $\mu(D) \in J(\mathbb{R})$. En considérant le premier morphisme d'Abel $\mu : C \rightarrow J$ [qui est le μ précédent pour $d = 1$], et tenant compte de la relation $\mu(D) = \sum_{i=1}^d \mu(p_i)$, notre problème revient à trouver d points $P_1, \dots, P_d \in J$ situés dans $\mu(C^+)$ [où C^+ est une moitié de notre courbe séparante] et tels que leur somme $P_1 + \dots + P_d \in J(\mathbb{R})$ soit un point réel de la jacobienne. Au niveau du groupe quotient $T^g = J/J(\mathbb{R})$, il s'agit alors d'exprimer 0 comme somme de d points π_1, \dots, π_d appartenant au sous-ensemble $\Omega = \pi(\mu(C^+))$ de T^g , où $\pi : J \rightarrow T^g$ est la projection canonique. Le quotient T^g est

un groupe de Lie (réel) connexe compact abélien de dimension g , et est donc isomorphe au tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^g$. En définitive, on est ramené à résoudre dans un tore T^g l'équation $\sum_{i=1}^d \pi_i = 0$ sous la contrainte que les solutions π_i soient dans le sous-ensemble $\Omega \subset T^g$.

Il reste donc à préciser le plongement de Ω dans T^g ; nous allons le faire en montrant que $\Omega \cup \{0\}$ contient une base de l'homologie en dimension 1 du tore T^g . Ce renseignement bien que partiel sera suffisant pour notre objet.

Preuve de ce renseignement. Pour l'établir, on commence par choisir une base de $H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ adaptée à la symétrie σ comme l'indique la Figure 4; qui est donc constituée des 1-cycles suivants:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \\ \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_1^\sigma, \dots, \tilde{\alpha}_p^\sigma, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_1^\sigma, \dots, \tilde{\beta}_p^\sigma$$

avec donc $\alpha_i^\sigma = \alpha_i$ (invariant), $\beta_i^\sigma = -\beta_i$ (anti-invariant) et $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ entièrement tracés dans la moitié C^+ , et où $p = \frac{g+1-r}{2}$, dont l'intégralité est assurée par la congruence de Klein $r \equiv g + 1 \pmod{2}$ (cf. Proposition 2.3 du Chapitre 0). L'entier p peut s'interpréter grosso modo comme le nombre de "trous" d'une moitié.

Les périodes correspondantes notées

$$A_1, \dots, A_{r-1}, B_1, \dots, B_{r-1},$$

$$\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_p, \tilde{A}_1^\sigma, \dots, \tilde{A}_p^\sigma, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_p, \tilde{B}_1^\sigma, \dots, \tilde{B}_p^\sigma$$

satisfont donc $A_i \in \mathbb{R}^g$ et $B_i \in (i\mathbb{R})^g$. Notons que l'involution σ sur J préserve les sous-tore T_i de dimension 2, définis comme les projections par $p : \mathbb{C}^g \rightarrow J = \mathbb{C}^g/\Lambda$ des 2-plans vectoriels suivants

- $\mathbb{R}A_i + \mathbb{R}B_i$, pour lesquels σ_i (=restriction de σ à T_i) fixe deux composantes,
- et $\mathbb{R}\tilde{A}_i + \mathbb{R}\tilde{A}_i^\sigma, \mathbb{R}\tilde{B}_i + \mathbb{R}\tilde{B}_i^\sigma$, pour lesquels σ_i fixe une composante.

Dans les deux cas le quotient $T_i / \text{Fix}(\sigma_i)$ modulo les points fixes est un cercle, mais dans le premier cas, le cycle fondamental du quotient provient de l'image d'une demi-période, alors que dans le second c'est l'image d'une période complète.

Il s'ensuit que les images par l'application composée $\pi \circ \mu : C \rightarrow J \rightarrow T^g$

- des $r - 1$ demi-cycles $\beta_1^+, \dots, \beta_{r-1}^+$ définis par $\beta_i^+ = \beta_i \cap \overline{C^+}$, i.e. la trace des β_i sur l'adhérence de C^+
- ainsi que des $2p$ cycles $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_p, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_p$

sont des cycles† tracés sur $\Omega \cup \{0\}$ (notons les $\gamma_1, \dots, \gamma_g$)—qui en outre forment une base de l'homologie du quotient T^g . D'où le renseignement annoncé sur $\Omega \cup \{0\}$. \square

Tout va alors découler du lemme suivant, qui affirme grosso modo que si on irrigue un tore topologiquement, on l'engendre algébriquement:

Lemme 6.1 (Principe d'irrigation). *Soit T^g un tore de dimension g sur lequel sont tracés g 1-cycles $\gamma_1, \dots, \gamma_g : S^1 \rightarrow T^g$ qui forment une base de l'homologie de T^g . Alors tout point de T^g peut s'écrire comme somme de g points $\pi_1 + \dots + \pi_g$ avec $\pi_i \in \gamma_i$ pour $i = 1, \dots, g$.*

† En effet, bien que β_i^+ ne soit pas un cycle, ses extrémités étant réelles, elles se soudent lorsqu'on quotiente par $J(\mathbb{R})$; c'est pourquoi son image dans T^g forme bien un cycle.

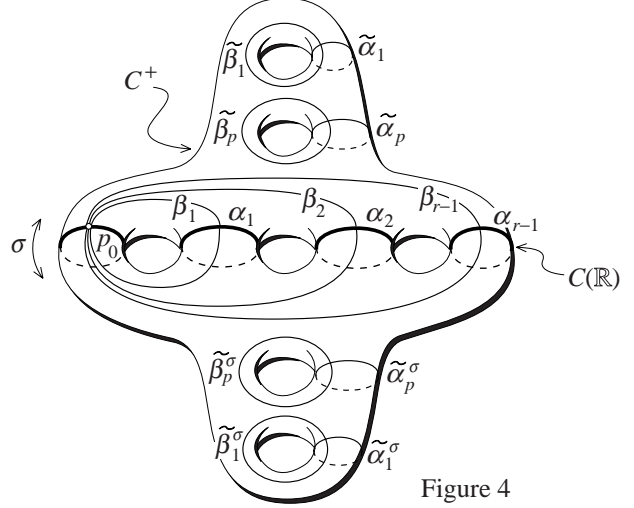
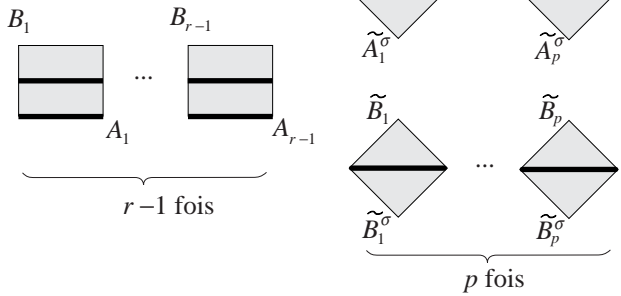


Figure 4

Figure 5.-Visualisation de la jacobienne d'une courbe réelle séparante



Preuve. Il revient au même de voir que l'application $\gamma : (S^1)^g \rightarrow T^g$ définie par

$$\gamma(z_1, \dots, z_g) = \gamma_1(z_1) + \dots + \gamma_g(z_g)$$

est surjective. Il suffit pour cela de montrer que son degré topologique est non nul. On fixe un isomorphisme $\varphi : T^g \xrightarrow{\cong} (S^1)^g$ de sorte que via cette identification, les γ_i soient homologues aux facteurs e_i du tore canonique $(S^1)^g$. Soit $\tilde{\gamma}$ l'application composée $(S^1)^g \xrightarrow{\gamma} T^g \xrightarrow{\varphi} (S^1)^g$. L'homomorphisme de Künneth

$$\underbrace{H_1(S^1) \otimes \dots \otimes H_1(S^1)}_{g \text{ facteurs}} \rightarrow H_g((S^1)^g)$$

est dans le cas présent un isomorphisme, et sa naturalité entraîne que si $f_i : S^1 \rightarrow S^1$ désigne l'application composée $S^1 \xrightarrow{j_i} (S^1)^g \xrightarrow{\tilde{\gamma}} (S^1)^g \xrightarrow{\pi_i} S^1$ où j_i est l'injection dans le i -ème facteur, et π_i la i -ème projection, alors $H_1(f_1) \otimes \dots \otimes H_1(f_g)$ commute via Künneth à $H_g(\tilde{\gamma})$.

$$\begin{array}{ccc} H_g((S^1)^g) & \xrightarrow{H_g(\tilde{\gamma})} & H_g((S^1)^g) \\ \text{Künneth} \downarrow & & \uparrow \text{Künneth} \\ \underbrace{H_1(S^1) \otimes \dots \otimes H_1(S^1)}_{g \text{ fois}} & \xrightarrow{H_1(f_1) \otimes \dots \otimes H_1(f_g)} & \underbrace{H_1(S^1) \otimes \dots \otimes H_1(S^1)}_{g \text{ fois}} \end{array}$$

Or les $H_1(f_i)$ sont des isomorphismes, car par construction la classe fondamentale du cercle S^1 s'envoie par f_i successivement sur e_i via j_i , puis sur γ_i via γ , puis sur e_i via l'identification φ , et donc en définitive sur la classe fondamentale du cercle via π_i . Ceci implique successivement que $H_1(f_1) \otimes \dots \otimes H_1(f_g)$ et $H_g(\tilde{\gamma})$ en sont aussi, et donc que $\tilde{\gamma}$ est de degré ± 1 . D'où le lemme. \square

Note. En fait une preuve plus limpide du Lemme 6.1 s'offre à nous lorsque on dispose de la notion du *produit de Pontrjagin*, que l'on introduira au §3.9. Anticipons un peu. On considère à nouveau l'application $\gamma : (S^1)^g \rightarrow T^g$ définie au début de la preuve précédente. Il s'agit d'étudier l'homomorphisme $H_g(\gamma) : H_g((S^1)^g) \rightarrow H_g(T^g)$. Or d'après Künneth on a un isomorphisme $H_g((S^1)^g) \cong H_1(S^1) \otimes \dots \otimes H_1(S^1)$ (g fois), et d'autre part le produit de Pontrjagin (noté \star) fournit une opération multilinéaire

$$H_1(T^g) \times \dots \times H_1(T^g) \rightarrow H_g(T^g)$$

Ces deux flèches s'incrivent dans un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H_g((S^1)^g) & \xrightarrow{H_g(\gamma)} & H_g(T^g) \\ \text{Künneth} \downarrow & & \uparrow \text{Pontrjagin} \\ \underbrace{H_1(S^1) \otimes \dots \otimes H_1(S^1)}_{g \text{ fois}} & \xrightarrow{H_1(\gamma_1) \otimes \dots \otimes H_1(\gamma_g)} & \underbrace{H_1(T^g) \otimes \dots \otimes H_1(T^g)}_{g \text{ fois}} \end{array}$$

Il suit de là que $H_g(\gamma)$ applique la classe fondamentale de $(S^1)^g$ sur $\gamma_1 \star \dots \star \gamma_g$, qui n'est autre que la classe fondamentale du tore T^g . D'où une autre façon de voir le lemme.

Ceci permet de conclure de la façon suivante: on choisit π_{g+1} un point de Ω . Noter que π_{g+1} est non nul, car Ω ne contient pas 0, puisque $\mu(C^+)$ ne rencontre pas $J(\mathbb{R})$ compte tenu du fait que $\mu : C \rightarrow J$ est un plongement (dès que $g \geq 1$) défini sur \mathbb{R} . Le Lemme 6.1 appliqué à l'opposé $-\pi_{g+1} \in T^g$, montre qu'il existe g points π_1, \dots, π_g situés respectivement sur les courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ et donc dans $\Omega \cup \{0\}$ tels que $\pi_1 + \dots + \pi_g = -\pi_{g+1}$. Noter que π_1, \dots, π_g sont non tous nuls vu que $\pi_{g+1} \neq 0$. Ainsi $\pi_1 + \dots + \pi_g + \pi_{g+1} = 0$, ce qui exprime bien 0 comme somme de $d \leq g + 1$ points qu'on peut supposer être dans Ω , quitte à omettre les π_i qui seraient éventuellement nuls. Cela achève de démontrer l'existence d'un morphisme saturé. En résumé, nous avons démontré le:

Théorème 6.2. *Soit C une courbe séparante de genre g . Il existe alors un morphisme saturé $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$. De plus il est toujours possible d'exhiber un tel morphisme de degré inférieur ou égal à $g + 1$, mais le degré de f ne peut être abaissé en dessous du nombre r de composantes connexes de la partie réelle, qui constitue une borne inférieure absolue pour le degré d'un morphisme saturé.*

Remarque 6.3. L'exemple de la Gürtelkurve C_4 montre qu'on ne peut pas toujours escompter trouver un morphisme saturé qui réalise la borne inférieure r . En effet du fait que le nombre minimal de feuillettes requis pour concrétiser une courbe plane lisse $C_m \subset \mathbb{P}^2$ de degré m comme revêtement de \mathbb{P}^1 est $m - 1$, la Gürtelkurve est seulement trigonale. Il est donc impossible d'atteindre $r = 2$.

Mise en garde 6.4. Il ne faut pas croire que $g + 1$ constitue une borne supérieure pour le degré d'un morphisme saturé, comme pourrait le laisser penser l'ambiguïté de la formulation suivante (extraite de l'encyclopédie japonaise, cf. [EDM], p. 1367):

L. Ahlfors proved that a Riemann surface of genus g bounded by m contours can be mapped conformally to an at most $(2g + m)$ -sheeted unbounded covering surface of the disk.

En effet une fois l'existence d'un diviseur unilatéral D tel que $D \sim D^\sigma$ établie, on peut évidemment considérer ses multiples kD qui satisferont encore la condition d'unilatéralité, ainsi que $kD \sim kD^\sigma$ et qui induiront donc des morphismes saturés de degré $k \deg(D)$, que l'on peut rendre arbitrairement grand.

Enoncé en termes de fonctions, le Théorème 6.2 donne en particulier:

Corollaire 6.5. *Une courbe réelle C est séparante si et seulement si il existe une fonction algébrique réelle qui prend des valeurs réelles seulement sur le lieu réel de C .*

3.7. Amélioration quantitative du théorème d'Ahlfors

Le résultat du Théorème 6.2 que l'on vient d'établir est en fait exactement celui obtenu par Ahlfors, qui obtient comme nous l'existence d'un morphisme saturé de degré $g + 1$ (cf. [Ah], Theorem 10, p. 132). Noter que ce degré de concrétisation tient seulement compte du genre g , mais ignore l'invariant r .

On propose dans ce qui suit de montrer que le résultat d'Ahlfors peut être substantiellement amélioré, en représentant la surface avec un nombre plus économique (mais néanmoins universel, c'est-à-dire qui dépend seulement de la topologie et non de la structure complexe) de feuillettes au-dessus du disque, et ce en tenant parfaitement compte de la topologie de la surface de Riemann à bord.

Evidemment, compte tenu de la Remarque 3.2, le résultat d'Ahlfors est optimal pour les courbes Harnack-maximales avec $r = g + 1$ —qui dans son langage correspondent aux surfaces de Riemann à bord *planes*, c'est-à-dire celles qui se plongent dans le plan complexe \mathbb{C} , [qui sont aussi classiquement qualifiées de *schlicht*†].

Mais par contre on va voir qu'il n'en est rien en général, en montrant qu'il est en réalité toujours possible d'exhiber un morphisme saturé de degré égal à la moyenne de r et $g + 1$. De façon précise:

Théorème 7.1. *Soit C une courbe séparante de genre g et r le nombre de composantes de $C(\mathbb{R})$. Il existe alors toujours un morphisme saturé $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré inférieur ou égal à $\frac{r+g+1}{2} = r + p$ (p s'interprétant alors comme le genre d'une moitié de C).*

Enoncé en termes de surfaces de Riemann à bord cela devient:

Théorème 7.1'. *Soit S une surface de Riemann à bord de genre p avec r composantes de bord. Il existe alors toujours (indépendamment de la structure complexe sur S) un revêtement (ramifié) holomorphe $f : S \rightarrow D^2$ vers le disque qui applique seulement le bord de S sur le bord du disque, et de degré inférieur ou égal à $r + p = \frac{r+g+1}{2}$ (g s'interprétant alors comme le genre du double (de Schottky) de la surface à bord S).*

Remarque 7.2. Observer que ce résultat (7.1) est compatible avec le fait classique affirmant que pour une courbe complexe de genre g générale, le degré minimal d'un morphisme vers \mathbb{P}^1 est $\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor + 1$ (cf. [GH], p. 261). De plus dans le cas complexe, on sait (*loc. cit.*) que pour g impair il y a une famille à un paramètre de telles concrétisations, tandis que pour g pair un nombre fini (il est donc probable qu'il en va de même pour les morphismes saturés).

† Rappelons qu'en allemand "schlichten" signifie "aplanir".

Exemple. Pour illustrer ce nouveau théorème considérons encore une fois l'exemple de la Gürtelkurve avec $g + 1 = 3 + 1 = 4$ et $r = 2$. Le Théorème 7.1 prédit l'existence d'un morphisme saturé de degré $d = 3$, et tel est bien le cas comme on le voit en laissant dégénérer le centre de projection sur l'ovale interne de la quartique (cf. Figure 6).

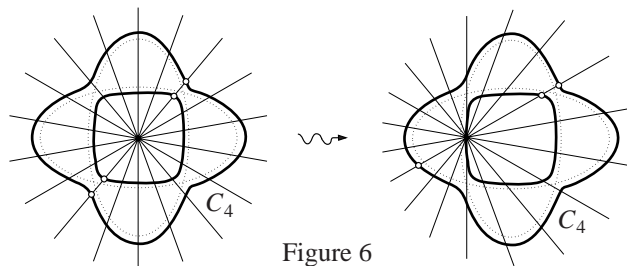


Figure 6

Un autre exemple plus sophistiqué est le suivant: on considère la sextique C_6 obtenue en déformant la configuration suivante de trois coniques (cf. Figure 7). Les simplifications effectuées étant compatibles avec les orientations complexes, cette courbe est séparante. Mais cela peut aussi se voir de façon synthétique en considérant le pinceau des coniques passant par 4 points distribués à l'intérieur des 4 ovales les plus profonds. Toutes les coniques de ce pinceau découpent 12 points réels sur C_6 , ce qui redémontre le caractère séparant de C_6 . Le morphisme saturé est ici de degré 12. Or on s'attend avec 7.1 à ce qu'il en existe un de degré la moyenne de $r = 5$ et $g + 1 = 11$, i.e. 8 et tel est bien le cas comme on le voit en laissant à nouveau dégénérer les 4 centres de projection sur les ovales.

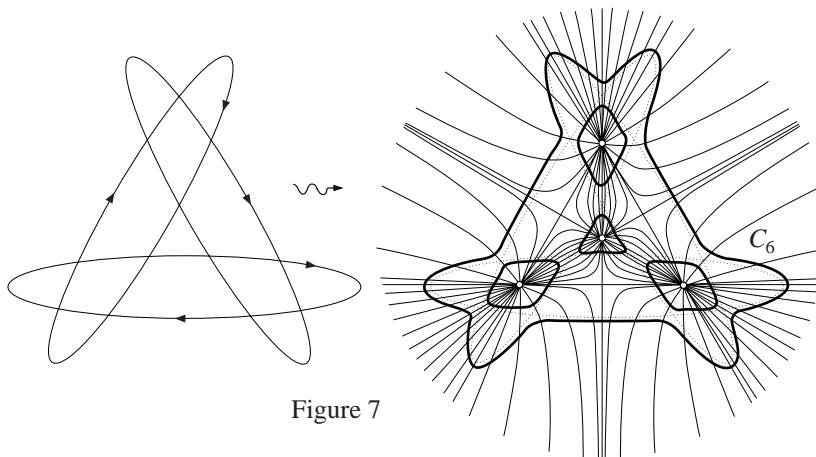


Figure 7

Avant de s'embarquer dans la démonstration de ce nouveau résultat, je tiens à raconter le cheminement qui m'a suggéré la possibilité d'une telle amélioration. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.8 Excursion chez les courbes complexes et preuve heuristique du théorème d'existence raffiné

Ce que nous avons fait jusqu'à présent, peut se résumer en disant que l'on a réussi à établir l'existence d'un morphisme saturé en s'appuyant sur un fait de nature topologique (le Lemme 6.1) que l'on aime bien appelé le principe d'irrigation. Son champ d'application n'est bien sûr nullement limité à cette seule question de géométrie réelle des courbes séparantes.

Il est en particulier instructif de voir ce que donne notre méthode d'irrigation dans le contexte plus "simple" d'une courbe algébrique *complexe* C (lisse irréductible). [Plus simple, ne serait ce que du fait que la topologie d'une courbe complexe est épinglée par un seul entier le genre g , alors qu'il en faut deux g et r pour spécifier celle d'une courbe réelle séparante.] Du fait que le morphisme d'Abel $\mu : C \rightarrow J$ induit un isomorphisme sur le H_1 , le principe d'irrigation (Lemme 6.1) s'applique aux images $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ d'une base $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ de $H_1(C, \mathbb{Z})$, et montre que tout point de la jacobienne peut s'écrire comme somme de $2g$ points qui coulisent sur les $2g$ courbes fondamentales. En particulier cela donne la surjectivité de $\mu : C^{(d)} \rightarrow J$ pour $d = 2g$, alors qu'il est bien connu que la surjectivité vaut déjà pour $d = g$ (c'est là l'objet du classique *théorème d'inversion de Jacobi*). C'est cette défaillance de notre méthode dans le cas classique fermé qui nous a suggéré la possibilité d'améliorer le théorème d'Ahlfors.

Mais cette défaillance du principe d'irrigation n'est en réalité qu'apparente, comme le montre l'argument heuristique suivant—qui permet de réhabiliter le principe d'irrigation:

la courbe C est plongée dans sa jacobienne J qui est un tore de dimension $2g$, et cette courbe est une surface orientable de genre g , mais modulo une homologie elle y est plongée comme g tores de dimension 2 qui irriguent le tore $J = T^{2g}$. Par suite tout point de J peut s'écrire comme somme de g points situés sur ces g tores, et en espérant que cette propriété se conserve lors d'une "homologie", on obtient une justification heuristique du théorème d'inversion de Jacobi. On reconnaît ici sans peine qu'il s'agit toujours

d'une manifestation du même principe d'irrigation: à l'irrigation unidimensionnel (à laquelle nous nous étions initialement limité) se substitue simplement une irrigation par des cycles bidimensionnels.

Cette observation étant faite, on peut revenir à notre contexte de géométrie réelle des courbes séparantes, et c'est la prédiction heuristique analogue (à celle que nous venons de faire), qui nous a conduit au théorème d'Ahlfors raffiné (7.1).

En effet, la donnée est maintenant une courbe réelle séparante: et dans ce cas le système—constitué

- des $r - 1$ courbes B_1^+, \dots, B_{r-1}^+ définies comme les images des β_i^+ —qui rappelons-le désignent les traces des cycles β_i sur l'adhérence de la moitié, (cf. Figure 4, p. 58)—dans le tore quotient $T^g = J/J(\mathbb{R})$,
- et des p tores τ_1, \dots, τ_p bidimensionnels (définis pour l'instant seulement nébuleusement par le biais de la Figure 8 comme le résultat de l'évanescence de cercles sur la moitié)

qui sont tous “dessinables” sur la moitié—irrigue le tore quotient T^g , de sorte que 0 peut être exprimé comme somme de $(r - 1) + p + 1 = r + p$ points de Ω , d'où une justification heuristique du résultat annoncé (Théorème 7.1).

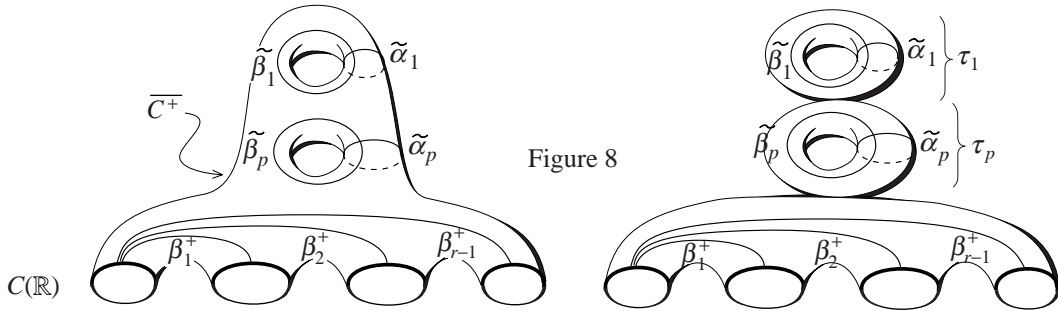


Figure 8

On a donc recours—dans notre contexte non classique—à une sorte d'irrigation “mixte”; en ce sens qu'elle est obtenue en combinant cycles de dimensions 1 et 2. Enfin tout ceci conduit peut être à faire apparaître notre raffinement du théorème d'Ahlfors comme une sorte d'analogue du théorème d'inversion de Jacobi pour les surfaces de Riemann à bord.

La suite du chapitre n'est qu'une simple tentative de formalisation des deux arguments heuristiques que nous venons de donner. On va d'abord le faire dans le cas classique. L'intérêt de procéder ainsi est double:

- primo on obtient une démonstration purement topologique du théorème d'inversion de Jacobi—ce qui est en soi n'est pas rien, surtout dans la mesure où on révèle que c'est un théorème de géométrie algébrique, qui se réduit en réalité à de la topologie combinatoire, et
- deuxio cela fournit l'opportunité de surmonter progressivement les difficultés: en se plaçant d'abord dans le contexte sobre attaché à la donnée d'une courbe complexe, on dispose d'un terrain plus propice pour formaliser l'intuition de l'irrigation; formalisation qui une fois acquise permettra de s'aventurer avec plus d'aisance dans la structure “topologico-combinatoire” touffue émanant de l'étude d'une courbe réelle séparante.

3.9 Démonstration du théorème d'inversion de Jacobi via la topologie combinatoire

L'argument intuitif du paragraphe précédent se formalise facilement comme suit:

on considère l'application d'Abel $\mu : C^g \rightarrow J$ définie cette fois au niveau du produit C^g (et non pas sur le produit symétrique, ce qui compliquerait le calcul de l'homologie) et on va montrer que son degré topologique est non nul. [Noter que les variétés C^g et J étant complexes, le choix d'une racine de -1 les orientent simultanément, de sorte que le degré de μ est même défini sans ambiguïté de signe si on voudrait].

Il s'agit donc d'étudier l'homomorphisme induit sur l'homologie de dimension maximale

$$H_{2g}(\mu) : H_{2g}(C^g) \longrightarrow H_{2g}(J) .$$

Or d'après Künneth on a $H_{2g}(C^g) \simeq \underbrace{H_2(C) \otimes \dots \otimes H_2(C)}_{g \text{ facteurs}}$, et l'on va se ramener à savoir ce qu'induit $\mu : C \rightarrow J$ au niveau du H_2 .

D'autre part en exploitant la structure de groupe sur J , l'addition $J \times J \xrightarrow{+} J$ induit $H_i(J \times J) \rightarrow H_i(J)$ qui précomposé avec le *produit extérieur en homologie* $H_p(J) \times H_q(J) \xrightarrow{\times} H_i(J \times J)$ pour p, q un couple d'entiers tel que $p + q = i$, fournit une opération bilinéaire

$$\star : H_p(J) \times H_q(J) \longrightarrow H_i(J)$$

appelée le *produit de Pontrjagin* (cf. [Pon] ou [LB], p. 104).

Ce produit peut plus généralement se définir pour tout groupe de Lie G (voire un groupe topologique). Mais dans le cas abélien, il satisfait en outre à la relation d'*anticommutativité*:

$$\sigma \star \tau = (-1)^{pq} \tau \star \sigma \quad \text{pour } \sigma \text{ et } \tau \text{ des cycles de dimensions respectives } p \text{ et } q$$

(cf. [Dold], p. 195). Relation dont on aura à faire usage plus loin, et qui résulte aussitôt du fait que le produit extérieur en homologie satisfait

$$i_*(\sigma \times \tau) = (-1)^{pq} \tau \times \sigma$$

où i est l'involution de $G \times G$ qui échange les facteurs, et i_* désignant l'homomorphisme $H_{p+q}(i)$ induit en homologie (cf. par exemple [Dold], p. 191).

Il suit de là que l'anneau de Pontrjagin $(H_*(T^g), +, \star)$ d'un tore T^g (de dimension réelle g) est naturellement isomorphe—en tant qu'algèbre graduée par la dimension des classes d'homologie—à l'algèbre extérieure sur sa composante homogène de degré un $H_1(T^g)$:

$$(0) \quad H_*(T^g) \cong \bigwedge H_1(T^g)$$

En particulier si $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ est une base de $H_1(T^g)$, le produit de Pontrjagin $\gamma_1 \star \dots \star \gamma_g$ décrit une classe fondamentale de T^g .

Preuve de (0). On considère l'inclusion $i : H_1(T^g) \hookrightarrow H_*(T^g)$. Comme $i(x) \star i(y) = -i(y) \star i(x)$ (d'après la relation d'anticommutativité ci-dessus), on a aussi $i(x) \star i(x) = 0$ pour tout $x \in H_1(T^g)$, vu que $H_2(T^g)$ est sans torsion. Il existe donc d'après la propriété universelle de l'algèbre extérieure (cf. p. ex. [Jac], vol. II, p. 141) un unique morphisme d'algèbres $\bigwedge H_1(T^g) \rightarrow H_*(T^g)$, dont on vérifie sans peine que c'est un isomorphisme. \square

En itérant g -fois le produit de Pontrjagin on obtient une application multilinéaire

$$\underbrace{H_2(J) \times \dots \times H_2(J)}_{g \text{ fois}} \longrightarrow H_{2g}(J),$$

qui s'inscrit—ou plus exactement la flèche correspondante au niveau du produit tensoriel—naturellement dans le diagramme suivant; qui est commutatif car les applications qui y figurent sont définies au moyen de la loi de groupe sur J .

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H_{2g}(C^g) & \xrightarrow{H_{2g}(\mu)} & H_{2g}(J) \\ \text{Künneth} \downarrow & & \uparrow \text{Pontrjagin} \\ \underbrace{H_2(C) \otimes \dots \otimes H_2(C)}_{g \text{ fois}} & \xrightarrow{H_2(\mu) \otimes \dots \otimes H_2(\mu)} & \underbrace{H_2(J) \otimes \dots \otimes H_2(J)}_{g \text{ fois}} \end{array}$$

La connaissance de l'homomorphisme qui nous intéresse $H_{2g}(\mu)$ se ramène donc à celle de l'homomorphisme $H_2(\mu) : H_2(C) \rightarrow H_2(J)$; qui fait l'objet du lemme suivant:

Lemme 9.1. *Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ une base symplectique de $H_1(C, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire telle que $\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0$ et $\alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$, et notons $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$ leurs images dans $H_1(J, \mathbb{Z})$ par le morphisme*

d'Abel $\mu : C \rightarrow J$. Alors le cycle fondamental de l'image $\mu(C)$ —ou ce qui revient au même l'image du cycle fondamental $H_2(\mu)([C])$ —est homologue à $\sum_{i=1}^g A_i \star B_i$ dans $H_2(J, \mathbb{Z})$.

Preuve. L'idée de la démonstration est la suivante: après avoir contracté la surface de genre g sous-jacente à C , sur un bouquet B de g tores de dimension 2 comme l'indique la Figure 9, on peut trouver une factorisation "homotopique"

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\mu} & J \\ p \searrow & & \nearrow \varphi \\ & B & \end{array}$$

de l'application d'Abel $\mu : C \rightarrow J$ au travers de ce bouquet, i.e. une application φ qui fasse commuter le diagramme (2) à homotopie près. Pour l'application composée $\varphi \circ p$, il sera alors flagrant qu'elle enverra le cycle fondamental de C sur le produit de Pontrjagin $\sum_{i=1}^g A_i \star B_i$. Le lemme en résulte alors par invariance homotopique de l'homologie.

L'argument détaillé est le suivant:

Préliminaire sur le modèle 4g-gonale et concrétisation géométrique de l'hypothèse symplectique. On se représente d'abord la surface de genre g , sous-jacente à C , de la façon habituelle: soit comme quotient d'un $4g$ -gone Δ [homéomorphe au disque] modulo la relation d'équivalence, qui identifie les points du bord de Δ suivant le code $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$ (cf. Fig. 9.a)). On note $C^{(1)}$ l'image du bord $\partial\Delta$ dans C , puisque ce n'est autre que le 1-squelette de C , pour la structure cellulaire introduite par le biais de la représentation 4g-gonale. Noter que c'est ici qu'on fait usage de l'hypothèse symplectique, faite sur la base du H_1 . En effet la représentation 4g-gonale livre non seulement la surface mais aussi une base de son H_1 en orientant le 1-squelette comme bord de la 2-cellule, base qui est symplectique. Inversement étant donné des cycles qui forment une base symplectique, on peut toujours la représenter de la sorte. [On peut même s'épargner tout ceci, quitte à supposer directement dans l'énoncé du lemme, la base α_1, \dots, β_g représentée par un système de "retrosection" telle que sur la Fig. 9.b).]

Description de la contraction du bretzel C sur le bouquet B . Ensuite en quotientant C par le sous-espace Γ défini comme l'image par la projection canonique $\pi : \Delta \rightarrow C$ de la réunion des g rayons issus de l'origine 0 du disque Δ , et reliant 1 sommet sur 4 (les origines des α_i) du $4g$ -gone Δ (cf. Fig. 9a)), on obtient un bouquet $B = \bigvee_{i=1}^g T_i$ de g tores T_i de dimension 2, vu qu'une fois ces g rayons contractés on voit g 2-cellules munies chacune de la relation d'équivalence $\alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}$ sur leur bord.

Construction de l'application φ . Evidemment $\mu : C \rightarrow J$ n'étant pas constante sur Γ (car injective dès que $g \geq 1$), elle ne passe pas au quotient $B = C/\Gamma$. Par contre sa restriction à $C^{(1)}$ induit elle—du fait que $C^{(1)}$ ne rencontre Γ qu'en un seul point—une application $\varphi^{(1)} : B^{(1)} \rightarrow J$ définie sur $B^{(1)}$ l'image de $C^{(1)}$ dans B . On construit $\varphi : B \rightarrow J$, en recollant les applications $\varphi_i : T_i \rightarrow J$ définies sur chaque pétale T_i du bouquet par

$$\varphi_i(z_1, z_2) = \varphi^{(1)}(z_1) + \varphi^{(1)}(z_2)$$

après avoir fixé une identification entre T_i et $S^1 \times S^1$. Les φ_i se recollent, vu que les centres des T_i s'envoient via les φ_i tous sur $\mu(p_0) = 0$.

Vérification du fait flagrant. L'application $\tilde{\mu} : C \rightarrow J$ composée de $p : C \rightarrow B$ avec l'application $\varphi : B \rightarrow J$ satisfait alors

$$H_2(\tilde{\mu})([C]) = \sum_{i=1}^g A_i \star B_i.$$

En effet $[C]$ s'envoie d'abord—via $H_2(p)$ —sur la somme $\sum_{i=1}^g \tilde{\tau}_i$ des cycles fondamentaux $\tilde{\tau}_i = \tilde{\alpha}_i \star \tilde{\beta}_i$ de chacune des pétales T_i du bouquet, où $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ désignent les images respectives de α_i, β_i dans le bouquet B .

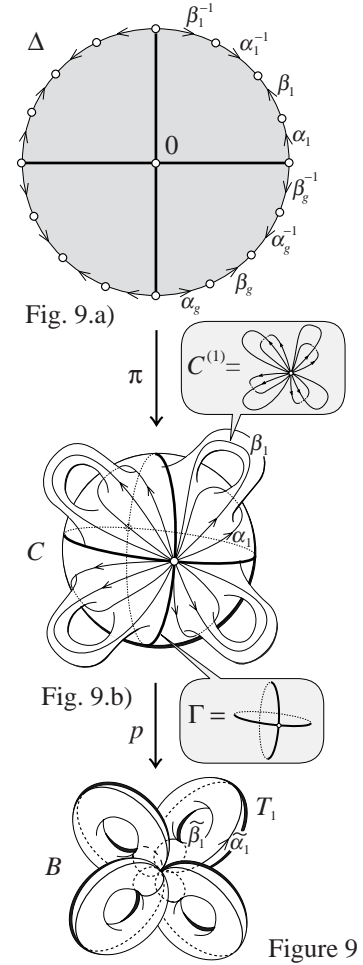


Figure 9

D'autre part par construction de φ , on a $H_2(\varphi)([T_i]) = A_i \star B_i^\dagger$, vu que $\varphi(\tilde{\alpha}_i) = A_i$ et $\varphi(\tilde{\beta}_i) = B_i$. Par suite il vient bien comme annoncé

$$\begin{aligned} H_2(\tilde{\mu})([C]) &= H_2(\varphi \circ p)([C]) = H_2(\varphi)(H_2(p)([C])) \\ &= H_2(\varphi)\left(\sum_{i=1}^g \tilde{\tau}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^g H_2(\varphi)(\tilde{\tau}_i) = \sum_{i=1}^g A_i \star B_i . \end{aligned}$$

Commutativité du triangle (2) à homotopie près. Il reste à vérifier que les applications μ et $\tilde{\mu}$ sont homotopes. Mais c'est là une simple conséquence du fait qu'elles ont même restriction au 1-squelette de C . En effet, de ce fait on peut définir une application continue

$$F : \partial(\Delta \times I) = (\Delta \times \partial I) \cup (\partial\Delta \times I) \rightarrow J$$

en recollant les applications suivantes:

- $\mu \circ \pi$ sur la base inférieure $\Delta \times \{0\}$ du “cylindre plein” $\Delta \times I$,
- $\tilde{\mu} \circ \pi$ sur sa base supérieure $\Delta \times \{1\}$,
- et l'application $\mu \circ \pi|_{\partial\Delta} : \partial\Delta \rightarrow J$ sur le cylindre $\partial\Delta \times I$ identiquement au cours du temps.

On dispose à ce stade de F définie sur le bord $\partial(\Delta \times I)$ de la 3-cellule $\Delta \times I$, bord qui est homéomorphe à une sphère S^2 . Or $J \approx T^{2g}$ étant homéomorphe à un tore, on déduit—du fait que $[S^2, T^n] = \{*\}$ ne contient à homotopie près que l'application constante—que l'application F s'étend à la 3-cellule $\Delta \times I$. Extension qui fournit (par passage au quotient de Δ à C) l'homotopie cherchée reliant μ à $\tilde{\mu}$. \square

On est maintenant en mesure de conclure. La commutativité du diagramme (1) combinée au Lemme 9.1 montre que le générateur $C \times \dots \times C$ (g fois) de $H_{2g}(C^g)$ s'envoie—via $H_{2g}(\mu)$ —sur

$$(3) \quad \left(\sum_{i=1}^g A_i \star B_i\right) \star \dots \star \left(\sum_{i=1}^g A_i \star B_i\right) .$$

On note $\tau_i = A_i \star B_i$. Du fait que le produit de Pontrjagin est alterné on a $\tau_i \star \tau_i = 0$, de sorte que les seules contributions proviennent des facteurs $\tau_{i_1} \star \dots \star \tau_{i_g}$ avec i_j distincts deux à deux. Enfin la relation d'anticommutativité $\sigma \star \tau = (-1)^{pq} \tau \star \sigma$ pour σ, τ des cycles de dimensions p et q , montre que l'expression (3) se réduit—après réordonnage des contributions—à

$$g!(\tau_1 \star \dots \star \tau_g) = g![J] .$$

La dernière égalité reposant sur le fait que pour un tore T^n de dimension n le produit de Pontrjagin $\alpha_1 \star \dots \star \alpha_n$ d'une base $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $H_1(T^n)$ représente sa classe fondamentale. Le degré de $\mu : C^g \rightarrow J$ est donc $g! \neq 0$, d'où la surjectivité cherchée de $\mu : C^g \rightarrow J$. Voilà donc une démonstration purement topologique du théorème d'inversion de Jacobi (qui en particulier ne repose ni sur Riemann-Roch, ni sur le proper mapping theorem).

Remarque. Cet argument purement topologique pour obtenir le théorème d'inversion de Jacobi est aussi présenté dans le livre de Clemens [Cl], p. 131–132. Notre démonstration géométrique s'en distingue juste du fait qu'elle est purement exprimée dans le langage de l'homologie—ce qui en particulier permet de contourner la dualité de Poincaré.

3.10 Démonstration du théorème d'existence raffiné

On note $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{0\}$, où Ω désigne le sous-ensemble de $T^g = J/J(\mathbb{R})$ défini au §3.6, c'est-à-dire l'image de la moitié C^+ dans le tore quotient T^g . Pour établir le Théorème 7.1—affirmant qu'il existe toujours un morphisme saturé de degré inférieur ou égal à $r + p$ —il suffit de montrer l'assertion suivante:

Proposition 10.1. *L'ensemble $(d-1)\overline{\Omega} = \{\pi_1 + \dots + \pi_{d-1} \mid \pi_i \in \overline{\Omega}\}$ est égal à tout T^g pour $d = r + p$.*

† C'est même vrai en tant que cycle, si on avait pris la peine de définir le produit de Pontrjagin au niveau des cycles.

Rappel de pourquoi cela suffit. On a vu au §3.6 que l'existence d'un morphisme saturé de degré d équivaut à la possibilité de représenter 0 comme somme de d points $\pi_1 + \dots + \pi_d$ tous situés dans le sous-ensemble Ω . D'autre part si $(d-1)\overline{\Omega}$ est égal à tout T^g pour un certain entier d , alors une telle représentation est possible. En effet il suffit de choisir un point $\pi_d \in \Omega$, et alors $-\pi_d \in T^g$. Mais d'après l'hypothèse, il existe $\pi_1, \dots, \pi_{d-1} \in \overline{\Omega}$ (non tous nuls) tels que $\pi_1 + \dots + \pi_{d-1} = -\pi_d$ et donc $\pi_1 + \dots + \pi_{d-1} + \pi_d = 0$.

Intuitivement la Proposition 10.1 repose sur l'observation que le système constitué des

- $r-1$ courbes B_1^+, \dots, B_{r-1}^+ et des

- p tores $\tau_i = \tilde{A}_i \star \tilde{B}_i$ [où \tilde{A}_i, \tilde{B}_i sont les 1-cycles de T^g image des $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ définis par la Figure 4 (p. 58)]

qui sont tous “dessinés” sur $\overline{\Omega}$ irrigue le tore $T^g = J/J(\mathbb{R})$. (La condition d'irrigation peut se formaliser en disant que leur produit de Pontrjagin $B_1^+ \star \dots \star B_{r-1}^+ \star \tau_1 \star \dots \star \tau_p$ fournit la classe fondamentale du tore ambiant T^g). Intuition qui est donnée par la Figure 5 (p. 58) et arithmétiquement confirmée par $(r-1) + 2p = g$.

Preuve de la Proposition 10.1. Pour obtenir une démonstration formelle de (10.1), on introduit l'application suivante

$$\psi : \overline{\Omega}^{d-1} \longrightarrow T^g,$$

$$(\pi_1, \dots, \pi_{d-1}) \mapsto \sum_{i=1}^d \pi_i$$

dont il s'agit d'établir la surjectivité pour $d = r+p$. On va le faire en s'appuyant sur un critère homologique de surjectivité.

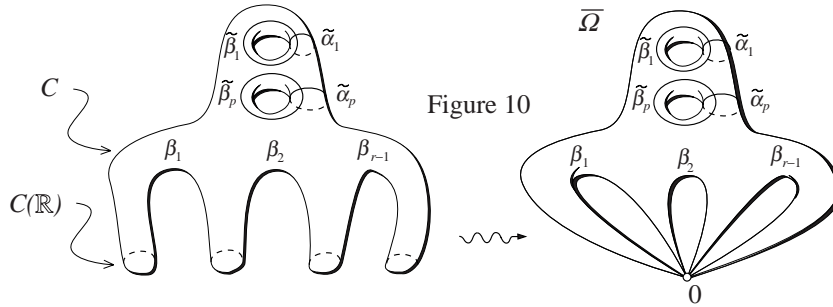
Offrons-nous le luxe de quelques remarques pas indispensables, mais utiles pour la compréhension. Pour l'instant rappelons que nous avons déjà fait deux fois usage du critère classique de surjectivité (degré brouwerien $\neq 0 \Rightarrow$ surjectivité d'une application continue équidimensionnelle entre variétés orientées)

- 1) d'abord pour le lemme d'irrigation

- 2) et ensuite pour la preuve du théorème d'inversion de Jacobi

Mais à l'application ψ qui intervient maintenant, on ne peut pas directement appliquer ce critère de surjectivité. Deux obstacles à cela:

- d'abord la source $\overline{\Omega}^{d-1}$ n'est pas une variété. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que $\overline{\Omega}$ déjà n'en est pas une, étant par définition $\Omega \cup \{0\}$, et c'est donc aussi l'image dans $J/J(\mathbb{R})$ de la surface à bord $\overline{C^+}$. Or les r composantes de bord de la moitié $\overline{C^+}$ (compactifiée) sont toutes contractées sur l'origine 0 (cf. Figure 10), de sorte que $\overline{\Omega}$ s'apparente plutôt à une sorte de “parachute”.



- ensuite l'application ψ n'est pas équidimensionnelle. En effet la source de ψ est de dimension (réelle) $2(d-1) = 2(r+p-1) = 2(r-1+p) = 2(r-1 + \frac{g+1-r}{2}) = 2(r-1) + g+1-r = g+r-1 \geq g$. Ainsi ψ est “sur-dimensionnelle”.

Nous allons remédier à l'absence de degré pour ψ , en utilisant le critère homologique de surjectivité suivant—qui est une généralisation directe du critère de surjectivité classique:

Lemme 10.2. Soit $f : M \rightarrow N$ une application continue où N désigne une variété (connexe) de dimension n . Si l'homomorphisme $H_n(f) : H_n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(N, \mathbb{Z})$ induit en homologie de dimension donnée par celle du but N est non nul, alors f est surjective.

Preuve. Sinon f évite un point q de N . Mais $N - \{q\}$ se rétracte par déformation sur la variété à bord \tilde{N} déduite de N en lui excisant une boule ouverte de dimension n centrée en q . On a donc $H_n(N - \{q\}) = H_n(\tilde{N}) = 0$, et vu que f factorise par $N - \{q\}$ on en déduit par functorialité que $H_n(f) = 0$. \square

Remarque. La démonstration utilise seulement que N est un espace pour lequel il existe un entier n tel que l'excision d'un point quelconque de N annule son H_n .

Appliquons ce lemme à ψ . On doit vérifier que $H_g(\psi)$ est non nul. La formule de Künneth donne

$$H_g(\overline{\Omega}^{d-1}) = \bigoplus_{i_1 + \dots + i_{d-1} = g} H_{i_1}(\overline{\Omega}) \otimes \dots \otimes H_{i_{d-1}}(\overline{\Omega}).$$

Vu que $(r-1) + 2p = g$ (et supposant $d = r + p$), cette somme contient le terme

$$\underbrace{H_1(\overline{\Omega}) \otimes \dots \otimes H_1(\overline{\Omega})}_{r-1 \text{ fois}} \otimes \underbrace{H_2(\overline{\Omega}) \otimes \dots \otimes H_2(\overline{\Omega})}_{p \text{ fois}}$$

D'autre part, du fait que l'application ψ est fabriquée moyennant la loi de groupe sur T^g le diagramme suivant commute:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} H_g(\overline{\Omega}^{d-1}) & \xrightarrow{H_g(\psi)} & H_g(T^g) \\ \text{Künneth} \downarrow & & \uparrow \text{Pontrjagin} \\ \underbrace{H_1(\overline{\Omega}) \otimes \dots \otimes H_1(\overline{\Omega})}_{r-1 \text{ fois}} \otimes \underbrace{H_2(\overline{\Omega}) \otimes \dots \otimes H_2(\overline{\Omega})}_{p \text{ fois}} & \xrightarrow{i_*} & \underbrace{H_1(T^g) \otimes \dots \otimes H_1(T^g)}_{r-1 \text{ fois}} \otimes \underbrace{H_2(T^g) \otimes \dots \otimes H_2(T^g)}_{p \text{ fois}} \end{array}$$

où i_* est la flèche induite par l'inclusion $i : \overline{\Omega} \hookrightarrow T^g$.

Commutativité qui permet de ramener la connaissance de $H_g(\psi)$ à celle de $H_2(i) : H_2(\overline{\Omega}) \rightarrow H_2(T^g)$. Concernant cette dernière on a le:

Lemme 10.3. *Le cycle fondamental ω de $\overline{\Omega}$ est homologue à $\sum_{i=1}^p \tilde{A}_i \star \tilde{B}_i$ dans $H_2(T^g, \mathbb{Z})$.*

Preuve intuitive. La démonstration heuristique se fait en évanouissant des cercles sur $\overline{\Omega}$ comme l'indique la Figure 11. Une fois les cercles évanouis, il reste $\sum_{i=1}^p \tilde{A}_i \star \tilde{B}_i$, plus l'image continue d'une sphère (cf. Figure 11). Mais cette dernière ne contribue pas du fait que le groupe des classes d'homotopie $[S^2, T^n]$ d'une sphère de dimension 2 dans un tore est trivial—du fait que S^2 est simplement connexe et vu que le revêtement universel de T^n est contractile. D'où l'assertion.

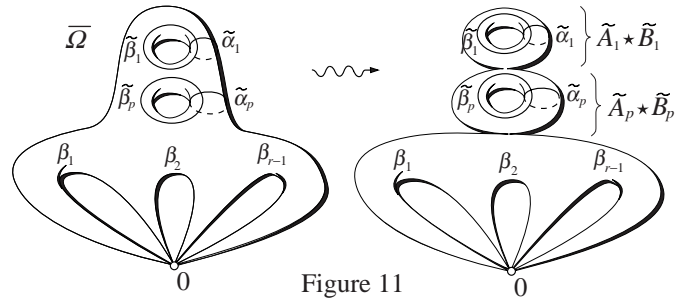


Figure 11

Démonstration du Lemme 10.3. L'argument est essentiellement le même que celui qu'on a donné pour une courbe complexe, modulo un petit préliminaire; qui consiste simplement à observer que tout devient plus clair, si on "déballe" un petit peu $\overline{\Omega}$, en introduisant le bretzel de genre p qui "vit au-dessus" de $\overline{\Omega}$. Ce qui permet de se ramener à la situation connue d'un bretzel qui s'envoie dans un tore (déjà rencontrée lors de la démonstration du Lemme 9.1), et il suffit alors de répéter mot pour mot l'argument précédent.

L'argument précis est le suivant: On considère sur la surface à bord $\overline{C^+}$ la relation d'équivalence \sim donnée par l'appartenance à une même composante connexe de bord. Le quotient par cette relation $\overline{C^+}/\sim$ est une surface de genre p (où comme d'habitude $p = \frac{g+1-r}{2}$). On note Σ cette surface (cf. Figure 12).

L'application composée $\overline{C^+} \xrightarrow{\mu} J \rightarrow T^g = J/J(\mathbb{R})$ passe au quotient Σ , et donne une application $\varepsilon : \Sigma \rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$; qui postcomposée avec l'inclusion $\overline{\mathcal{Q}} \xrightarrow{i} T^g$ donne l'application

$$\nu : \Sigma \xrightarrow{\varepsilon} \overline{\mathcal{Q}} \xrightarrow{i} T^g .$$

On reconnaît alors en cette application ν d'un bretzel vers un tore un analogue parfait—du moins au niveau topologique—de l'application d'Abel $\mu : C \rightarrow J$. On peut alors recopier mot pour mot l'argument précédent (celui de la preuve du Lemme 9.1), qui se résume en disant qu'il existe une factorisation homotopique de ν au travers d'un bouquet B de p tores

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\nu} & T^g \\ p \searrow & B & \nearrow \varphi \end{array}$$

et cela conduit—dans le cas présent—à la formule $H_2(\nu)([\Sigma]) = \sum_{i=1}^p \widetilde{A}_i \star \widetilde{B}_i$. Or la classe fondamentale ω de $\overline{\mathcal{Q}}$ est $H_2(\varepsilon)([\Sigma])$, on obtient bien

$$\begin{aligned} H_2(i)(\omega) &= H_2(i)(H_2(\varepsilon)([\Sigma])) \\ &= H_2(i \circ \varepsilon)([\Sigma]) \\ &= H_2(\nu)([\Sigma]) = \sum_{i=1}^p \widetilde{A}_i \star \widetilde{B}_i. \quad \text{D'où le lemme.} \quad \square \end{aligned}$$

Cela étant il est maintenant facile de vérifier que l'homomorphisme $\psi_* := H_g(\psi)$ est non trivial. En effet, évaluons le sur l'élément $\beta_1^+ \otimes \dots \otimes \beta_{r-1}^+ \otimes \omega \otimes \dots \otimes \omega$ (p fois ω). On obtient compte tenu de la commutativité du diagramme (4):

$$\begin{aligned} \psi_*(\beta_1^+ \otimes \dots \otimes \beta_{r-1}^+ \otimes \omega \otimes \dots \otimes \omega) &= B_1^+ \star \dots \star B_{r-1}^+ \star \omega \star \dots \star \omega \\ &= B_1^+ \star \dots \star B_{r-1}^+ \star \left(\sum_{i=1}^p \widetilde{A}_i \star \widetilde{B}_i \right) \star \dots \star \left(\sum_{i=1}^p \widetilde{A}_i \star \widetilde{B}_i \right). \end{aligned}$$

Les seules termes de cette somme qui subsistent sont ceux qui fournissent un objet de dimension g non-dégénéré: ils s'obtiennent en prenant de chacune des p sommes des 2-tores $\tau_i = \widetilde{A}_i \star \widetilde{B}_i$ deux à deux distincts. L'expression ci-dessus se réduit donc—par bilinéarité du produit de Pontrjagin et tenant compte du fait que les τ_i , étant de dimension 2, commutent entre eux—à

$$B_1^+ \star \dots \star B_{r-1}^+ \star p!(\tau_1 \star \dots \star \tau_p) .$$

Or la classe fondamentale du but T^g est $[T^g] = B_1^+ \star \dots \star B_{r-1}^+ \star \tau_1 \star \dots \star \tau_p$. Ainsi l'élément envisagé a pour image $p![T^g] \neq 0$, ce qui confirme bien la non-nullité de ψ_* —et achève par là même la preuve de la Proposition 10.1. \square

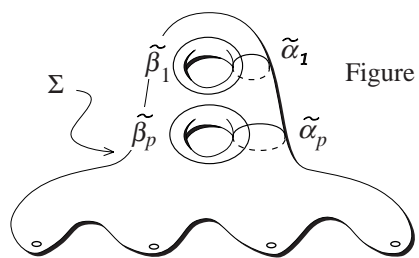
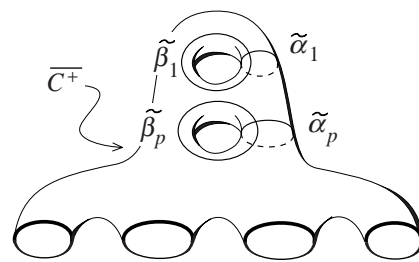


Figure 12

Références

- [A’C] N. A’Campo, Sur la première partie du seizième problème de Hilbert. *Sém. Bourbaki, exposé 537* (1979).
- [Ah] L. V. Ahlfors, Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. *Comment. Math. Helv.* 24 (1950), 100–134.
- [AG1] N. L. Alling, N. Greenleaf, Klein surfaces and real algebraic function fields. *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 869–872.
- [AG2] N. L. Alling, N. Greenleaf, *Foundations of the Theory of Klein surfaces*. Lecture Notes in Mathematics 219, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [An] A. Andreotti, On the Complex Structures of a Class of Simply-Connected Manifolds. In: *Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press, Princeton, 1957, 53–77.
- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, Volume I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 267, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Ar] V. I. Arnol’d, Distribution of ovals of the ovals of the real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integer-valued quadratic forms. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 5 (1971), 1–9; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 5 (1971), 169–176.
- [BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Be] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces* (Second Edition). Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Be2] A. Beauville, Surfaces K3. *Sém. Bourbaki, exposé 609* (1982/83).
- [BR] R. Benedetti, and J.-J. Risler. *Real Algebraic and Semi-Algebraic Sets*. Hermann, Paris, 1990.
- [Br] L. Brusotti, Sulla “piccola variazione” di una curva piana algebrica reale. *Rend. Rom. Acc. Lincei* (5) 30 (1921), 375–379.
- [Ca] E. Calabi, On Kähler Manifolds with Vanishing Canonical Class, In: *Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz*, Princeton University Press, Princeton, 1957, 78–89.
- [CP] C. Ciliberto, C. Pedrini, Real abelian varieties and real algebraic curves. In: *Lectures in Real Geometry*, F. Broglia (ed.) de Gruyter Exp. in Math. 23 (1996), 167–256.
- [Cl] C. H. Clemens, *A Scrapbook of Complex Curve Theory*. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [Co] A. Comessatti, Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale. *Math. Ann.* 73 (1912), 1–72.
- [DIK] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. M. Kharlamov. *Real Enriques Surfaces*. Lecture Notes in Mathematics 1746, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [DK] A. Degtyarev, V. M. Kharlamov, Topological properties of real algebraic varieties: du côté de chez Rokhlin. *Uspekhi Mat. Nauk* 55: 4 (2000), 129–212; traduction anglaise: *Russian Math. Surveys* 55: 4 (2000), 735–814.
- [Dold] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 200, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Don1] S. K. Donaldson, Yang-Mills Invariants of Four-manifolds. In: *Geometry of Low-Dimensional Manifolds: 1 Gauge theory and algebraic surfaces*, S. K. Donaldson and C. B. Thomas (eds.), Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 150, Cambridge University Press (1990), 5–40.
- [Don2] S. K. Donaldson, Gauge Theory and Four-manifold Topology. In: *First European Congress of Mathematics (Paris, July 6–10, 1992)*, PM 119, Birkhäuser, 1992, 121–151.

- [DoKr] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [EC] F. Enriques, O. Chisini. *Lezioni sulla Teoria Geometrica delle Equazioni e delle Funzioni Algebriche*. Zanichelli, Bologna, 1915–1918.
- [EDM] *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. English Translation, (Second Edition), The MIT Press, 1986.
- [Fi] T. Fiedler, Eine Beschränkung für die Lage von reellen ebenen algebraischen Kurven. *Beiträge Algebra Geom.* 11 (1981), 7–19.
- [Fin1] S. M. Finashin, Rokhlin conjecture and quotients of complex surfaces by complex conjugation. *J. reine angew. Math.* 481 (1996), 55–71.
- [Fin2] S. M. Finashin, Complex Conjugation Equivariant Topology of Complex Surfaces. *Tr. J. of Mathematics.* 21 (1997), 119–127.
- [Fr] M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds. *J. Diff. Geom.* 17 (1982), 357–453.
- [FM1] R. Friedman, J. W. Morgan, Algebraic surfaces and 4-manifolds: some conjectures and speculations. *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)* 18 (1988), 1–19.
- [FM2] R. Friedman, J. W. Morgan. *Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 27, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Gab] A. Gabard, Topologie des courbes algébriques réelles: une question de Felix Klein. *L'Enseign. Math.* 46 (2000), 139–161.
- [GM] W.-D. Geyer, G. Martens, Überlagerungen berandeter Kleinscher Flächen. *Math. Ann.* 228 (1977), 101–111.
- [GoMr] R. E. Gompf, T. S. Mrowka, Irreducible four manifolds need not be complex. *Ann. Math.* 138 (1993), 61–111.
- [GH] P. A. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley, New York, 1978.
- [GrHa] B. H. Gross, and J. Harris. Real algebraic curves. *Ann. sci. École Norm. Sup. (4)* 14 (1981), 157–182.
- [Gu] D. A. Gudkov, The topology of real projective algebraic varieties. *Uspekhi Mat. Nauk* 29: 4 (1974), 3–79; traduction anglaise: *Russian Math. Surveys* 29: 4 (1974), 1–79.
- [Hab] N. Habegger, Une variété de dimension 4 avec forme d'intersection paire et signature 8. *Comm. Math. Helv.* 57 (1982), 22–24.
- [Ha] A. Harnack, Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. *Math. Ann.* 10 (1876), 189–198.
- [Hil] D. Hilbert, Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung. *Nachr. der Gesell. der Wiss. zu Göttingen* 1909, 308–313; réimpression: *Gesammelte mathematische Abhandlungen (Zweite Auflage)*, (Band II), Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Hir1] F. Hirzebruch, Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 124 (1951), 77–86.
- [Hir2] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry* (Third Edition). Springer, Berlin, 1978.
- [Hir3] F. Hirzebruch, The signature of ramified coverings. In: *Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira* (1969), 253–265.
- [Hit] N. J. Hitchin, Compact four-dimensional Einstein manifolds. *J. Diff. Geom.* 9 (1974), 435–441.
- [Ho] H. Hopf, Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. In: *Studies and Essays presented to R. Courant*. Interscience Publishers Inc. (1948), 167–185.

- [Hui1] J. Huisman. Real Teichmüller spaces and moduli of real algebraic curves. In: *Real Algebraic Geometry and Ordered Structures*, C.N. Delzell, J.J. Madden (Eds.), Contemp. Math. 253, (2000), 145–177.
- [Hui2] J. Huisman. On the geometry of algebraic curves having many real components. *Rev. Mat. Complut.* vol. XIV, num. 1 (2001), 83–92.
- [Jac] N. Jacobson, *Basic Algebra*, (Second Edition), W. H. Freeman and Company, 1989.
- [Kh1] V. M. Kharlamov, The generalized Petrovskii inequality. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 8 (1974), 50–56; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 8 (1974), 132–137.
- [Kh2] V. M. Kharlamov, The topological type of non-singular surfaces in $\mathbb{R}P^3$ of degree four. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 10 (1976), 55–68; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 10 (1976), 295–305.
- [Kirb] R. C. Kirby, *The Topology of 4-Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics 1374, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [K] F. Klein, Über eine neue Art von Riemannschen Flächen (Zweite Mitteilung), *Math. Ann.* 10 (1876).
- [K0] F. Klein, Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades (Erster Aufsatz), *Math. Ann.* 10 (1876).
- [K1] F. Klein, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. B.G. Teubner, Leipzig, 1882.
- [K2] F. Klein, Über Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der φ . *Math. Ann.* 42 (1892), 1–29.
- [K3] F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. (Zweiter Band) 1922, Reprint Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*. Wiley, New York, 1963.
- [KM] K. Kodaira, J. Morrow, *Complex Manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.
- [Ku] N. H. Kuiper, The Quotient Space of $CP(2)$ by Complex Conjugation is the 4-sphere. *Math. Ann.* 208 (1974), 75–78.
- [LB] H. Lange, Ch. Birkenhake, *Complex Abelian Varieties*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 302, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [Lef] S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1924.
- [Let] M. Letizia, Quotients by complex conjugation of non-singular quadrics and cubics in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ defined over \mathbb{R} . *Pacif. Journ. of Math* 110, no. 2 (1984), 307–314.
- [Man] R. Mandelbaum, Four-dimensional Topology: An Introduction. *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)* 2 (1980), 1–159.
- [MM] R. Mandelbaum, B. Moishezon, On the topological structure of non-singular algebraic surfaces in CP^3 . *Topology* 15 (1976), 23–40.
- [Mar1] A. Marin, Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles. In: *Séminaire sur la géométrie algébrique réelle*. Publ. Math. Univ. Paris VII, 1979, 51–68.
- [Mar2] A. Marin, CP^2/σ ou Kuiper et Massey au pays des coniques. In: *A la Recherche de la Topologie Perdue*. Birkhäuser, 1986, 141–152.
- [Mas1] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Mas2] W. S. Massey, The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4-sphere. *Geom. Dedicata* 2 (1973), 371–373.
- [Mat] Y. Matsumoto, An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin. In: *A la Recherche de la Topologie Perdue*. Birkhäuser, 1986, 141–152.

- [MS] J. W. Milnor, J. D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of Math. Studies 76, Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [Mi] N. M. Mishachev, Complex orientations of plane M -curves of odd degree. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 9 (1975), 77–78; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 9 (1975), 342–343.
- [Ni1] V. V. Nikulin, Integral symmetric bilinear forms and some of their applications. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 43 (1979), 111–177; traduction anglaise: *Math. USSR Izv.* 14 (1980), 103–167.
- [Ni2] V. V. Nikulin, Involutions of integral quadratic forms and their applications to real algebraic geometry. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 47 (1983), 109–188; traduction anglaise: *Math. USSR Izv.* 22 (1984), 99–172.
- [Pet] I. Petrowski, On the topology of real plane algebraic curves. *Ann. of Math.* 2 (1938), 189–209.
- [Pon] L. S. Pontrjagin, Homologies in Compact Lie Groups. *Mat. Sbornik, Novaya Seriya* 6 (3) (1939), 389–422.
- [Rie] B. Riemann, Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen. Conforme Abbildung von durch Kreise begrenzten Figuren (Nachlass XXVI). In: *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, Nach der Ausgabe von H. Weber und R. Dedekind neu herausgegeben von R. Narasimhan, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 472–476.
- [Ris] J.-J. Risler, Types topologique des surfaces algébriques réelles de degré 4 dans $\mathbb{R}P^3$. In: *Séminaire sur la Géométrie des surfaces K3: Modules et Périodes*, Astérisque 126, Paris, 1985, 153–168.
- [R1] V. A. Rohlin, New results in the theory of 4-dimensional manifolds. *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R* 84 (1952), 221–224; traduction française: *A la Recherche de la Topologie Perdue*. Birkhäuser, 1986, 17–23.
- [R2] V. A. Rohlin, Proof of Gudkov’s hypothesis. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 6 (1972), 62–64; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 6 (1972), 136–138.
- [R3] V. A. Rohlin, Congruences modulo sixteen in Hilbert’s sixteenth problem. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 6 (1972), 58–64; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 6 (1972), 301–306.
- [R4] V. A. Rohlin, Complex orientations of real algebraic curves. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 8 (1974), 71–75; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 8 (1974), 331–334.
- [R5] V. A. Rohlin, Complex topological characteristics of real algebraic curves. *Uspekhi Mat. Nauk* 33:5 (1978), 77–89; traduction anglaise: *Russian Math. Surveys* 33:5 (1978), 85–98.
- [R6] V. A. Rohlin, New inequalities in the topology of real planar algebraic curves. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 14 (1980), 37–43; traduction anglaise: *Funct. Anal. Appl.* 14 (1980), 29–33.
- [Sch] F. Schottky, Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. *Crelle, Journal für die Math.* 83 (1877), 300–351.
- [Se] C. Segre, Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. *Math. Ann.* 40 (1892), 413–467.
- [Si] R. Silhol. *Real Algebraic Surfaces*. Lecture Notes in Mathematics 1392, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [Siu] Y. T. Siu, Every K3 surface is Kähler. *Invent. Math.* 73 (1983), 139–150.
- [St] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [Tyu] A. N. Tyurin, Six Lectures on Four manifolds. In: *Transcendental Methods in Algebraic Geometry (Cetraro, 1994)*, Eds. F. Catanese, C. Ciliberto, Lecture Notes in Mathematics 1646, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Va] G. Vaccaro, Le superficie razionali prive di curve eccezionali di 1^a specie. *Rend. Lincei, s. 8^a* (4) (1948).

- [Vi1] O. Ya. Viro, Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years. *Uspekhi Mat. Nauk* 41: 3 (1986), 45–67; traduction anglaise: *Russian Math. Surveys* 41: 3 (1986), 55–82.
- [Vi2] O. Ya. Viro, Complex Orientations of Real Algebraic Surfaces. In: *Topology of Manifolds and Varieties.*, Oleg Viro Editor, Advances in Soviet Mathematics, Volume 18, AMS, 1994.
- [vdW] B. L. van der Waerden. *Einführung in die algebraische Geometrie.* Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [Wa] S. Wang, On quotients of real algebraic surfaces in $\mathbb{C}P^3$. *Topology and its Application* 67 (1995), 53–61.
- [W] G. Weichold, Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung (Leipziger Dissertation). *Z. Math. Phys.* 28 (1883), 321–351.
- [We] H. Weyl. *Die Idee der Riemannschen Fläche.* B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.
- [Wil] G. Wilson, Hilbert's Sixteenth Problem. *Topology* 17 (1978), 53–73.
- [Wi] E. Witt, Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper, *J. reine angew. Math.* 171 (1934), 4–11.
- [Yau] S.-T. Yau, On the Ricci Curvature of a Compact Kähler Manifold and the Complex Monge-Ampère Equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 31 (1978), 339–411.