Points isolés, limites et dimensions métriques dans l'espace des groupes

Guyot, Luc

Université de Genève
Section de Mathématiques

Faculté des sciences
Professeure G. ARJANTSEVA

Points isolés, limites et dimensions métriques dans l'espace des groupes

Thèse

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour l'obtention du grade Docteur ès sciences, mention mathématiques

par

Luc GUYOT
de
France

Thèse N°3917

GENÈVE
Atelier de reproduction de la Section de physique
2007

A Timothée.

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier Goulnara Arjantseva pour m'avoir offert l'opportunité d'écrire cette thèse.

J'exprime à Pierre de la Harpe ma reconnaissance pour son important travail d'écoute et de lecture critiques. Son aide m'a été précieuse tout au long de cette thèse.

Je suis plein de gratitude à l'égard de Martin Bridson et d'Étienne Ghys qui m'ont honoré en acceptant de faire partie de mon jury. J'ai en outre beaucoup apprécié les entretiens qu'ils m'ont accordé lorsque je les ai rencontrés pour la première fois à Genève et à Lyon.

Les collaborations ont agit sur ma motivation et l'avancée de mon travail d'une manière déterminante. Aussi, je rends un hommage appuyé à mes collaborateurs Yves de Cornulier, Wolfgang Pitsch et Yves Stalder avec qui je continue d'éprouver un vif plaisir dans la recherche.

Que mes collègues et amis de la Section de Mathématiques sachent à quel point je leur suis gré des discussions stimulantes, de leur soutien constant et de leur présence chaleureuse. J'adresse en particulier mes remerciements à Florent Balacheff, Nicolas Bartholdi, Jérémy Blanc, Philippe Bonnet, David Cohen, Benoit Dehrin, Bertrand Deroin, Pierre-Alain Chérix, François Gautero, Alexandre Gabard, Victor Guba, Ghislain Jaudon, Iaych Kacem, Victor Kleptsyn, Fabrice Krieger, Frédéric Mouton, Ashot Mynasyan, Claude Pache, Hugo Parlier, Stéphane Pin, et Eugénio Rodriguez.

J'ai plaisir à louer ici la compétence extrême et le dynamisme des bibliothécaires passionés de la Section de Mathématiques, Bernard Dudez et Anne-Sophie Crippa.

Je n'oublie pas que Genève m'a offert un grand nombre de contacts scientifiques dont j'apprécie la qualité et la générosité. Je remercie les personnes qui m'ont donné de leur temps, de leur enthousiasme et de leur sagacité. Je remercie tout autant les personnes rencontrées à Marseille dont la bienveillance et les conseils ont accompagné mon parcours. Je suis en particulier redevable d'échanges opportuns à Roland Bacher, Laurent Bartholdi, Christophe Champetier, Xavier Chillier, Bruno Colbois, Thierry Coulbois, Thomas Delzant, Alexander Dranishnikov, Gérard Fardoux, Damien Gaboriau, Martin Gander, Hervé Gaussier, Vincent Guirardel, Peter Haïssinsky, Van Hongler, Norbert Hungerbuehler, Delaram Kahrobaei, Jérome Los, Martin Lustig, Michel Matthey, Nicolas Monod, Alexander Ol'shanskii, Athanase Papadopoulos, Luis Paris, Hamish Short, Tatiana Smirnova, Alain Valette et Thierry Vust.

Autant aimant qu'aimable, et pour cela inestimable, mon entourage proche m'a permis de garder confiance. Au delà de la gratitude, je ressens une affection immense pour mes parents Alain et Elisabeth, mes frères Rémi et Simon. Une tendresse toute particulière pour l'irrésistible Afsaneh. De l'émerveillement devant Timothée, mon neveu qui est né peu de temps avant que je soutienne cette thèse.

Introduction

Résumé L'espace $\mathcal{M}_m$ des groupes marqués à m générateurs est un espace métrique compact et totalement discontinu dont les points représentent les groupes à m générateurs. Dans le chapitre 2 nous étudions les points isolés de cet espace. Dans le chapitre 3 nous décrivons certaines limites des groupes de Baumslag-Solitar $BS(m,n) := \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$ dans l'espace $\mathcal{M}_2$ des groupes marqués à deux générateurs. Dans le chapitre 4 nous caractérisons les limites de groupes diédraux et décrivons l'espace de ces limites. Dans le chapitre 5 nous estimons les dimensions de Minkowski de certains sous-espaces de $\mathcal{M}_m$ et nous montrons que la dimension de Minkowski inférieure de $\mathcal{M}_m$ est infinie si $m \geq 2$.

Dans la théorie combinatoire et géométrique des groupes, différentes notions d'approximation coexistent. L'une d'elle se définit en termes d'homomorphismes. Le groupe H est un quotient *"proche"* de G s'il existe une *"grande"* partie finie F de G et un homomorphisme surjectif $p : G \twoheadrightarrow H$ dont la restriction à F est injective. Soit P une propriété de groupe invariante par isomorphisme et stable par passage aux sous-groupes. Un groupe G est *pleinement résiduellement* P si pour toute partie finie F de G il existe un groupe H ayant P et un homomorphisme surjectif $p : G \twoheadrightarrow H$ dont la restriction à F est injective. Un groupe G pleinement résiduellement P est donc un groupe qui peut être approché, en notre sens, par des groupes ayant P. Il existe une topologie métrisable et compacte sur l'ensemble des groupes de type fini marqués par un système ordonné de m générateurs pour laquelle les groupes pleinement résiduellement P sont limites de groupes ayant P. Par exemple, un groupe résiduellement fini (respectivement résoluble, nilpotent) est une limite de groupes finis (respectivement résolubles, nilpotents) dans l'espace des groupes marqués. Nous observerons en particulier que le groupe $\mathbb{Z}$ peut s'obtenir comme la limite de la suite $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})_d$ pour des systèmes de générateurs adéquats.

Outre le fait qu'un tel espace est un cadre naturel pour une étude globale des groupes de type fini et la généricité des propriétés de groupes en particulier, sa topologie a plusieurs avantages. La relation d'isomorphisme est ouverte pour cette topologie et cette dernière reflète certaines propriétés de groupes. La propriété d'être parfait (G est parfait si tous ses quotients abéliens sont triviaux), de posséder un centre trivial ou d'être ordonnable à gauche (G est ordonnable à gauche s'il possède un ordre total invariant invariant par multiplication à gauche) sont par exemple des propriétés fermées : l'ensemble des groupes marqués possédant l'une de ces propriétés est un fermé de l'espace. Une variété de groupes (la variété des groupes abéliens, des groupes nilpotents de classe c ou encore des groupes résolubles de classe c en sont des exemples) y définit un sous-espace fermé. Si le groupe libre de rang m de la variété est de présentation finie (c'est le cas du groupe nilpotent libre de classe c et de rang m) alors la variété définit aussi un ouvert. Par ailleurs, les propriétés de groupes définies par des formules de la théorie universelle des groupes sont fermées. Le fait que la commutativité soit transitive dans un groupe est exprimée dans la phrase universelle suivante : $\forall x \forall y \forall z\, (xy = yx \wedge y \neq 1 \wedge yz = zy) \Rightarrow xz = zx$. La propriété correspondante donne alors une autre illustration de propriété fermée. Ajoutons à cela que certaines *limites directes* (Ex. 1.12) sont des limites dans l'espace des groupes marqués. Notons finalement que la compacité de l'espace permet de prouver l'existence de groupes satisfaisant certaines propriétés de maximalité ou de construire des groupes obtenus par des procédure itératives infinies de quotients.

Techniquement, l'ensemble considéré n'est pas celui des groupes G marqués par un système ordonné $S = (g_1, \ldots, g_m)$ de générateurs mais celui des classes d'équivalence de telles paires (G, S) pour la relation suivante : les groupes marqués $(G, (g_1, \ldots, g_m))$ et $(G', (g'_1, \ldots, g'_m))$ sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme $\phi : G \longrightarrow G'$ vérifiant $\phi(g_i) = g'_i$ pour $i = 1, \ldots, m$. Ces classes d'équivalences seront aussi appelées abusivement groupes marqués (Nota Bene 1.5). Deux paires (G, S) et (G', S') sont N-isomorphes s'il existe un isomorphisme de graphe préservant l'orientation et le coloriage d'une boule de rayon N dans le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$ vers une boule de même rayon dans le graphe de Cayley $\Gamma(G', S')$. Pour tout N, la relation de N-isomorphisme induit une relation d'équivalence sur les (classes d'équivalence de) groupes marqués à m générateurs. La topologie que nous considérons est celle dont une base d'ouverts est donnée par les classes d'équivalences des relations de N-isomorphismes.

Cette définition de nature géométrique est celle de [Gro81, Gri84] et porte le nom de *topologie faible* ou *topologie de Cayley.* Au chapitre 1, nous lui préférerons pour sa concision celle basée sur *la topologie de Chabauty* de l'ensemble $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ des sous-groupes distingués d'un groupe libre $\mathbb{F}_m$ de base $(e_1, \ldots, e_m)$. La propriété universelle de $\mathbb{F}_m$ met naturellement en bijection groupes marqués à m générateurs et sous-groupes distingués de $\mathbb{F}_m$. A un groupe marqué $(G, (g_1, \ldots, g_m))$, nous associons le noyau de l'épimorphisme $p_S : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G$ défini par $p_S(e_i) = g_i$ pour $i = 1, \ldots, m$. Nous appelons *topologie de Chabauty* , la topologie induite par le produit d'espaces discrets $\{0, 1\}^{\mathbb{F}_m}$ sur $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$. L'espace des groupes marqués à n générateurs est alors muni d'une topologie au moyen de la bijection $(G, S) \mapsto \ker p_S$. Le lecteur se convaincra sans peine que topologie de Cayley et topologie de Chabauty coïncident.

Historique Chabauty parait être le premier à considérer une topologie sur l'ensemble des sous-groupes d'un groupe donné. Il définit dans [Cha50] une notion de convergence pour les sous-groupes discrets d'un groupe localement compact et l'utilise pour généraliser le critère de Mahler assurant qu'un ensemble adéquat de réseaux de $\mathbb{R}^m$ est relativement compact.

A la fin de son célèbre article [Gro81, Final Remarks], Gromov utilise le premier une notion de convergence pour des suites de groupes de type fini dans un résultat de croissance. Grigorchuk donne à l'espace des groupes marqués sa forme actuelle dans [Gri84] où il construit un continuum de groupes de croissance intermédiaire. La topologie qu'il définit à l'aide de la notion de N-isomorphisme de Stepin prend cette fois en compte l'ordre des générateurs. Il avance trois faits élémentaires et significatifs : son espace est compact, totalement discontinu et possède des points isolés dont les groupes finis et les groupes simples de présentation finie. L'espace des groupes est alors mis à l'oeuvre pour prouver qu'une famille de groupes de croissance intermédiaire n'est pas de présentation finie. Dans le même cadre et en usant de la même famille, Stepin [Ste96] montre l'existence de groupes moyennables non élémentaires sans recourir à des estimations de croissance. Permettre de montrer l'existence de groupes aux propriétés exotiques en raisonnant sur les catégories de Baire est une vocation de l'espace des groupes de type fini. C'est aussi un cadre naturel pour statuer sur la généricité d'une propriété de groupes. Champetier montre par exemple que l'adhérence des groupes hyperboliques dans l'espace des groupes à m générateurs contient un G_δ dense de groupes infinis de torsion [Cha00]. Relevons un autre résultat où la topologie de Chabauty est au service d'un théorème d'existence :

Shalom démontre que tout groupe de type fini ayant la propriété (T) de Kazhdan possède une extension de présentation finie qui a aussi (T) ; il prouve à cette fin que la propriété (T) définit un ouvert dans l'espace des groupes de type fini [Sha00].

Observons enfin que la nouvelle approche des groupes limites de Sela [Sel01] par Champetier et Guirardel [CG05] repose sur l'espace des groupes. Les auteurs caractérisent les groupes limites comme les limites de groupes libres et donnent des preuves simplifiées et élégantes de résultats de Remeslennikov [Rem89] et de Sela [Sel01].

Le sujet a fait l'objet de résultats récents [dCGP07, Pic06, Nek07, Sta06a, Zar07]. Dans [Gro93, Ghy04, Gri05] sont collectés la plupart des résultats et des problèmes concernant l'espace des groupes.

Plan détaillé Les résultats principaux sont exposés dans les chapitres 2 à 5 sous la forme d'une introduction aux textes publiés ou soumis à publication des annexes A à D.

Le **chapitre 1** présente les notions indispensables à la compréhension du sujet : l'espace $\mathcal{M}_m$ des groupes marqués à m générateurs et l'espace $\mathcal{M}$ des groupes de type fini qui s'obtient comme limite inductive des espaces $\mathcal{M}_m$.

Le **chapitre 2** est consacré à l'étude des groupes isolés de $\mathcal{M}$. Nous caractérisons algébriquement cette classe de groupes (Prop. 2.2, caractérisation obtenue indépendamment par Grigorchuk [Gri05]) et démontrons certains résultats de stabilité dont celle par extension (Th. 2.6). De nombreux exemples et constructions (entre autres le groupe de Thompson F et un groupe de présentation finie de Grigorchuk) sont exposés. Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec Yves de Cornulier et Wolfgang Pitsch.

Le **chapitre 3** a pour objet la description des limites dans $\mathcal{M}_2$ de groupes de Baumslag-Solitar $BS(m,n) := \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$ marqués par la paire standard (a, b). Des conditions de convergence ont été dégagées dans [Sta06a]. En particulier, lorsque les paramètres m et n tendent tous deux vers l'infini en valeur absolue, la limite alors obtenue est $\mathbb{F}_2$. Nous fixons un entier $|m| \geq 2$ et donnons une condition nécessaire et suffisante de convergence pour une suite $(BS(m, k_n))_n$ (Th. 3.1.1). Nous paramétrisons l'ensemble des limites $\overline{BS}(m, \xi)$ obtenues à m fixé par l'ensemble des entiers m-adiques ξ. Nous montrons que cette paramétrisation est continue et qu'elle plonge l'ensemble des m-adiques inversibles dans $\mathcal{M}_2$ (Th. 3.1.2). Sur les groupes limites eux-mêmes, nous savons dire :

- qu'ils agissent fidèlement sur un arbre (un "produit d'arbres de Bass-Serre") et possèdent une structure d'extension HNN dont la base est un groupe abélien libre de rang infini (Th. 3.1.5) ;
- qu'ils sont l'extension d'un groupe libre par $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$; par conséquent ils sont résiduellement résolubles et possèdent la propriété de Haagerup (Th. 3.1.3) ;
- qu'ils possèdent une présentation de groupe minimale infinie (Th. 3.1.8).

Nous discutons de la solution du problème du mot et du problème de conjugaison dans les groupes limites $\overline{BS}(m, \xi)$ en fonction de la récursivité du paramètre ξ (Th. 3.1.6). Tous ces résultats sont le produit d'une collaboration avec Yves Stalder. Un premier travail est soumis à publication [GS] et notre collaboration continue avec comme but de décrire l'adhérence des groupes de Baumslag-Solitar dans $\mathcal{M}_2$.

Le **chapitre 4** est motivé par le problème posé dans [dlH00, CG05] de décrire l'adhérence des groupes finis dans l'espace des groupes de type fini. Remarquons que Stepin [Ste96] a caractérisé les groupes possédant la propriété d'approximation libre comme étant les limites de groupes finis. Nous caractérisons par leurs classes d'isomorphisme et par leur théorie universelle (Th. 4.1) les limites des groupes finis les plus élémentaires : les groupes cycliques et diédraux finis. Nous utilisons à cette fin les liens entre logique et convergence mis en évidence dans [CG05]. Nous décrivons aussi l'adhérence dans $\mathcal{M}_m$ des groupes diédraux (Th. 4.2) grâce à des invariants de Cantor-Bendixson.

Dans le **chapitre 5** nous estimons les dimensions de Minkowski de certains sous-espaces de l'espace des groupes $\mathcal{M}_m$ (Th. 5.1.2, 5.1.4, 5.1.5, 5.1.6) pour le choix d'une ultra-métrique définie dans [Gri84, Cha00]. Nous obtenons en particulier que la dimension de Minkowski inférieure de l'espace $\mathcal{M}_m$ est infinie pour tout $m \geq 2$ (Cor. 5.1.3). Les preuves des théorèmes 5.1.2, 5.1.4 et du corollaire 5.1.3 reposent sur des théorèmes classiques de la petite simplification [LS77, Ch.V].

Chapitre 1

Groupes marqués et topologie de Chabauty

Nous munissons l'ensemble des groupes marqués par un système ordonné de m générateurs d'une topologie métrisable et compacte appelée topologie de Chabauty. Cette topologie est définie (suivant [Cha00, CG05]) via l'identification naturelle des groupes marqués à m générateurs avec les sous-groupes distingués d'un groupe libre $\mathbb{F}_m$ de rang m, l'ensemble de ces sous-groupes étant muni de la topologie induite par le produit $\{0,1\}^{\mathbb{F}_m}$. Dans [Cha00, CG05, Gri05], le lecteur pourra trouver des exposés plus détaillés sur cette topologie. Tous les éléments de théorie combinatoire et géométrique des groupes utilisés dans ce chapitre sont abordés dans [MKS04, LS77, Rob96, Rot95].

Nous fixons un ensemble infini de symboles $\{e_1, e_2, \ldots\}$; nous désignons par $\mathbb{F}_m$ le groupe libre de base $(e_1, \ldots, e_m)$ et par $\mathbb{F}_\infty$ le groupe libre de base $(e_i)_i$. Nous identifions $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ via $e_1 \mapsto 1$.

Notation 1.1. *Soit G un groupe et soit X une partie de G. Nous désignons par $\langle X \rangle$ le sous-groupe de G engendré par X et par $\ll X \gg$ le sous-groupe distingué de G engendré par X, c'est-à-dire le plus petit sous-groupe distingué de G contenant X. Ce dernier est aussi appelé clôture distinguée de X dans G.*

Définition 1.2. *Un groupe marqué (G, S) à m générateurs est la donnée d'un groupe G et d'un système ordonné $S = (g_1, \ldots, g_m)$ de ses générateurs. Un tel m-uplet S est aussi appelé marquage de G à m éléments.*

Exemples 1.3.

(*i*) *Un épimorphisme $p : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G$ définit naturellement un groupe marqué (G, S) avec $S = (p(e_1), \ldots, p(e_m))$.*

(*ii*) *Une présentation de groupe $\langle e_1, \ldots, e_m \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots \rangle$ (voir* [LS77] *pour une définition) définit naturellement un groupe marqué*

$$(\mathbb{F}_m / \ll r_1, r_2, \ldots, \gg, (e_1, \ldots, e_m)) .$$

Notation 1.4. *Soit (G, S) avec $S = (g_1, \ldots, g_m)$ un groupe marqué à m générateurs et soit w, w' dans $\mathbb{F}_m$. Par la propriété universelle de $\mathbb{F}_m$, il existe* *un unique épimorphisme* $p_S : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G$ *tel que* $p_S(e_i) = g_i$ *pour* $i = 1, \ldots, m$. *Nous écrivons* $w \underset{G}{=} w'$ *pour désigner l'égalité* $p_S(w) = p_S(w')$ *dans* G.

Nous désignons par $r(G)$ le *rang* de G, c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de G. Deux groupes marqués (G, S) et (G', S'), avec $S = (g_1, \ldots, g_m)$ et $S' = (g'_1, \ldots, g'_m)$, sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme $\phi : G \longrightarrow G'$ tel que $\phi(g_i) = g'_i$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Nota Bene 1.5 (abus de notation). *Nous désignons aussi par* (G, S) *la classe d'équivalence de* (G, S) *et nous appelons désormais cette classe un groupe marqué.*

Exemples 1.6.
(*i*) *Les groupes marqués* $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, [1]_3)$ *et* $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, [2]_3)$ *sont égaux alors que les groupes marqués* $(\mathbb{Z}, (1, 0))$ *et* $(\mathbb{Z}, (0, 1))$ *sont distincts.*
(*ii*) *Soit* $m \geq 1$. *Il existe un unique groupe marqué trivial à* m *générateurs. Plus généralement, il existe un unique groupe marqué libre de rang* m *à* m *générateurs. C'est une conséquence immédiate du fait qu'une bijection d'une base* X_1 *d'un groupe libre* F_1 *vers une base* X_2 *d'un groupe libre* F_2 *induit un isomorphisme de* F_1 *vers* F_2 [LS77, Prop. 1.1, Ch.I].

Soit G et G' deux groupes à m générateurs et soit $p : \mathbb{F}_n \twoheadrightarrow G$ et $p' : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G'$ deux épimorphismes. Les épimorphismes p et p' sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme ϕ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_m \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "p'"'] & G \arrow[d, "\phi"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

Exemples 1.7.
(*i*) *Soit* $p, p', p'' : \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ *les épimorphismes définis par* $p(e_1) = 1$, $p(e_2) = 0$, $p'(e_1) = -1$, $p'(e_2) = 0$ *et* $p''(e_1) = 0$, $p''(e_2) = 1$. *Les épimorphismes* p *et* p' *sont équivalents alors que* p *et* p'' *ne le sont pas.*
(*ii*) *Soit* $BS(2, 3) := \left\langle e_1, e_2 \;\middle|\; e_1^{-1} e_2^2 e_1 = e_2^3 \right\rangle$. *Les épimorphismes* $p : \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow BS(2, 3)$ *et* $p' : \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow BS(2, 3)$ *définis par* $p(e_1) = e_1, p(e_2) = e_2$ *et* $p'(e_1) = e_1, p'(e_2) = e_2^2$ *ne sont pas équivalents* [BS62].

A l'aide de la propriété universelle du groupe libre $\mathbb{F}_m$, nous établissons une bijection naturelle entre les groupes marqués à m générateurs et les classes d'équivalence d'épimorphismes dont la source est $\mathbb{F}_m$. Le dernier ensemble est clairement en correspondence bijective avec l'ensemble $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ des sous-groupes distingués de $\mathbb{F}_m$. Nous munissons $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ de la topologie induite par la topologie (de Tychonoff) du produit d'espaces discrets $\{0, 1\}^{\mathbb{F}_m}$ que nous identifions avec l'ensemble des parties de $\mathbb{F}_m$. L'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{F}_m}$ est métrisable, compact, totalement discontinu et sans point isolé. Ces trois propriétés caractérisent un espace homéomorphe à l'espace triadique de Cantor [Kel75]. Nous vérifions aisément que $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ est un sous-espace fermé de $\{0, 1\}^{\mathbb{F}_m}$(lemme 1.8 ci-dessous). Nous définissons ainsi une topologie compacte, métrisable et totalement discontinue sur l'ensemble correspondant $\mathcal{M}_m$ des groupes marqués à m générateurs. Cette topologie que nous appelons topologie de Chabauty porte différents noms : topologie faible, topologie de Cayley [Gri84, Ste96]. Nous avons par exemple la convergence $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, [1]_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbb{Z}, 1)$ dans $\mathcal{M}_1$. Le noyau de la surjection $p_n : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par $p_n(1) = [1]_n$ est $n\mathbb{Z}$ et la suite $(n\mathbb{Z})_n$ tend en effet vers $\{0\}$ dans $\mathcal{N}(\mathbb{Z})$.

Donnons maintenant quelques critères de convergence permettant de décrire des exemples plus élaborés.

Soit A un ensemble et soit $(A_i)_i$ une suite de sous-ensembles de A. Nous écrivons $\liminf A_i = \bigcup_i \bigcap_{j\geq i} A_j$ et $\limsup A_i = \bigcap_i \bigcup_{j\geq i} A_j$. Les limites dans $\{0,1\}^{\mathbb{F}_m}$ ont la description très simple suivante :

Lemme 1.8. *La suite $(A_i)_i$ converge vers A dans $\{0,1\}^{\mathbb{F}_m}$ si, et seulement si, $A = \liminf A_i = \limsup A_i$.*

La preuve de ce résultat élémentaire est laissée au lecteur. Voici quatre applications.

Exemple 1.9. *Soit (G, S) un groupe marqué défini par une présentation infinie $\langle e_1, \ldots, e_m \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots \rangle$. La suite de groupes marqués définie par les présentations $\langle e_1, \ldots, e_m \mid r_1 = 1, \ldots, r_n = 1\rangle$ $(n \geq 1)$ converge vers (G, S) car la suite croissante de sous-groupes dinstingués $(\ll r_1, \ldots, r_n \gg)_n$ converge vers $\ll r_1, r_2, \cdots \gg$ dans $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$. Lorsque G ne possède pas de présentation finie, le groupe marqué (G, S) est donc un point d'accumulation de $\mathcal{M}_m$ pour tout marquage S de G.*

Exemple 1.10. *Soit $(N_n)_n$ une suite strictement décroissante pour l'inclusion de sous-groupes caractéristiques de $\mathbb{F}_m$. Par le théorème de Levi* [LS77, Prop.3.3, Ch.I]*, nous avons $\bigcap_n N_n = \{1\}$. En considérant la suite dérivée (respectivement centrale descendante) nous observons donc (lemme 1.8) que le groupe $\mathbb{F}_m$ est la limite dans $\mathcal{M}_m$ de groupes résolubles (respectivement nilpotents) libres de rang m. Ce raisonnement s'adapte facilement pour montrer que $\mathbb{F}_m$ est encore la limite de groupes de Burnside de rang m.*

La *longueur* $|w|$ d'un élément w de $\mathbb{F}_m$ relativement à la base $(e_1, \ldots, e_m)$ est le nombre de symbole $e_i^{\pm 1}$ apparaissant dans l'écriture réduite de w.

Exemple 1.11. [CG05] *Soit $m \geq 3$. Pour tout n suffisamment grand, choisissons des mots $w_{3,n}, \ldots, w_{m,n}$ de longueur n dans $\mathbb{F}_2$ et satisfaisant la condition de petite simplification $C'(1/6)$. Par un théorème classique de petite simplification* [LS77, Ch.V, Th. 4.4]*, tout mot non trivial de la clôture distinguée N_n de l'ensemble $\{w_{i,n}e_i^{-1}\}_{3\leq i\leq m}$ a une longueur strictement plus grande que $\frac{n}{2}$. La suite $(G_n, S_n) = (\mathbb{F}_2, (e_1, e_2, w_{3,n}, \ldots, w_{m,n}))_n$ converge alors dans $\mathcal{M}_m$ vers $(\mathbb{F}_m, (e_1, \ldots, e_m))$. En effet, N_n est le noyau de l'épimorphisme $p_{S_n} : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G_n$ et clairement* $\limsup_n N_n = \{1\}$.

Exemple 1.12. *La limite directe d'un système*

$$\mathbb{F}_m \xrightarrow{p_0} G_1 \xrightarrow{p_1} \cdots \xrightarrow{p_{n-1}} G_n \xrightarrow{p_n} G_{n+1} \xrightarrow{p_{n+1}} \cdots$$

est la limite dans $\mathcal{M}_m$ de la suite de groupes marqués définis par les épimorphismes $\pi_n = p_{n-1} \circ \cdots \circ p_0 : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G_n$. En effet, $(\ker \pi_n)_n$ est une suite croissante de sous-groupes distingués dont la limite dans $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ est $\bigcup_n \ker \pi_n$ (lemme 1.8). Posons $G_n := BS(2,3) = \langle e_1, e_2 \mid e_1^{-1}e_2^2e_1 = e_2^3 \rangle$ pour tout $n \geq 1$. Nous obtenons l'exemple d'un tel système avec la donnée d'un épimorphisme $p_0 : \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow BS(2,3) = G_n$ et $p_n := \phi : BS(2,3) \twoheadrightarrow BS(2,3)$ pour $n \geq 1$ où ϕ est définie par $\phi(e_1) = e_1$ et $\phi(e_2) = e_2^2$. La limite est dans ce cas $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}] \rtimes_{\frac{2}{3}} \mathbb{Z}$ où l'action de $\mathbb{Z}$ est la multiplication par $\frac{2}{3}$ (c.f. Annexe B, Th. B.5.4).

Voici une reformulation pratique du lemme 1.8 :

Lemme 1.13. [Sta06a] *La suite $(G_n, S_n)_n$ converge dans $\mathcal{M}_m$ si, et seulement si, pour tout w de $\mathbb{F}_m$, l'implication suivante est vraie : $w \underset{G_n}{=} 1$ pour une infinité de n implique $w \underset{G_n}{=} 1$ pour tout n suffisamment grand.*

Supposons la suite $(G_n, S_n)_n$ convergente. La limite de cette suite est (G, S) si, et seulement si, l'équivalence suivante est vraie pour tout w de $\mathbb{F}_m$: $w \underset{G_n}{=} 1$ pour pour tout n suffisamment grand, si et seulement si, $w \underset{G}{=} 1$.

Exemple 1.14. [CG05] *La suite $(\mathbb{Z}, (1, n, \ldots, n^{m-1}))_n$ converge dans $\mathcal{M}_m$ vers $\mathbb{Z}^m$ muni de sa base canonique. En effet, pour w dans $\mathbb{F}_m$, l'égalité $w \underset{G_n}{=} 1$ se traduit en une égalité polynomiale $P_w(n) = 0$ où le coefficient c_i du polynôme $P_w(X) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i X^i$ est la somme des exposants de e_{i+1} dans le mot w. Comme un polynôme qui a une infinité de racines est le polynôme nul, le résultat suit alors du lemme 1.13.*

Soit G un groupe de type fini. Nous désignons par $\mathcal{N}(G)$ l'ensemble des sous-groupes distingués de G muni de la topologie induite par le produit $\{0,1\}^G$. Soit $p : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G$ un épimorphisme et soit $p^* : \mathcal{N}(G) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ l'application définie par $p^*(N) = p^{-1}(N)$. L'application p^* est clairement continue et injective. Nous avons :

Lemme 1.15. [CG05] *Lorsque G possède une' présentation finie, l'application p^* est un plongement ouvert.*

Ainsi, pour tout marquage S de G dans $\mathcal{M}_m$, il existe un voisinage de (G, S) qui ne contient que des quotients de G (l'application quotient est en outre induite par la bijection naturelle entre les marquages). Il s'agit de l'ensemble de groupes marqués correspondant à l'image de p^* où $p = p_S$ est l'épimorhisme défini par S à l'aide de la propriété universelle de $\mathbb{F}_m$. Plus généralement, $p : G \twoheadrightarrow H$ induit un plongement ouvert $p^* : \mathcal{N}(H) \hookrightarrow \mathcal{N}(G)$ si et seulement si $\ker p$ est la clôture distinguée d'un nombre fini d'éléments de G.

Remarque 1.16. *Il résulte du lemme 1.15 que les groupes finis et les groupes simples de présentation finie sont isolés dans $\mathcal{M}_m$. Les groupes isolés sont caractérisés dans* [Gri05, dCGP07]*. Le chapitre 2 est consacré à leur étude.*

Nous construisons à partir des espaces $\mathcal{M}_m$, l'espace $\mathcal{M}$ de tous les groupes marqués de type fini. Remarquons d'abord que l'application $(G,(g_1,\ldots,g_m)) \mapsto (G,(g_1,\ldots,g_m,1))$ définit un plongement continu et ouvert $i_m : \mathcal{M}_m \hookrightarrow \mathcal{M}_{m+1}$. La limite inductive $\mathcal{M}$ du système $\{i_m : \mathcal{M}_m \hookrightarrow \mathcal{M}_{m+1}\}_{m\geq 1}$ est un espace localement compact, métrisable et totalement discontinu. Observons que la convergence dans $\mathcal{M}$ équivaut à une convergence dans $\mathcal{M}_m$ pour un certain m. L'espace $\mathcal{M}$ peut être regardé comme l'ensemble des (classes d'équivalence de) groupes marqués par une suite infinie de générateurs tous triviaux à partir d'un certain rang. Soit $v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_l$ des éléments de $\mathbb{F}_\infty$ et soit (Σ) le système $\left\{\begin{array}{c} v_1=1,\ldots,v_k=1 \\ w_1\neq 1,\ldots,w_l\neq 1\end{array}\right.$. Nous désignons par O_Σ l'ensemble des groupes marqués (G,S) de $\mathcal{M}$ pour lesquels S (éventuellement augmenté de suffisamment de générateurs triviaux) est une solution de (Σ) dans G. La famille d'ensembles O_Σ définit une base d'ouverts-fermés de $\mathcal{M}$.

Il existe une notion d'approximation de groupes définie au moyen d'homomorphismes :

Définition 1.17. *Soit P une propriété de groupe invariante par isomorphisme. Le groupe G est pleinement résiduellement P si pour toute partie finie F de $G\setminus\{1\}$ il existe un homomorphisme de G vers un groupe H ayant P qui n'applique aucun élément de F sur l'élément neutre.*

Cette notion est liée à notre topologie sur les groupes marqués :

Remarque 1.18. *Soit P une propriété de groupe stable par passage aux sous-groupes et soit G un groupe pleinement résiduellement P. Nous déduisons à l'aide de la base d'ouverts précédente que pour tout marquage S de G, (G,S) est la limite dans $\mathcal{M}$ d'une suite de groupes marqués ayant P. La réciproque est aussi vraie lorsque G est de présentation finie en raison du lemme 1.15.*

Il est important de remarquer qu'être une limite dans $\mathcal{M}$ de groupes marqués ayant une certaine propriété P invariante par isomorphisme est indépendant du marquage :

Lemme 1.19. [Cha00, dCGP07] *Soit $(G,S),(H,T)$ dans $\mathcal{M}$. Supposons que G et H soient abstraitement isomorphes. Il existe alors un voisinage U de (G,S), un voisinage V de (H,T) et un homémorphisme $\phi : U \longrightarrow V$ appliquant (G,S) sur (H,T). De plus, ϕ préserve la relation d'isomorphisme.*

Ainsi, être une limite de groupes finis (de la même manière libres, cycliques ou diédraux) est une propriété qui ne dépend pas du marquage. Il en va de même pour le fait d'être un groupe isolé ou un point d'accumulation dans $\mathcal{M}$.

Chapitre 2

Groupes isolés

Dans ce chapitre, nous caractérisons algébriquement les groupes isolés dans l'espace $\mathcal{M}$ (Ch. 1) que nous appelons *groupes isolés*. Nous étudions les propriétés d'héridité de ces groupes ainsi que leur lien avec certains problèmes de décision. Les résultats présentés ont étés obtenus en collaboration avec Yves de Cornulier et Wolfgang Pitsch. L'annexe A contient le texte de la publication [dCGP07] écrite en anglais qui les collecte. Nous n'en donnons ici que les énoncés. Seuls quelques exemples et quelques références ont été ajoutés.

Les groupes isolés sont plus anciens que le contexte topologique dans lequel nous les redécouvrons. Plusieurs publications ayant pour thème des problèmes de décisions dans les groupes s'y réfèrent sous l'appellation de "groupes possédant une présentation absolue finie" [Neu73] ou de "groupes semi-monolithiques de présentation finie" [Man82]. Il suit d'un résultat de Simmons [Sim73] que ces groupes ont un problème du mot résoluble. Dans la littérature, les seuls exemples dont il est fait mention sont les groupes finis et les groupes simples de présentation finie (Rem. 1.16). Nous produisons des exemples qui montrent que cette classe est considérablement plus vaste. Comme nous l'avons remarqué au chapitre 1 (Rem. 1.9), un groupe isolé est nécessairement de présentation finie. Une condition supplémentaire unique, que nous nommons *discriminabilité finie*, permet une caractérisation algébrique :

Définition 2.1. *Soit G un groupe. Une partie F de $G \setminus \{1\}$ est une partie* discriminante *si tout sous-groupe distingué non trivial de G contient un élément de F. Le groupe G est* finiment discriminable *s'il possède une partie discriminante finie.*

Les groupes finiment discriminables portent le nom de groupes "semi-monolithiques" dans [Man82]. On pourra y comparer la proposition 2(a) à la caractérisation suivante :

Proposition 2.2 (Prop. 2)**.** *Soit G un groupe de type fini. Le groupe G est isolé si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *G est de présentation finie ;*

(ii) *G est finiment discriminable.*

Cette caractérisation a été obtenue indépendamment par Grigorchuk [Gri05]. Comme la classe des groupes de présentation finie est bien comprise à de nombreux égards, nous sommes souvent ramenés à étudier la discriminabilité finie.

Dans la partie Sec.3 [dCGP07], nous discutons les liens avec le problème du mot. Nous appelons *récursivement discriminable* un groupe de type fini possédant une partie discriminante récursivement énumérable (c.f. Section 3 pour une définition plus précise).

La proposition 2.2 a l'analogue suivant [Sim73, Thm. B].

Proposition 2.3 (Prop. 4)**.** *Un groupe de type fini G a un problème du mot résoluble si, et seulement si, G est à la fois récursivement présentable et récursivement discriminable.*

Il s'agit d'une généralisation conceptuelle d'un théorème dû à Kuznetsov [LS77, Ch.IV] disant que le problème du mot d'un groupe simple et récursivement présentable est résoluble.

Corollaire 2.4 (Cor. 5)**.** *Le problème du mot dans un groupe isolé est résoluble.*

L'existence de certains exemples pathologiques de groupes de type fini dus à Miller III [Mil81] a la conséquence suivante :

Proposition 2.5. *La classe des groupes avec un problème du mot résoluble n'est pas dense dans l'espace des groupes de type fini. En particulier, la classe des groupes isolés n'est pas dense.*

Nous explorons les propriétés d'héridité des groupes finiment discriminables et de ce fait des groupes isolés. Nous prouvons par exemple :

Théorème 2.6 (Thm. 7)**.** *La classe des groupes finiment discriminables (respectivement isolés) est stable :*

(i) *par extensions de groupes ;*

(ii) *lorsqu'on considère des sur-groupes d'indice fini, i.e. si H est finiment discriminable (respectivement isolé) et d'indice fini dans G alors G l'est aussi.*

La preuve du théorème 2.6 est moins immédiate que l'on pourrait l'espérer. Elle implique entre autres la classification des groupes abéliens finiment disriminables.

La Section 5 contient des exemples de points isolés. Relevons tout d'abord que les groupes de type fini les plus communs ne sont pas finiment discriminables. Par exemple, si G est un groupe infini et résiduellement fini, alors pour toute partie finie $F \subset G \setminus \{1\}$, il existe un sous-groupe distingué N vérifiant $N \cap F = \emptyset$. Ceci empèche G d'être finiment discriminable. Par ailleurs, Champetier [Cha00] a prouvé que l'adhérence dans $\mathcal{M}_m$ ($m \geq 2$) de l'ensemble des groupes hyperboliques non-élémentaires est un ensemble de Cantor et ne contient par conséquent aucun point isolé. Pour mémoire :

Proposition 2.7. *Les groupes infinis et résiduellement finis ne sont pas finiment discriminables. Les groupes hyperboliques infinis ne sont pas finiment discriminables.*

Les exemples les plus simples de groupes isolés sont les groupes finis et les groupes simples de présentation finie (Rem. 1.16). Mais la classe des groupes isolés est considérablement plus grande au regard du résultat suivant démontré dans la Section 5.2 :

Théorème 2.8 (Thm. 9)**.** *Tout groupe de type fini est un quotient d'un groupe isolé.*

Ceci montre en particulier que le réseau des sous-groupes distingués d'un groupe isolé peut-être arbirairement complexe ; par exemple, il ne satisfait pas en général la condition de chaîne ascendante ou descendante.

Nous donnons d'autres exemples. L'un d'eux (Section 5.3) est un groupe construit par Houghton comme extension du groupe des permutations à support fini d'un ensemble dénombrable par $\mathbb{Z}^2$. En particulier, ce groupe est *élémentairement moyennable* ([Cho80, Gri98] pour une définition) mais pas virtuellement résoluble.

Un autre (Section 5.7) est un groupe mis en évidence par Grigorchuk [Gri98], qui est le premier exemple connu de groupe moyennable et non élémentairement moyennable qui soit de présentation finie. C'est une extension HNN ascendante du fameux "premier groupe de Grigorchuk" qui est un groupe de croissance intermédiaire de torsion ; ce dernier n'est certainement pas isolé puisqu'il n'est pas de présentation finie et qu'il n'est pas finiment discriminable car il est résiduellement fini. Le fait que ce groupe soit isolé contredit la conjecture de Stepin dans [Gri98, §1], selon laquelle tout groupe de type fini moyennable peut être approché par des groupes élémentairement moyennables. Nous remarquons encore que le groupe de Thompson F, pour lequel la question de la moyennabilité reste ouverte, est un groupe isolé. Ajoutons aux deux exemples précédents, deux classes étudiées par Newman : les groupes juste métabéliens [New60a] et les groupes juste nilpotents de classe de 2 [New60b]. Il s'agit, comme pour l'exemple de Grigorchuk et F, de groupes *monolithiques*, c'est-à-dire de groupes possédant un unique sous-groupe distingué minimal non trivial. Pour ces deux classes et pour F, ce sous-groupe minimal est le sous-groupe dérivé. Nous observons (Section 5.8) que certains réseaux dans les groupes de Lie simples non-linéaires fournissent des exemples de groupes isolés qui sont des extensions avec un quotient infini et résiduellement fini et un noyau fini. Notons enfin que certains groupes de Kac-Moody minimaux [CR06] sont abstraitement simples modulo leurs centres, et sont par suite isolés.

Chapitre 3

Limites de groupes de Baumslag-Solitar

Les résultats de ce chapitre sont le fruit d'un travail commun avec Yves Stalder. Une partie de ce travail, disponible sur la site d'archivage électronique arXiv [GS], est actuellement soumis à la publication. Le texte rédigé en anglais occupe l'annexe B.

3.1 Résultats principaux

Le *groupe de Baumslag-Solitar standard de paramètres* m *et* n est le groupe marqué

$$BS(m,n) := \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle \ \ (m, n \in \mathbb{Z}^*)$$

muni de la *paire standard* (a, b).

Nota Bene. *L'entier* m *ne désigne plus le nombre de générateurs. Celui-ci est fixé à* 2.

Le théorème 6 de [Sta06a] permet de définir les groupes marqués suivants :

$$\overline{BS}(m,\xi) = \lim_{n\to\infty} BS(m,\xi_n)$$

où $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$, $(\xi_n)_n$ est une suite quelconque d'entiers rationnels vérifiant $\xi_n \to \xi$ dans $\mathbb{Z}_m$ et $|\xi_n| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ (voir le chapitre B.1 ou [HR63, Ch. II.§.10] pour une définition des entiers m-adiques $\mathbb{Z}_m$). Observons que $\overline{BS}(m,\xi)$ n'est jamais un groupe libre puisque la relation $[b, ab^m a^{-1}] = 1$ y est vérifiée. Cette relation entre a et b est en outre la plus courte que l'on puisse trouver (Prop. 3.3.24). Un tel groupe limite conserve toutes les propriétés des groupes de Baumslag-Solitar qui définissent des ensembles fermés de $\mathcal{M}_2$: il est sans torsion, son centre est trivial et il ne possède pas la propriété (T) de Kazhdan. Lorsque $|m| \geq 2$, le lemme de Britton dans $BS(m,\xi_n)$ permet aussi de voir qu'il possède un sous-groupe libre non abélien. Nous donnons maintenant la liste des principaux résultats concernant les groupes $\overline{BS}(m,\xi)$. Les démonstrations figurent dans l'annexe B à l'exception de celles des théorèmes et corollaires 3.3.1, 3.1.6 et 3.1.8.

Nous commençons par décrire la paramétrisation $\overline{BS}_m : \mathbb{Z}_m \to \mathcal{M}_2$ donnée par $\xi \mapsto \overline{BS}(m,\xi)$. Nous étudions son défaut d'injectivité et sa continuité. Plus précisément :

Théorème 3.1.1 (Theorem B.2.1)**.** *Soit m dans $\mathbb{Z}^*$ et soit $\xi,\eta \in \mathbb{Z}_m$. L'égalité de groupes marqués $\overline{BS}(m,\xi) = \overline{BS}(m,\eta)$ a lieu si, et seulement si, il existe d dans $\mathbb{Z}^*$ tel que $gcd(\xi,m) = gcd(\eta,m) = d$ et tel que les images de ξ/d et η/d dans $\mathbb{Z}_{m/d}$ soient identiques. En particulier, l'application $\overline{BS}_m$ est injective sur l'ensemble des entiers m-adiques inversibles.*

Théorème 3.1.2 (Theorem B.2.11)**.** *L'application $\overline{BS}_m$ est continue.*

Ces théorèmes nous permettent de décrire les groupes $\overline{BS}(m,\xi)$, avec ξ inversible, comme la frontière des groupes de Baumslag-Solitar standards.

Il est bien connu qu'un groupe de Baumslag-Solitar agit sur son arbre de Bass-Serre par automorphismes et sur $\mathbb{Q}$ par transformations affines. Le sous-chapitre **Section B.3** de l'annexe B est consacrée à ces actions et à la structure des groupes $\overline{BS}(m,\xi)$. Tout d'abord $\overline{BS}(p,\xi)$ agit affinement sur $\mathbb{Q}_p$ quand p est premier (Theorem B.3.1). Ensuite, nous construisons une action de $\overline{BS}(m,\xi)$ par automorphismes sur un arbre $X_{m,\xi}$ qui est d'une certaine manière une "limite" d'arbres de Bass-Serre (voir Theorem B.3.4). Cette action nous permet de prouver les résultats suivants :

Théorème 3.1.3 (Theorem B.3.12)**.** *Pour tout m dans $\mathbb{Z}^*$ et tout ξ dans $\mathbb{Z}_m$, il existe une suite exacte $1 \to \mathbb{F} \to \overline{BS}(m,\xi) \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \to 1$, où $\mathbb{F}$ est un groupe libre.*

Corollaire 3.1.4 (Corollary B.3.14)**.** *Les limites $\overline{BS}(m,\xi)$ ont la propriété de Haagerup et sont résiduellement résolubles.*

L'action transitive de $\overline{BS}(m,\xi)$ sur $X_{m,\xi}$ met aussi en évidence une stucture d'extension HNN analogue à celle d'un groupe de Baumslag-Solitar standard :

Théorème 3.1.5. *Le groupe $\overline{BS}(m,\xi)$ est l'extension $HNN(Z, Z^{(m)}, Z^{(\xi)}, a)$ de base Z et de lettre stable a avec $aZ^{(m)}a^{-1} = Z^{(\xi)}$. Le groupe Z est le stabilisateur d'un sommet v_0 de $X_{m,\xi}$. Le groupe $Z^{(m)}$ (respectivement $Z^{(\xi)}$) est le stabilisateur d'une arête de $X_{m,\xi}$ issue de ce sommet (respectivement dirigée vers ce sommet). Les groupes $Z, Z^{(m)}$ et $Z^{(\xi)}$ sont des sous-groupes abéliens libres de $\overline{BS}(m,\xi)$ de rang infini.*

Le groupe $\overline{BS}(m,\xi)$ se réalise donc aussi comme le groupe fondamental d'un graphe de groupes $\overline{BC}_1$ où cette fois les groupes de sommet et d'arêtes sont isomorphes à $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.

Notons que le groupe $Z^{(m)}$ est d'indice m dans Z alors que $Z^{(\xi)}$ possède un supplémentaire dans Z isomorphe à Z (cf. corollaire 3.3.7).

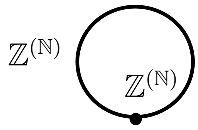


FIG. 3.1 – Graphe de groupes $\overline{BC}_1$

Théorème 3.1.6 (Th. 3.3.15)**.** *Soit m dans $\mathbb{Z}^*$, ξ dans $\mathbb{Z}_m$ et soit $d = pgcd(m, \xi)$. Posons $\eta = \pi(\frac{\xi}{d})$ où $\pi : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$ est l'homomorphisme d'anneaux naturel. Sont équivalents :*

(i) le problème du mot est résoluble dans $\overline{BS}(m, \xi)$;

(ii) le problème de conjugaison est résoluble dans $\overline{BS}(m, \xi)$;

(iii) les entiers $|m|$ et d sont effectivement calculables et la suite convergente standard associée à η est récursive.

où nous définissons *la suite convergente standard* $(\xi_n)_n$ associée à un entier m-adique ξ par : $\xi_n = \xi + m^n$ si ξ est un entier rationnel et $\xi_n \equiv \xi\,(\,mod\, m^n\mathbb{Z}_m)$ avec ξ_n dans $\{0, \ldots, m^n - 1\}$ sinon.

La structure d'extension HNN explicitée au théorème 3.1.5 permet encore de montrer le résultat de moyennabilité suivant et de donner une présentation des groupes $\overline{BS}(m, \xi)$.

Théorème 3.1.7 (Th. 3.3.16)**.** *Le groupe $\overline{BS}(m, \xi)$ est à classes de conjugaison infinies et est intérieurement moyennable.*

Nous définissons, à partir d'une suite d'entiers rationnels $r_i(\frac{\xi}{d})$ dans $\{0, \ldots, \frac{m}{d}\}$ (cf. Définition 3.2.7), une présentation infinie minimale de $\overline{BS}(m, \xi)$:

Théorème 3.1.8. *Le groupe $\overline{BS}(m, \xi)$ n'est pas de présentation finie. En effet, il possède la présentation inifinie minimale suivante :*

$$\big\langle a, b \;\big|\; [z_i(a, b), z_j(a, b)] = 1; i, j \geq 0 \big\rangle$$

avec

$$z_0(a, b) = b, z_1(a, b) = ab^m a^{-1}$$
$$\textit{et}$$
$$z_{i+1}(a, b) = az_i(a, b)b^{-r_{i+1}d}a^{-1} \textit{ pour tout } i \geq 1.$$

3.2 Notations et définitions

Le *groupe de Baumslag-Solitar standard de paramètres m et n* est le groupe marqué

$$BS(m, n) := \big\langle a, b \;\big|\; ab^m a^{-1} = b^n \big\rangle \;\; (m, n \in \mathbb{Z}^*) \;.$$

muni de la *paire standard* (a, b).

Remarquons que $BS(m,n)$ est aussi l'extension $HNN(\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}, a)$ de base $\mathbb{Z} = \rangle b \langle$ et de lettre stable a (voir [LS77, Ch. IV, Sec.2] pour une définition). Cette extension est encore le groupe fondamental d'un graphe de groupe : le graphe singulier BC_1 à une boucle où les groupes de sommet et d'arêtes sont isomorphes à $\mathbb{Z}$ (voir [Ser77] pour une définition).

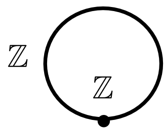


Fig. 3.2 – Graphe de groupes BC_1

Le théorème 6 de [Sta06a] permet de définir les groupes marqués suivants :

Définition 3.2.1.
$$\overline{BS}(m,\xi) = \lim_{n\to\infty} BS(m,\xi_n)$$
où m est dans $\mathbb{Z}^*$, ξ dans $\mathbb{Z}_m$, $(\xi_n)_n$ est une suite quelconque d'entiers rationnels vérifiant $\xi_n \to \xi$ dans $\mathbb{Z}_m$ et $|\xi_n| \to \infty$ pour $n \to \infty$

(Voir l'annexe B pour une définition des entiers m-adiques $\mathbb{Z}_m$.)

Définition 3.2.2. *La suite convergente standard $(\xi_n)_n$ associée à ξ est définie par :*
$$\xi_n = \xi + m^n \text{ si } \xi \neq 0 \text{ et } \xi \text{ est un entier rationnel et}$$
$$\xi_n \equiv \xi\, (\,mod\, m^n\mathbb{Z}_m),\ \xi_n \text{ dans } \{0,\ldots,m^n-1\} \text{ sinon.}$$

Définition 3.2.3. *Soit m dans $\mathbb{Z}^*$ et soit ξ dans $\mathbb{Z}_m$. L'entier m-adique ξ est dit récursif si sa suite convergente standard est récursive.*

Soit $\mathbb{F}$ un groupe libre, G et H deux quotients de $\mathbb{F}$ et soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{F}$. Si ϕ induit un homomorphisme de groupes de G vers H, nous désignons encore abusivement par ϕ l'homorphisme induit. Le lemme suivant nous permet de définir sur $\overline{BS}(m,\xi)$ des homomorphismes à partir de certains endomorphismes de $\mathbb{F}_2$.

Lemme 3.2.4. *Soit $(G_n)_n$ et $(H_n)_n$ deux suites de groupes marqués de limites respectives G et H dans $\mathcal{M}_m$. Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{F}_m$ qui induit un homomorphisme de G_n vers H_n pour tout n. Alors ϕ induit un endomorphisme de G vers H. De plus, si $\phi : G_n \longrightarrow H_n$ est injectif pour une infinité de n, alors $\phi : G \longrightarrow H$ est injectif.*

Démonstration. Considérons w dans $\mathbb{F}_m$ tel que $w \underset{G}{=} 1$ et utilisons le lemme 1.13. Nous avons $w \underset{G_n}{=} 1$ et par suite $\phi(w) \underset{H_n}{=} 1$, pour tout n suffisamment grand. Par conséquent, $\phi(w) \underset{H}{=} 1$, ce qui montre que ϕ induit un homomorphisme de G vers H. Supposons ϕ injectif pour une infinité de n et considérons un élément w de $\mathbb{F}_m$ tel que l'image de w est dans $\ker(\phi : G \longrightarrow H)$. Il existe une infinité de n pour lesquels $\phi : G_n \longrightarrow H_n$ est injectif et $\phi(w) \underset{H_n}{=} 1$ de sorte que $w \underset{G_n}{=} 1$ a lieu pour une infinité de n. S'ensuit $w \underset{G}{=} 1$. $\square$

Définition et proposition 3.2.5. *Soit σ_a et σ_b les endomorphismes de $\mathbb{F}_2$ définis par $\sigma_a(a) = a, \sigma_a(b) = 1$ et $\sigma_b(a) = 1, \sigma_b(b) = b$. Ils induisent alors des homomorphismes surjectifs $\sigma_a : \overline{BS}(m,\xi) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ et $\sigma_b : \overline{BS}(m,\xi) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. L'homomorphisme $\sigma_a \times \sigma_b : \overline{BS}(m,\xi) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ défini par $(\sigma_a \times \sigma_b)(g) = (\sigma_a(g), \sigma_b(g))$ est l'épimorphisme d'abélianisation de $\overline{BS}(m,\xi)$.*

Démonstration. Les suites d'homomorphismes $\sigma_a : BS(m,\xi_n) \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $\sigma_b : BS(m,\xi_n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(\xi_n - m)\mathbb{Z}$ sont convergentes au sens du lemme 3.2.4 et permettent de définir $\sigma_a : \overline{BS}(m,\xi) \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $\sigma_b : \overline{BS}(m,\xi) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Comme $\sigma_a(a) = 1$ et $\sigma_b(b) = 1$, ces homomorphismes sont surjectifs. $\square$

L'abélianisé de $\overline{BS}(m,\xi)$ ne coïncide donc avec l'abélianisé d'aucun $BS(m,n)$. Aucun des groupes $\overline{BS}(m,\xi)$ n'est par conséquent isomorphe à l'un des $BS(m,n)$.

Définition 3.2.6. *Soit $w = b^{\alpha_0}a^{\varepsilon_1}b^{\alpha_1}\dots a^{\varepsilon_k}b^{\alpha_k}$ dans $\mathbb{F}_2$. Nous posons $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = \varepsilon_1, \sigma_2 = \varepsilon_1+\varepsilon_2, \dots, \sigma_k = \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k$ et $\sigma(w) = \min_{1\le i\le k}\sigma_i$. Définissons le polynôme de Laurent*

$$L_w(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^{\sigma_i}.$$

Nous désignons par P_w le tronc *de L_w, c'est-à-dire le polynôme :*

$$P_w(t) = t^{-\sigma_a(w)}L_w(t).$$

Ecrivons $\mathbb{Z} = \langle t\rangle$. Nous vérifions aisément que les applications suivantes :

$$\begin{array}{cccc} q_{m,n} : & BS(m,n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\frac{pgcd(m,n)}{ppcm(m,n)}] \rtimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z} \\ & a & \longmapsto & t \\ & b & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} q_{m,\xi} : & \overline{BS}(m,\xi) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \rtimes_t \mathbb{Z} \\ & a & \longmapsto & t \\ & b & \longmapsto & \delta_0 \end{array}$$

définissent des épimorphismes vérifiant $q_{m,n}(w) = L_w(\frac{n}{m})t^{\sigma_a(w)}$ et $q_{m,\xi}(w) = L_w(t)t^{\sigma_a(w)}$.

Remarquons en effet que $q_{m,\xi}$ est la limite au sens du lemme 3.2.4 de la suite $(q_{m,n})_n$ trivialement bien définie. L'application $q_m := q_{m,\xi}$ est celle qui intervient dans le théorème de structure 3.1.3.

Nous construisons maintenant un arbre $X = X_{m,\xi}$ sur lequel $\overline{BS}(m,\xi)$ agit fidèlement et transitivement. Les théorèmes de stuctures 3.1.3 et 3.3.1 reposent sur cette action. Désignons par T l'arbre de Bass-Serre de $BS(m,n)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} S(T) = BS(m,n)/\langle b\rangle\,, &\quad A_+(T) = BS(m,n)/\langle b^m\rangle, \\ \alpha(w\langle b^m\rangle) = w\langle b\rangle\,, &\quad \omega(w\langle b^m\rangle) = wa^{-1}\langle b\rangle, \end{aligned}$$

où $\alpha(e)$ et $\omega(e)$ désignent respectivement l'origine et l'extrémité de l'arête e. L'orientation choisie pour T est préservée par l'action de $BS(m,n)$. Etant donné m dans $\mathbb{Z}^*$, ξ dans $\mathbb{Z}_m$ et une suite d'entiers $(\xi_n)_n$ telle que $|\xi_n| \to \infty$ et $\xi_n \to \xi$, nous désignons par H_n (respectivement H_n^m) le sous-groupe de $BS(m,\xi_n)$ engendré par b (respectivement b^m) et par T_n l'arbre de Bass-Serre de $BS(m,\xi_n)$. Nous posons

$$\begin{aligned} Y := \left(\textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} S(T_n)\right)/\sim &\quad = \quad \left(\textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n\right)/\sim \\ Y^m := \left(\textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} A_+(T_n)\right)/\sim &\quad = \quad \left(\textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n^m\right)/\sim \end{aligned}$$

où $\sim$ est définie par $(x_n)_n \sim (y_n)_n \Leftrightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n = y_n$ dans les deux cas. Nous définissons maintenant un graphe orienté $X_{m,\xi}$ par

$$\begin{array}{lcl} S(X) & := & \{x \in Y : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ tel que } (x_n)_n \sim (wH_n)_n\} \\ E_+(X) & := & \{x \in Y : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ tel que } (x_n)_n \sim (wH_n^m)_n\} \\ \alpha((wH_n^m)_n) & := & (wH_n)_n = (\alpha(wH_n^m))_n \\ \omega((wH_n^m)_n) & := & (wa^{-1}H_n)_n = (\omega(wH_n^m))_n. \end{array}$$

Il est aisé de vérifier qu'un graphe X est ainsi bien défini et qu'il s'agit d'un arbre. Le groupe libre $\mathbb{F}_2$ agit par multiplication à gauche sur X. Cette action est fidèle, transitive et se factorise en une action de $\overline{BS}(m,\xi)$ (c.f. Theorem 3.4, Annexe B).

Fixons m dans $\mathbb{Z}^*$ et ξ dans $\mathbb{Z}_m$. Nous posons $d := pgcd(m,\xi)$ et $m_1 := \frac{m}{d}$. Soit $\pi : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_{m_1}$ l'homomorphisme naturel d'anneaux. Nous posons $\eta := \pi(\frac{\xi}{d})$. Nous définissons des suites d'entiers associées à ξ qui vont nous permettre de décrire les stabilisateurs des sommets et des arêtes de $X_{m,\xi}$:

Définition 3.2.7. *Soit n dans $\mathbb{Z}$. Définissons les entiers rationnels $s_0(n), s_1(n), \ldots$ par les formules de récurrence :*

$$s_0(n) = 1; \tag{3.1}$$

$$ns_{i-1}(n) = m_1 s_i(n) + r_i(n) \text{ avec } r_i(n) \in \{0,\ldots,m_1-1\}, i \geq 1. \tag{3.2}$$

Proposition 3.2.8. *Soit n et n' des entiers tels que $d = pgcd(m,n) = pgcd(m,n')$ et soit h dans $\mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) la relation $n \equiv n' \,(mod\ m_1^h d)$ est satisfaite ;
(ii) $r_i(n) = r_i(n')$ pour $i = 1,\ldots,h$.

La condition (ii) implique en particulier :

$$s_i(n) \equiv s_i(n')\,(\bmod\ m_1^{h-i}) \text{ pour } i = 1,\ldots,h.$$

Démonstration de la proposition 3.2.8. $(i) \Rightarrow (ii)$: Montrons par récurrence sur i que $r_i(n) = r_i(n')$ pour $i = 0, 1, \dots, h$ et $s_i(n) \cdot n \equiv s_i(n') \cdot n' (\mod m_1^{h-i} d)$. L'initialisation est évidente. Supposons que $r_{i-1}(n) = r_{i-1}(n')$ et $s_{i-1}(n) \cdot n = s_{i-1}(n') \cdot n' (\mod m_1^{h-i} d)$ pour tout $1 \leq i \leq h$. Par construction

$$\begin{cases} s_{i-1}(n) \cdot n = s_i(n) \cdot m + r_i(n) \\ \text{et} \\ s_{i-1}(n') \cdot n' = s_i(n') \cdot m + r_i(n'). \end{cases}$$

L'hypothèse de récurrence donne $s_i(n) \cdot n \equiv s_i(n') \cdot n' (\mod m)$, ce qui entraîne $r_i(n) = r_i(n')$. Par suite

$$s_i(n) - s_i(n') = \frac{(s_{i-1}(n) \cdot n - s_{i-1}(n') \cdot n')}{m},$$

d'où nous tirons $s_i(n) \equiv s_i(n') (\mod m_1^{h-i})$ toujours grâce à l'hypothèse de récurrence. Remarquons alors que

$$s_i(n) \cdot n - s_i(n') \cdot n' = (s_i(n) - s_i(n')) \cdot n + s_i(n') \cdot (n - n').$$

Les deux termes sont multiples de $m_1^{h-i} d$. Le premier car n est multiple de d et le second par l'hypothèse (i). Finalement, nous obtenons la relation $s_i(n) \equiv s_i(n') (\mod m_1^{h-i})$ comme souhaité.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Nous posons $n_1 = \frac{n}{d}$ et $n'_1 = \frac{n'}{d}$. Par construction, nous avons :

$$\begin{cases} s_{i-1}(n) \cdot n = s_i(n) \cdot m + r_i(n) \\ \text{et} \\ s_{i-1}(n') \cdot n' = s_i(n') \cdot m + r_i(n') \end{cases}$$

pour tout i dans $\{1, \dots, h\}$. Grâce à l'hypothèse (ii), nous tirons la relation $s_i(n) - s_i(n') = (s_{i-1}(n) \cdot n - s_{i-1}(n') \cdot n')/m$, que nous réécrivons sous la forme

$$s_i(n) - s_i(n') = \frac{(s_{i-1}(n) - s_{i-1}(n')) \cdot n_1}{m_1} + \frac{s_{i-1}(n')(n_1 - n'_1)}{m_1}. \tag{3.3}$$

Nous montrons par récurrence que $n_1 \equiv n'_1 (\mod m_1^k)$ pour $k = 1, \dots, h$. L'ancrage résulte directement de l'équation (3.3) pour $i = 1$ (rappelons que $s_0(n) = 1 = s_0(n')$). Pour le pas d'induction, nous supposons $2 \leq k \leq h$ et $n_1 \equiv n'_1 (\mod m_1^{k-1})$, ce qui implique que le dernier terme de l'équation (3.3) est multiple de m_1^{k-2} (entier en particulier). Nous procédons alors en k étapes, e, utilisant l'équation (3.3) et le fait que m_1 et n_1 sont premiers entre eux :

- avec $i = k$, vient $s_{k-1}(n) \equiv s_{k-1}(n') (\mod m_1)$;
- avec $i = k - 1$ (si $k \geq 3$), vient $s_{k-2}(n) \equiv s_{k-2}(n') (\mod m_1^2)$;
- ainsi de suite pour les valeurs $i = k - 2, \dots, 2$, nous obtenons successivement $s_{k-3}(n) \equiv s_{k-3}(n') (\mod m_1^3), \dots, s_1(n) \equiv s_1(n') \equiv s_{k-1}(n') (\mod m_1^{k-1})$;
- enfin, avec $i = 1$, nous obtenons $n_1 \equiv n'_1 (\mod m_1^k)$.

Pour terminer, comme $n_1 \equiv n_1'(\mod m_1^h)$, s'ensuit $n \equiv n'(\mod m_1^h d)$.
□

Proposition 3.2.9. *Les applications s_i et r_i s'étendent de manière unique en des applications continues sur $\mathbb{Z}_{m_1}$ pour tout $i \geq 0$.*

Démonstration. L'assertion résulte directement de la densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_{m_1}$ et de la proposition 3.2.8. □

L'application $n \longmapsto s_i(n)$ est polynomiale en n. Plus précisément :

Définition et proposition 3.2.10. *Pour ν dans $\mathbb{Z}_{m_1}$, nous définissons récursivement $P_{i,\nu}(t)$ par*

$$P_{0,\nu}(t) = m_1 \text{ et } P_{i,\nu}(t) = tP_{i-1,\nu}(t) - r_i(\nu) \text{ pour } i \geq 1.$$

Clairement, $P_{i,\nu}(t) = m_1 t^i - r_1(\nu)t^{i-1} - \cdots - r_i(\nu)$. De plus, $s_i(n) = \frac{1}{m_1} P_{i,n}(\frac{n}{m_1})$ pour tout $i \geq 0$ et tout n dans $\mathbb{Z}$. Nous écrivons P_i pour $P_{i,\eta}$.

3.3 Problème du mot et présentation

Nous fixons m dans $\mathbb{Z}^*$ et ξ dans $\mathbb{Z}_m$. Nous posons $d := pgcd(m, \xi), m_1 := \frac{m}{d}$ et $\eta := \pi(\frac{\xi}{d}) \in \mathbb{Z}_{m_1}$. Nous désignons par $(\eta_n)_n$ la suite convergente standard de η. Nous écrivons r_i pour $r_i(\eta)$.

Nous définissons le sommet v_0 et l'arête a_0 de $X_{m,\xi}$ par :

$$v_0 := (H_n)_n, \; a_0 := (H_n^m)_n,$$

où H_n et H_n^m désignent respectivement les sous-groupes de $BS(m, \xi_n)$ engendrés par b et b^m. Rappelons que l'action de $\mathbb{F}_2$ sur $X_{m,\xi}$ définie par $w \cdot (w'H_n)_n := (ww'H_n)_n$ et $w \cdot (w'H_n^m)_n := (ww'H_n^m)_n$ se factorise en une action de $\overline{BS}(m, \xi)$. Les suites $(wH_n)_n$ et (wH_n^m) sont définies modulo la relation d'égalité des coordonnées pour tout n suffisamment grand. Nous désignons respectivement par Z et $Z^{(m)}$ les stabilisateurs de v_0 et a_0. Nous posons $Z^{(\xi)} := aZ^m a^{-1}$. Comme l'action de $\overline{BS}(m, \xi)$ sur l'arbre $X_{m,\xi}$ est transitive, le théorème suivant découle directement de la théorie de Bass-Serre [Ser77] :

Théorème 3.3.1. *Le groupe $\overline{BS}(m, \xi)$ est l'extension $HNN(Z, Z^{(m)}, Z^{(\xi)}; a)$ de base Z et de lettre stable a conjuguant $Z^{(m)}$ à $Z^{(\xi)} = a\mathbb{Z}^{(m)}a^{-1}$.*

Les théorèmes 3.1.6, 3.1.7 et 3.1.8, placés en fin de chapitre, se basent tous trois sur la structure HNN de $\overline{BS}(m, \xi)$.

Nous précisons maintenant la strucure des stabilisateurs Z et $Z^{(m)}$. Le lemme suivant est un corollaire immédiat de la définition de l'action de $\overline{BS}(m, \xi)$ sur $X_{m,\xi}$.

Lemme 3.3.2. *Soit w dans $\mathbb{F}_2$. Nous avons les caractérisations suivantes :*

(*i*) *Le mot* w *définit un élément de* Z *si et seulement si* $w \underset{BS(m,\xi_n)}{=} b^{\lambda_n}$ *pour une inifinité de* n.

(*ii*) *Le mot* w *définit un élément de* $Z^{(m)}$ *si et seulement si* $w \underset{BS(m,\xi_n)}{=} b^{m\lambda_n}$ *pour une inifinité de* n.

Lemme 3.3.3. *Soit* m *dans* $\mathbb{Z}^*$. *Le sous-groupe* Z *est abélien et librement engendré par* $z_0(a,b) = b, z_1(a,b) = ab^m a^{-1}$ *et* $z_{i+1}(a,b) = az_i(a,b)b^{-r_{i+1}d}a^{-1}$ *pour* $i \geq 1$. *Si* $|m| \geq 2$ *alors* Z *est le centralisateur de* b *dans* $\overline{BS}(m,\xi)$.

La démonstration de ce lemme repose sur :

Lemme 3.3.4 (Lemma B)**.** *Soit* w *dans* $\mathbb{F}_2$. *Si* $w = b^{\lambda_n}$ *dans* $BS(m,\xi_n)$ *pour une infinité de* n, *alors* $w = b^{\lambda_n}$ *dans* $BS(m,\xi_n)$ *pour tout* n *suffisamment grand. De plus, il existe des entiers* $k_0,\ldots,k_h$ *tels que* $\lambda_n = k_0 + k_1 d\eta_n + k_2 s_1(\eta_n)d\eta_n + \cdots + k_h s_{h-1}(\eta_n)d\eta_n$ *pour tout* n *suffisamment grand.*

Démonstration du lemme 3.3.3. Clairement, Z est un sous-groupe abélien de $C(b)$. Le lemme 3.3.4 permet définir une application q de Z dans $\mathbb{Z}[t]$ par $q(w) := P(t)$ si $w = b^{P(\frac{\eta_m}{m_1})}$ dans $BS(m,\xi_n)$ pour tout n suffisamment grand. Cette application est de manière évidente un homomorphisme de groupes dont l'image est incluse dans le groupe abélien $\mathcal{Z}$ librement engendré par $\mathcal{B} := \{1, mt, tdP_1(t), tdP_2(t), \ldots\}$. Les relations du lemme 3.2.7 montrent que les images de $z_0(a,b), z_1(a,b), z_2(a,b), \ldots$ par q sont les éléments de $\mathcal{B}$. Par conséquent, ces éléments engendrent librement Z.

Supposons que $|m| \geq 2$. L'image d'un mot w de $\mathbb{F}_2$ commute avec b dans $\overline{BS}(m,\xi)$, si et seulement si, $[w,b] \underset{BS(m,\xi_n)}{=} 1$ pour une infinité de n. Or $[w,b] \underset{BS(m,\xi_n)}{=} 1$ si, et seulement si, w est une puissance de b dans $BS(m,\xi_n)$, par le lemme de Britton. Ainsi $Z = C(b)$. □

Remarque 3.3.5. *L'application* q *définie dans la démonstration précédente est la restriction de* $q_{m,\xi}$ *à* Z.

Désignons par $\mathcal{Z}$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}[t]$ de base $\mathcal{B}$ et écrivons aussi $\mathcal{Z}^{(m)}$ et $\mathcal{Z}^{(\xi)}$ pour les images de $Z^{(m)}$ et $Z^{(\xi)}$ par l'application q de la démonstration précédente.

Lemme 3.3.6. *Soit* $f(t) = k_0 + k_1 mt + k_2 tdP_1(t) + \cdots + k_t tdP_{t-1}(t)$. *Le polynôme* f *est dans* $\mathcal{Z}^{(m)}$ *si, et seulement si,*

$$k_0 + d(k_1 r_1 + k_2 r_2 + \cdots + k_t r_t) \equiv 0 \,(\, mod\, m\,).$$

Démonstration. Le polynôme f est dans $\mathcal{Z}^{(m)}$ si, et seulement si,

$$k_0 + k_1 d\eta_n + k_2 s_1(\eta_n)d\eta_n + \cdots + k_h s_{h-1}(\eta_n)d\eta_n \equiv 0 \,(\, mod\, m)$$

pour tout n suffisamment grand.

Au regard des relations (3.1) et (3.2) de la définition 3.2.7, cette dernière condition revient à :

$$k_0 + d(k_1r_1 + k_2r_2 + \cdots + k_tr_t) \equiv 0\,(\,mod\, m\,).$$

□

Corollaire 3.3.7. *Les groupes $\mathcal{Z}^{(m)}$ et $\mathcal{Z}^{(\xi)}$ sont abéliens libres de bases respectives*

$$\mathcal{B}_m = \{m, dP_1(t) = mt - r_1d, dP_2(t) = tdP_1(t) - r_2d, \ldots\}$$
$$et$$
$$\mathcal{B}_\xi = \{mt, tdP_1(t), tdP_2(t), \ldots\}.$$

Le théorème 3.3.1, le lemme 3.3.3 et le corollaire 3.3.7 donnent ensemble :

Corollaire 3.3.8. *Soit $f := f_{m,\xi}$ l'application définie par*

$$f(a) = a, f(z_0) = 1, f(z_1) = mt, f(z_2) = tdP_1(t), f(z_3) = tdP_2(t),\ \ etc.$$

Alors f induit un isomorphisme de $\overline{BS}(m,\xi)$ vers l'extension $HNN(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{(m)}, \mathcal{Z}^{(\xi)}; a)$ de base $\mathcal{Z}$ et de lettre stable a avec $aP(t)a^{-1} = tP(t)$ pour tout P dans $\mathcal{Z}^{(m)}$.

Corollaire 3.3.9. *Si m et $d := pgcd(\xi, m)$ sont donnés et si $\eta := \pi(\frac{\xi}{d})$ est récursif, alors le problème de conjugaison est résoluble dans $\overline{BS}(m,\xi)$.*

Démonstration du corollaire 3.3.9. Puisque $(\eta_n)_n$ est récursive, la suite $(r_i)_i$ l'est aussi en raison de la proposition 3.2.8. Ainsi l'isomorphisme f du corollaire 3.3.8 est récursivement défini et le problème de conjugaison dans $\overline{BS}(m,\xi)$ est alors équivalent au même problème dans le groupe $HNN(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{(m)}, \mathcal{Z}^{(\xi)}; a)$. Dans les groupes abéliens $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{(m)}$ et $\mathcal{Z}^{(\xi)}$, ce problème est seulement le problème du mot. Il est résoluble dans chacun de ces groupes car leurs bases sont définies récursivement. Enfin, le monomorphisme de conjugaison par a est lui-même récursivement défini. Le théorème de conjugaison de Collins [LS77, Ch.IV, Thm.2.5] permet alors de conclure. □

Remarque 3.3.10. *Les anneaux $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/|m|\mathbb{Z}$ sont égaux pour tout m dans $\mathbb{Z}$. Nous avons aussi $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{|m|}$.*

Proposition 3.3.1. *Soit m dans $\mathbb{Z}^*$ et soit ξ dans $\mathbb{Z}_m$. Posons $d := pgcd(m,\xi)$ écrivons $m := m_1d$. Supposons que le problème du mot soit résoluble dans $\overline{BS}(m,\xi)$.*

Alors l'algorithme résolvant le problème du mot dans $\overline{BS}(m,\xi)$ permet de calculer $|m|, d$ et la suite convergente standard de $\eta := \pi(\frac{\xi}{d})$ de manière effective. Autrement dit, η est récursif.

Remarque 3.3.11. *De manière analogue à la proposition 3.3.2 ci-dessous, le signe de m ne peut pas être retrouvé par un algorithme résolvant le problème du mot dans $\overline{BS}(m,\xi)$. Observons en effet que les groupes marqués $\overline{BS}(m,-\xi)$ et $\overline{BS}(-m,\xi)$ sont égaux. Au vu du théorème 3.1.1, les groupes marqués $\overline{BS}(m,\xi)$ et $\overline{BS}(-m,\xi)$ sont égaux si (et seulement si, en fait) $\pi(\frac{\xi}{d}) = 0$ dans $\mathbb{Z}_{m_1}$. Sous cette hypothèse, un algorithme qui résout le problème du mot dans l'un des deux groupes marqués le résout dans les deux.*

La preuve repose sur les lemmes suivants :

Lemme 3.3.12. *Soit m, n dans $\mathbb{Z}^*$ et soit ξ dans $\mathbb{Z}_m$. Posons $v_k = [ab^k a^{-1}, b]$ avec k dans $\mathbb{Z}$.*

(*i*) *Le mot $[a, b]$ est trivial dans $BS(m, n)$ si, et seulement si, $m = n = \varepsilon$ avec ε dans $\{-1, 1\}$. Nous avons : $[a, b] \neq 1$ et $[a^2, b] = 1$ dans $BS(m, n)$ si, et seulement si, $m = -n = \varepsilon$ avec ε dans $\{-1, 1\}$.*

(*ii*) *Le mot $r_k = aba^{-1}b^{-k}$ est trivial dans $BS(1, n)$ si, et seulement si, $k = n$.*

(*iii*) *Supposons que G soit égal à $BS(m, n)$ avec $|n| > 1$ ou à $\overline{BS}(m, \xi)$. Le mot v_k est trivial dans G si, et seulement si, $k \equiv 0 \,(\, mod\, m\,)$.*

Démonstration. Si $|m| \neq 1$, alors le mot $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ est sous forme réduite dans $BS(m, n)$ et définit donc un élément non trivial. Si $m = \varepsilon \in \{-1, 1\}$, alors $[a, b] = b^{\varepsilon n - 1}$ dans $BS(m, n)$, qui est trivial si, et seulement si, $n = \varepsilon = m$.

Si $|m| \neq 1$ alors le mot $[a^2, b] = a^2ba^{-2}b^{-1}$ est sous forme réduite dans $BS(m, n)$ et définit par conséquent un élément non trivial. Si $m = \varepsilon$ est dans $\{-1, 1\}$, alors $[a, b] = b^{n^2 - 1}$ dans $BS(m, n)$. Si l'on suppose en outre que $n \neq m$, alors $[a, b]$ est trivial si, et seulement si, $n = -\varepsilon = m$. La première assertion est alors démontrée.

Comme r_k est trivial dans $BS(m, n)$ si, et seulement si, b^{n-k} est trivial dans $BS(m, n)$, la deuxième assertion suit.

Prouvons maintenant la troisième assertion en supposant d'abord que que G est à $BS(m, n)$. Dans $BS(m, n)$, nous avons :

$$v_k = [ab^k a^{-1}, b] = ab^k a^{-1} bab^{-k} a^{-1} b^{-1}$$

Observons que $v_k = 1$ dans $BS(m, n)$ si $k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ m)$. Si m ne divise pas k et si $|n| \neq 1$, le mot précédent définit une forme réduite (non triviale) pour v_k dans $BS(m, n)$ si bien que $v_k \neq 1$ dans $BS(m, n)$. Ceci termine la preuve lorsque $G = BS(m, n)$. Supposons maintenant que G soit égal à $\overline{BS}(m, \xi)$ et considérons une suite d'entiers $(\xi_n)_n$ telle que $|\xi_n|$ tende vers l'infini et telle que ξ_n tende vers ξ dans $\mathbb{Z}_m$. Nous rappelons que $w = 1$ dans $\overline{BS}(m, \xi)$ si, et seulement si, $w = 1$ in $BS(m, \xi_n)$ pour tout n suffisamment grand. La preuve se termine ainsi à l'aide du premier cas. □

Lemme 3.3.13. *Soit $w_{h,k} = a^{h+1}b^m a^{-1}b^{-k}a^{-h}ba^{h+1}b^{-m}a^{-1}b^k a^{-h}b^{-1}$ avec $h \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ et m dans $\mathbb{Z}^*$. Soit $|n| > 1$ un entier et supposons que G soit un groupe égal à $BS(m, n)$ ou à $\overline{BS}(m, \xi)$. Nous avons :*

(*i*) *$w_{1,k} = 1$ dans $BS(m, n)$ si, et seulement si, $n \equiv k \,(\, mod\, m)$;*

(*ii*) *Supposons que $pgcd(m, n) = 1$ (respectivement $pgcd(m, \xi) = 1$. Alors*

$$w_{h,k} = 1 \text{ dans } G \text{ si, et seulement si, } n \equiv k \,(\, mod\, m^h)$$

(respectivement $\xi \equiv k \,(\, mod\, m^h \mathbb{Z}_m)$).

Preuve du lemme 3.3.13. Posons $d := pgcd(m,n)$. Nous écrivons $m = m_1 d$. Par le lemme 3 [Sta06a], nous savons que :

$$w_{h,k} = 1 \text{ dans } BS(m,n) \text{ si, et seulment si } n \equiv k\,(\,mod\, {m_1}^h d), \tag{3.4}$$

ce qui prouve l'assertion (i) et l'assertion (ii) lorsque G est égal à $BS(m,n)$.

Considérons maintenant une suite d'entiers $(\xi_n)_n$ telle que $|\xi_n|$ tende vers l'infini et telle que ξ_n tende vers ξ. Nous rappelons que $w = 1$ dans $\overline{BS}(m,\xi)$ si, et seulement si, $w = 1$ in $BS(m,\xi_n)$ pour tout n suffisamment grand. Supposons que nous ayons $h = 1$ ou $d = pgcd(m,\xi) = 1$. Nous avons $\xi_n \equiv k\,(\,mod\, m^h)$ pour tout n suffisamment grand, si, et seulement si, $\xi \equiv k\,(\,mod\, m^h\mathbb{Z}_m)$. Nous déduisons de (3.4) que $w_{h,k} = 1$ in $BS(m,\xi_n)$ pour tout n suffisamment grand, si et seulement si, $\xi \equiv k\,(\,mod\, m^h\mathbb{Z}_m)$. La démonstration des assertions (i) et (ii) est alors achevée. □

Notons que les groupes marqués $BS(m,n)$ et $BS(-m,-n)$ sont égaux. Un algorithme qui résout le problème du mot dans l'un d'eux le résout donc pour tous les deux.

Définissons alors le couple $(\overline{m},\overline{n})$ de $\{(m,n),(-m,-n)\}$ par la condition $\overline{m} > 0$.

Proposition 3.3.2. *Un algorithme résolvant le problème du mot dans $BS(m,n)$ permet de calculer $\overline{m}$ et $\overline{n}$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que $m > 0$. Nous déterminons d'abord, en utilisant l'algorithme qui résout le problème du mot dans $BS(m,n)$, si l'un des mots $[a,b]$ ou $[a^2,b]$ a une image triviale dans $BS(m,n)$. Si c'est le cas, le lemme 3.3.12 nous permet de décider si $(m,n) = (1,1)$ ou $(m,n) = (1,-1)$. Dans le cas contraire, nous savons alors que $|n| > 1$. En utilisant le même algorithme, nous déterminons le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $[ab^k a^{-1}, b] = 1$ dans $BS(m,n)$. Le lemme 3.3.12 nous donne ainsi une manière effective de calculer le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $k \equiv 0\,(\,mod\, m\,)$, c'est-à-dire m. En testant un nombre fini de couples de mots (s_k, s_{-k}) avec $s_k = ab^m a^{-1} b^{-k}$ avec $k \geq 0$, nous déterminons enfin n.

□

Lemme 3.3.14. *Soit m,d dans $\mathbb{Z}^*$ et soit ξ dans $\mathbb{Z}_{md}$. Le sous-groupe marqué de $\overline{BS}(md,\xi d)$ engendré par (a,b^d) est égal à $\overline{BS}(m,\pi(\xi))$.*

Démonstration du lemme 3.3.14. Considérons une suite d'entiers $(\xi_n)_n$ telle que $|\xi_n|$ tende vers l'infini et telle que ξ_n tende vers ξ dans $\mathbb{Z}_{md}$. Le sous-groupe marqué de $\overline{BS}(md,\xi d)$ engendré par (a,b^d) est la limite des sous-groupes marqués G_n de $BS(md,\xi_n d)$ engendrés par (a,b^d). Comme G_n est égal à $BS(m,\xi_n)$ et comme ξ_n tend vers $\pi(\xi)$ dans $\mathbb{Z}_m$, la limite des G_n est $\overline{BS}(m,\pi(\xi))$, ce qui achève la preuve. □

Démonstration de la proposition 3.3.1. Nous pouvons supposer que $m > 0$. Grâce à l'équivalence "$k \equiv 0 \,(\,mod\, m)$ si, et seulement si, $[ab^k a^{-1}, b] = 1$ in $\overline{BS}(m,\xi)$" du lemme 3.3.12(ii), nous pouvons effectivement calculer m comme dans la preuve du lemme 3.3.12. Si $m = 1$ alors la suite standard de η est la suite nulle qui est clairement calculable. Supposons que $m > 1$. Nous déterminons les entiers k de $\{0,\ldots,m-1\}$ pour lesquels le mot $w_{1,k}(a,b)$ est trivial dans $\overline{BS}(m,\xi)$ en résolvant le problème du mot dans $\overline{BS}(m,\xi)$. Le lemme 3.3.13(i) montre qu'il n'existe qu'un seul k de ce type et que $d = pgcd(m,k)$. Nous avons ainsi une procédure effective pour le calcul de d et donc pour le calcul de m_1. Si $|m_1| = 1$, alors $\eta = 0$ et la suite standard de η est effectivement calculable. Supposons maintenant que $m_1 > 1$. Nous savons par le lemme 3.3.14 que le sous-groupe marqué de $\overline{BS}(m,\xi)$ engendré par (a, b^d) est égal à $\overline{BS}(m_1,\eta)$. En appliquant le lemme 3.3.13(ii) à ce groupe, nous déterminons l'unique entier η_n de $\{0,\ldots,|m_1|^n - 1\}$ tel que $\eta \equiv \eta_n \,(\,mod\, m_1^n \mathbb{Z}_{m_1})$ pour chaque $n \geq 1$. En effet, il suffit de tester si $w_{n,k}(a,b^d)$ est trivial ou non dans $\overline{BS}(m_1,\eta)$ pour chaque k dans $\{0,\ldots,|m_1|^n - 1\}$. La démonstration est alors terminée. □

En combinant le corollaire 3.3.9 et la proposition 3.3.1, nous obtenons :

Théorème 3.3.15. *Soit m dans $\mathbb{Z}^*$ et soit ξ dans $\mathbb{Z}_m$. Nous posons $d := pgcd(m,\xi)$ et nous écrivons $m = m_1 d$. Sont équivalents :*
(i) *le problème du mot est résoluble dans $\overline{BS}(m,\xi)$;*
(ii) *le problème de conjugaison est résoluble dans $\overline{BS}(m,\xi)$;*
(iii) *les entiers $|m|$ et d sont effectivement calculables et la suite convergente standard associée à η est récursive.*

Théorème 3.3.16. *Le groupe $\overline{BS}(m,\xi)$ est à classes de conjugaison infinies et est intérieurement moyennable.*

Ce dernier résultat repose sur

Théorème 3.3.17. [Sta06b, Thm. A.0.1] *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $H \neq \Lambda$ ou $K \neq \Lambda$. Pour que Γ soit à classes de conjugaison infnies, il suffit que toute classe de conjugaison finie de Λ incluse dans $H \cap K \setminus \{1\}$ contienne un élément qui n'est un point fixe d'aucun homomorphisme ϕ^j (avec j dans $\mathbb{N}^*$).*

En particulier, si l'un au mois des groupes $\Lambda, H, K, H \cap K$ est CCI où si les homomorphismes ϕ^j (avec j dans $\mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non triviaux, le groupe Γ est à classes de conjugaison infinies.

Proposition 3.3.18. [Sta06b, Prop. A.0.2] *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$. Si pour tout $n \geq 1$ il existe des éléments non triviaux $h_0^{(n)}, h_1^{(n)}, \ldots, h_n^{(n)}$ dans $Z(H) \cap H \cap K$ tels que $h_i^{(n)} = \phi(h_{i-1}^{(n)})$ pour $i = 1,\ldots,n$, alors Γ est intérieurement moyennable.*

Démonstration du théorème 3.3.16. Le lemme suivant montre que les puissances de l'automorphisme de conjugaison par a n'ont aucun point fixe non trivial dans Z.

Lemme 3.3.19. *Le centralisateur de a^k dans $\overline{BS}(m,\xi)$ coïncide avec $\langle a\rangle$ pour tout k dans $\mathbb{Z}^*$.*

Démonstration du lemme 3.3.19. Soit k,l dans $\mathbb{Z}$ tels que $k\neq 0$ et $|l|\geq 2$. Soit w dans $\mathbb{F}_2$. Comme le centralisateur de a^k dans $BS(m,l)$ est $\langle a\rangle$ ([Mol91, Lemma]), l'identité $[a^k,w] \underset{\overline{BS}(m,\xi)}{=} 1$ est vérifiée si et seulement si $w \underset{BS(m,\xi_n)}{=} a^{\lambda_n}$ pour tout n suffisamment grand. Comme dans ce cas $\lambda_n=\sigma_a(w)$ pour tout n suffisamment grand, nous en déduisons que l'image de w dans $\overline{BS}(m,\xi)$ appartient à $\langle a\rangle$. □

Le théorème 3.3.17 implique alors que $\overline{BS}(m,\xi)=HNN(Z,Z^{(m)},Z^{(\xi)};a)$ est à classes de conjugaison infinies.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Posons

$$h_i^{(n)} := a^i b^{m^{n+1}} a^{-i} \text{ pour } i=0,\ldots,n.$$

Les hypothèses de la propositions 3.3.18 sont trivialement vérifiées pour cette famille d'éléments. □

Nous nous attachons maintenant à donner une présentation de $\overline{BS}(m,\xi)$ à partir des structures d'extensions HNN mises en évidence dans le théorème 3.3.1 et le corollaire 3.3.8. La présentation $\langle X\,|\,R\rangle$ est dite *minimale* si pour tout r de R, nous avons $\ker(\langle X\,|\,R\setminus\{r\}\rangle \twoheadrightarrow \langle X\,|\,R\rangle)\neq\{1\}$. Le théorème 3.3.1, combiné au lemme suivant, permet aussi de donner présentation minimale de $\overline{BS}(m,\xi)$:

Lemme 3.3.20. *Soit H un groupe engendré par $S=(h_0,h_1,\ldots)$, soit A et B deux sous-groupes H et soit $\phi : A\longrightarrow B$ un isomorphisme. Nous écrivons x pour h_0 et faisons l'hypothèse $(\mathcal{H})$ qu'il existe des mots w_i dans $\mathbb{F}_2$ tels que les relations $(\tau h\tau^{-1}=\phi(h), h\in A)$ engendrent le même sous-groupe distingué dans $H*\langle\tau\rangle$ que les relations $(h_i=w_i(x,\tau), i\geq 0)$.*

Soit $\langle S\,|\,r=1; r\in R\rangle$ une présentation minimale de H. Alors la présentation

$$\langle x,\tau\,|\,r_{x,\tau}=1; r\in R\rangle$$

où $r_{x,\tau}$ est le mot obtenu à partir de r en substituant $w_i(x,\tau)$ à h_i, est une présentation minimale de $G=HNN(H,A,B,\tau,\phi)$.

Démonstration. L'hypothèse $(\mathcal{H})$ assure que G est engendré par x et τ et que le morphisme identité f de $\mathbb{F}(x,\tau)$ induit un isomorphisme de G vers $\langle x,\tau\,|\,r_{x,\tau}=1; r\in R\rangle$. Soit s dans R. Supposons par l'absurde que f induise un isomorphisme de $\langle x,\tau\,|\,r_{x,\tau}; r\in R\rangle$ vers $\langle x,\tau\,|\,r_{x,\tau}; r\in R\setminus\{s\}\rangle$. Alors f induit un isomorphisme de $\left\langle S \;\middle|\; r=1; r\in R\right\rangle = H\subset G$ vers $\langle S\,|\,r=1; r\in R\setminus\{s\}\rangle$, ce qui contredit la minimalité de la présentation $\left\langle S \;\middle|\; r=1; r\in R\right\rangle$. □

Corollaire 3.3.21.

$$\overline{BS}(m,\xi)=\left\langle a,b \;\middle|\; [z_i(a,b),z_j(a,b)]=1; i,j\geq 0\right\rangle$$

avec

$$z_0(a,b) = b, z_1(a,b) = ab^m a^{-1}$$
$$\textit{et}$$
$$z_{i+1}(a,b) = az_i(a,b)b^{-r_{i+1}d}a^{-1} \textit{ pour tout } i \geq 1.$$

Cette présentation est minimale.

Démonstration. Il suffit de vérifier les conditions du lemme 3.3.20 pour $G = HNN(Z, Z^{(m)}, Z^{\xi}, a)$. Au regard des corollaires 3.3.7 et 3.3.8, l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est vérifiée pour la suite de mots : $z_0(a,b) = b, z_1(a,b) = ab^m a^{-1}, z_2(a,b) = a^2 b^m a^{-1} b^{-r_1 d} a^{-1}, \ldots$ définie dans la démonstration du lemme 3.3.3.
Comme $\langle z_0, z_1, \ldots \mid [z_i, z_j] = 1; i,j \geq 0\rangle$ est trivialement une présentation minimale de Z, la conclusion suit. □

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, nous posons $A_n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Proposition 3.3.22. *Soit m_1, d dans $\mathbb{Z}^*$, $m = m_1 d$ et soit $(r_i)_i$ une suite d'entiers positifs tels que $r_i \in \{0, \ldots, |m_1| - 1\}$. Soit*

$$G := \big\langle a, b \;\big|\; [z_i(a,b), z_j(a,b)] = 1; i,j \geq 0 \big\rangle$$

avec

$$z_0(a,b) = b, z_1(a,b) = ab^m a^{-1}$$
$$\textit{et}$$
$$z_{i+1}(a,b) = az_i(a,b)b^{-r_{i+1}d}a^{-1} \textit{ pour tout } i \geq 1.$$

Alors il existe ξ dans $\mathbb{Z}_m$ tel que $G = BS(m, \xi)$.

Démonstration de la proposition 3.3.22. Nous commençons par montrer :

Lemme 3.3.23. *L'application $R : \eta \longmapsto (r_i(\eta))_i$ est un homémorphisme de $\mathbb{Z}_{m_1}$ sur $\Pi_{i=1}^{\infty} A_{m_1}$ muni de la topologie produit d'espaces discrets.*

Démonstration du lemme 3.3.23. Remarquons d'abord que R est continue et injective en vertu des propositions 3.2.8 et 3.2.9. Puisque $\mathbb{Z}_{m_1}$ et $\Pi_{i=0}^{\infty} A_{m_1}$ sont compacts, il nous suffit de prouver que l'image de R est dense. Observons à cet effet que la restriction de R à $A_{m_1^k}$ induit une bijection de $A_{m_1^k}$ vers $\Pi_{i=1}^{k} A_{m_1}$ pour tout $k \geq 1$. Cela est dû au fait que R est injective et que ces deux ensembles finis ont le même cardinal. □

Fin de la démonstration de la proposition 3.3.22
Nous considérons alors l'antécédent η de la suite $(r_i)_i$ par R puis un antécédent ξ quelconque de η par π. Pour ce choix de ξ, le groupe marqué $\overline{BS}(m, \xi)$ admet la présentation qui définit G en vertu du théorème 3.1.1. □

Nous terminons ce chapitre en déterminant la longueur minimale des relations de la présentation du théorème 3.1.8. Le *tour de taille d'un groupe marqué* (G, S) est la longueur minimale des mots non triviaux de $\mathbb{F}(S)$ dont l'image est triviale dans G. Les résultats d'Yves Stalder [Sta06a] nous permettent de calculer facilement le tour de taille de $\overline{BS}(m, \xi)$.

Proposition 3.3.24. *Soit $\overline{g}_m$ le tour de taille de $\overline{BS}(m,\xi)$. Nous avons*

$$\overline{g}_m = 2|m| + 6$$

qui est la longueur du mot $w_{0,0}(a,b) = [ab^m a^{-1}, b]$.

Démonstration. Par la proposition 2 de [Sta06a], le tour de taille de $BS(m,n)$ est

$$g_{m,n} = \min\{|m| + |n| + 2, 2|m| + 6, 2|n| + 6\}$$

et coïncide avec la longueur de l'un au moins des trois mots

$$r_{m,n}(a,b) = ab^m a^{-1} b^{-n}, v_m(a,b) = w_{0,0}(a,b) = ab^m a^{-1} bab^{-m} a^{-1} b^{-1}$$

$$\text{and } w_n(a,b) = a^{-1} b^n aba^{-1} b^{-n} ab^{-1}$$

de longueurs respectives $|m| + |n| + 2, 2|m| + 6$ and $2|n| + 6$. Considérons une suite $(BS(m,\xi_n))_n$ de limite $\overline{BS}(m,\xi)$. Pour tout n suffisamment grand, le tour de taille de $\overline{BS}(m,\xi)$ est le même que celui de $BS(m,\xi_n)$. Puisque les longueurs de $r_{m,n}(a,b)$ et $w_n(a,b)$ tendent toutes deux vers l'infini quand n tend vers l'infini, le tour de taille de $BS(m,\xi_n)$ est la longueur de $v_m(a,b)$, c'est-à-dire $2|m| + 6$ pour tout n assez grand. Cette longueur est aussi le tour de taille de $\overline{BS}(m,\xi)$. $\square$

Chapitre 4

Limites de groupes diédraux

Les preuves des résultats exposés dans ce chapitre figurent dans l'annexe C dont le texte est rédigé en anglais en vue d'être soumis à publication. Les espaces $\mathcal{M}_m$ et $\mathcal{M}$ sont définis au chapitre 1. Notre motivation est :

Problème. [dlH00, CG05] *Décrire l'adhérence des groupes finis dans $\mathcal{M}$.*

Nous décrivons l'adhérence des classes de groupes finis les plus élémentaires : les groupes cycliques et diédraux finis. Nous caractérisons les groupes limites par leur classe d'isomorphisme et leur théorie universelle. Nous utilisons les liens entre topologie et logique mis en évidence par Champetier et Guirardel [CG05] dans leur nouvelle approche des groupes limites de Sela [Sel01]. Nous donnons aussi une description topologique de l'adhérence des groupes diédraux dans l'espace $\mathcal{M}_m$ des groupes marqués à m générateurs.

Soit n dans $\{1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Nous définissons le groupe diédral $\mathbb{D}_{2n} := \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$ (nous ommettons la relation $b^n = 1$ lorsque $n = \infty$). Si n est fini, alors $\mathbb{D}_{2n}$ est un groupe fini d'ordre $2n$. Les groupes $\mathbb{D}_1$ (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) et $\mathbb{D}_4$ (qui est isomorphe au Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) sont les seuls groupes diédraux abéliens. Si $3 \leq n < \infty$, alors $\mathbb{D}_{2n}$ est isomorphe au groupe des isometries euclidiennes d'un polygone régulier P_n à n côtés (toute fonction appliquant a sur une réflexion et b sur une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, la réflexion et la rotation préservant toutes deux P_n, s'étend en un unique isomorphisme de $\mathbb{D}_{2n}$ vers $Isom(P_n)$). Nous pouvons identifier dans ce cas $\{1, b, \ldots, b^{n-1}\}$ avec le groupe des rotations préservant P_n et $\{a, ab, \ldots, ab^{n-1}\}$ avec l'ensemble des réflexions préservant P_n. Si $n \geq 3$ alors le centre $Z(\mathbb{D}_{2n})$ a deux éléments quand n est pair (1 et $b^{n/2}$), il est trivial quand n est impair. Pour tout $n < \infty$, le sous-groupe $\langle b \rangle$ engendré par b est un sous-groupe distingué d'ordre n sur lequel $\langle a \rangle$ agit par conjugaison. Ainsi $\mathbb{D}_{2n}$ est isomorphe au produit semidirect $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la multiplication par -1. Le groupe diédral infini $\mathbb{D}_\infty$ a un centre trivial et est isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Tout quotient propre de $\mathbb{D}_\infty$ est un groupe diédral fini et tout groupe diédral est un quotient de $\mathbb{D}_\infty$.

Sauf mention explicite du contraire, les limites de groupes que nous considérons sont des limites dans $\mathcal{M}$. Soit P une propriété de groupe. Un groupe G est *pleinement résiduellement* P si pour toute partie finie F de $G \setminus \{1\}$ il existe un groupe H ayant P et un homomorphisme de G vers H qui n'envoie aucun des éléments de F sur l'élément trivial. Le lecteur pourra se reporter au chapitre C.2 pour les définitions des notions intervenant dans notre premier théorème (théorie universelle $Th_\forall(G)$ de G, ultra-filtre and ultra-produit). Les limites abéliennes de groupes diédraux dans $\mathcal{M}$ sont aisément identifiables : ces sont les groupes marqués abstraitement isomorphes à $\mathbb{D}_2$ ou $\mathbb{D}_4$ (Chapitre C.2). Nous donnons dans le chapitre C.4 la démonstration de la caractérisation suivante des limites non abéliennes :

Théorème 4.1 (Th. C.4.1). *Soit G un groupe de type fini non abélien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(lim) *G est une limite de groupe diédraux ;*

(res) *G est pleinement résiduellement diédral ;*

(iso) *G est isomorphe à un produit semidirect $A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où A est une limite de groupes cycliques sur laquelle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par multiplication par -1 ;*

($Th_\forall$) $Th_\forall(G) \supset \bigcap_{n\geq 3} Th_\forall(\mathbb{D}_{2n})$ *;*

($\Pi/\mathfrak{U}$) *G est isomorphe à un sous-groupe de $\left(\prod_{n\geq 3} \mathbb{D}_{2n}\right)/\mathfrak{U}$ pour un certain ultra-filtre $\mathfrak{U}$ sur $\mathbb{N}$.*

Notons que la proposition C.4.2 montre que les limites de groupes cycliques sont les groupes abéliens de type fini dont le sous-groupe de torsion est cyclique.

Nous désignons par ω le plus petit ordinal infini, *i.e.* l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs muni de son ordre naturel. Finalement, nous décrivons au chapitre C.5 l'ensemble des limites à m générateurs de groupes diédraux :

Théorème 4.2 (Th. C.5.2). *L'adhérence $\mathcal{D}_m$ des groupes diédraux marqués dans $\mathcal{M}_m$ est homéomorphe à $\omega^{m-1}(2^m-1)+1$ muni de la topologie de l'ordre.*

En d'autres termes, $\mathcal{D}_m$ est l'union disjointes de $2^m - 1$ copies de $\overline{\mathbb{N}}^{m-1}$ où $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est la compactification d'Alexandrov de $\mathbb{N}$. Nous utilisons un théoreme de Mazurkiewicz et Sierpinski [MS20] sur les invariants de Cantor-Bendixson des espaces dénombrables compacts pour démontrer notre dernier résultat.

Chapitre 5

Estimations de dimensions

Ce chapitre présente des estimations de dimensions de sous-espaces particuliers de l'espace des groupes à m générateurs. Les énoncés des résultats principaux figurent dans le sous-chapitre 5.1. Ils ont fait l'objet d'une publication (annexe D). Nous y prouvons que la dimension de Minkowski de l'espace des groupes à m générateurs est infinie pour tout $m \geq 2$ en exhibant des sous-ensembles de groupes marqués à petite simplification dont les dimensions de Minkowski sont arbitrairement grandes. Nous donnons une estimation des dimensions de Minkowski de sous-espaces de groupes à un relateur. Nous démontrons enfin que les dimensions de Minkowski du sous-espace des groupes commutatifs marqués et d'un ensemble de Cantor défini par Grigorchuk sont nulles.

Les notions d'ultra-métrique, de dimensions de Minkowski et de Hausdorff sont exposées dans les sous-chapitres 5.2 et 5.3. Nous y décrivons d'abord une classe d'ultra-métriques sur l'ensemble des sous-groupes distingués d'un groupe dénombrable (Ch. 5.2). Nous exposons conjointement certaines propriétés élémentaires des recouvrements par des boules d'un espace ultra-métrique. Nous donnons enfin les définitions accompagnées de quelques exemples des dimensions métriques de Hausdorff et de Minkowski (Ch. 5.3).

5.1 Résultats principaux

L'étude de la généricité de différentes classes de groupes a donné lieu à de nombreux travaux depuis le théorème de généricité des groupes hyperboliques énoncé par Gromov [Gro87]. Un nouvel aspect dans la caractérisation de cette généricité a été développé par Champetier [Cha00] en considérant l'espace topologique des groupes marqués à m générateurs et les catégories de Baire de parties spécifiques de cet espace.

Dans l'idée de caractériser cette généricité d'un point de vue métrique et de mesurer l'importance relative de certaines classes de groupes, on s'intéresse ici à l'estimation des dimensions de Minkowski et de Hausdorff de l'espace des groupes marqués à m générateurs et de certaines de ses parties, qu'on munit de la métrique employée par Champetier [Cha00].

Nous décrivons dans un premier temps un plongement isométrique naturel de l'espace des groupes marqués à m générateurs dans un Cantor dont nous montrons que la dimension de Hausdorff est infinie.

Proposition 5.1.1 (Cor. D.4.7). *Soit $\mathbb{F}_m$ un groupe libre de rang m et soit $\mathcal{P}(\mathbb{F}_m)$ l'ensemble de ses parties. Si $m \geq 2$ alors $\dim_H \mathcal{P}(\mathbb{F}_m) = \infty$.*

Nous considérons ensuite la partie $PS = PS(m, k, \lambda)$ formée des groupes à k relateurs de même longueur vérifiant la condition de petite simplification $C'(\lambda)$:

Théorème 5.1.2 (Th. D.5.1). *Lorsque $m \geq 2$ et $\lambda \in]0, \frac{1}{6}]$, nous avons l'encadrement des dimensions inférieure et supérieure de Minkowski suivant*

$$k \log_2(2m-1) \leq \underline{\dim} PS \leq \overline{\dim} PS \leq \frac{k}{1-3\lambda} \log_2(2m-1).$$

Corollaire 5.1.3 (Cor. D.5.3). *La dimension de Minkowski inférieure de l'espace des groupes marqués à m générateurs ($m \geq 2$) est infinie.*

Nous introduisons après cela la partie $UR = UR(m, q)$ des groupes à un relateur et dont le relateur est une puissance q-ème, partie pour laquelle nous montrons le

Théorème 5.1.4 (Th. D.6.1). *Lorsque $q \geq 2$, nous avons l'encadrement $\frac{\log_2(2m-1)}{q} \leq \underline{\dim} UR \leq \overline{\dim} UR \leq \frac{\log_2(2m-1)}{q-1}$.*

Dans le cas de $m = 4$ générateurs, nous nous intéressons au sous-espace $\mathfrak{B}$ défini par Grigorchuk [Gri84] dont nous rappellons en détail la construction au chapitre D.7. Pour cet espace nous montrons

Théorème 5.1.5 (Th. D.7.2). *La dimension de Minkowski supérieure de l'espace $\mathfrak{B}$ est nulle.*

Nous montrons enfin le

Théorème 5.1.6 (Th. D.8.1). *La dimension de Minkowski supérieure du sous-espace des groupes commutatifs est nulle.*

5.2 Espaces ultra-métriques

Définition 5.2.1. *Une distance d sur un ensemble E vérifie l'*inégalité ultra-métrique *si*

$$d(x, z) \leq \max \{d(x, y), d(y, z)\}, \text{ pour tout } x, y \text{ et } z \text{ de } E.$$

Soit G un groupe de type fini et soit X un système de générateurs de G. Soit w dans G. L'entier $|w| := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, w = x_1 \dots x_n,\, x_i^{\pm 1} \in X \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$ est *la longueur de w relativement à X*. Nous écrivons $B_X(n)$ pour l'ensemble des éléments de G dont la longueur relativement à X est inférieure ou égale à n. Nous désignons par $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G. Nous définissons sur $\mathcal{P}(G)$ la distance ultra-métrique $d_{\mathcal{P}}$ à partir de la "valuation"

$$\nu(A, B) = \inf\{|w| \,|\, w \in A \triangle B\}$$

pour des parties A et B de G. Nous posons alors $d_{\mathcal{P}}(A, B) = 2^{-\nu(A,B)}$.

Soit G un groupe dénombrable et soit $S = (g_n)_n$ est une suite de générateurs de G. Nous écrivons G comme la réunion strictement croissante des sous-groupes de type fini $G_n := \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ munis de $S_n = (g_1, \dots, g_n)$. La limite inductive $\mathcal{L}$ des espaces $\mathcal{P}(G_n)$ est naturellement munie d'une distance qui étend celles définies ci-dessus sur les ensembles $\mathcal{P}(G_n)$ pour tout n. La complétion de $\mathcal{L}$ pour cette distance s'identifie naturellement à $\mathcal{P}(G)$ muni du prolongement $d_{\mathcal{P}}$ de cette distance. Il est immédiat de vérifier que la topologie induite par $d_{\mathcal{P}}$ sur $\mathcal{P}(G)$ est aussi celle de la topologie produit sur $\{0, 1\}^G$ où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète. Clairement, $(\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$ est un espace de Cantor si G est infini et un espace discret fini sinon. Nous désignons par $d_{\mathcal{N}}$ la métrique induite par $d_{\mathcal{P}}$ sur l'ensemble $\mathcal{N}(G)$ des sous-groupes distingués de G. Lorsque $G = \mathbb{F}_m$, nous écrivons d_m au lieu de $d_{\mathcal{P}}$. Nous identifions $\mathcal{M}_m$ à $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$.

Nous définissons maintenant les quantités caractéristiques sur lesquelles reposent les notions de dimensions métriques de Minkowski : les cardinaux des recouvrements par des boules de rayons identiques. Les lemmes 5.2.3 et 5.2.4 ci-dessous soulignent la spécificité, fort agréable, du cadre ultra-métrique dans lequel nous plaçons l'étude de $\mathcal{M}_m$. Deux points d'un espace métrique sont *ε-distinguables* si la distance qui les sépare est strictement supérieure à ε. Un espace *précompact* est un espace métrique qui possède pour tout $\varepsilon > 0$ un recouvrement fini par des boules fermées de rayon ε.

Notation 5.2.2. *Soit (E, d) un espace métrique précompact. Nous désignons par $N(E, \varepsilon)$ le minimum des cardinaux des recouvrements de E par des boules fermées de rayon ε. Nous désignons par $P(E, \varepsilon)$ le nombre maximum de boules fermées de rayon ε disjointes.*

Lemme 5.2.3. *Soit (E, d) un espace ultra-métrique compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique recouvrement fini minimal $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ de E par des boules fermées de rayon ε, c'est-à-dire tel qu'aucune sous-famille propre de $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ n'est un recouvrement de E. De plus ce recouvrement est une partition et nous avons $|\mathcal{F}(E, \varepsilon)| = N(E, \varepsilon) = P(E, \varepsilon)$. En outre, $P(E, \varepsilon)$ est égal au nombre maximal de points ε-distinguables dans E.*

Démonstration. Le résultat est immédiat une fois que l'on a remarqué que deux boules d'un espace ultra-métrique sont soit disjointes soit comparables pour l'inclusion. □

Lemme 5.2.4. *Soit G un groupe de type fini muni d'un système ordonné de générateurs X. Soit $B_X(n)$ l'ensemble des éléments de G dont la longueur relativement à X est inférieure ou égale à n. Si $(E,d) = (\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$ ou $(\mathcal{N}(G), d_{\mathcal{N}})$ alors, pour tout entier $n \geq 0$, $N(E, 2^{-n})$ est le nombre de parties de $B_X(n)$ qui s'obtiennent comme l'intersection d'un élément de E avec cette boule.*

Démonstration. Supposons que $(E,d) = (\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$. Donnons nous $n \geq 0$. Ayant posé $\varepsilon = 2^{-n}$, considérons le sous-ensemble $P_n = \mathcal{P}(B_X(n))$ de E formé des parties de $B_X(n)$. Alors, l'ensemble des boules centrées en les points de P_n et de rayon ε est un recouvrement de E par des boules disjointes. C'est donc le recouvrement minimal $\mathcal{F}(E,\varepsilon)$ d'après le lemme 5.2.3. En effet, deux centres x_i et x_j distincts vérifient $d(x_i, x_j) > \varepsilon$. Si les boules associées n'étaient pas disjointes, elles seraient égales à une même boule de diamètre strictement supérieur à ε. Ceci est absurde puisque le diamètre d'une boule de rayon ε d'un espace ultra-métrique n'excède pas ε. Lorsque $(E,d) = (\mathcal{G}(G), d_{\mathcal{N}})$, la preuve reste en tout point semblable. □

5.3 Dimensions métriques. Exemples

Les dimensions de Minkowski et de Hausdorff sont des dimensions métriques qui renseignent sur les possibilités de plongement dans un espace métrique standard tel qu'un espace euclidien ou hyperbolique. Pour les notions de base concernant les dimensions métriques, nous nous réfèrons au livre de Falconer [Fal03].

Nous désignons par (E,d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, $diam(A)$ est le diamètre de A.

Définition 5.3.1. *Les dimensions de Minkowski inférieure et supérieure d'un espace métrique précompact (E,d) se définissent respectivement par les formules*

$$\underline{\dim} E = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E,\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$
$$\overline{\dim} E = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E,\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Ces dimensions métriques sont aussi connues sous les noms de dimensions fractales ou “box-counting dimensions” inférieure et supérieure.

Définition 5.3.2. *La dimension de Hausdorff d'un ensemble $A \subset E$ est*

$$\dim_H A = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$
$$= \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\},$$

où $\mathcal{H}^s$ est la mesure de Hausdorff de dimension s

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} diam(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ E_i \subset E,\ diam(E_i) \leq \delta \right\}.$$

Les propriétés élémentaires suivantes sont vérifiées lorsque dim désigne $\underline{\dim}$, $\overline{\dim}$ ou $\dim_H$ (voir [Fal03, Ch.2]).

Monotonie : Si $E_1 \subset E_2$ alors $\dim E_1 \leq \dim E_2$.
Ensemble fini : Si E est fini alors $\dim E = 0$.

La dimension de Minkowski supérieure est *finiment stable*, c'est-à-dire

$$\overline{\dim} \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \max_{1 \leq i \leq n} \overline{\dim} E_i \,, \text{ pour } E_i \subset E, i = 1, 2, \ldots, n,$$

alors que la dimension de Hausdorff est *dénombrablement stable*, c'est-à-dire

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \sup_{i \geq 1} \dim_H E_i \,, \text{ pour } E_i \subset E, i = 1, 2, \ldots.$$

La dimension de Hausdorff d'un ensemble dénombrable est donc nulle. Si dim désigne l'une des dimensions de Minkowski, alors $\dim A = \dim \overline{A}$ où $\overline{A}$ est l'adhérence de $A \subset E$. Pour cette raison, dimension de Hausdorff et dimensions de Minkowski peuvent être très différentes.

Proposition 5.3.3. [Mat95] *Pour tout espace métrique précompact E,*

$$\dim_{top} E \leq \dim_H E \leq \underline{\dim} E \leq \overline{\dim} E.$$

où $\dim_{top}$ désigne la dimension topologique ou dimension de recouvrement de Lebesgue (voir [Pea75, Ch. 3] *pour une définition).*

Nous consacrons la fin de cette partie à quelques exemples.

Si E est la boule unité d'un espace vectoriel normé réel de dimension n, munie de l'une quelconque de ses normes, alors ses dimensions de Hausdorff et de Minkowski sont toutes égales à n qui est aussi sa dimension topologique. Si E est l'espace triadique de Cantor, construit dans le segment $[0, 1]$ muni de la métrique euclidienne, ses dimensions de Minkowski et de Hausdorff valent toutes trois $\log(2)/\log(3)$ alors que sa dimension topologique est nulle.
Si $E = [0, 1]$, muni de la métrique euclidienne, et si α est un réel strictement positif, alors pour $A \subset E$,

(1) $\underline{\dim} A = \overline{\dim} A = \frac{1}{1+\alpha}$ lorsque $A = \{\frac{1}{n^\alpha}\}_{n \geq 1}$,
(2) $\underline{\dim} A = \overline{\dim} A = 1$ lorsque $A = \{\frac{1}{\log n}\}_{n \geq 2}$,
(3) $\underline{\dim} A = \overline{\dim} A = 0$ lorsque $A = \{2^{-n}\}_{n \geq 0}$.

Dans chacun de ces cas, la dimension de Hausdorff est nulle. Ces résultats s'obtiennent directement à partir de la définition. Le troisième cas suggère que la dimension de Minkowski supérieure de l'ensemble des valeurs d'une suite qui converge vers son unique point d'accumulation à vitesse exponentielle, est nulle. C'est le cas dans l'espace $\mathcal{N}(\mathbb{Z})$ où $d_1(n\mathbb{Z}, \{0\}) = 2^{-n}$ et où le sous-groupe distingué trivial est l'unique point d'accumulation de cet espace. De manière générale, majorer la dimension de Minkowski supérieure de l'ensemble des valeurs d'une suite convergeant vers son unique point d'accumulation revient à estimer la vitesse de convergence de cette suite.

Annexe A

Isolated points in the space of groups

We investigate the isolated points in the space of finitely generated groups. We give a workable characterization of isolated groups and study their hereditary properties. Various examples of groups are shown to yield isolated groups. We also discuss a connection between isolated groups and solvability of the word problem.

Introduction

At the end of his celebrated paper "Polynomial growth and expanding maps" [Gro81], Gromov sketched what could be a topology on a set of groups. His ideas led to the construction by Grigorchuk of the space of marked groups [Gri84], where points are finitely generated groups with m marked generators. This "space of marked groups of rank m" $\mathcal{G}_m$ is a totally discontinuous compact metrizable space.

One of the main interests of $\mathcal{G}_m$ is to find properties of groups that are reflected in its topology. Various elementary observations in these directions are made in [CG05]: for instance, the class of nilpotent finitely generated groups is open, while the class of solvable finitely generated groups is not; the class of finitely generated orderable groups is closed, etc. Deeper results can be found about the closure of free groups (see [CG05] and the references therein) and the closure of hyperbolic groups [Cha00]. The study of the neighbourhood of the first Grigorchuk group has also proved to be fruitful [Gri84] in the context of growth of finitely generated groups.

An example of an open question about $\mathcal{G}_m$ ($m \geq 2$) is the following: does there exist a surjective continuous invariant: $\mathcal{G}_m \to [0, 1]$? On the other hand, it is known that there exists no real-valued injective measurable invariant [Cha00].

The aim of this paper is the study of the isolated points in $\mathcal{G}_m$, which we call *isolated groups*. It turns out that these groups have already occurred in a few papers [Neu73, Man82], without the topological point of view. They are introduced by B.H. Neumann [Neu73] as "groups with finite absolute presentation". It follows from a result of Simmons [Sim73] that they have solvable word problem, see the discussion in §A.3. However the only examples quoted in the literature are finite groups and finitely presented simple groups; we provide here examples showing that the class of isolated groups is considerably larger.

Let us now describe the paper. In Section A.1 we construct the space of finitely generated groups.

Here is an elementary but useful result about this topology:

Lemma 1. *Consider two marked groups $G_1 \in \mathcal{G}_{m_1}$, $G_2 \in \mathcal{G}_{m_2}$. Suppose that they are isomorphic. Then there are clopen (= open closed) neighbourhoods V_i, $i = 1, 2$ of G_i in $\mathcal{G}_{m_i}$ and a homeomorphism $\varphi : V_1 \to V_2$ mapping G_1 to G_2 and preserving isomorphism classes, i.e. such that, for every $H \in V_1$, $\varphi(H)$ is isomorphic to H (as abstract groups).*

This allows us to speak about the "space of finitely generated groups[1]" rather than "space of marked groups" whenever we study local topological properties.

In particular, to be isolated is an algebraic property of the group, i.e. independent of the marking. This bears out the terminology of "isolated groups".

In Section A.2, we proceed with the characterization of isolated groups. In a group G, we call a subset F a *discriminating subset* if every non-trivial normal subgroup of G contains an element of F, and we call G *finitely discriminable* if it has a *finite* discriminating subset. Finitely discriminable groups are introduced as "semi-monolithic groups" in [Man82].

Here is an algebraic characterization of isolated groups (compare with [Man82, Proposition 2(a)]).

Proposition 2. *A group G is isolated if and only if the two following properties are satisfied*

(*i*) *G finitely presented;*

(*ii*) *G is finitely discriminable.*

Since the class of finitely presented groups is well understood in many respects, we are often led to study finite discriminability.

Proposition 3. *The subspace of finitely discriminable groups is dense in the space of finitely generated groups.*

[1]This must *not* be viewed as the set of isomorphism classes of finitely generated groups, even locally. Indeed, an infinite family of isomorphic groups may accumulate at the neighbourhood of a given point (e.g. groups isomorphic to $\mathbb{Z}$ at the neighbourhood of $\mathbb{Z}^2$ [CG05, Example 2.4(c)]), and we certainly do not identify them. What we call "space of finitely generated groups" might be viewed as the disjoint union of all $\mathcal{G}_n$, but this definition is somewhat arbitrary; and is not needed since we only consider local properties.

In other words, the subspace of finitely discriminable groups is dense in $\mathcal{G}_m$ for all $m \geq 1$.

In Section A.3, we discuss the connection with the word problem. We call a finitely generated group G recursively discriminable if there exists in G a recursively enumerable discriminating subset (see Section A.3 for a more precise definition if necessary).

Proposition 2 has the following analog [Sim73, Theorem B].

Theorem 4. *A finitely generated group has solvable word problem if and only if it is both recursively presentable and recursively discriminable.*

This is a conceptual generalization of a well-known theorem by Kuznetsov stating that a recursively presentable simple group has solvable word problem.

Corollary 5. *An isolated group has solvable word problem.* □

The existence of certain pathological examples of finitely presented groups due to Miller III [Mil81] has the following consequence.

Proposition 6. *The class of groups with solvable word problem is not dense in the space of finitely generated groups. In particular, the class of isolated groups is not dense.*

In Section A.4 we explore the hereditary properties of finitely discriminable groups, and thus isolated groups. For instance we prove

Theorem 7. *The class of finitely discriminable (resp. isolated) groups is stable under:*

1) extensions of groups;

2) taking overgroups of finite index, i.e. if H is finitely discriminable (resp. isolated) and of finite index in G then so is G.

The proof of Theorem 7 is less immediate than one might expect. For instance it involves the classification of finitely discriminable abelian groups. We state a much more general result in Theorem A.4.1 (see also §A.5.6 for the case of wreath products).

Finally in Section A.5 we provide examples of isolated groups. First note that the most common infinite finitely generated groups are not finitely discriminable. For instance, if G is an infinite residually finite group, then for every finite subset $F \subset G - \{1\}$ there exists a normal subgroup of finite index N satisfying $N \cap F = \emptyset$. This prevents G from being finitely discriminable. On the other hand, Champetier [Cha00] has proved that the closure in $\mathcal{G}_n$ ($n \geq 2$) of the set of non-elementary hyperbolic groups, is a Cantor set and therefore contains no isolated point. We leave for record

Proposition 8. *Infinite residually finite groups and infinite hyperbolic groups are not finitely discriminable.* □

On the other hand, the simplest examples of isolated groups are finite groups. There are also finitely presented simple groups. But the class of isolated groups is considerably larger, in view of the following result, proved in §A.5.2:

Theorem 9. *Every finitely generated group is a quotient of an isolated group.*

This shows in particular that the lattice of normal subgroups of an isolated group can be arbitrarily complicated; for instance, in general it does not satisfy the descending/ascending chain condition.

Proposition 10. *There exists an isolated group that is 3-solvable and non-Hopfian*[2].

This is in a certain sense optimal, since it is known that finitely generated groups that are either nilpotent or metabelian (2-solvable) are residually finite [Hal59], and thus cannot be isolated unless they are finite. The example we provide to prove Proposition 10 (see §A.5.4) is a group that had been introduced by Abels [Abe79] as the first example of a non-residually finite (actually non-Hopfian) finitely presented solvable group. A variation on this example provides (recall that a countable group G has Kazhdan's Property T if every isometric action of G on a Hilbert space has a fixed point):

Proposition 11. *There exists an infinite isolated group with Kazhdan's Property T.*

We provide some other examples. One of them (see §A.5.3) is Houghton's group, a group that is an extension of the group of finitely supported permutations of a countable set, by $\mathbb{Z}^2$. In particular, this group is elementary amenable but non virtually solvable.

Another one (see §A.5.7) is a group exhibited by Grigorchuk [Gri98], which is the first known finitely presented amenable group that is not elementary amenable. This is an ascending HNN extension of the famous "first Grigorchuk group", which has intermediate growth and is torsion; the latter is certainly not isolated since it is infinitely presented and is not finitely discriminable since it is residually finite. The fact that this group is isolated contradicts a conjecture by Stepin in [Gri98, §1], stating that every amenable finitely generated group can be approximated by elementary amenable ones.

Finally (see §A.5.8), some lattices in non-linear simple Lie groups provide examples of isolated groups that are extensions with infinite residually finite quotient and finite central kernel.

Throughout this article we use the following notation. If x and y are elements in a group G then

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}, x^y = y^{-1}xy.$$

[2] A group G is non-Hopfian if there exists an epimorphism $G \to G$ with non-trivial kernel.

Similarly if N and K are subgroups of G, then $[N,K]$ stands for the subgroup generated by $\{[n,k] \mid n \in N, k \in K\}$. Finally in any group G we denote by $Z(G)$ its centre.

Acknowledgment. We thank Avinoam Mann for pointing out some useful references.

A.1 The space of finitely generated groups

Let G be a group. We denote by $\mathcal{P}(G)$ the set of subsets of G and by $\mathcal{G}(G)$ the set of normal subgroups of G. We endow $\mathcal{P}(G)$ with the product topology through the natural bijection with $\{0,1\}^G$. Hence $\mathcal{P}(G)$ is a compact and totally discontinuous space.

Limits in $\mathcal{P}(G)$ have the following simple description, whose proof is straightforward and omitted.

Lemma A.1.1. *The net (A_i) converges to A in $\mathcal{P}(G)$ if and only if $A = \liminf A_i = \limsup A_i$, where $\liminf A_i = \bigcup_i \bigcap_{j \geq i} A_j$ and $\limsup A_i = \bigcap_i \bigcup_{j \geq i} A_i$.* $\square$

Since, for every net (N_i) of normal subgroups, $\liminf N_i$ is also a normal subgroup, the following proposition follows immediately from the lemma.

Proposition A.1.2. *The subset $\mathcal{G}(G)$ is closed in $\mathcal{P}(G)$.* $\square$

The space $\mathcal{G}(G)$ can be identified with the space of quotients of G, which we also call, by abuse of notation, $\mathcal{G}(G)$ (in the sequel it will always be clear when we consider an element of $\mathcal{G}$ as a normal subgroup or as a quotient of G). It is endowed with a natural order: $H_1 \preccurlyeq H_2$ if the corresponding normal subgroups N_1, N_2 satisfy $N_1 \supset N_2$.

The topology of $\mathcal{G}(G)$ has the following basis:

$$(\Omega_{r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_\ell}), \quad r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_l \in G,$$

where $\Omega_{r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_\ell}$ is the set of quotients of G in which each $r_i = 1$ and each $s_j \neq 1$. These are open and closed subsets.

If F_m is a free group of rank m with a given freely generating family, then $\mathcal{G}(F_m)$ is usually called the *space of marked groups on m generators* and we denote it by $\mathcal{G}_m$. An element in $\mathcal{G}_m$ can be viewed as a pair $(G,\mathcal{T})$ where G is an m-generated group and $\mathcal{T}$ is a generating m-tuple.

If G, H are any groups, every homomorphism $f : G \to H$ induces a continuous map $f^* : \mathcal{G}(H) \to \mathcal{G}(G)$, which is injective if f is surjective. The main features of the spaces $\mathcal{G}(G)$ is summarized in the following Lemma, which is essentially known (see [Cha00, Lemme 2.2 and Proposition 3.1]).

Lemma A.1.3.

(1) Let G be a group and H a quotient of G; denote by p the quotient map $G \to H$. Then the embedding $p^* : \mathcal{G}(H) \to \mathcal{G}(G)$ is a closed homeomorphism onto its image, which we identify with $\mathcal{G}(H)$. Moreover, the following are equivalent.

(i) $\mathcal{G}(H)$ is open in $\mathcal{G}(G)$.

(ii) H is contained in the interior of $\mathcal{G}(H)$ in $\mathcal{G}(G)$ (in other words: H has a neighbourhood in $\mathcal{G}(G)$ consisting of quotients of itself).

(iii) $\mathrm{Ker}(p)$ *is finitely generated as a normal subgroup of G.*

(2) If, in addition, G is a finitely presented group, then these are also equivalent to

(iv) H is finitely presented.

(3) Let G_1, G_2 be finitely presented groups, and consider quotients $H_i \in \mathcal{G}(G_i)$, $i = 1, 2$. Suppose that H_1 and H_2 are isomorphic groups. Then there exist finitely presented intermediate quotients $H_i \preccurlyeq K_i \preccurlyeq G_i$, $i = 1, 2$, and an isomorphism $\phi : K_1 \to K_2$, such that ϕ^* maps the point H_2 to H_1.

Note that Lemma 1 is an immediate consequence of Lemma A.1.3.

Proof. (1) is straightforward and left to the reader. (2) follows from (1) and the fact that if G is a finitely presented group and N a normal subgroup, then G/N is finitely presented if and only if N is finitely generated as a normal subgroup [Rot95, Lemma 11.84].

To prove (3), fix an isomorphism $\alpha : H_1 \to H_2$ and identify H_1 and H_2 to a single group H through ϕ. Take a finitely generated subgroup F_0 of the fibre product $G_1 \times_H G_2$ mapping onto both G_1 and G_2, and take a free group F of finite rank mapping onto F_0. Then the following diagram commutes.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[d] \\ G_1 \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

For $i = 1, 2$, let N_i denote the kernel of $F \to G_i$. Then F/N_1N_2 is a finitely presented quotient of both G_1 and G_2, having H as a quotient. If we do not longer identify H_1 and H_2, then F/N_1N_2 can be viewed as a quotient K_i of G_i, and the obvious isomorphism ϕ between K_1 and K_2 (induced by the identity of F) induces α. $\square$

It follows that every local topological consideration makes sense in a "space of finitely generated groups". Roughly speaking the later looks like a topological space. Its elements are finitely generated groups (and therefore do not make up a set). If G is a finitely generated group, then a neighbourhood of G

is given by $\mathcal{G}(H)$, where H is a finitely presented group endowed with a given homomorphism onto G. For instance, if $\mathcal{C}$ is an isomorphism-closed class of groups (as all the classes of groups we consider in the paper), then we can discuss whether $\mathcal{C}$ is open, whether it is dense.

A.2 Isolated groups

Proposition-Definition A.2.1. *Let G be a group. We say that G is* finitely discriminable *if it satisfies the following equivalent conditions.*

i) The trivial normal subgroup $\{1\}$ is isolated in $\mathcal{G}(G)$.

ii) The group G has finitely many minimal normal subgroups and any non-trivial normal subgroup contains a minimal one.

iii) There exists a finite discriminating subset *in G: this is a finite subset $F \subset G - \{1\}$ such that any non-trivial normal subgroup of G contains at least one element of F.*

Proof of the equivalences: ii) $\Rightarrow$ iii) Define F by taking a non-trivial element in each minimal normal subgroup.

iii) $\Rightarrow$ ii) Every non-trivial normal subgroup contains the normal subgroup generated by an element of F.

iii) $\Rightarrow$ i) Since F is finite, the set of normal subgroups with empty intersection with F is open in $\mathcal{G}(G)$; by assumption this set is reduced to $\{\{1\}\}$.

i) $\Rightarrow$ iii) We contrapose. For every finite subset $F \subset G - \{1\}$, consider a non-trivial normal subgroup N_F having empty intersection with F. Then $N_F \to \{1\}$ when F becomes large (that is, tends to $G - \{1\}$ in $\mathcal{P}(G)$). □

Proposition A.2.2. *A group G is isolated if and only if it is both finitely presentable and finitely discriminable.*

Proof. An isolated group is finitely presented: this follows from the implication (ii)$\Rightarrow$(iv) of Lemma A.1.3.

Suppose that G is finitely generated but not finitely discriminable. Then G is not isolated in $\mathcal{G}(G)$ (viewed as the set of quotients of G), hence is not isolated in the space of finitely generated groups.

Conversely suppose that G satisfies the two conditions. Since G is finitely presented, by the implication (iv)$\Rightarrow$(i) of Lemma A.1.3, $\mathcal{G}(G)$ is a neighbourhood of G in the space of finitely generated groups. Since G is finitely discriminable, it is isolated in $\mathcal{G}(G)$. Hence G is isolated. □

Proposition A.2.2 allows us to split the study of isolated groups into the study of finitely discriminable groups and finitely presented groups. These studies are in many respects independent, and it is sometimes useful to drop the finite presentability assumption when we have to find examples. However, these properties also have striking similarities, for instance:

Proposition A.2.3. *The classes of finitely discriminable and finitely presentable groups are both dense in the space of finitely generated groups.*

Proof. The case of finitely presentable groups is an observation by Champetier [Cha00, Lemme 2.2] (it suffices to approximate every finitely generated group by truncated presentations).

Let us deal with finite discriminability. If G is finite then it is finitely discriminable. Otherwise, for every finite subset F of $G - \{1\}$, consider a maximal normal subgroup N_F among those with empty intersection with F. Then G/N_F is finitely discriminated by the image of F, while the net (G/N_F) converges to G when F becomes large. □

Remark A.2.4. The proof above shows that more generally, every group G is approximable by finitely discriminable quotients in $\mathcal{G}(G)$.

In contrast, we show in the next paragraph that being isolated is not a dense property.

A.3 Isolated groups and the word problem

Roughly speaking, a sequence of words in a free group F of finite rank is *recursive* if it can be computed by finite algorithm; more precisely by an ideal computer, namely a Turing machine. See Rotman's book [Rot95, Chap. 12] for a precise definition. A subset $X \subset F$ is *recursively enumerable* if it is the image of a recursive sequence.

Proposition-Definition A.3.1. *Let G be a finitely generated group. We call a sequence (g_n) in G recursive if it satisfies one of the two equivalent properties:*

(1) There exists a free group of finite rank F, an epimorphism $p : F \to G$, and a recursive sequence (h_n) in F such that $p(h_n) = g_n$ for all n.

(2) For every free group of finite rank F and every epimorphism $p : F \to G$, there exists a recursive sequence (h_n) in F such that $p(h_n) = g_n$ for all n.

Proof. We have to justify that the two conditions are equivalent. Note that (2) is a priori stronger. But if (1) is satisfied, then, using Tietze transformations to pass from a generating subset of G to another, we obtain that (2) is satisfied. □

Definition A.3.2. A finitely generated group G is *recursively discriminable* if there exists a recursively enumerable discriminating subset: there exists a recursive sequence (g_n) in $G - \{1\}$ such that every normal subgroup $N \neq 1$ of G contains some g_n.

Remark A.3.3. A related notion, namely that of terminal groups, is introduced by A. Mann in [Man82, Definition 2]. A finitely generated group $G = F/N$, with F free of finite rank, is *terminal* if $F - N$ is recursively enumerable. Clearly this implies that G is recursively discriminable, but the converse is false: indeed, there are only countably many terminal groups, while there are $2^{\aleph_0}$ non-isomorphic finitely generated simple groups [LS77, Chap. IV, Theorem 3.5]. Nevertheless, there exist terminal groups with unsolvable word problem [Man82, Proposition 1].

Let G be a finitely generated group, and write $G = F/N$ with F a free group of finite rank. Recall that G is recursively presentable if and only if N is recursively enumerable, and that G has solvable word problem if and only if both N and $F - N$ are recursively enumerable; that is, N is recursive.

The following theorem was originally proved by Simmons [Sim73]. We offer here a much more concise proof of this result. It can be viewed as a conceptual generalization of a well-known theorem of Kuznetsov [LS77, Chap. IV, Theorem 3.6], which states that a recursively presentable simple group has solvable word problem.

Theorem A.3.1. *Let $G = F/N$ be a finitely generated group as above. Then G has solvable word problem if and only if it is both recursively presentable and recursively discriminable.*

Proof. The conditions are clearly necessary. Conversely, suppose that they are satisfied, and let us show that F/N has solvable word problem. Consider a recursive discriminating sequence (g_n) in $F - N$.

Let x belong to F, and let N_x be the normal subgroup generated by N and x; it is recursively enumerable. Set $W_x = \{y^{-1}g_n \mid y \in N_x \; n \in \mathbb{N}\}$. Then W_x is recursively enumerable. Observe that $1 \in W_x$ if and only if $x \notin N$. Indeed, if $1 \in W_x$, then $g_n = y$ for some $y \in N_x$, and since $g_n \notin N$ this implies that $x \notin N$. Conversely if $x \notin N$, then N_x projects to a non-trivial subgroup of F/N, and hence contains one of the g_n's. So the algorithm is the following: enumerate both N and W_x: either x appears in N, or 1 appears in W_x and in this case $x \notin N$. □

Our initial motivation in proving Theorem A.3.1 is the following corollary.

Corollary A.3.4. *An isolated group has solvable word problem.* □

There exists an alternative short proof of the corollary using model Theory (see the proof of the analogous assertion in [Rip82]). More precisely, groups with solvable word problem are characterized by Rips [Rip82] as isolated groups for some topology on $\mathcal{G}_m$ stronger than the topology studied here, making the corollary obvious.

Since the class of isolated groups is the intersection of the classes of finitely presented and finitely generated finitely discriminable groups and since these classes are both dense, it is natural to ask whether the class of isolated groups is itself dense. This question was the starting point of our study. However it has a negative answer.

Proposition A.3.5. *The class of finitely generated groups with solvable word problem is not dense.*

Corollary A.3.6. *The class of isolated groups is not dense.* □

Proof of Proposition A.3.5. C. Miller III has proved [Mil81] that there exists a non-trivial finitely presented group G such that the only quotient of G having solvable word problem is $\{1\}$ (and moreover G is SQ-universal, i.e. every countable group embeds in some quotient of G). Thus, using Lemma A.1.3, G is not approximable by isolated groups. □

This leaves many questions open.

Question A.3.1. *Is every finitely generated group with solvable word problem a limit of isolated groups?*

Question A.3.2. *Is every word hyperbolic group a limit of isolated groups?*

Note that a word hyperbolic group has solvable word problem. The following stronger question is open: is every word hyperbolic group residually finite?

Question A.3.3. *Is every finitely generated solvable group a limit of isolated groups?*

Note that there exist finitely presented solvable groups with unsolvable word problem [Kha81]; this suggests a negative answer.

Let G be a group. An *equation* (resp. *inequation*) over G is an expression "$m = 1$" (resp. "$m \neq 1$") where $m = m(x_1, \ldots, x_n)$ is an element of the free product of G with the free group over unknowns $x_1, \ldots, x_n$. A solution of an (in)equation in G is a n-uple $(g_1, \ldots, g_n)$ of G such that $m(g_1, \ldots, g_n) = 1$ (resp. $m(g_1, \ldots, g_n) \neq 1$). A system of equations and inequations over a group G is *coherent* if it has solution in some overgroup of G. A group Ω is *existentially closed* if every coherent finite system of equations and inequations over Ω has a solution in Ω.

Using free products with amalgamation, one can prove [Sco51] that every group G embeds in an existentially closed group, which can be chosen countable if G is so. The *skeleton* of a group G is the class of finitely generated groups embedding in G. Skeletons of existentially closed groups have been extensively studied (see [HS88]). What follows is not new but merely transcribed in the language of the space of finitely generated groups. Our aim is to prove that this language is relevant in this context.

The link with isolated groups is given by the following observation [Neu73, Lemma 2.4]: a given isolated group embeds in every existentially closed group. This is contained in the following more general result.

Proposition A.3.7. *If Ω is an existentially closed group, then its skeleton is dense in the space of finitely generated groups.*

Proof. Fix an existentially closed group Ω. Let F be a free group of rank n, and $g_1, \ldots, g_n$ be generators. Choose elements $m_1, \ldots, m_d, \mu_1, \ldots, \mu_\delta$ in F. Consider the set $\mathcal{S}$ of quotients of F in which $m_1, \ldots, m_d = 1$ and $\mu_1, \ldots, \mu_\delta \neq 1$. Subsets of this type make up a basis of open (and closed) subsets in $\mathcal{G}(F)$. To say that such a subset $\mathcal{S}$ is non-empty means that the system of equations and inequations

$$\begin{cases} m_1 = \cdots = m_d = 1 \\ \mu_1 = \cdots = \mu_\delta \neq 1 \end{cases}$$

is coherent. If this is the case, then it has a solution $(s_1, \ldots, s_n)$ in Ω. Thus some group in $\mathcal{S}$, namely the subgroup of Ω generated by $(s_1, \ldots, s_n)$, embeds in Ω. This proves that the skeleton of Ω is dense. □

Propositions A.3.5 and A.3.7 together prove that every existentially closed group contains a finitely generated subgroup with unsolvable word problem. On the other hand, Macintyre [Mac72] (see also [LS77, Chap. IV, Theorem 8.5]) has proved that there exist two existentially closed groups Ω_1, Ω_2 such that the intersection of the skeletons of the two is reduced to the set of groups with solvable word problem. Moreover, Boone and Higman [BH74] (see also [LS77, Chap. IV, Theorem 7.4]) have proved that every group with solvable word problem embeds in a simple subgroup of a finitely presented group; this easily implies ([Neu73] or [LS77, Chap. IV, Theorem 8.4]) that a finitely generated group with solvable word problem embeds in every existentially closed group.

We leave open the following question

Question A.3.4. *Does every finitely generated group with solvable word problem embed into an isolated group?*

Note that the stronger well-known question whether every finitely generated group with solvable word problem embeds in a finitely presented simple group is open.

A.4 Hereditary constructions for isolated groups

The two characterizing properties for isolated points, finite presentation and finite discriminability, are quite different in nature. The hereditary problem for finite presentation is classical, and in most cases is well understood. Therefore our results mostly deal with the hereditary problem for finite discriminability.

A.4.1 Extensions of groups

The analysis of extensions of isolated groups rests on the analysis of their centre. As the centre of a finitely discriminable group is itself finitely discriminable (see Lemma A.4.2 below), the analysis of the centre fits into the more general problem of understanding finitely discriminable abelian groups.

A group G is finitely cogenerated if it has a finite subset F having non-empty intersection with every non-trivial subgroup of G.

The class of finitely cogenerated groups is clearly contained in the class of finitely discriminable groups, but is much smaller; for instance, it is closed under taking subgroups, and therefore a finitely cogenerated group is necessarily torsion. However in restriction to abelian groups, the two classes obviously coincide.

We denote by C_{p^∞} the p-primary Prüfer group (also called quasi-cyclic): this is the direct limit of cyclic groups of order p^n when $n \to \infty$; it can directly be constructed as the quotient group $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$.

In [Yah62] Yahya characterizes finitely cogenerated (i.e. finitely discriminable) abelian groups.

Lemma A.4.1. *For an abelian group, the following are equivalent*

(i) G is finitely discriminable.

(ii) G is artinian: every descending sequence of subgroups stabilizes.

(iii) The three following conditions are satisfied

1. *G is a torsion group.*
2. *Its p-torsion $\{x \in G \mid px = 0\}$ is finite for all primes p.*
3. *G has non-trivial p-torsion for only finitely many primes p.*

(iv) G is a finite direct sum of finite cyclic groups and Prüfer groups. □

Lemma A.4.1 is useful even when we focus on finitely generated groups, in view of the following fact.

Lemma A.4.2. *If G is a finitely discriminable group, then its centre is finitely discriminable.*

Proof. This immediately follows from the fact that every subgroup of the centre of a group G is normal in G. □

The converse of Lemma A.4.2 is true in the case of nilpotent groups, and more generally hypercentral groups. Recall that, in a group G, the transfinite ascending central series (Z_α) is defined as follows: Z_1 is the centre of G, $Z_{\alpha+1}$ is the preimage in G of the centre of G/Z_α, and $Z_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} Z_\alpha$ if λ is a limit ordinal. The group G is *hypercentral* if $Z_\alpha = G$ for some α.

Corollary A.4.3. *Let G be a hypercentral group. Then G is finitely discriminable if and only if its centre $Z(G)$ is so.*

Proof. As noticed before, the "if" part is straightforward. The converse implication follows immediately from the known fact that if G is hypercentral, then any normal subgroup of G intersects the centre $Z(G)$ non-trivially. Let us recall the argument. Suppose that a normal subgroup $N \neq 1$ has trivial intersection with the centre. Let α be the smallest ordinal such that Z_α contains a non-trivial element x of N. Clearly, α is a successor. Let M be the normal subgroup generated by x. Then $M \subset N \cap Z_\alpha$. On the other hand, $M \cap Z_{\alpha-1} = 1$, and since $M \subset Z_\alpha$, by definition of Z_α we have $[G, Z_\alpha] \subset Z_{\alpha-1}$. Hence $[G, M] \subset Z_{\alpha-1} \cap M = 1$, so that M is central, a contradiction. $\square$

We now study hereditary properties of finitely discriminable groups. It is convenient to extend some of the definitions above. If G is a group, we define a G-group as a group H endowed with an action of G (when H is abelian it is usually called a G-module). For instance, normal subgroups and quotients of G are naturally G-groups. We call a G-group finitely discriminable (or G-finitely discriminable) if $\{1\}$ is isolated among normal G-subgroups of H. (Proposition A.2.1 has an obvious analog in this context.)

Theorem A.4.1. *Consider an extension of groups*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1.$$

Denote by W the kernel of the natural homomorphism $Q \to \mathrm{Out}(K)$.

(1) G is finitely discriminable if and only if K and $C_G(K)$ are both G-finitely discriminable.

(2) Suppose that K and W are both G-finitely discriminable. Suppose moreover that

(*) $Z(K)$ contains no infinite simple G-submodule G-isomorphic to a normal subgroup of Q contained in W.

Then G is finitely discriminable.

Remark A.4.4. 1) Assumption (*) is satisfied when $Z(K)$ or W does not contain any infinite-dimensional vector space over a prime field ($\mathbf{F}_p$ or $\mathbf{Q}$). In particular, if $Z(K)$ is artinian it is satisfied.

2) In Assumption (*), we can replace "infinite" by "with infinite endomorphism ring", which is a more natural hypothesis in view of the subsequent proof.

3) Assumption (*) cannot be dropped: see the example in Remark A.4.9.

Proof of Theorem A.4.1(1). The conditions are clearly necessary. Conversely suppose that they are satisfied. Let N_i be a net of normal subgroups of G tending to 1. Then $N_i \cap K \to 1$; this implies that eventually $N_i \cap K = 1$. Thus eventually $N_i \subset C_G(K)$. But similarly eventually $N_i \cap C_G(K) = 1$. Accordingly eventually $N_i = 1$. $\square$

Before proving (2), we need some preliminary results. Consider an extension of groups:

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1.$$

For any normal subgroup $H \lhd Q$, denote by $\mathcal{I}(H)$ the set of normal subgroups of G that are sent isomorphically onto H by the projection π.

Lemma A.4.5. *Let M be a normal subgroup in G such that $M \cap K$ is trivial and denote by $\pi(M)$ its image in Q. Then:*

(1) Any group in $\mathcal{I}(\pi(M))$ is isomorphic as a G-group to $\pi(M)$ via π and in particular is naturally a Q-group.

(2) If $\pi(M)$ is minimal in Q then all groups in $\mathcal{I}(\pi(M))$ are minimal in G.

(3) The set $\mathcal{I}(\pi(M))$ is in one-to-one correspondence with the set of G-equivariant group homomorphisms $\mathrm{Hom}_G(\pi(M), Z(K))$.

Proof. Points (1) and (2) are easy exercises; we concentrate on the proof of the third point.

For any element $H \in \mathcal{I}(\pi(M))$, denote by σ_H the inverse homomorphism to $\pi : H \to \pi(M)$. There is an obvious one-to-one correspondence between the set $\mathcal{I}(\pi(M))$, and the set of homomorphisms $\{\sigma_H \mid H \in \mathcal{I}(\pi(M))\}$ given by the map $H \longmapsto \sigma_H$ and its inverse $\sigma_H \longmapsto \mathrm{Image}(\sigma_H)$. We use these maps to identify these two sets.

We claim that there is a faithful transitive action of the abelian group $\mathrm{Hom}_G(\pi(M), Z(K))$ on the latter set. For $\phi \in \mathrm{Hom}_G(\pi(M), Z(K))$ and $\sigma_H \in \mathcal{I}(\pi(M))$ we define

$$\begin{array}{rrcl} \sigma_H \cdot \phi : & \pi(M) & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & \sigma_H(x)\phi_(x). \end{array}$$

We first prove that $\sigma_H \cdot \phi$ is indeed a group homomorphism. If $x, y \in \pi(M)$, then

$$\begin{aligned} (\phi \cdot \sigma_H)(xy) &= \sigma_H(xy)\phi(xy) \\ &= \sigma_H(x)\sigma_H(y)\phi(x)\phi(y) \\ &= \sigma_H(x)\phi(x)[\phi(x)^{-1}, \sigma_H(y)]\sigma_H(y)\phi(y). \end{aligned}$$

Since H and $Z(K)$ are both normal subgroups of G, we have $[\phi(x)^{-1}, \sigma_H(y)] \in [Z(K), H] \subset Z(K) \cap H = \{1\}$, so that

$$(\phi \cdot \sigma_H)(xy) = (\phi \cdot \sigma_H)(x)(\phi \cdot \sigma_H)(y).$$

As σ_H and ϕ are G-equivariant homomorphisms, it is immediate that $\phi \cdot \sigma_H$ is G-equivariant; it is also immediate that it defines an action of $\mathrm{Hom}_G(\pi(M), Z(K))$ on $\mathcal{I}(\pi(M))$.

To see that the action is transitive, we consider an element σ_H in $\mathcal{I}(\pi(M))$ and we define the "transition map" from σ_M to σ_H:

$$\begin{array}{rrcl} \phi_H : & \pi(M) & \to & G \\ & x & \mapsto & \sigma_M(x)^{-1}\sigma_H(x). \end{array}$$

We claim that the map ϕ_H is a G-equivariant homomorphism and has values in $Z(K)$.

Indeed, by construction $\pi \circ \phi_H(x) = 1$ for all x in $\pi(M)$, thus the image of ϕ_H is contained in K. More precisely $\phi_H(\pi(M)) \subset HM \cap K$. Since H and M are normal subgroups and have trivial intersection with K, they are contained in the centralizer of K in G. It follows that $\phi_H(\pi(M))$ is contained in the centre of K. The fact that ϕ_H is a G-equivariant homomorphism follows now from direct computation.

Finally the stabilizer of σ_M is trivial, as $\sigma_M \cdot \phi = \sigma_M$ if and only if for all $x \in \pi(M)$ $\sigma_M(x)\phi(x) = \sigma_M(x)$, that is, ϕ is identically 1. This ends the proof of Lemma A.4.5. □

Proof of Theorem A.4.1(2). Denote by $L_1, \dots, L_d$ the minimal normal subgroups of G contained in K. Let N be a normal subgroup of G. If $N \cap K \neq 1$, then N contains some L_i.

Let us assume now that $N \cap K = 1$. Then N is contained in the centralizer $C_G(K)$. On the other hand, one can check that the image of $C_G(K)$ in Q is W. Denote by $Q_1, \dots, Q_n$ the minimal normal subgroups of Q contained in W. Then the image of N in Q contains some Q_i. It follows from Lemma A.4.5(2) that $\pi^{-1}(Q_i) \cap N$ is a minimal normal subgroup of G (belonging to $\mathcal{I}(Q_i)$). Thus it remains to prove that $\mathcal{I}(Q_i)$ is finite for every i. By Lemma A.4.5(3), if non-empty, this set is in one-to-one correspondence with $\mathrm{Hom}_G(Q_i, Z(K))$; let us show that this set is finite. We discuss the possible cases.

- If Q_i is non-abelian, then, since it is characteristically simple, it is perfect, and therefore $\mathrm{Hom}_G(Q_i, Z(K)) \subset \mathrm{Hom}(Q_i, Z(K)) = \{1\}$.
- If Q_i is infinite abelian, then by the assumption (*), we know that the centre $Z(K)$ does not contain any G-submodule isomorphic to Q_i, and therefore $\mathrm{Hom}_G(Q_i, Z(K)) = \{1\}$.
- Suppose that Q_i is finite abelian. Let V be the sum of all G-submodules of $Z(K)$ isomorphic to Q_i. Since Q_i is a simple G-module, one can check that V, as a G-module, is a direct sum $\bigoplus_{j\in J} V_j$ of submodules V_j isomorphic as G-modules to Q_i. Since $Z(K)$ is G-finitely discriminable, the index set J must necessarily be finite. Therefore $\mathrm{Hom}_G(Q_i, Z(K)) = \mathrm{Hom}_G(Q_i, \bigoplus_{j\in I} V_j) \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{End}_G(Q_i)$, which is finite. □

Corollary A.4.6. *The classes of finitely discriminable groups and of isolated groups are closed under extensions.*

Proof. Since K is finitely discriminable, it is G-finitely discriminable, and since Q is finitely discriminable, its normal subgroup W must be Q-finitely discriminable. We can therefore apply Theorem A.4.1(2), noting that since K is finitely discriminable, its centre is artinian (Lemmas A.4.1 and A.4.2). It follows that the assumption (*) is satisfied: indeed, if a subgroup of $Z(K)$ is a simple G-submodule, then it must be contained in the p-torsion of $Z(K)$ for some prime p and therefore is finite.

The second assertion is obtained by combining this with the fact that the class of finitely presented groups is closed under extensions. □

Corollary A.4.7. *Consider an extension of groups*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1.$$

Suppose that K is G-finitely discriminable, and that the natural homomorphism $Q \to \mathrm{Out}(K)$ is injective. Then G is finitely discriminable.

Proof. Note that since the kernel W of the natural homomorphism $Q \to \mathrm{Out}(K)$ is trivial, the assumption (*) of Theorem A.4.1 is trivially satisfied. □

Corollary A.4.8. *To be finitely discriminable and to be isolated are properties inherited by overgroups of finite index.*

Proof. Let G be a group, and H a finitely discriminable subgroup of finite index. Let N be a subgroup of finite index of H which is normal in G. Then N is H-finitely discriminable and therefore G-finitely discriminable. Since G/N is finite, it is clear that all assumptions of Theorem A.4.1(2), are satisfied, so that G is finitely discriminable. □

Remark A.4.9. In contrast, the finite discriminable property does not pass to subgroups of finite index, as the following example shows. Consider the wreath product $\Gamma = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$. In [Hal59] P. Hall has constructed that there exists a simple faithful $\mathbb{Z}\Gamma$-module V whose underlying abelian group is an infinite dimensional $\mathbf{Q}$-vector space. Then there is an obvious action of $\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on the direct sum $V \oplus V$, where the cyclic group permutes the two copies. Consider then the semi-direct product $G = (V \oplus V) \rtimes (\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Its subgroup of index two $(V \oplus V) \rtimes \Gamma$ is not finitely discriminable as for each rational r we have a different minimal subgroup $V_r = \{(v, rv) \in V \oplus V \mid v \in V\}$. Nevertheless, G is finitely discriminable since every non-trivial normal subgroup of G contains one of its two minimal normal subgroups V_1 and V_{-1}.

Remark that G is not finitely presented. Indeed, $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ is not a quotient of a finitely presented solvable group [Bau61, BS80]. However, we conjecture that there exists an example of an isolated group having a non-isolated finite index subgroup.

A.5 Examples of isolated groups

A.5.1 Elementary class

Obvious examples of isolated groups are finitely presented simple groups. According to Corollary A.4.6, to get new examples of isolated groups it suffices to consider the class of groups that can be obtained from these by successively taking extensions of groups. The class of groups we get is fairly well understood, for by definition any such group has a composition series of finite length, and by a theorem of Wielandt [Wie39] this is precisely the class of finitely presented groups that contain finitely many subnormal subgroups. More generally we have

Proposition A.5.1. *Any group with finitely many normal subgroups is finitely discriminable. In particular, finitely presented groups with finitely many normal subgroups are isolated.* □

Remark A.5.2. A finitely presented group G has finitely many normal subgroups if and only if every quotient of G is isolated. The condition is clearly necessary. Conversely if G has infinitely many normal subgroups, then, by compactness of $\mathcal{G}(G)$, there exists an accumulation point, and hence G has a non-isolated quotient.

Note, in contrast, that the Prüfer group C_{p^∞} has all its quotients finitely discriminable but has infinitely many normal subgroups.

A.5.2 Quotients of isolated groups

The inclusion above is strict in a strong sense:

Theorem A.5.1. *Every finitely generated group is quotient of an isolated group.*

The theorem easily follows from the following lemma, which is probably known but for which we found no reference.

Lemma A.5.3. *There exists an isolated group K such that* $\mathrm{Out}(K)$ *contains a non-abelian free group.*

Proof of Theorem A.5.1. Clearly it suffices to deal with a free group F_n. Consider K as in Lemma A.5.3. Then $\mathrm{Out}(K)$ contains a free group of rank n. Lift it to $\mathrm{Aut}(K)$ and consider the semidirect product $G = K \rtimes F_n$ given by this action. By Corollary A.4.7, G is isolated. □

We prove latter Lemma A.5.3 (see Proposition A.5.10).

A.5.3 Houghton groups

These groups were first introduced by Houghton [Hou79] in his study of the relationship between ends and the cohomology of a group. They were then studied by K. Brown in connection with the so-called FP properties [Bro87].

Fix an integer $n \geq 1$, let $\mathbb{N}$ denote the set of positive integers and let $S = \mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$ denote a disjoint union of n copies of $\mathbb{N}$. Let H_n be the subgroup of all permutations g of S such that on each copy of $\mathbb{N}$, g is eventually a translation. More precisely, $g \in H_n$ if there is an n-tuple $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ such that for each $i \in \{1, \dots n\}$ one has $g(x, i) = (x + m_i, i)$ for all sufficiently large $x \in \mathbb{N}$. The map $g \mapsto (m_1, \dots, m_n)$ is a homomorphism $\phi : H_n \to \mathbb{Z}^n$ whose image is the subgroup $\{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum m_i = 0\}$, of rank $n - 1$. The kernel of ϕ is the infinite symmetric group, consisting of all permutations of S with finite support. It coincides with the commutator subgroup of H_n for $n \geq 3$, while for $n = 1$ and $n = 2$, the commutator subgroup is the infinite alternating group $\mathrm{Alt}(S)$. In all cases the second commutator is the infinite alternating group, which is a locally finite, infinite simple group.

Proposition A.5.4. *For every $n \geq 1$, the group H_n is finitely discriminable.*

Proof. There is an extension

$$1 \longrightarrow \mathrm{Alt}(S) \longrightarrow H_n \longrightarrow H_n/\mathrm{Alt}(S) \longrightarrow 1.$$

Since $\mathrm{Alt}(S)$ has trivial centralizer in the full group of permutations of S, the assumption of Corollary A.4.7 is satisfied. Actually $\mathrm{Alt}(S)$ is the unique minimal normal subgroup of H_n and is contained in all other non-trivial normal subgroups. $\square$

The group H_1 is the infinite symmetric group and hence is not finitely generated. The group H_2 is finitely generated, but not finitely presented; indeed, it is a classical example of a non-residually finite group that is a limit of finite groups [Ste96, VG97]. For $n \geq 3$, it is a result of K. Brown [Bro87] that H_n is finitely presented. Therefore by Proposition A.5.4 it is isolated.

A.5.4 Abels groups

Fix an integer $n \geq 2$ and a prime p. Denote by $A_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[1/p])$ the subgroup of upper triangular matrices a such that $a_{11} = a_{nn} = 1$ and such that the other diagonal coefficients are positive. For example

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}[1/p] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}[1/p] & \mathbb{Z}[1/p] \\ 0 & p^{\mathbb{Z}} & \mathbb{Z}[1/p] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The group A_3, introduced by Hall in [Hal61] is not finitely presented [Gro78]. Abels [Abe79] introduced A_4 and showed that it is finitely presented, a result that was subsequently extended for $n \geq 4$, see [Bro87] for a proof and a discussion of homological properties of these groups.

The centre of A_n consists of unipotent matrices with a single possibly non-trivial element in the upper right corner. It is clearly isomorphic to $\mathbb{Z}[1/p]$. The conjugation by the diagonal matrix $\mathrm{Diag}(p, 1, \ldots, 1)$ provides an automorphism of A_n which induces the multiplication by p on the centre. Consider the canonical copy Z of $\mathbb{Z}$ contained in the centre through its identification with $\mathbb{Z}[1/p]$. Then the quotient A_n/Z is non-Hopfian (see [Abe79] for details). As noticed before we have

Proposition A.5.5. *The groups A_n and A_n/Z are finitely presented for all $n \geq 4$.* $\square$

We now turn to finite discriminability. The group A_n itself is certainly not finitely discriminable because its centre $\mathbb{Z}[1/p]$ is not an artinian abelian group (or because it is residually finite). In contrast, the centre of A_n/Z is a Prüfer group C_{p^∞}.

Proposition A.5.6. *The groups A_n/Z are finitely discriminable for $n \geq 2$. In particular, for $n \geq 4$ these groups are infinite, solvable (3-solvable when $n = 4$), and isolated.*

Before giving the proof of the proposition, let us give some of its consequences. First notice that this allows to obtain a kind of converse of Lemma A.4.2.

Corollary A.5.7. *Every finitely discriminable abelian group is isomorphic to the centre of an isolated group.*

Proof. In this proof, let us denote the Abels group by $A_{n,p}$ to make explicit the dependance on p. Let G be a finitely discriminable abelian group. By Lemma A.4.1, G is isomorphic to $F \times \prod_{i=1}^{n} C_{p_i^\infty}$, where F is a finite abelian group, and $p_1, \dots, p_n$ are prime. Then G is isomorphic to the centre of $F \times \prod_{i=1}^{n} A_{4,p_i}/Z(A_{4,p_i})$, which is an isolated group by Proposition A.5.6 and Corollary A.4.6. $\square$

Corollary A.5.8. *The Hopfian property is not dense in the space of finitely generated groups.* $\square$

The non-Hopfian property is clearly not dense since finite groups are isolated Hopfian. The Hopfian Property is not open [ABL$^+$05, Sta06a]: the residually finite (metabelian) groups $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}[1/6] \rtimes_{3/2} \mathbb{Z}$ are approximable by non-Hopfian Baumslag-Solitar groups. On the other hand, let us allow ourselves a little digression:

Proposition A.5.9. *The Hopfian Property is not closed in the space of finitely generated groups. More precisely, there exists a finitely generated solvable group that is approximable by finite groups, but is non-Hopfian.*

Proof. For $n \geq 3$, consider the group B_n defined in the same way as A_n, but over the ring $\mathbf{F}_p[t, t^{-1}]$ rather than $\mathbb{Z}[1/p]$. It is easily checked to be finitely generated, and its centre can be identified with $\mathbf{F}_p[t, t^{-1}]$, mapping on the upper right entry. Similarly to the case of A_n, the group $B_n/\mathbf{F}_p[t]$ is non-Hopfian. On the one hand, write $\mathbf{F}_p[t]$ as the union of an increasing sequence of finite additive subgroups H_k. Then B_n/H_k converges to the non-Hopfian group $B_n/\mathbf{F}_p[t]$ when $k \to \infty$. On the other hand, as a finitely generated linear group, B_n is residually finite, and therefore so is B_n/H_k. So the non-Hopfian finitely generated group $B_n/\mathbf{F}_p[t]$ is approximable by finite groups. $\square$

Before proving Proposition A.5.6, let us describe a variation of Abels' group introduced in [dC07]. Consider integers n_1, n_2, n_3, n_4 satisfying $n_1, n_4 \geq 1$ and $n_2, n_3 \geq 3$. Consider the group H of upper triangular matrices by blocks (n_1, n_2, n_3, n_4) of the form

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & (*)_{12} & (*)_{13} & (*)_{14} \\ 0 & (**)_{22} & (*)_{23} & (*)_{24} \\ 0 & 0 & (**)_{33} & (*)_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_4} \end{pmatrix},$$

where $(*)$ denote any matrices and $(**)_{ii}$ denote matrices in SL_{n_i}, $i = 2, 3$.

Set $\Gamma = H(\mathbb{Z}[1/p])$, and let Z be the subgroup consisting of matrices of the form $I + A$ where the only nonzero block of A is the block $(*)_{14}$ and has integer coefficients; note that Z is a free abelian group of rank $n_1 n_4$, and is central in Γ.

It is proved in [dC07] that Γ and Γ/Z have Kazhdan's Property (T), are finitely presentable and that the group $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{Z})$ embeds in $\mathrm{Out}(\Gamma/Z)$.

Proposition A.5.10. *The group Γ/Z is isolated, has Kazhdan's Property (T), and its outer automorphism group contains a non-abelian free subgroup if $n_1 \geq 2$.*

It only remains to prove that Γ/Z is finitely discriminable. We now prove it together with Proposition A.5.6.

Proof of Propositions A.5.6 and A.5.10. Let us make a more general construction.

Consider integers $m_1, m_2, m_3 \geq 1$, and $n = m_1 + m_2 + m_3$. Consider the subgroup U of GL_n given by upper unipotent (m_1, m_2, m_3)-blocks matrices, that is matrices of the form:

$$\begin{pmatrix} I_{m_1} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & I_{m_2} & A_{23} \\ 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix}.$$

Let V denote the subgroup of U consisting of matrices with $A_{12} = 0$ and $A_{23} = 0$.

Lemma A.5.11. *The centralizer C of U modulo V in GL_n is reduced to U_s, the group generated by U and scalar matrices.*

Proof. First compute the normalizer N of U in GL_n. Denote by E the vector space of rank n. Since the fixed points of U is the subspace E_1 generated by the m_1 first coefficients, it must be invariant under N. Since the fixed point of U on E/E_1 is the subspace E_2 generated by the $m_1 + m_2$ first coefficients, it must also be invariant under N. We thus obtain that N is the group of upper triangular matrices under this decomposition by blocks.

Let us now show that $C = U_s$. Since $U \subset C$, it suffices to show that $C \cap D = S$, where D is the group of diagonal by blocks matrices and S is the group of scalar matrices.

If we take $A = \begin{pmatrix} I_{m_1} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & I_{m_2} & A_{23} \\ 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix} \in U$ and $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \in C \cap D$, then $[D, A] = \begin{pmatrix} I_{m_1} & D_1 A_{12} {D_2}^{-1} - A_{12} & (\dots) \\ 0 & I_{m_2} & D_2 A_{23} {D_3}^{-1} - A_{23} \\ 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix}$ must belong to V. Thus $D_1 A_{12} = A_{12} D_2$ and $D_2 A_{23} = A_{23} D_3$ for all A_{12}, A_{23}. This easily implies that there exists a scalar λ such that $D_i = \lambda I_{m_i}$ for each $i = 1, 2, 3$. $\square$

Denote now by G the group of upper triangular (m_1, m_2, m_3)-blocks matrices with $A_{11} = I_{m_1}$ and $A_{33} = I_{m_3}$. Note that V is central in G.

Lemma A.5.12. *Let R be a commutative ring. Let H be a subgroup of $G(R)$ containing $U(R)$, and let Z be any subgroup of $V(R)$ satisfying the following assumption: for every $x \in V(R) - \{0\}$, there exists $\alpha \in R$ such that $\alpha x \notin Z$. Then H/Z is finitely discriminable if and only if the abelian group $V(R)/Z$ is finitely discriminable.*

Proof. By Lemma A.4.2, the condition is necessary since $V(R)/Z$ is central in H.

Conversely, we have an extension

$$1 \to U(R)/Z \to H/Z \to H/U(R) \to 1.$$

By Lemma A.5.11, the centralizer of $U(R)/Z$ in H/Z is contained in $U(R)/Z$, and therefore the natural homomorphism $H/U(R) \to \mathrm{Out}(U(R)/Z)$ is injective. Now $U(R)/Z$ is nilpotent, and by Corollary A.4.3 it is finitely discriminable if and only if its centre is so. Thus it suffices to prove that the centre of $U(R)/Z$ is $V(R)/Z$.

Suppose that a matrix $A = \begin{pmatrix} I_{m_1} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & I_{m_2} & A_{23} \\ 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix}$ is central in $U(R)/Z$. By an immediate computation it must satisfy, for all B_{12}, B_{23}, the property $A_{12}B_{23} - B_{12}A_{13} \in Z$. If $A \notin V(R)$, we can choose B_{12}, B_{23} so that $x = A_{12}B_{23} - B_{12}A_{13} \neq 0$. Choose α as in the assumption of the lemma. Then $A_{12}(\alpha B_{23}) - (\alpha B_{12})A_{13} = \alpha x \notin Z$, a contradiction. Thus the centre of $U(R)/Z$ is $V(R)/Z$. □

In the case of Abels' group A_n, we have $R = \mathbb{Z}[1/p]$, $m_1 = m_3 = 1$, $m_2 = n-2$, and $V(R)/Z$ is isomorphic to the Prüfer group C_{p^∞}. The group H is given by matrices in $G(\mathbb{Z}[1/p])$ whose diagonal block 22 is upper triangular with powers of p on the diagonal. The assumption of Lemma A.5.12 is always satisfied, with $\alpha = p^{-k}$ for some k. This proves Proposition A.5.6.

In the case of the variant of Abels' group Γ, we have $R = \mathbb{Z}[1/p]$, $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2 + n_3$, $m_3 = n_4$, and $V(R)/Z$ is isomorphic to $(C_{p^\infty})^{n_1 n_4}$. The group H is given by matrices in $G(\mathbb{Z}[1/p])$ whose diagonal block 22 is upper triangular by blocks (n_2, n_3) with the two diagonal sub-blocks of determinant one. The assumption of Lemma A.5.12 is also always satisfied, again with $\alpha = p^{-k}$ for some k. This proves Proposition A.5.10. □

A.5.5 Thompson groups

The results we mention on these groups can be found in [CFP96]. Let F be the set of piecewise linear increasing homeomorphisms from the closed unit interval $[0, 1]$ to itself that are differentiable except at finitely many dyadic rational numbers and such that on intervals of differentiability the derivatives are powers of 2. This turns out to be a finitely presented group. There is a natural morphism $F \to \mathbb{Z}^2$, mapping f to (m,n), where the slope at 0 is 2^m and the slope at 1 is 2^n. The kernel F_0 is a simple (infinitely generated) group. The corresponding extension satisfies the assumptions of Corollary A.4.7: more precisely, F_0 is contained in every non-trivial normal subgroup of F. In particular

Proposition A.5.13. *Thompson's group F is isolated.* □

Observe the analogy with Houghton's group H_3 mentioned above.

Consider now S^1 as the interval $[0,1]$ with the endpoints identified. Thompson's group T is defined as the group of piecewise linear homeomorphisms from S^1 to itself that map images of dyadic rational numbers to images of dyadic rational numbers and that are differentiable except at finitely many images of rational dyadic numbers and on the intervals of differentiability the derivatives are power of 2. The group T is finitely presented and simple, and in particular is isolated. We use the groups F and T in the next paragraph.

A.5.6 Wreath products

If G and W are two groups, the *standard wreath product* $W \wr G$ is the semi-direct product $W^{(G)} \rtimes G$, where $W^{(G)}$ denotes the direct sum of copies of W indexed by G, on which G acts via the action on the labels by left multiplication.

A wreath product $W \wr G$ of two finitely presented groups is finitely presented only in trivial cases, namely when G is finite or $W = 1$ (see [Bau61]). Nevertheless if we consider *permutational wreath products*, then positive results on finite presentation do exist. Let G and W be groups and X a G-set, which we suppose transitive to simplify, so that we can write $X = G/H$. The *permutational wreath product* $W \wr_X G$ is the semi-direct product $W^{(X)} \rtimes G$, where $W^{(X)}$ denotes the direct sum of X copies of W, on which G acts via the natural action on the labels. The following theorem is shown in [dC06].

Theorem A.5.2. *Let G and $W \neq 1$ be groups, and $X = G/H$ a transitive G-set. The group $W \wr_X G$ is finitely presented if and only if*

(i) both W and G are finitely presented;

(ii) H is finitely generated;

(iii) the product action of G on $X \times X$ has finitely many orbits (equivalently, the double coset space $H \backslash G/H$ is finite). □

Proposition A.5.14. *Keep the notation as above. Suppose that $X = G/H$ is a faithful transitive G-set, and that $W \neq 1$ is finitely discriminable and has trivial centre. Then the wreath product $W \wr_X G$ is finitely discriminable.*

Proof. Consider the extension

$$1 \longrightarrow W^{(X)} \longrightarrow W \wr_X G \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Since $W \neq 1$, the natural morphism $G \to \mathrm{Out}(W^{(X)})$ is injective. So, to apply Corollary A.4.7, it suffices to show that $W^{(X)}$ is a finitely discriminable G-group. Let N be a normal subgroup of G contained in $W^{(X)}$. For $x \in X$, denote by W_x the x-th copy of W in $W^{(X)}$. If $N \cap W_x = 1$, for some x, then by transitivity of the G-action on X, we have $N \cap W_x = 1$ for all x and therefore N centralizes all W_x. Since W has trivial centre, this implies $N = 1$. Therefore if $N \neq 1$, then $N \cap W_x$ contains a minimal normal subgroup M of W. It follows that N contains $M^{(X)}$, and thus $W^{(X)}$ is a finitely discriminable G-group. □

To deal with the case when W has non-trivial centre we need some further assumptions.

Proposition A.5.15. *Keep the notation as above. Suppose that $X = G/H$ is a faithful G-set, and that $W \neq 1$ is finitely discriminable. Suppose moreover that the two following conditions are satisfied.*

(i) For every $n \geq 0$ and all $y, x_1, \dots, x_n \in X$, there exists $g \in G$ such that $gy \neq y$ and $gx_i = x_i$ for all $i = 1, \dots, n$.

(ii) The action of G on X^2 has finitely many orbits.

Then the wreath product $W \wr_X G$ is finitely discriminable.

Proof. Arguing as in the proof of Proposition A.5.14, we are reduced to deal with a subgroup $N \neq 1$ contained in $Z(W)^{(X)}$. Let Z_p denote the p-torsion in $Z(W)$. Clearly, for some p, ${Z_p}^{(X)} \cap N \neq 1$, and replacing N by $N \cap {Z_p}^{(X)}$ we can suppose N contained in ${Z_p}^{(X)}$.

Consider a non-trivial element w of N, and denote its support as $\{y, x_1, \dots, x_n\}$. Using the assumption on the G action on X, there exists $g \in G$ fixing all x_i's and mapping y to some $y' \in X - \{y\}$. Then $[g, w]$ has support reduced to $\{y, y'\}$. Consider a fixed finite family of elements (u_i, v_i) in X^2 with an element in each G-orbit. There exists i and $h \in G$ mapping (y, y') to (u_i, v_i). Thus $h[g, w]h^{-1}$ belongs to N and has support $\{u_i, v_i\}$. We obtain that if we take elements with support some $\{u_i, v_i\}$ and with values in elements of prime order in the centre of W, we obtain a finite discriminating subset. □

Let us now give examples of (G, X) satisfying the conditions of both Theorem A.5.2 and Proposition A.5.15 (observe that the choice of the non-trivial isolated group W plays no role there). Trivial examples are those when X is finite.

- Houghton groups. For $n \geq 1$, the group H_n described in §A.5.3 acts on $X = \mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$. The action contains the groups of finitely supported permutations and therefore Assumption (iii) of Theorem A.5.2 and Assumptions (i) and (ii) of Proposition A.5.15 are satisfied. The stabilizer of a point is also isomorphic to H_n. Accordingly, for $n \geq 3$, the group H_n is finitely presented, the stabilizers are finitely generated, so that all assumptions are fulfilled.

- Thompson groups. Thompson's group F (resp. T) acts on $X = \mathbb{Z}[1/2] \cap]0,1[$ (resp. $X = \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$). This action is transitive on ordered (resp. cyclically ordered) n-tuples for all n. The stabilizer of a point is isomorphic to $F \times F$ (resp. F) and is therefore finitely generated. Thus all the assumptions of Theorem A.5.2 and Proposition A.5.15 are satisfied.

A.5.7 Grigorchuk's finitely presented amenable group

Let us consider the group $\widetilde{\Gamma}$ constructed by Grigorchuk in [Gri98] and given by the presentation

$$\langle a, b, c, d, t \mid a^2 = b^2 = bcd = (ad)^4 = (adacac)^4 = 1,$$
$$a^t = aca, b^t = d, c^t = b, d^t = c\rangle.$$

This group was provided as an example of a finitely presented amenable group that is not elementary amenable [Gri98]. The group $\widetilde{\Gamma}$ is an ascending HNN-extension over the first Grigorchuk group $\Gamma = \langle a, b, c, d\rangle$, introduced in [Gri80], which, among other remarkable properties, is the first known example of a group with intermediate growth [Gri84].

Proposition A.5.16. *The group $\widetilde{\Gamma}$ is isolated.*

Proof. Sapir and Wise [SW02] have proved that every proper quotient of $\widetilde{\Gamma}$ is metabelian. Therefore every normal subgroup $N \neq 1$ contains the second derived subgroup of $\widetilde{\Gamma}$, which is not the trivial group since $\widetilde{\Gamma}$ itself is not metabelian. □

This result contradicts a conjecture of Stepin, appearing in [Gri98, §1] too, which states that the class of elementary amenable finitely generated groups is dense in that of amenable finitely generated groups.

A.5.8 Deligne's central extension

Deligne [Del78] has shown that there exists a central extension

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1,$$

where Γ is a subgroup of finite index in $\mathrm{PSp}_{2n}(\mathbb{Z})$ with $n \geq 2$, the group $\widetilde{\Gamma}$ is its preimage in the universal covering $\widetilde{\mathrm{Sp}_{2n}}(\mathbb{R})$ of $\mathrm{PSp}_{2n}(\mathbb{R})$, and Z is infinite cyclic, that satisfies the following remarkable property: every finite index subgroup of $\widetilde{\Gamma}$ contains Z. By the Kazhdan-Margulis Theorem [Zim84, Theorem 8.12] every non-trivial normal subgroup of Γ has finite index. It follows that every normal subgroup of $\widetilde{\Gamma}$ either is contained in Z or contains Z (and has finite index in $\widetilde{\Gamma}$). Thus $Z-\{1\}$ is a discriminating subset for $\widetilde{\Gamma}$. This is infinite, but becomes finite after taking a proper quotient of the centre. Thus we obtain:

Proposition A.5.17. *For every $n \geq 2$, the group $\widetilde{\Gamma}/nZ$ is isolated.* □

This shows that a (finite central) extension of an infinite residually finite group can be isolated; moreover these extensions are lattices in the non-linear simple Lie group with finite centre $\widetilde{\mathrm{Sp}_{2n}}(\mathbb{R})/nZ$. Other similar examples appear in [Rag84], with Γ a cocompact lattice in $\mathrm{SO}(2,n)$ for $n \geq 3$. Erschler [Ers04] provides examples where Γ is the first Grigorchuk group; these are examples of finitely generated, finitely discriminable groups with intermediate growth.

A.6 Further developements

Let K be a compact space. By induction on ordinals, define $I_0(K)$ as the set of isolated points of K, and for $\alpha > 0$, define $I_\alpha(K)$ as the set of isolated points in $K - \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta(K)$; call $I_\alpha(K)$ the set of α-isolated points of K. Let $\mathrm{Cond}(K)$ denote the condensation points, that is the complement of the union $\bigcup_\alpha I_\alpha(K)$.

If K is metrizable, then the sequence $(I_\alpha(K))$ breaks off after a countable number of steps. In the case of the space of finitely generated groups (in which case we simply write $\mathbf{I}_\alpha$ and **Cond**), what is this number?

It might be interesting to study $\mathbf{I}_\alpha$ for small values of α. For instance, it is easy to check that $\mathbb{Z}^n \in \mathbf{I}_n$ for all n.

The study of **Cond** is also of interest. It is characterized by: a finitely generated group G is in **Cond** if and only if every neighbourhood of G is uncountable. By the results of Champetier [Cha00] **Cond** contains all non-elementary hyperbolic groups. It can be showed that it also contains the wreath product $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ and the first Grigorchuk group Γ.

A related variant of these definitions is the following: consider a group G (not necessarily finitely generated). We say that G is in the class $\mathbf{II}_\alpha$ if $G \in I_\alpha(\mathcal{G}(G))$. This holds for at most one α; otherwise say that G belongs to the class **ICond**. The new I stands for "Inner" or "Intrinsic". Note that, if we restrict to finitely generated groups, we have **ICond** $\subset$ **Cond**, and every group in $\mathbf{I}_\alpha$ belongs to $\mathbf{II}_\beta$ for some $\beta \leq \alpha$. Note also that the two classes coincide in restriction to finitely presented groups, but for instance the first Grigorchuk group Γ belongs to $\mathbf{II}_1$.

Appendix B

Limits of Baumslag-Solitar groups

We give a parametrization by m-adic integers of the groups obtained as limit of Baumslag-Solitar groups marked with a canonical set of generators. We first study the injectivity and the continuity of this map. Second, we construct, for each limit a tree on which it acts transitively. We deduce then informations on the structure and defining relations of these limit groups.

Introduction

The set of marked groups on k generators (see **Section B.1** for definitions) has a natural topology in which it is a compact totally disconnected space. This topology received several names: "topology on marked groups", "Cayley topology", "Grigorchuk topology"... Two marked groups are close if there are large balls of their Cayley graphs which are isomorphic as (pointed) labelled graphs.

This topology has been used for several purposes. Let us cite the following examples :

- Stepin [Ste84] used it to prove the existence of amenable but non elementary amenable groups.
- To prove that every finitely generated Kazhdan group is a quotient of some finitely *presented* Kazhdan group, Shalom proved in [Sha00] that Kazhdan's property (T) defines an open subset of the space of marked groups.
- In [CG05], Champetier et Guirardel gave a characterization of limit groups of Sela in terms of the topology on marked groups.

There also exists several papers about questions whose formulation involves the topology on marked groups language. Let us cite the following ones :

- In [Cha00], Champetier showed that the quotient of the space of marked groups on k generators by the group isomorphism relation is not a standard Borel space. He also studied the closure of non elementary hyperbolic groups.

- In [Sta06a], the second author gave an almost complete characterization of convergent sequences among Baumslag-Solitar groups.

We are interested in the closure of Baumslag-Solitar groups and its elements, which we study for their own right. Theorem 6 of [Sta06a] allows us to define the following elements of the closure (Definition B.1.7):

$$\overline{BS}(m, \xi) = \lim_{n\to\infty} BS(m, \xi_n)$$

where $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$, $(\xi_n)_n$ is any sequence of integers such that $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and $|\xi_n| \to \infty$ (for $n \to \infty$).

Nota Bene. *We denote by* $\mathbb{N}$ *the set* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *of non negative integers and by* $\mathbb{N}^*$ *and* $\mathbb{Z}^*$ *the set of positive and non zero integers. If A is any ring, then* $A^\times$ *is the set of invertible elements of A. For instance,* $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$ *whereas* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Outline of the paper and description of results. **Section B.1** contains the material we want to recall and the definitions of the main groups appearing in the article.

Section B.2 describes carefully the "parametrization" $\overline{BS}_m : \mathbb{Z}_m \to \mathcal{G}_2$ given by $\xi \mapsto \overline{BS}(m, \xi)$. More specifically, we study the lack of injectivity and the continuity. Precise statements are as follows:

Theorem B.0.1 (Theorem B.2.1 and Corollary B.2.9)**.** *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and let $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_m$. The equality of marked groups $\overline{BS}(m, \xi) = \overline{BS}(m, \eta)$ holds if and only if there is some $d \in \mathbb{Z}^*$ such that $gcd(\xi, m) = gcd(\eta, m) = d$ and the images of ξ/d and η/d in $\mathbb{Z}_{m/d}$ are equal. In particular, the map $\overline{BS}_m$ is injective on the set of invertible m-adic intergers.*

Theorem B.0.2 (Corollary B.2.11)**.** *The map $\overline{BS}_m$ is continuous.*

These theorems allow us to describe the set of groups $\overline{BS}(m, \xi)$, with ξ invertible, as a boundary of Baumslag-Solitar groups (Corollary B.2.13).

It is well-known that a Baumslag-Solitar group acts on its Bass-Serre tree by automorphisms and on $\mathbb{Q}$ by affine transformations. The first action is faithful whereas thesecond is not in general. **Section B.3** is devoted to actions and structure of the groups $\overline{BS}(m, \xi)$. First $\overline{BS}(p, \xi)$ acts affinely on $\mathbb{Q}_p$ when p is a prime (see Theorem B.3.1). Second, we construct an action of $\overline{BS}(m, \xi)$ by automorphisms on a tree which is in some sense a "limit" of Bass-Serre trees (see Theorem B.3.4). This action allows us to prove the following results:

Theorem B.0.3 (Theorem B.3.12). *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, there exists an exact sequence $1 \to \mathbb{F}_2 \to \overline{BS}(m,\xi) \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \to 1$, where $\mathbb{F}_2$ is a free group.*

Corollary B.0.4 (Corollary B.3.14). *The limits $\overline{BS}(m,\xi)$ have the Haagerup property and are residually solvable.*

Let us quote here for comparison some straightforward properties of the groups $\overline{BS}(m,\xi)$ as they must share any property of Baumslag-Solitar groups which defines a closed set in the space of marked groups: they are torsion free and centerless, their subgroup generated by a and bab^{-1} is a non abelian free group for $|m| \geq 2$, and they are non Kazhdan (the last one could also be deduced from Corollary B.0.4).

Section B.4 is devoted to presentations of the limits $\overline{BS}(m,\xi)$'s. First, we discuss finite presentability. It turns out that limits of free groups and our limits have very different properties.

Theorem B.0.5 (see Theorem B.4.1). *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$, the group $\overline{BS}(m,\xi)$ is not finitely presented.*

However, the proof uses crucially the definition as limit of Baumslag-Solitar groups. Moreover, we exhibit explicit presentations of our limits, which are again related to the action by tree automorphisms (see Theorem B.4.4).

Finally, we collect results about classical sequences of groups in **Appendix B.5**. In the spirit of [Sta06a], we treat the problem of convergence of Torus knots groups. The solution happens to be simpler than for Baumslag-Solitar groups; indeed, the torus knot groups depend on two parameters p, q, but fixing p and letting q go to ∞, one only gets convergent sequences (see Proposition B.5.1). We also discuss the cases of Baumslag-Solitar groups with other markings (see Theorem B.5.4) and other Baumslag's one-relator groups (see Proposition B.5.7).

Acknowledgements. We would like to thank Laurent Bartholdi and Thierry Coulbois for having pointed out Theorem B.5.4 (a) and Remark B.3.3 to us. We would also thank our advisors, Goulnara Arzhantseva and Alain Valette, for their valuable comments on previous versions of this article.

B.1 Definitions and preliminaries

B.1.1 The ring of m-adic integers

Let $m \in \mathbb{Z}^*$. Recall that the ring of m-adic integers $\mathbb{Z}_m$ is the projective limit (in the category of topological rings) of the system

$$\ldots \to \mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m^{h-1}\mathbb{Z} \to \ldots \to \mathbb{Z}/m^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

where the arrows are the canonical (surjective) homomorphisms. This shows that $\mathbb{Z}_m$ is compact. This topology is compatible with the ultrametric distance given, for $\xi \neq \eta$, by

$$d_m(\xi, \eta) = |m|^{-\max\{k \in \mathbb{N} : \xi - \eta \in m^k \mathbb{Z}_m\}} .$$

We collect now (without proofs) some easy facts about m-adic integers which are useful in the following sections. Detailed proofs were given in the second-named author's Ph.D. thesis [Sta05, Appendix C][1]. Notice that $\mathbb{Z}_m$ is the nul ring if $|m| = 1$.

Proposition B.1.1. *Let m be an integer such that $|m| \geqslant 2$ and let $m = \pm p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ be its decomposition in prime factors:*

(a) One has an isomorphism of topological rings $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell}$. In particular, if m is not a power of a prime number, the ring $\mathbb{Z}_m$ has zero divisors.

(b) The group of invertible elements of $\mathbb{Z}_m$ is given by

$$\mathbb{Z}_m^\times = \mathbb{Z}_m \setminus (p_1 \mathbb{Z}_m \cup \ldots \cup p_k \mathbb{Z}_m).$$

(c) Any ideal of $\mathbb{Z}_m$ is principal. Moreover any ideal of $\mathbb{Z}_m$ containing a nonzero integer can be written $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell} \mathbb{Z}_m$ with $i_1, \ldots i_\ell \in \mathbb{N}$.

(d) For any $i_1, \ldots i_\ell \in \mathbb{N}$, one has $\mathbb{Z} \cap p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell} \mathbb{Z}_m = p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell} \mathbb{Z}$.

Definition B.1.2. *Let m be an integer such that $|m| \geqslant 2$ and let $p_1, \ldots, p_\ell$ be its prime factors. If E is a subset of $\mathbb{Z}_m$ containing a nonzero integer, the* greatest common divisor (gcd) *of the elements of E is the (unique) number $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}$ (with $i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}$) such that the ideal generated by E is $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell} \mathbb{Z}_m$.*

If $|m| = 1$, we set by convention $gcd(\mathbb{Z}_m) = 1$.

Lemma B.1.3. *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and let m' be a divisor of m. Let us write $m' = \pm p_1^{j_1} \cdots p_\ell^{j_\ell}$ and $m = \pm p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ their decomposition in prime factors ($j_s \leqslant k_s$ for all $s = 1, \ldots, \ell$). Let $\pi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{m'}$ the morphism induced by projections $\mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m')^h\mathbb{Z}$ (for $h \geqslant 1$). Then the following holds:*

(a) One has $\pi(n) = n$ for any integer n.

(b) For any $d = \pm p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}$ with $i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}$, one has $\pi^{-1}(d\mathbb{Z}_{m'}) = d\mathbb{Z}_m$.

The ideal $d\mathbb{Z}_m$ is both open and closed in $\mathbb{Z}_m$. More generally :

Lemma B.1.4. *Let m be in $\mathbb{Z}^*$ and let m' be an integer whose prime divisors are prime divisors of m.*

There exists $h = h(m')$ such that for any ξ, η in $\mathbb{Z}_m$, the inequality $d_m(\xi, \eta) < |m|^{-h}$ implies $gcd(\xi, m') = gcd(\eta, m')$. In particular, the set of m-adic integers ξ such that $gcd(\xi, m') = d$ is both open and closed in $\mathbb{Z}_m$.

Proof. Consider h such that m' divides m^h. If $d_m(\xi, \eta) < |m|^{-h}$, one has $\xi = k + m^h \mu$ and $\eta = k + m^h \nu$ with $k \in \mathbb{Z}$ and $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_m$ by Proposition B.1.1 (d). Hence $gcd(\xi, m') = gcd(k, m') = gcd(\eta, m')$. $\square$

[1] Note that the second part of Statement (a) was false there.

B.1.2 Marked groups and their topology

Introductory expositions of these topics can be found in [Cha00] or [CG05]. We only recall some basics and what we need in the following sections.

The free group on k generators will be denoted by $\mathbb{F}_k$, or $\mathbb{F}_S$ (with $S = (s_1, \ldots, s_k)$) if we want to precise the names of (canonical) generating elements. A *marked group on k generators* is a pair (G, S) where G is a group and $S = (s_1, \ldots, s_k) \in G^k$ is a family which generates G. A marked group (G, S) is endowed with a canonical epimorphism $\phi : \mathbb{F}_S \to G$, which induces an isomorphism of marked groups between $\mathbb{F}_S/\ker\phi$ and G. Hence a class of marked groups can always be represented by a quotient of $\mathbb{F}_S$. In particular if a group is given by a presentation, this defines a marking on it. The nontrivial elements of $\mathcal{R} := \ker\phi$ are called *relations* of (G, S). Given $w \in \mathbb{F}_k$ we will often write "$w = 1$ in G" or "$w \underset{G}{=} 1$" to say that the image of w in G is trivial.

Let $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ be a reduced word in $\mathbb{F}_S$ (with $x_i \in S$ and $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$). The integer n is called the *length* of w and denoted $|w|$. If (G, S) is a marked group on k generators and $g \in G$, the *length* of g is

$$\begin{aligned} |g|_G &:= \min\{n : g = s_1 \cdots s_n \text{ with } s_i \in S \sqcup S^{-1}\} \\ &= \min\{|w| : w \in \mathbb{F}_S,\ \phi(w) = g\} . \end{aligned}$$

Let $\mathcal{G}_k$ be the set of marked groups on k generators (up to marked isomorphism). Let us recall that the topology on $\mathcal{G}_k$ comes from the following ultrametric distance: for $(G_1, S_1) \neq (G_2, S_2) \in \mathcal{G}_k$ we set $d\big((G_1, S_1), (G_2, S_2)\big) := e^{-\lambda}$ where λ is the length of a shortest element of $\mathbb{F}_k$ which vanishes in one group and not in the other one. But what the reader has to keep in mind is the following characterization of convergent sequences.

Lemma B.1.5. [Sta06a, Proposition 1] *Let $(G_n)_{n\geqslant 0}$ be a sequence of marked groups in $\mathcal{G}_k$. The sequence $(G_n)_{n\geqslant 0}$ converges if and only if for any $w \in \mathbb{F}_k$, we have either $w = 1$ in G_n for n large enough, or $w \neq 1$ in G_n for n large enough.*

The reader could remark that the latter condition characterizes exactly Cauchy sequences. Another useful statement we will use in the paper is the following:

Lemma B.1.6. [CG05, Lemma 2.3] *If a sequence $(G_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathcal{G}_k$ converges to a marked group $G \in \mathcal{G}_k$ which is given by a finite presentation, then, for n large enough, G_n is a marked quotient of G.*

We address the reader to the given references for proofs.

B.1.3 Notation and conventions

We give now some notation and conventions which hold in the whole paper. First, recall that we define the Baumslag-Solitar groups by

$$BS(m, n) = \big\langle a, b \bigm| ab^m a^{-1} = b^n \big\rangle \ (m, n \in \mathbb{Z}^*) .$$

Then, we define a new family of groups in the following way:

Definition B.1.7. *For $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, one defines a marked group on two generators $\overline{BS}(m,\xi)$ by the formula*

$$\overline{BS}(m,\xi) = \lim_{n\to\infty} BS(m,\xi_n)$$

where $(\xi_n)_n$ is any sequence of integers such that $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and $|\xi_n| \to \infty$ (for $n \to \infty$).

Notice that $\overline{BS}(m,\xi)$ is well defined for any $\xi \in \mathbb{Z}_m$ by Theorem 6 of [Sta06a]. Note also that for any $n \in \mathbb{Z}^*$, one has $\overline{BS}(m,n) \neq BS(m,n)$. Indeed, the word $ab^m a^{-1} b^{-n}$ represents the identity element in $BS(m,n)$, but not in $\overline{BS}(m,n)$.

When considered as marked groups, the free group $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(a,b)$, Baumslag-Solitar groups, and groups $\overline{BS}(m,\xi)$ are all (unless stated otherwise) marked by the pair (a,b).

Another group which plays an important role in this article is

$$\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \ltimes_t \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \cong \mathbb{Z} \ltimes_s \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

where the generator of the first copy of $\mathbb{Z}$ acts on $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ by multiplication by t or, equivalently, on $\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ by shifting the indices. This group is assumed (unless specified otherwise) to be marked by the generating pair consisting of elements $(1,0)$ and $(0,t^0)$.

The last groups we introduce here are $\Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\operatorname{lcm}(m,n)}]$ $(m,n \in \mathbb{Z}^*)$ where the generator of the first copy of $\mathbb{Z}$ acts on $\mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\operatorname{lcm}(m,n)}]$ by multiplication by $\frac{n}{m}$. This group is assumed (unless specified otherwise) to be marked by the generating pair consisting of elements $(1,0)$ and $(0,1)$. The latter elements are the images of $(1,0)$ and $(0,t^0)$ by the homomorphism $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z} \to \Gamma(m,n)$ given by the evaluation $t = \frac{n}{m}$; they are also the images of the elements a and b of $BS(m,n)$ by the homomorphism defined by $a \mapsto (1,0)$ and $b \mapsto (0,1)$. Observe that the group $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\operatorname{lcm}(m,n)}]$ acts affinely on $\mathbb{Q}$ (or $\mathbb{R}$) by $(1,0)\cdot x = \frac{n}{m}x$ and $(0,y)\cdot x = x+y$.

We introduce the homomorphism $\sigma_a : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{Z}$ defined by $\sigma_a(a) = 1$ and $\sigma_a(b) = 0$. It factors through all groups $BS(m,n)$, $\overline{BS}(m,\xi)$, $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ and $\Gamma(m,n)$. The induced morphisms are also denoted by σ_a. To end this section we define the homomorphism $^- : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ given by $\bar{a} = a$ and $\bar{b} = b^{-1}$. Note that it is compatible with quotient maps and also defines homomorphisms $^- : BS(m,n) \to BS(m,n)$ for $m,n \in \mathbb{Z}^*$ and $^- : \overline{BS}(m,\xi) \to \overline{BS}(m,\xi)$ for $m \in \mathbb{Z}^*, \xi \in \mathbb{Z}_m$.

B.2 Parametrization of limits

The subject of this section the map

$$\overline{BS}_m : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathcal{G}_2; \xi \longmapsto \overline{BS}(m,\xi)\ .$$

First, we characterize its lack of injectivity, thus giving a classification of groups $\overline{BS}(m,\xi)$ up to isomorphism of marked groups (Theorem B.2.1). Second, we prove that it is continuous (Corollary B.2.11).

B.2.1 Lack of injectivity

Let us summarize the key points of this set-theoretic part. Our aim is the classification of the $\overline{BS}(m,\xi)$'s:

Theorem B.2.1. *Let m be in $\mathbb{Z}^*$ and let ξ,η be in $\mathbb{Z}_m$. The equality of marked groups $\overline{BS}(m,\xi)=\overline{BS}(m,\eta)$ holds if and only if there is some d in $\mathbb{Z}^*$ such that $gcd(\xi,m)=gcd(\eta,m)=d$ and the images of ξ/d and η/d in $\mathbb{Z}_{m/d}$ are equal.*

To prove this, we first need to characterize the converging sequences of standard marked Baumslag-Solitar groups. A partial characterization has been given in [Sta06a] and we are going to complete it by proving the following statement.

Theorem B.2.2. *Let m be in $\mathbb{Z}^*$ and let $(\xi_n)_n$ be sequence of integers such that $|\xi_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. The sequence $(BS(m,\xi_n))_n$ converges in $\mathcal{G}_2$ if and only if the two following conditions hold:*

(i) there is some integer d such that $gcd(m,\xi_n)=d$ for all n large enough;

(ii) $(\frac{\xi_n}{d})_n$ define a converging sequence in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.

There is the key ingredient to prove Theorem B.2.2:

Proposition B.2.3. *Let m,d be in $\mathbb{Z}^*$ and let $(\xi_n)_n$ be a sequence of integers such that $|\xi_n|\to\infty$. If $(\xi_n)_n$ defines a converging sequence in $\mathbb{Z}_m$ then the sequence of marked groups $\left(BS(md,\xi_n d)\right)_n$ converges in $\mathcal{G}_2$*

We obtain this proposition by performing minor technical modifications on Theorem 6 in [Sta06a] and the related lemmas. Nevertheless, the process being non completely obvious, we give a full and detailed proof.

We now supply the proofs of Proposition B.2.3, Theorem B.2.2 and Theorem B.2.1 in this order. The proof of Proposition B.2.3 is based on the following lemmas:

Lemma B.2.4. [Sta06a, Lemma 4]*Fix m in $\mathbb{Z}^*$. We define recursively two sequences $s_0,s_1,\dots$ and $r_0,r_1,\dots$ of functions $\mathbb{Z}^*\to\mathbb{Z}$ by*

(i) $r_0(n)=0$ and $s_0(n)=1$ for all n;

(ii) $s_{i-1}(n)n=s_i(n)m+r_i(n)$ and $0\leqslant r_i(n)<m$ for $i\geqslant 1$ (Euclidean division).

Then, for any n,n' in $\mathbb{Z}^*$ and $h\geq 1$ such that $n'\equiv n\,(mod\; m^h)$, we have $r_i(n)=r_i(n')$ and $s_i(n)\equiv s_i(n')\ (mod\; m^{h-i})$ for all $0\leqslant i\leqslant h$.

Remark B.2.5. *Define recursively $P_i(X)$ by $P_0(X) = 1$ and $P_i(X) = XP_{i-1}(X) - \frac{r_i(n)}{m}$ for $i \geq 1$. Clearly, $mP_i(X) = mX^i - r_1(n)X^{i-1} - \cdots - r_i(n)$. Moreover, $s_i(n) = P_i(\frac{n}{m})$ for all $i \geq 0$ and all n in $\mathbb{Z}$.*

Lemma B.2.6. *Fix m and d in $\mathbb{Z}^*$ and $h \geq t \geq 1$. Let n, n' be non-zero integers such that $n \equiv n' \,(\mathrm{mod}\ m^h)$ and let*

$$\alpha = k_0 + k_1 nd + k_2 s_1(n)nd + \cdots + k_t s_{t-1}(n)nd$$

$$\alpha' = k_0 + k_1 n'd + k_2 s_1(n')n'd + \cdots + k_t s_{t-1}(n')n'd$$

where $|k_0| < \min(|n|, |n'|)$ and $s_0, \ldots, s_h$ are given by Lemma B.2.4. Let us also take $r_0, \ldots, r_h$ as in Lemma B.2.4.

(i) We have $\alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ md)$ if and only if $\alpha' \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ md)$. When occuring, we get $ab^{\alpha}a^{-1} \underset{BS(md,nd)}{=} b^{\beta}$ and $ab^{\alpha'}a^{-1} \underset{BS(md,n'd)}{=} b^{\beta'}$ with

$$\beta = l_1 nd + l_2 s_1(n)nd + \cdots + l_{t+1} s_t(n)nd$$

$$\beta' = l_1 n'd + l_2 s_1(n')n'd + \cdots + l_{t+1} s_t(n')n'd$$

and

$$l_1 = \frac{1}{m}(k_0 + k_1 r_1(n) + \cdots + k_t r_t(n)), l_i = k_{i-1} \text{ for } 2 \leq i \leq t+1.$$

(ii) We have $\alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ nd)$ if and only if $\alpha' \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n'd)$. If it happens we get $a^{-1}b^{\alpha}a \underset{BS(md,nd)}{=} b^{\beta}$ and $a^{-1}b^{\alpha'}a \underset{BS(md,n'd)}{=} b^{\beta'}$ with

$$\beta = l_0 d + l_1 nd + l_2 s_1(n)nd + \cdots + l_{t-1} s_{t-2}(n)nd$$

$$\beta' = l_0 d + l_1 n'd + l_2 s_1(n')n'd + \cdots + l_{t-1} s_{t-2}(n')n'd$$

and

$$l_0 = k_1 m - k_2 r_1(n) - \cdots - k_t r_{t-1}(n), l_i = k_{i+1} \text{ for } 1 \leq i \leq t.$$

In particular the l_i's depend only on the (common) congruence class of n and n' modulo m^h. The case $d = 1$ corresponds to [Sta06a, Lemma 5].

Lemma B.2.7. *Let w be in $\mathbb{F}_2$. Under the hypotheses of Proposition B.2.3, the following holds: If $w = b^{\lambda_n}$ in $BS(md, \xi_n d)$ for infinitely many n, then $w = b^{\lambda_n}$ in $BS(md, \xi_n d)$ for all n large enough. Moreover, there exists integers $k_0, \ldots, k_h$ such that $\lambda_n = k_0 + k_1 \xi_n d + k_2 s_1(\xi_n)\xi_n d + \cdots + k_h s_{h-1}(\xi_n)\xi_n d$ for all n large enough.*

Proof of Lemma B.2.6. (i) As Lemma B.2.4 ensures that $s_i(n) \equiv s_i(n') \pmod{m}$ for all $i = 1, \dots, t-1$, we have $\alpha \equiv \alpha' \pmod{md}$. Assume now that

$$\alpha \equiv 0 \equiv \alpha' \pmod{md}.$$

We set $\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{d}$ and $\overline{\alpha'} = \frac{\alpha'}{d}$. We have then

$$\overline{\alpha} = \overline{k_0} + k_1 n + k_2 s_1(n) n + \cdots + k_t s_{t-1}(n) n$$

$$\overline{\alpha'} = \overline{k_0} + k_1 n' + k_2 s_1(n') n' + \cdots + k_t s_{t-1}(n') n'$$

where $\overline{k_0} = \frac{k_0}{d}$. By [Sta06a, Lemma 5 (i)], we have the identities

$$ab^{\alpha}a^{-1} = ab^{\overline{\alpha}d}a^{-1} = b^{\overline{\beta}d} = b^{\beta} \text{ in } BS(md, nd)$$

$$ab^{\alpha'}a^{-1} = ab^{\overline{\alpha'}d}a^{-1} = b^{\overline{\beta'}d} = b^{\beta'} \text{ in } BS(md, n'd)$$

with

$$\begin{array}{rcl} \beta = \overline{\beta}d & , & \overline{\beta} = l_1 n + l_2 s_1(n) n + \cdots + l_{t+1} s_t(n) n \\ \beta' = \overline{\beta'}d & , & \overline{\beta'} = l_1 n' + l_2 s_1(n') n' + \cdots + l_{t+1} s_t(n') n' \end{array}$$

and

$$l_1 = \frac{1}{m}(\overline{k_0} + k_1 r_1(n) + \cdots + k_t r_t(n)), l_i = k_{i-1} \text{ for } 2 \leq i \leq t+1$$

which come from the proof of [Sta06a, Lemma 5]. Hence (i) is proved.

(ii) As $|n| > |k_0|$ and $|n'| > |k_0|$, we have $\alpha \equiv 0 \pmod{nd}$ if and only if $k_0 = 0$ if and only if $\alpha' \equiv 0 \pmod{n'd}$. Suppose now that it is the case. By [Sta06a, Lemma 5 (ii)], we have then

$$a^{-1}b^{\alpha}a = a^{-1}b^{\overline{\alpha}d}a = b^{\overline{\beta}d} = b^{\beta} \text{ in } BS(md, nd)$$

$$a^{-1}b^{\alpha'}a = ab^{\overline{\alpha'}d}a^{-1} = b^{\overline{\beta'}d} = b^{\beta'} \text{ in } BS(md, n'd)$$

with

$$\begin{array}{rcl} \beta = \overline{\beta}d & , & \overline{\beta} = l_0 + l_1 n + l_2 s_1(n) n + \cdots + l_{t-1} s_{t-2}(n) n \\ \beta' = \overline{\beta'}d & , & \overline{\beta'} = l_0 + l_1 n' + l_2 s_1(n') n' + \cdots + l_{t-1} s_{t-2}(n') n' \end{array}$$

and

$$l_0 = k_1 m - k_2 r_1(n) - \cdots - k_t r_{t-1}(n), l_i = k_{i+1} \text{ for } 1 \leq i \leq t$$

which come from the proof of [Sta06a, Lemma 5]. Hence (ii) is proved. $\square$

Proof of Lemma B.2.7. Set $\Gamma_n = BS(md, \xi_n d)$. Consider w in $\mathbb{F}_2$ and write $w = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_h} b^{\alpha_h}$ with $\varepsilon_i = \pm 1$ and α_i in $\mathbb{Z}$, reduced in the sense that $\alpha_i = 0$ implies $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ for all i in $\{1, \dots, h-1\}$. Assume $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n for infinitely many n's. Then the sum $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_h$ has clearly to be zero (in particular h is even). We have to show that $w = b^{\lambda_n}$ for n large enough.

For n large enough, we may assume that $|\xi_n| > |\alpha_j|$ for all $j \in \{0, \dots, h\}$ and the ξ_n's are all congruent modulo m^h. We take a value of n such that moreover $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n(there are infinitely many ones) and apply Britton's Lemma. This ensures the existence of an index j such that $\varepsilon_j = 1 = -\varepsilon_{j+1}$ and $\alpha_j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; md)$ (since $|\xi_n d| > |\alpha_j|$ for all j). We write $\alpha_j = l_1 md$ where l_1 does not depend on n. For all n large enough, Lemma B.2.6 implies

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha_0} \cdots a^{\varepsilon_{j-1}} b^{\alpha_{j-1}+\beta_j+\alpha_{j+1}} a^{\varepsilon_{j+2}} \cdots b^{\alpha_r}$$

with $\beta_j = l_1 \xi_n d = \alpha_j \frac{\xi_n}{m}$ (depending on n). Hence we are allowed to write

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha'_{0,n}} a^{\varepsilon'_1} b^{\alpha'_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon'_{h-2}} b^{\alpha'_{h-2,n}}$$

for n large enough, with $\varepsilon'_i = \pm 1$ and $\alpha'_{i,n} = k'_{0,i} + k'_{1,i}\xi_n d$, where the ε'_i's and $k'_{l,i}$'s do not depend on n.

Now, for n large enough, we may assume that $|\xi_n| > |k'_{0,i}|$ for all $0 \leq j \leq h-2$ (and the ξ_n's are all congruent modulo m^h). Again, we take a value of n such that moreover $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n and apply Britton's Lemma. This ensures the existence of an index j such that either $\varepsilon'_j = 1 = -\varepsilon'_{j+1}$ and $\alpha'_{j,n} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; md)$, or $\varepsilon'_j = -1 = -\varepsilon'_{j+1}$ and $\alpha'_{j,n} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; \xi_n d)$. In both cases, while applying Lemma B.2.6, we obtain

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha''_{0,n}} a^{\varepsilon''_1} b^{\alpha''_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon''_{h-4}} b^{\alpha''_{h-4,n}}$$

for n large enough, with $\varepsilon''_i = \pm 1$ and $\alpha''_{i,n} = k''_{0,i} + k''_{1,i}\xi_n d + k''_{2,i} s_1(\xi_n)\xi_n d$, where the ε''_i's and $k''_{l,i}$'s do not depend on n.

And so on, and so forth, setting $h' = \frac{h}{2}$, we get finally $w = b^{\alpha^{(h')}_{0,n}}$ in Γ_n for n large enough, with

$$\alpha^{(h')}_{0,n} = k^{(h')}_{0,0} + k^{(h')}_{1,0}\xi_n d + k^{(h')}_{2,0} s_1(\xi_n)\xi_n d + \cdots + k^{(h')}_{h',0} s_{h'-1}(n)\xi_n d$$

where the $k^{(h')}_{i,0}$'s do not depend on n. It only remains to set $\lambda_n = \alpha^{(h')}_{0,n}$. $\square$

Proof of Proposition B.2.3. Consider w in $\mathbb{F}_2$ and assume w is trivial in $BS(md, \xi_n d)$ for infinitely many n. In other words, $w = b^{\lambda_n}$ with $\lambda_n = 0$ for infinitely many n. We then apply Lemma B.2.7 and deduce that there exists integers $k_0, \dots, k_h$ which do not depend on n and such that $w = b^{\mu_n}$ in $BS(md, \xi_n d)$ with $\mu_n = k_0 + k_1\xi_n d + k_2 s_1(\xi_n)\xi_n d + \cdots + k_h s_{h-1}(\xi_n)\xi_n d$ for all n large enough. Hence, $\mu_n = k_0 + k_1\xi_n d + k_2 s_1(\xi_n)\xi_n d + \cdots + k_h s_{h-1}(\xi_n)\xi_n d = \lambda_n = 0$ for infinitely many n's. As s_i is a polynomial in n of degree i (see Remark B.2.5), this implies $\lambda_n = 0$ for all n large enough. Therefore w is trivial in $BS(md, \xi_n d)$ for all n large enough. The proof is then complete. $\square$

We prove now Theorem B.2.2, using Proposition B.2.3 and the following lemma:

Lemma B.2.8. *Let m_i, d_i, k_i be in $\mathbb{Z}^*$ for $i = 1, 2$ such that*

$$m_1d_1 = m_2d_2, |k_2d_2| \neq 1, gcd(m_2, k_2) = 1 \text{ and } d_1 \text{ doesn't divide } d_2.$$

Then, the distance between $BS(m_1d_1, k_1d_1)$ and $BS(m_2d_2, k_2d_2)$ in $\mathcal{G}_2$ is not less than $e^{-\delta}$ with $\delta = 10 + 2d_1m_1^2$.

Proof of Lemma B.2.8. Consider $r = a^2b^{d_1m_1^2}a^{-2}b$ and let $w = r\overline{r}$. On one hand, we have $r = b^{d_1k_1^2+1}$ in $BS(m_1d_1, k_1d_1)$, which implies $w = 1$ in $BS(m_1d_1, k_1d_1)$. On the other hand, $r = ab^{m_1d_2k_2}a^{-1}b$ in $BS(m_2d_2, k_2d_2)$. As m_2 and k_2 are coprime integers, we notice that m_2d_2 divides $m_1d_2k_2$ if and only if d_1 divides d_2. Under the assumptions of the lemma, the writing $ab^{m_1d_2k_2}a^{-1}bab^{-m_1d_2k_2}a^{-1}b^{-1}$ is then a reduced form for w in $BS(m_2d_2, k_2d_2)$. By Britton's Lemma, $w \neq 1$ in $BS(m_2d_2, k_2d_2)$. As $|w| = 10 + 2d_1m_1^2$, we get the conclusion. □

Proof of Theorem B.2.2. Notice that Theorem 2 of [Sta06a] shows the theorem in the case $m = \pm 1$. We assume then $|m| \geq 2$. We begin with the case $(\xi_n)_n$ is a sequence of integers. Let us show then that (i) and (ii) are necessary. If (i) doesn't hold, we can find two subsequences $(\xi'_n)_n$ and $(\xi''_n)_n$ of $(\xi_n)_n$ such that $gcd(m, \xi'_n) = d_1, gcd(m, \xi''_n) = d_2, |\xi''_n| > 1$ for all n and d_1 doesn't divide d_2. Then Lemma B.2.8 clearly shows that $(BS(m, \xi_n))_n$ is not a converging sequence in $\mathcal{G}_2$.

To show that (ii) is necessary, we assume now that $(BS(m, \xi_n))_n$ converges and that there is some d in $\mathbb{Z}^*$ such that $gcd(m, \xi_n) = d$ for all n large enough. The marked subgroup $\Gamma_{\xi_n,d}$ of $BS(m, \xi_n)$ generated by (a, b^d) is equal to $BS(\frac{m}{d}, \frac{\xi_n}{d})$ endowed with its canonical ordered set of generators (a, b). The sequence of the $BS(\frac{m}{d}, \frac{\xi_n}{d})$'s is then also converging in $\mathcal{G}_2$. By Theorem 3 [Sta06a], the sequence of integers $(\frac{\xi_n}{d})_n$ defines a converging sequence in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$. Finally, we see by Proposition B.2.3 that (i) and (ii) are also sufficient. □

Proof of Theorem B.2.1. Choose a sequence of integers $(\xi_n)_n$ such that $\xi_{2n} \underset{\mathbb{Z}_m}{\longrightarrow} \xi, \xi_{2n+1} \underset{\mathbb{Z}_m}{\longrightarrow} \eta$ and $|\xi_n| \longrightarrow \infty$ as n tends to infinity. One has $\overline{BS}(m, \xi) = \overline{BS}(m, \eta)$ if and only if the sequence $BS(m, \xi_n)$ converges. By Theorem B.2.2 it is equivalent to have $\gcd(m, \xi_n) = d$ for n large enough (for some d in $\mathbb{Z}^*$) and the sequence $\pi(\frac{\xi_n}{d})$ converging in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{n}}$. Finally, it is equivalent to have $\gcd(m, \xi) = d = \gcd(m, \eta)$ and $\pi(\frac{\xi}{d}) = \pi(\frac{\eta}{d})$. □

We particularize Theorem B.2.1 to show the injectivity of $\overline{BS}_m$ restricted to the set invertible m-adic integers.

Corollary B.2.9. *Let m be in $\mathbb{Z}^*$ and let ξ, η be in $\mathbb{Z}_m$ with $\xi \neq \eta$. If no prime factor of m divides both ξ and η, then one has $\overline{BS}(m, \xi) \neq \overline{BS}(m, \eta)$. Hence the map $\overline{BS}_m$ becomes injective when restricted to invertible m-adic integers.*

Proof of Corollary B.2.9. We may suppose that $\gcd(m, \xi) = \gcd(m, \eta) = d$ by Theorem B.2.1. Then $d = 1$ by assumption and $\pi(\xi) = \xi \neq \eta = \pi(\eta)$. By Theorem B.2.1, one gets $\overline{BS}(m, \xi) \neq \overline{BS}(m, \eta)$. □

B.2.2 Continuity

We now turn to the topologist's point of view. Namely, we are going to prove the following analogue of Theorem B.2.2:

Theorem B.2.10. *Let m be in $\mathbb{Z}^*$ and let $(\xi_n)_n$ be a sequence in $\mathbb{Z}_m$. The sequence $(\overline{BS}(m, \xi_n))_n$ converges in $\mathcal{G}_2$ if and only if the following conditions both hold:*

(i) there is some integer d such that $gcd(m, \xi_n) = d$ for all n large enough;

(ii) the images of $\frac{\xi_n}{d}$ define a converging sequence in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.

In particular, if (ξ_n) converges to ξ, the sequence $(\overline{BS}(\xi_n, m)))_n$ converges to $\overline{BS}(m, \xi)$.

The following corollary is immediate:

Corollary B.2.11. *For all $m \in \mathbb{Z}^*$, the map $\overline{BS}_m : \mathbb{Z}_m \to Z_m$ is continuous.*

For $|m| \geqslant 2$, note that if we endow $\mathbb{Z}$ with the m-adic ultrametric, the analogue map

$$\mathbb{Z}^* \to Y_m \ ; \ n \mapsto BS(m, n)$$

is nowhere continuous. Indeed, one has $n+p^k \to n$ for $k \to \infty$, while $BS(m, n+p^k) \to \overline{BS}(m, n)$. We recall that one has $\overline{BS}(m, n) \neq BS(m, n)$, since the word $ab^m a^{-1} b^{-n}$ defines the trivial element in $BS(m, n)$ but not in $\overline{BS}(m, n)$.

Proof of Theorem B.2.10. Let $(\xi_n)_n$ be a sequence of m-adic integers. By an easy argument of diagonal extraction, we can find an integer sequence $(\eta_n)_n$ such that:

(1) $d(BS(m, \eta_n), \overline{BS}(m, \xi_n)) < \frac{1}{n}$;

(2) $d_m(\eta_n, \xi_n) < \frac{1}{n}$;

(3) $|\eta_n| \geq n$.

The sequence $(\overline{BS}(m, \xi_n))_n$ converges if and only if $(BS(m, \eta_n))_n$ converges because of inequality (1). By Theorem B.2.2, the sequence $(BS(m, \eta_n))_n$ converges if and only if there is some d in $\mathbb{Z}^*$ such that $gcd(\eta_n, m) = d$ for all n large enough and $(\frac{\eta_n}{d})_n$ converges in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$. By (2) and Lemma B.1.4, $gcd(\xi_n, m) = d$ for all n large enough if and only if $gcd(\eta_n, m) = d$ for all n large enough. Since $d_{\frac{m}{d}}(\frac{\eta_n}{d}, \pi(\frac{\xi_n}{d})) \leq d_m(\eta_n, \xi_n)$, we deduce from (2) that the sequence $(\frac{\eta_n}{d})_n$ converges in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$ if and only if $(\pi(\frac{\xi_n}{d}))_n$ converges.

Let us now turn to the particular case $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. We get condition (i) by Lemma B.1.4 and condition (ii) is obvious. The sequence $(\overline{BS}(\xi_n, m))_n$ is thus converging. Moreover, its limit is $\overline{BS}(m, \xi)$, since it does not change if one intercalates a ξ-constant subsequence in $(\xi_n)_n$. □

We now "particularize to the case of invertible elements" and show that, in this case, the $\overline{BS}$ groups form the boundary of the BS groups. Precise statements are as follows:

Definition B.2.12. *For m in $\mathbb{Z}^*$, we define:*

$$\begin{array}{rcl} X_m & = & \left\{BS(m,n) \ : \ n \text{ is relatively prime to } m\right\} \ ; \\ Z_m^\times & = & \left\{\overline{BS}(m,\xi) \ : \ \xi \in \mathbb{Z}_m^\times\right\} \ . \end{array}$$

By convention, we say that $Z_{\pm 1}^\times$ is empty.

Corollary B.2.13. *For all m in $\mathbb{Z}^*$, the boundary of X_m in $\mathcal{G}_2$ is $Z_m^\times$. It is homeomorphic to the set of invertible m-adic integers.*

Proof. Theorem 3 of [Sta06a] implies that the elements of $\overline{X_m}$ are the $BS(m,n)$'s with n relatively prime to m and the $\overline{BS}(m,\xi)$ with $\xi \in \mathbb{Z}_m^\times$. One sees easily that the $BS(m,n)$'s are isolated points in $\overline{X_m}$ (consider the word $ab^m a^{-1} b^{-n}$). The equality $\partial X_m = Z_m^\times$ follows immediately. The second statement is a direct consequence of Corollary B.2.11. □

B.3 Actions and structure of the limits

It is well known that, being a HNN-extension of $\mathbb{Z}$, a Baumslag-Solitar group $BS(m,n)$ acts naturally on its Bass-Serre tree [Ser77]. Also well known is the affine action of $BS(m,n)$ on the real line given by $a \cdot x = \frac{n}{m}x$ and $b \cdot x = x+1$. In this section, we give similar actions for the $\overline{BS}(m,\xi)$'s (see Theorems B.3.1 and B.3.4). The affine action is useless in this paper, but the tree action allows us to prove that groups $\overline{BS}(m,\xi)$ are free-by-metabelian extensions and, hence, are a-T-menable and residually solvable (see Theorem B.3.12 and Corollary B.3.14).

B.3.1 Affine action

We restrict to the case where m is a prime number, which we denote by p. Let $\xi \in \mathbb{Z}_p$ and let $(\xi_n)_n$ be a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$. For $n \in \mathbb{N}$, we set

$$\psi_n = \psi_{\xi_n} : \left\{ \begin{array}{ccc} BS(p,\xi_n) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{Q}_p) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \frac{\xi_n}{p}x) \\ b & \longmapsto & (x \mapsto x+1) \end{array} \right.$$

where $\mathbb{Q}_p$ is the field of fractions of $\mathbb{Z}_p$. These actions are well defined exactly for the same reasons as the above affine actions on $\mathbb{R}$.

Theorem B.3.1. *Let p be a prime number and let $\xi \in \mathbb{Z}_p$, $\xi \neq 0$. There is an affine action of $\overline{BS}(p,\xi)$ on $\mathbb{Q}_p$ defined by*

$$\psi_\xi : \begin{cases} \overline{BS}(p,\xi) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{Q}_p) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \frac{\xi}{p}x) \\ b & \longmapsto & (x \mapsto x+1) \end{cases}.$$

The last action is not faithful since the kernel of ψ_ξ contains the kernel of the map $q_{p,\xi}$ defined in Proposition B.3.11.

Proof. It is sufficient to show that the affine action of $\mathbb{F}_2$ on $\mathbb{Q}_p$ given by

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{Q}_p) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \frac{\xi}{p}x) \\ b & \longmapsto & (x \mapsto x+1) \end{cases}$$

satisfies $\psi(w) = \mathrm{id}$ for all w such that $w = 1$ in $\overline{BS}(p,\xi)$.

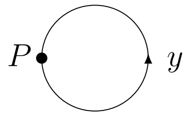
Take $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$. For $n \in \mathbb{N}$, we denote again ψ_n the action corresponding to the above action of $BS(p,\xi_n)$. We have that $\psi_n(a)(x) = \frac{\xi_n}{p}x \to \psi(a)(x)$ and $\psi_n(b)(x) = x+1 \to \psi(b)(x)$ for $n \to \infty$ ($x \in \mathbb{Q}_p$). It follows easily that $\psi_n(w)(x) \to \psi(w)(x)$ for all $w \in \mathbb{F}_2$. Now, if $w = 1$ in $\overline{BS}(p,\xi)$, it implies $w = 1$ in $BS(p,\xi_n)$ for n sufficiently large. For those values of n, the equality $\psi_n(w)(x) = x$ holds for all $x \in \mathbb{Q}_p$, so that we get $\psi(w) = \mathrm{id}$. □

Remark B.3.2. *The $\mathbb{Z}$-action by translations on $\mathbb{R}$ is proper, but the $\mathbb{Z}$-action by translations on $\mathbb{Q}_p$ is not since $\mathbb{Z}$ is not closed in $\mathbb{Q}_p$. In particular, the action of $\overline{BS}(p,\xi)$ on $\mathbb{Q}_p$ is not proper, even if restricted to the subgroup generated by b.*

B.3.2 Tree action

We are to produce a tree on which the group $\overline{BS}(m,\xi)$ acts faithfully. This tree will be constructed from the Bass-Serre trees of the groups $BS(m,\xi_n)$. It will be shown that the tree we construct does not depend on the auxiliary sequence $(\xi_n)_n$.

We recall that $BS(m,n)$ is the fundamental group of the graph of groups (G,Y) shown if Figure B.1 [Ser77, Section 5.1].



$$G_P = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z};\ G_y = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$$
$$c^y = b^m;\ c^{\bar{y}} = b^n$$

Figure B.1: Baumslag-Solitar groups as graphs of groups

Notice that a is the element of $\pi_1(G, Y, P)$ associated to the edge y. To be precise, we set the *Bass-Serre tree* of $BS(m, n)$ to be the universal covering associated to (G, Y), the maximal subtree P and the orientation given by the edge $\bar{y}$ [Ser77, Section 5.3]. We choose the edge $\bar{y}$ instead of y to minimize the dependence on n of the set of tree edges. Denoting by T the Bass-Serre tree of $BS(m, n)$, one has

$$\begin{array}{rclcrcl} V(T) & = & BS(m,n)/\langle b\rangle & , & E_+(T) & = & BS(m,n)/\langle b^m\rangle\ , \\ o(w\langle b^m\rangle) & = & w\langle b\rangle & , & t(w\langle b^m\rangle) & = & wa^{-1}\langle b\rangle\ , \end{array}$$

where $o(e)$ and $t(e)$ denote the origin and terminal vertex of the edge e. The chosen orientation on T is preserved by the $BS(m, n)$-action.

Given $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$ and $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$, we denote by H_n (resp H_n^m) the subgroup of $BS(m, \xi_n)$ generated by b (resp b^m) and by T_n the Bass-Serre tree of $BS(m, \xi_n)$. We set

$$\begin{array}{rclcl} Y & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} V(T_n)\right)/\sim & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n\right)/\sim \\ Y^m & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} E_+(T_n)\right)/\sim & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n^m\right)/\sim \end{array}$$

where $\sim$ is defined by $(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 :\ x_n = y_n$ in both cases. We now define an oriented graph $X = X_{m,\xi}$ by

$$\begin{array}{rcl} V(X) & = & \{x \in Y : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ such that } (x_n)_n \sim (wH_n)_n\} \\ E_+(X) & = & \{y \in Y^m : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ such that } (y_n)_n \sim (wH_n^m)_n\} \\ o\big((wH_n^m)_n\big) & = & (wH_n)_n = \big(o(wH_n^m)\big)_n \\ t\big((wH_n^m)_n\big) & = & (wa^{-1}H_n)_n = \big(t(wH_n^m)\big)_n \end{array}$$

The map o is well defined since $(vH_n^m)_n \sim (wH_n^m)_n$ implies $(vH_n)_n \sim (wH_n)_n$. In the other hand, the map t is well defined since $(vH_n^m)_n \sim (wH_n^m)_n$ implies $v^{-1}w \in H_n^m$ for n large enough, whence $(va^{-1})^{-1}(wa^{-1}) = av^{-1}wa^{-1} \in H_n$ for those values of n. It follows that $(va^{-1}H_n)_n \sim (wa^{-1}H_n)_n$. The graph X is thus well defined and the free group $\mathbb{F}_2$ acts obviously on it by left multiplications.

Remark B.3.3. *There is an alternative way to define X, which we now describe brively. Consider the $\mathbb{Z}$-trees $V(T_n)$ and define the ultraproduct $V = (\prod V(T_n))/\omega$, which is a ${}^\omega\mathbb{Z}$-tree (where ω is some non-principal ultrafilter over $\mathbb{N}$). The ultraproduct group $(\prod BS(m, \xi_n))/\omega$ contains $\overline{BS}(m, \xi)$ and* *acts on V. Now, the set of vertices of X is equal to subtree of V spanned by the orbit $\overline{BS}(m,\xi)\cdot v_0$, with $v_0 = [H_n]_\omega$. However, even if this approach would immediately tell us that X is a tree endowed with a $\overline{BS}(m,\xi)$-action (one has only to check that the subtree is a $\mathbb{Z}$-tree), we prefer the more down-to-earth one described above for the sake of a self-contained and explicit construction.. See* [CG05, Chi01, Pau04] *for more information on this second approach.*

It is almost obvious that X is simple (i.e. it has no loop and no bigon). Indeed a loop (or bigon) in X would immediately provide a loop (or bigon) in some tree T_n. The statement we want to prove is the following one.

Theorem B.3.4. *Let $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$ and $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. The graph $X = X_{m,\xi}$ (seen here as unoriented) satisfies the following properties:*

(a) It is a tree.

(b) It does not depend (up to equivariant isomorphism) on the choice of the auxiliary sequence $(\xi_n)_n$.

(c) The obvious action of the free group $\mathbb{F}_2$ on $X_{m,\xi}$ factors through the canonical projection $\mathbb{F}_2 \to \overline{BS}(m,\xi)$.

Before the proof, we give an simple consequence of [Sta06a, Lemma 6], or of Lemma B.2.7.

Lemma B.3.5. *Let $(vH_n)_n$ and $(wH_n)_n$ be two vertices of the graph X. If $vH_n = wH_n$ for infinitely many values of n, then $(vH_n)_n = (wH_n)_n$ in X.*

Proof of Theorem B.3.4. **(a)** Let us show first that the graph X is connected. We show by induction on $|w|$ that any vertex $(wH_n)_n$ (with $w \in \mathbb{F}_2$) is connected to $(H_n)_n$. The case $|w| = 0$ is trivial. If $|w| = \ell > 0$, there exists $x \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ such that wx has length $\ell - 1$. By induction hypothesis, it is sufficient to show that $(wH_n)_n$ is connected to $(wxH_n)_n$. If $x = a$, then the edge $(wxH_n^m)_n$ connects $(wxH_n)_n$ to $(wH_n)_n$, if $x = a^{-1}$, then the edge $(wH_n^m)_n$ connects $(wH_n)_n$ to $(wxH_n)_n$ and if $x = b^{\pm 1}$, then one has even $(wH_n)_n = (wxH_n)_n$.

Second, we show that X has no closed path without backtracking. We take a closed path in X, with vertices

$$(v_0H_n)_n, (v_1H_n)_n, \ldots, (v_\ell H_n)_n = (v_0H_n)_n \ ,$$

and we want to prove the existence of some backtracking.

For any n, the sequence $v_0H_n, v_1H_n, \ldots, v_\ell H_n$ defines a path in T_n. For n large enough, one has $v_\ell H_n = v_0H_n$, so that the path is closed. As the T_n's are trees, these closed paths all have at least one backtracking. Thus, there exists $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$ such that $v_{i-1}H_n = v_{i+1}H_n$ for infinitely many values of n (v-indexes are taken modulo ℓ). Now, by Lemma B.3.5, we obtain

$(v_{i-1}H_n)_n = (v_{i+1}H_n)_n$ in X. As X is a simple graph, this means that the original closed path in X has some backtracking, as desired.

(b) We show now that X does not depend (up to equivariant isomorphism) on the choice of the sequence $(\xi_n)_n$. Take another sequence $(\xi'_n)_n$ satisfying both $|\xi'_n| \to \infty$ and $\xi'_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and consider the associated tree X'. We construct the sequence $(\xi''_n)_n$ given by

$$\xi''_n = \begin{cases} \xi_{\frac{n}{2}} & \text{if } n \text{ is even} \\ \xi'_{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

which satisfies again both $|\xi''_n| \to \infty$ and $\xi''_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and the associated tree X''. There are obvious equivariant surjective graph morphisms $X'' \to X$ and $X'' \to X'$. We have to show the injectivity of these morphisms, which we can check on vertices only, for we are dealing with trees. But Lemma B.3.5 precisely implies the injectivity on vertices.

(c) Take $w \in \mathbb{F}_2$ such that $w = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$. We have to prove that w acts trivially on X. As X is a simple graph, we only have to prove that w acts trivially on $V(X)$. Let $(vH_n)_n$ be a vertex of X. For n large enough, we have $w = 1$ in $BS(m, \xi_n)$, so that $wvH_n = vH_n$. Hence we have $w \cdot (vH_n)_n \sim (vH_n)_n$, as desired. □

Remark B.3.6. *The action of $\overline{BS}(m, \xi)$ on X is transitive and the stabilizer of the vertex $v_0 = (H_n)_n$ is the subgroup of elements which are powers of b in all but finitely many $BS(m, \xi_n)$. It does not coincide with the subgroup of $\overline{BS}(m, \xi)$ generated by b, since the element $ab^m a^{-1}$ is not in the latter subgroup, but stabilizes the vertex.*

Remark B.3.7. *The $\overline{BS}(m, \xi)$-action on X being transitive on vertices and on edges, $\overline{BS}(m, \xi)$ is an HNN-extension with basis* $\mathrm{Stab}(v_0)$. *As a consequence, the action of $\overline{BS}(m, \xi)$ on X is faithfull. We shall not focus on this structure in the present article, but leave it for a next paper.*

We end this section by statements about the structure of the tree $X_{m,\xi}$. The first one is the analogue of Lemma B.3.5 for edges.

Lemma B.3.8. *Let $(vH_n^m)_n$ and $(wH_n^m)_n$ be two edges of the graph X. If one has $vH_n^m = wH_n^m$ for infinitely many values of n, then $(vH_n^m)_n = (wH_n^m)_n$ in X.*

Proof. By assumption, one has $vH_n = wH_n$ and $va^{-1}H_n = wa^{-1}H_n$ for infinitely many values of n. By Lemma B.3.5, we get $(vH_n)_n = (wH_n)_n$ and $(va^{-1}H_n)_n = (wa^{-1}H_n)_n$. The edges $(vH_n^m)_n$ and $(wH_n^m)_n$ having the same origin and terminal vertex, they are equal, since X is a simple graph. □

Proposition B.3.9. *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$. Each vertex of the tree $X_{m,\xi}$ has exactly $|m|$ outgoing edges. More precisely, (given a sequence $(\xi_n)_n$ of nonzero integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$) the edges outgoing from the vertex $(wH_n)_n$ are exactly $(wH_n^m)_n, (wbH_n^m)_n, \ldots, (wb^{|m|-1}H_n^m)_n$.*

Proof. It suffices to treat the case $w = 1$. The edges $(H_n^m)_n$, $(bH_n^m)_n, \dots$, $(b^{|m|-1}H_n^m)_n$ are clearly outgoing from $(H_n)_n$ and distinct. Let now $(vH_n^m)_n$ be an edge outgoing from $(H_n)_n$. In particular, we have $(vH_n)_n = (H_n)_n$, so that $v = b^{\lambda_n}$ in $BS(m, \xi_n)$ for n large enough. There exists necessarily $\lambda \in \{0, \dots, |m| - 1\}$ such that we have $\lambda_n \equiv \lambda \pmod m$ for infinitely many values of n, so that $vH_n^m = b^\lambda H_n^m$ for infinitely many values of n. By Lemma B.3.8, we get $(vH_n^m)_n = (b^\lambda H_n^m)_n$ and we are done. □

B.3.3 A structure theorem

We recall that $\Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\operatorname{lcm}(m,n)}]$ acts affinely on $\mathbb{R}$ and that it is a marked quotient of both $BS(m,n)$ and $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ (see Section B.1.3).

The following lemma enables us to define converging sequences of homomorphisms induced by the same endomomorphism of $\mathbb{F}_m$.

Lemma B.3.10. *Let $(G_n)_n$ and $(H_n)_n$ be sequences of marked groups and let G and H be its limits in $\mathcal{G}_m$. Let ϕ be an endomorphism of $\mathbb{F}_m$ which induces an homomorphism from G_n to H_n for all n. Then ϕ induces an homomorphism from G to H. Moreover, if $\phi : G_n \longrightarrow H_n$ is injective infinitely many n, then $\phi : G \longrightarrow H$ is injective.*

Proof. Let $w \in \mathbb{F}_m$ be such that $w \underset{G}{=} 1$. For all n large enough we have $w \underset{G_n}{=} 1$ (Lemma B.1.5), and hence $\phi(w) \underset{H_n}{=} 1$. Consequently, $\phi(w) \underset{H}{=} 1$, which shows that ϕ induces an homomorphism from G to H. Assume ϕ is injective for infinitely many n and consider $w \in \mathbb{F}_m$ such that its image in G belongs to $\ker(\phi : G \longrightarrow H)$. There is infinitely many n such that the following both hold :

(*i*) $\phi : G_n \longrightarrow H_n$ is injective;

(*ii*) $\phi(w) \underset{H_n}{=} 1$.

It follows that $w \underset{G_n}{=} 1$ holds for infinitely many n. As a consequence, $w \underset{G}{=} 1$. □

Proposition B.3.11. *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the morphism of marked groups $q : \mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ factors through a morphism $q_{m,\xi} : \overline{BS}(m,\xi) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.*

Proof. Take $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that one has $|\xi_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ and $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. One has the following "diagram"

$$\begin{array}{ccc} BS(m,k_n) & \xrightarrow{n\to\infty} & \overline{BS}(m,\xi) \\ \big\downarrow & & \\ \Gamma(m,k_n) & \xrightarrow{n\to\infty} & \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \end{array}$$

by Definition B.1.7 and Theorem B.5.4. As vertical arrows are induced by the identity of $\mathbb{F}_2$, the result follows from the previous lemma. □

We denote by N the kernel of the map q. We now are able to state the main results of this section, which are the following:

Theorem B.3.12. *Consider the exact sequence (where $N_{m,\xi}$ is the image of N in $\overline{BS}(m,\xi)$)*

$$1 \longrightarrow N_{m,\xi} \longrightarrow \overline{BS}(m,\xi) \xrightarrow{q_{m,\xi}} \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \ .$$

For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the group $N_{m,\xi} = \ker q_{m,\xi}$ is free.

Remark B.3.13. *Since $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ is metabelian, the second derived subgroup of $\overline{BS}(m,\xi)$ is a free group. Thus $\overline{BS}(m,\xi)$ enjoys the same property as the generalized Baumslag-Solitar groups* [Kro90, Corollary 2].

Corollary B.3.14. *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the group $\overline{BS}(m,\xi)$ has the Haagerup property and is residually solvable.*

Remark B.3.15. *The Haagerup property for Baumslag-Solitar groups was already known* [GJ03]. *It may also be deduced from the fact that the second derived subgroup is free* [Kro90, Corollary 2].

Proof of Corollary B.3.14. Looking at the exact sequence

$$1 \longrightarrow N_{m,\xi} \longrightarrow \overline{BS}(m,\xi) \xrightarrow{q} \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \ ,$$

we see that the quotient group is amenable (it is even metabelian) and the kernel group has the Haagerup property by Theorem B.3.12. By [CCJ$^+$01, Example 6.1.6], we conclude that $\overline{BS}(m,\xi)$ has the Haagerup property. As a free group is residually solvable, $\overline{BS}(m,\xi)$ is then the extension of a residually solvable group by a solvable one and hence is residually solvable by [Sou01, Lemma A.20]. □

Proof of Theorem B.3.12. Take $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$ and $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. Set X to be the tree constructed in section B.3. By [Ser77, Section 3.3, Theorem 4], it is sufficient to prove that $N_{m,\xi}$ acts freely on X, i.e. that any $w' \in N$ which stabilizes a vertex satisfies $w' = 1$ in $\overline{BS}(m,\xi)$.

Let us take $w' \in N$ and $(vH_n)_n$ a vertex of X which is stabilized by w'. Thus $w = v^{-1}w'v$ stabilizes the vertex $(H_n)_n$, i.e. w is a power of b, say $w = b^{\lambda_n}$, in all but finitely many $BS(m,\xi_n)$'s. Then the image of w in $\Gamma(m,\xi_n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,\xi_n)}{\operatorname{lcm}(m,\xi_n)}]$ is equal to $(0,\lambda_n)$ for all but finitely many values of n. But, on the other hand, one has $w \in N$, that is $w = 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, which implies $\lambda_n = 0$ for those values of n (since $\Gamma(m,\xi_n)$'s are marked quotients of $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$). Thus, one has $w = b^0 = 1$ in all but finitely many $BS(m,\xi_n)$'s, which gives $w = 1 = w'$ in $\overline{BS}(m,\xi)$. □

B.4 Presentations of the limits

The purpose of this Section are, first, to prove that the $\overline{BS}(m,\xi)$'s are almost never finitely presented (Theorem B.4.1), and second, to give explicit presentations, whose construction is based on actions on trees described in Section B.3.2 (Theorem B.4.4).

B.4.1 Most of the limits are not finitely presented

Our first goal in this Section is to prove:

Theorem B.4.1. *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$, the group $\overline{BS}(m,\xi)$ is not finitely presented.*

Notice that the Theorem excludes also the existence of a finite presentation of such a group with another generating set. See for instance [dlH00, Proposition V.2]. By Theorem B.2.1, there is only one remaining case, the case $\xi = 0$, where it is still unknown whether $\overline{BS}(m,0)$ is finitely presented or not. We nevertheless make the following remark.

Remark B.4.2. *For $|m| = 1$, the limits $\overline{BS}(\pm 1,\xi)$ are not finitely presented.*

Proof. The result [Sta06a, Theorem 2] implies $\overline{BS}(\pm 1,\xi) = \mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ for the unique element $\xi \in \mathbb{Z}_{\pm 1}$ and the result [Bau61] of Baumslag on the presentations of wreath products ensures that $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ is not finitely presented. ☐

Lemma B.4.3. *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$. Let ℓ be the maximal exponent in the decomposition of m in prime factors and set $d = gcd(m,\xi)$, $m_1 = m/d$.*

(a) There exists a sequence $(\xi_n)_n$ in $\mathbb{Z}^*$ such that for all $n \geqslant 1$ one has $|\xi_n| > |\xi_{n-1}|$ and

$$\begin{aligned} \xi_n &\equiv \xi \quad (mod\ m^n\mathbb{Z}_m) \ ; \\ \xi_n &\not\equiv \xi \quad (mod\ m_1^{\ell n+1} d\mathbb{Z}_m) \ . \end{aligned}$$

(b) This sequence satisfies $|\xi_n| \to \infty$, $\xi_n \to \xi$ and

$$\begin{aligned} \xi_n &\equiv \xi_r \quad (mod\ m^n) \quad && \forall r \geqslant n \ ; \\ \xi_n &\not\equiv \xi_{\ell n+1} \quad (mod\ m_1^{\ell n+1} d) \quad && \forall n \ . \end{aligned}$$

Proof. **(a)** Let p be a prime factor of m_1 (there exists one, for $\xi \notin m\mathbb{Z}_m$). The sequence (ξ_n) is constructed inductively. We choose for ξ_0 any nonzero integer such that $\xi_0 - \xi \notin m\mathbb{Z}_m$. At the n-th step, we begin by noticing that the exponent of p in the decomposition of m^n (respectively $m_1^{\ell n+1}d$) is at most ℓn (respectively at least $\ell n + 1$). Hence, $m_1^{\ell n+1}d$ is not a divisor of m^n, so that there exists $\alpha \in \mathbb{Z}$ with $\xi \equiv \alpha$ (mod m^n) but $\xi \not\equiv \alpha$ (mod $m_1^{\ell n+1}d$).

Notice now that we may replace α by any element of the class $\alpha + m^n m_1^{\ell n+1} d\mathbb{Z}$, so that it suffices to choose ξ_n among the elements β in the latter class which satisfy $|\beta| > |\xi_{n-1}|$.

(b) The properties $\xi_n \equiv \xi \pmod{m^n\mathbb{Z}_m}$ and $|\xi_n| > |\xi_{n-1}|$ imply clearly $\xi_n \to \xi$, $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \equiv \xi_r \pmod{m^n}$ for $r \geqslant n$ (for the latter one, Proposition B.1.1 (d) is used).

Finally, combining the properties $\xi_{\ell n+1} \equiv \xi \pmod{m^{\ell n+1}\mathbb{Z}_m}$ and $\xi_n \not\equiv \xi \pmod{m_1^{\ell n+1}d\mathbb{Z}_m}$ gives $\xi_n \not\equiv \xi_{\ell n+1} \pmod{m_1^{\ell n+1}d}$. □

Proof of Theorem B.4.1. The hypothesis $\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$ implies $m \geqslant 2$. Take ℓ, d, m_1 and a sequence (ξ_n) as in Lemma B.4.3. One has then $BS(m, \xi_n) \to \overline{BS}(m, \xi)$. It is thus sufficient by Lemma B.1.6 to prove that the $BS(m, \xi_n)$'s are not marked quotients of $\overline{BS}(m, \xi)$ (for n large enough).

Notice now that (for n large enough) one has $\gcd(m, \xi_n) = d$ since $\xi_n \equiv \xi \pmod{m\mathbb{Z}_m}$ holds. Then, for $n \geqslant 1$, we define the words

$$w_n = a^{n+1}b^m a^{-1}b^{-\xi_n}a^{-n}ba^{n+1}b^{-m}a^{-1}b^{\xi_n}a^{-n}b^{-1}.$$

Part (b) of Lemma B.4.3 combined with Lemma 3 of [Sta06a] give $w_n = 1$ in $BS(m, \xi_r)$ for all $r \geqslant n$, hence $w_n = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$ (for n large enough). On the other hand we get $w_{\ell n+1} \neq 1$ in $BS(m, \xi_n)$ the same way, so that $BS(m, \xi_n)$ is not a marked quotient of $\overline{BS}(m, \xi)$ (for n large enough). □

B.4.2 Explicit presentations of the limits

As we noticed before (see Remark B.3.7), the limits $\overline{BS}(m, \xi)$ are HNN-extensions. This would give us presentations of the limits, provided that we would have presentations for the vextex and edges stabilizers. Nevertheless, rather than to follow this approach and seek presentations for the stabilizers, we establish directly a presentation for the whole group.

For $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, we define the set $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{m,\xi}$ by

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{m,\xi} \quad = \quad \big\{ w\bar{w} : w = ab^{\alpha_1}\cdots ab^{\alpha_k}a^{-1}b^{\alpha_{k+1}}\cdots a^{-1}b^{\alpha_{2k}} \\ \text{with } k \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, \ldots, 2k) \text{ and } w \cdot v_0 = v_0 \big\}\end{aligned}$$

where v_0 is the favoured vertex $(H_n)_n$ of the tree $X_{m,\xi}$ defined in Section B.3.2.

Recall that the stabilizer of the vertex v_0 consists of elements which are powers of b in all but finitely many $BS(m, \xi_n)$, where $(\xi_n)_n$ is any sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ (see Remark B.3.6). It follows that we have $w \cdot v_0 = v_0 \Leftrightarrow \bar{w} \cdot v_0 = v_0$. The aim is now to prove the following result.

Theorem B.4.4. *For all $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the marked group $\overline{BS}(m, \xi)$ admits the presentation $\langle a, b \mid \mathcal{R}_{m,\xi} \rangle$.*

Set $\Gamma = \langle a, b \mid \mathcal{R}_{m,\xi} \rangle$ until the end of this Section. It is obvious that the elements of $\mathcal{R}_{m,\xi}$ are trivial in $\overline{BS}(m, \xi)$, so that one has a marked (hence surjective) homomorphism $\Gamma \to \overline{BS}(m, \xi)$. Theorem B.4.4 is thus reduced to the following proposition, which gives the injectivity.

Proposition B.4.5. *Let w be a word on the alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. If one has $w = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$, then the equality $w = 1$ also holds in Γ.*

Before to prove Proposition B.4.5, we need to introduce some notions what can give rise to geometric interpretations.

From words to paths. Let us call *path* (in a graph) any finite sequence of vertices such that each of them is adjacent to the preceding one. Let w be any word on the alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. It defines canonically a path in the Cayley graph of Γ (or $\overline{BS}(m, \xi)$) which starts at the trivial vertex. Let us denote those paths by $p_\Gamma(w)$ and $p_{\overline{BS}}(w)$. The map $\Gamma \to \overline{BS}(m, \xi)$ defines a graph morphism which sends the path $p_\Gamma(w)$ onto the path $p_{\overline{BS}}(w)$.

The word w defines the same way a finite sequence of vertices in $X_{m,\xi}$ starting at v_0 and such that each of them is equal or adjacent to the preceding one. Indeed, let f be the map $V\big(Cay(\overline{BS}(m, \xi), (a, b))\big) \to V(X_{m,\xi})$ defined by $f(g) = g \cdot v_0$ for any $g \in \overline{BS}(m, \xi)$. If g, g' are adjacent vertices in $Cay(\overline{BS}(m, \xi), (a, b))$, then $f(g)$ and $f(g')$ are either adjacent (case $g' = ga^{\pm 1}$), or equal (case $g' = gb^{\pm 1}$). The sequence associated to w is the image by f of the path $p_{\overline{BS}}(w)$. Now, deleting consecutive repetitions in this sequence, we obtain a path that we denote by $p_X(w)$.

It follows that if the word w satisfies $w = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$ (or, stronger, $w = 1$ in Γ), then the path $p_X(w)$ is closed (i.e. its last vertex is v_0).

Height and Valleys. Recall that one has a homomorphism σ_a from $\overline{BS}(m, \xi)$ onto $\mathbb{Z}$ given by $\sigma_a(a) = 1$ and $\sigma_a(b) = 0$. Given a vertex v in $X_{m,\xi}$, we call *height* of v the number $h(v) = \sigma_a(g)$ where g is any element of $\overline{BS}(m, \xi)$ such that $g \cdot v_0 = v$. It is easy to check that any element g' of $\overline{BS}(m, \xi)$ which defines an elliptic automorphism of $X_{m,\xi}$ satisfies $\sigma_a(g') = 0$, so that the height function is well-defined. It is clear from construction that the height difference between two adjacent vertices is 1.

Given $L \geqslant 1$ and $k \geqslant 1$, we call (L, k)-*valley* any path p in $X_{m,\xi}$ such that one has:

- $p = (v_0, v_1, \ldots, v_L = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2k})$, where v_0 is the favoured vertex;
- $h(v_0) = 0 = h(\nu_k)$ and $h(\nu_0) = -k = h(\nu_{2k})$;
- $h(v) < 0$ for any other vertex v of p;
- $\nu_0 = \nu_{2k}$.

Given a (L, k)-valley $p = (v_0, v_1, \ldots, v_L = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2k})$, the subpaths $(\nu_0, \ldots, \nu_k)$ and $(\nu_k, \ldots, \nu_{2k} = \nu_0)$ have to be geodesic, for the height difference between $\nu_0 = \nu_{2k}$ and ν_k is k. Thus, one has $\nu_1 = \nu_{2k-1}, \ldots, \nu_{k-1} = \nu_{k+1}$.

Lemma B.4.6. *Let w be a word on the alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ such that the path $p_X(w)$ is a (L, k)-valley, say $p_X(w) = (v_0, v_1, \ldots, v_L = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2k})$. There exists a word w' such that the equality $w' = w$ holds in Γ and the path $p_X(w')$ is $(v_0, v_1, \ldots, v_L)$.*

Proof. We argue by induction on L.

Case $L = 1$**:** In that case, one has $k = 1$, $p_X(w) = (v_0, v_1 = \nu_0, \nu_1, \nu_2)$. Up to replacing w by a word which defines the same element in $\mathbb{F}_2$ (hence in Γ) and the same path in X, we may assume to have $w = b^{\alpha_0} a^{-1} b^{\alpha_1} a b^{\beta_1} a^{-1} b^{\beta_2}$. Set $r = ab^{-\beta_1} a^{-1} b^{-\alpha_1} ab^{\beta_1} a^{-1} b^{\alpha_1}$. Since ν_0 and ν_2 are equal, the subword $ab^{\beta_1} a^{-1}$ (of w) defines a closed subpath in X, so that we obtain $ab^{-\beta_1} a^{-1} b^{-\alpha_1} \cdot v_0 = v_0$. Consequently, we get $r \in \mathcal{R}$, whence $r = 1$ in Γ. Inserting r in next to last position, we obtain

$$w \underset{\Gamma}{=} b^{\alpha_0+\beta_1} a^{-1} b^{\alpha_1+\beta_2} =: w' \ .$$

This equality also implies that the paths $p_X(w)$ and $p_X(w')$ have the same endpoint. Hence one has $p_X(w') = (v_0, \nu_2) = (v_0, v_1)$ and we are done.

Induction step: We assume $L > 1$ to hold. Up to replacing w by a word which defines the same element in $\mathbb{F}_2$ (hence in Γ) and the same path in X, we may write

$$w = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_L} b^{\alpha_L} \cdot ab^{\beta_1} \cdots ab^{\beta_k} a^{-1} b^{\beta_{k+1}} \cdots a^{-1} b^{\beta_{2k}}$$

with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ for all i. We distinguish two cases:

(1) the vertex v_{L-1} is higher than v_L (i.e. $\varepsilon_L = -1$);

(2) the vertex v_{L-1} is lower than v_L (i.e. $\varepsilon_L = 1$).

Case (1): Set

$$\begin{aligned} r \ = \ & ab^{-\beta_{2k-1}} \cdots ab^{-\beta_k} a^{-1} b^{-\beta_{k-1}} \cdots a^{-1} b^{-\beta_1} a^{-1} b^{-\alpha_L} \cdot \\ & ab^{+\beta_{2k-1}} \cdots ab^{+\beta_k} a^{-1} b^{+\beta_{k-1}} \cdots a^{-1} b^{+\beta_1} a^{-1} b^{+\alpha_L} \ . \end{aligned}$$

Since ν_0 and ν_{2k} are equal, the subword $ab^{\beta_1} \cdots ab^{\beta_k} a^{-1} b^{\beta_{k+1}} \cdots a^{-1} b^{\beta_{2k-1}} a^{-1}$ (of w) defines a closed subpath in X, so that (when considered as a word on its own right) it stabilizes the vertex v_0. Inverting it, we get

$$ab^{-\beta_{2k-1}} \cdots ab^{-\beta_k} a^{-1} b^{-\beta_{k-1}} \cdots a^{-1} b^{-\beta_1} a^{-1} \cdot v_0 = v_0 \ .$$

It implies $r \in \mathcal{R}$, whence $r = 1$ in Γ. Inserting r in next to last position, we obtain

$$\begin{aligned} w \underset{\Gamma}{=} w^* \ := \ & b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_{L-1}} b^{\alpha_{L-1}+\beta_{2k-1}} \cdot \\ & ab^{\beta_{2k-2}} \cdots ab^{\beta_k} a^{-1} b^{\beta_{k-1}} \cdots a^{-1} b^{\beta_1} \cdot \\ & a^{-1} b^{\alpha_L+\beta_{2k}} \ . \end{aligned}$$

We write $w^* = w'' a^{-1} b^{\alpha_L+\beta_{2k}}$. Since the words w and w^* begin the same way and since one has $w = w^*$ in Γ, the path $p_X(w^*)$ has the form

$$(v_0, v_1, \ldots, v_{L-1} = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2k-2}, v_L) \ .$$

Since v_{L-1} is higher than v_L, we have $h(v_{L-1}) = -(k-1)$. Contemplating w^*, one sees that we have $h(\omega_{k-1}) = 0$, $h(\omega_{2k-2}) = -(k-1)$, so that the subpaths $(\omega_0, \dots, \omega_{k-1})$ and $(\omega_{k-1}, \dots, \omega_{2k-2}, v_L))$ are geodesic. On the other hand, the geodesic between ω_{k-1} and v_L passes through $v_{L-1} = \omega_0$, so that we have $\omega_{2k-2} = v_{L-1}$. It follows that $p_X(w'')$ has the form $(v_0, v_1, \dots, v_{L-1} = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2k-2} = v_{L-1})$, so that it is a $(L-1, k-1)$-valley. We apply the induction hypothesis to w'' and get a word w''' such that $w'' = w'''$ holds in Γ and $p_X(w''') = (v_0, \dots, v_{L-1})$. It suffices to set $w' = w''' a^{-1} b^{\alpha_L + \beta_{2k}}$ to conclude.

Case (2): In this case, we have $h(v_L) = -k$ and $h(v_{L-1}) = -(k+1)$, so that the edge linking these vertices goes from v_L to v_{L-1}. By Proposition B.3.9, there exists $\lambda \in \{0, \dots, |m|-1\}$ such that $wb^\lambda a^{-1} \cdot v_0 = v_{L-1}$. Set $w^* = wb^\lambda a^{-1}$ and $w' = w^* ab^{-\lambda}$, so that $w = w'$ holds in Γ. The path $p_X(w^*)$ is an $(L-1, k+1)$-valley, so that we may apply the induction hypothesis to w^*. This gives a word w'' such that $w'' = w^*$ in Γ and $p_X(w'') = (v_0, \dots, v_{L-1})$. We conclude by setting $w' = w'' ab^{-\lambda}$. □

Proof of Proposition B.4.5. Let w be a word which defines the trivial element in $\overline{BS}(m, \xi)$. Up to replacing w by a word which defines the same element in $\mathbb{F}_2$ (hence in Γ), we may write

$$w = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_\ell} b^{\alpha_\ell}$$

with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ for all i. The path $p_X(w)$ is closed and has length ℓ. We argue by induction on ℓ.

Case $\ell = 0$: In this case, one has $w = b^{\alpha_0}$, so that $b^{\alpha_0} = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$. It follows $\alpha_0 = 0$, hence $w = 1$ in Γ.

Induction step ($\ell > 0$): Let us write $p_X(w) = (v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_\ell = v_0)$. Up to replacing the word w by a cyclic conjugate, we may assume (without changing ℓ) that $h(v_i) \leqslant 0$ for all i. Denote by $k_0 = 0 < k_1 < \ldots < k_s = \ell$ the indices such that $h(v_k) = 0$. We now distinguish two possibilities:

(1) The path $p_X(w)$ turns back at some v_{k_i} (i.e. $\exists i$ with $1 \leqslant i \leqslant s-1$ such that $v_{k_i+1} = v_{k_i-1}$.)

(2) The path $p_X(w)$ does not turn back at any v_{k_i} (i.e. $\forall i$ with $1 \leqslant i \leqslant s-1$ one has $v_{k_i+1} \neq v_{k_i-1}$.)

Case (1): Let i be an index (with $1 \leqslant i \leqslant s-1$) such that $v_{k_i+1} = v_{k_i-1}$. The subword $w' = a^{\varepsilon_{k_{i-1}+1}} b^{\alpha_{k_{i-1}+1}} \cdots a^{\varepsilon_{k_i}} b^{\alpha_{k_i}} a^{\varepsilon_{k_i+1}}$ defines by construction a $(k_i - k_{i-1} - 1, 1)$-valley in the tree X. Lemma B.4.6 furnishes then a word w'' such that $w'' = w'$ holds in Γ and the path $p_X(w'')$ is strictly shorter than $p_X(w')$. We construct a word w^* by replacing w' by w'' in w. The path $p_X(w^*)$ is strictly shorter than $p_X(w)$ and one has $w^* = w$ in Γ. Applying the induction hypothesis to w^*, we get $w^* = 1$ in Γ, hence $w = 1$ in Γ.

Case (2): Suppose first that $s = 1$. All vertices of $p_X(w)$ but v_0 and v_L have strictly negative height. It follows that $\alpha_0 = -\alpha_\ell$, for we have $w = 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ by hypothesis. Since we also have $\varepsilon_1 = -1$ and $\varepsilon_\ell = 1$ by construction, we get

$$ab^{-\alpha_0} w b^{\alpha_0} a^{-1} \underset{\Gamma}{=} b^{\alpha_1} a^{\varepsilon_2} b^{\alpha_2} \cdots a^{\varepsilon_{\ell-1}} b^{\alpha_{\ell-1}} =: w' \ .$$

Since the path $p_X(w')$ is strictly shorter than $p_X(w)$, we may apply the induction hypothesis to w' and we obtain $w' = 1$, hence $w = 1$, in Γ.

The case $s = 2$ is impossible, for it would imply that the path $p_X(w)$ turns back at v_{k_1}, which is incompatible with case (2).

From now on, we suppose $s \geqslant 3$. There exists some i in $\{1, \dots, s-2\}$ such that one has $v_{k_i} = v_{k_{i+1}}$ (think at the v_{k_i} which is at most far from v_0). We set

$$w^* := a^{\varepsilon_{k_i+1}} b^{\alpha_{k_i+1}} \cdots a^{\varepsilon_{k_{i+1}-1}} b^{\alpha_{k_{i+1}-1}} a^{\varepsilon_{k_{i+1}}}$$

(it is a subword of w). Let us now fix a sequence $(\xi_n)_n$ of nonzero integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. Then, we consider the morphisms $\psi_n : BS(m, \xi_n) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ given by $\psi_n(a)(x) = \frac{\xi_n}{m} x$ and $\psi_n(b)(x) = x + 1$. The word w^* stabilizing v_0 by construction, we get $w^* = b^{\lambda_n}$ in $BS(m, \xi_n)$, which implies $\psi_n(w^*) = x + \lambda_n$ (with $\lambda_n \in \mathbb{Z}$), for n large enough. In the other hand, seeing the word w^* itself, we get

$$\lambda_n = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \alpha_j \left(\frac{\xi_n}{m}\right)^{h(v_j)}$$

for those values of n. Then, taking absolute values, this gives

$$|\lambda_n| \leqslant \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |\alpha_j \left(\frac{\xi_n}{m}\right)^{h(v_j)}| \leqslant \frac{|m|}{|\xi_n|} \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |\alpha_j| \; .$$

It follows that $|\lambda_n| < 1$ holds for n large enough, since $|\xi_n|$ tends to ∞. For those values of n, we get $w^* = b^0 = 1$ in $BS(m, \xi_n)$. Consequently, we get $w^* = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$.

By construction (we use the assumption $i \in \{1, \dots, s-2\}$), the path $p_X(w^*)$ is strictly shorter than $p_X(w)$, so that we apply the induction hypothesis to w^* and get $w^* = 1$ in Γ. Erasing, w^* in w, one gets

$$w \underset{\Gamma}{=} w' = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_{k_i}} b^{\alpha_{k_i} + \alpha_{k_{i+1}}} a^{\varepsilon_{k_{i+1}+1}} b^{\alpha_{k_{i+1}+1}} \cdots a^{\varepsilon_\ell} b^{\alpha_\ell} \; .$$

Applying the induction hypothesis to w', we get $w = 1$ in Γ. $\square$

B.5 Other converging sequences of one-relator groups with parameters

In this appendix, we collect material about other classical sequences of groups parametrized by integers. Namely, we prove that several such sequences are convergent.

B.5.1 Limits of torus knots groups

We define the groups

$$T(m,n) = \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle \text{ and } T(m) = \langle a, b \mid [a^m, b] = 1 \rangle, \; m, n \in \mathbb{Z}^*.$$

When m and n are relatively prime, the group $T(m,n)$ is the fundamental group of $\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n}$ where $K_{m,n}$ is the knot drawn on the torus $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, obtained as the image of the map $t \longmapsto (mt, nt)$ [Mas67]. Given with their natural ordered set of generators (a, b), the groups $T(m,n)$ and $T(m)$ are marked groups of $\mathcal{G}_2$. Notice that the marked group $T(m)$ is also $BS(m,m)$ marked by (b,a) and that $BS(m,n)$ and $T(m,n)$ are the most elementary graph of groups with vertice and edge groups isomorphic to $\mathbb{Z}$. Indeed, they have the following structures :

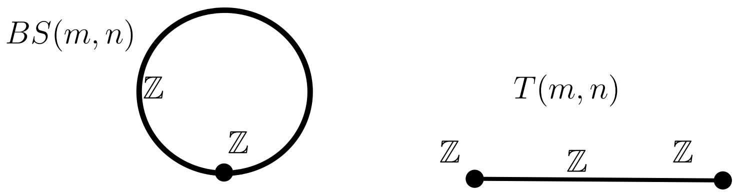


Figure B.2: Elementary generalized Baumslag-Solitar groups

The study of their limits is the first step towards limits of generalized Baumslag-Solitar groups (see [For03, Kro90] for more on this class).

Proposition B.5.1. *(i) The limit of $T(m,n)$ in $\mathcal{G}_2$, when m and n tend both to infinity, is the free group $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ marked with its natural set of generators.*

(ii) Assume now that m is fixed. The limit in $\mathcal{G}_2$ of $T(m,n)$, as n tends to infinity, is $T(m)$.

Proof. Notice first that $T(m,n)$ is the free product of $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ by $\langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$ with amalgamation over $\langle a^m \rangle \simeq \mathbb{Z}$ and $\langle b^n \rangle \simeq \mathbb{Z}$ (see [LS77, Ch.IV] for definition).

By the normal form theorem [LS77, Theorem IV.2.6] for free products with amalgamation, the marked group $T(m,n)$ has no relation in the ball of radius r as soon as m and n exceed $r+1$. This shows (i).

Let us now turn to statement (ii). It is clear from definitions that $T(m,n)$ is a marked quotient of $T(m)$ for all $m, n \in \mathbb{Z}$. It suffices thus to show that for any reduced word w on $\{a,b\}^{\pm 1}$, there is some integer $L = L(w)$ such that $w \underset{T(m)}{\neq} 1 \Rightarrow w \underset{T(m,n)}{\neq} 1$ for all $n > L$.

Let $w = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \cdots a^{\alpha_\ell} b^{\beta_\ell}$ be a freely reduced word (with possibly $\alpha_1 = 0$ or $\beta_\ell = 0$) such that $w \neq 1$ in $T(m)$. Since a^m is central in $T(m)$, up to "passing powers of a^m to the left", we may assume that $\alpha_j \in \{1, \ldots, m-1\}$ for $2 \leqslant j \leqslant \ell$ (the value of ℓ may decrease in this operation). The normal form theorem for free product with amalgamation now ensures that $w \neq 1$ in $T(m,n)$ as soon as n exceeds $|w|+1$, so that we may set $L(w) = |w|+1$. □

The isomorphism problem in the classes of torus knots groups and Baumslag-Solitar groups is completely solved.

Proposition B.5.2. *Let m, n, p, q be nonzero integers.*

(i) *$T(m,n)$ and $T(p,q)$ are isomorphic (as groups) if and only if* $\{|m|, |n|\} = \{|p|, |q|\}$ [Mas67]*;*

(ii) *$BS(m,n)$ and $BS(p,q)$ are isomorphic (as groups) if and only if there exists $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ such that* $(m,n) = (\varepsilon p, \varepsilon q)$ [Mol91, Sou01].

The classification of limits of Torus knot groups up to group isomorphism follows immediately from (ii): $T(m)$ and $T(n)$ are isomorphic (as groups) if and only if $|m| = |n|$. Similarly, we ask then:

Question B.5.1. *When are $\overline{BS}(m,\xi)$ and $\overline{BS}(n,\eta)$ isomorphic (as groups)?*

B.5.2 Limits of Baumslag-Solitar groups with other markings

Let us recall the notation $\Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\mathrm{lcm}\,(m,n)}]$ of Section B.1.3. Notice that $\Gamma(1,n) = BS(1,n)$. It is known from [Sta06a] that the limit of the sequence $(BS(1,n))_{n\geq 1}$ in $\mathcal{G}_2$ is the marked group $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$. Let ϕ be the endomorphism of $\mathbb{F}_2$ induced by the map $a \longmapsto a, b \longmapsto b^m$. We notice that it induces endomorphisms $\phi : BS(m,n) \to BS(m,n)$ of Baumslag-Solitar groups.

Remark B.5.3. *The morphism $\phi : BS(m,n) \to BS(m,n)$ is an epimorphism if and only if m and n are relatively prime integers. More precisely, $Im\,\phi \cap \langle b \rangle = \langle b^{gcd(m,n)} \rangle$ (see* [Sou01, Lemma A.32] *for a proof). Hence, if $gcd(m,n) = 1$, the image of (a,b) under ϕ^k is the generating set (a, b^{m^k}) of $BS(m,n)$.*

Let us fix a nonzero integer m.

For any $n \in \mathbb{Z}^*$ and any $\ell \in \mathbb{N}$, we denote by $\Gamma_{n,\ell}$ the subgroup of $BS(m,n)$ generated by a and b^{m^ℓ} (We use the latter two elements as marking). Note that if m and n are coprime, then for any $\ell \in \mathbb{N}$ one has $\Gamma_{n,\ell} = BS(m,n)$ as groups. The result we are aiming at is the following.

Theorem B.5.4. *Let $m \in \mathbb{Z}^*$. The following statements hold:*

(a) *For any n and for $\ell \to \infty$, one has $\Gamma_{n,\ell} \to \Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{gcd(m,n)}{lcm(m,n)}]$;*

(b) *For $|n| \to \infty$ and $\ell \to \infty$, one has $\Gamma_{n,\ell} \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.*

Result (a) was known by Baumslag and Strebel in [BS76, Sections 1.7 and 1.8]. They proved also that $\Gamma(2,3)$ is the metabelianization of $BS(2,3)$ and that it is not finitely presented but has trivial Schur multiplicator. The convergence (a) was also used in [ABL+05] to prove that the $BS(m,n)$'s, for $|m|,|n| \geqslant 2$ and m,n relatively prime, are not uniformly non-amenable. In [Osi02] it was used to show that the same groups are weakly amenable (in the sense that their left regular representation is not uniformly isolated from the trivial one).

Proof. The morphism $\phi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ defines marked epimorphisms $\Gamma_{n,\ell} \to \Gamma_{n,\ell+1}$ for all $n \in \mathbb{Z}^*$ and $\ell \in \mathbb{N}$. Consequently, for all $n \in \mathbb{Z}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$ and $w \in \mathbb{F}_2$, one has

$$w \underset{\Gamma_{n,\ell}}{=} 1 \iff \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} 1 \,. \tag{B.1}$$

Let us now take $w \in \mathbb{F}_2$. Thanks to (B.1), it is sufficient to prove that:

(i) For any n, one has $w \underset{\Gamma(m,n)}{=} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} 1$ for ℓ large enough;

(ii) For any n, one has $w \underset{\Gamma(m,n)}{\neq} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{\neq} 1$ for ℓ large enough;

(iii) One has $w \underset{\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}}{=} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} 1$ for $|n|$ and ℓ large enough;

(iv) One has $w \underset{\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}}{\neq} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{\neq} 1$ for $|n|$ and ℓ large enough.

We write $w = a^{i_1}b^{\beta_1}a^{-i_1}\cdots a^{i_k}b^{\beta_k}a^{-i_k}a^\sigma$. Up to conjugating, we may assume that we have $i_1,\ldots,i_k \geqslant 0$. Set now $\ell_w = \max(i_1,\ldots,i_k)$. For all $\ell \geqslant \ell_w$ and $n \in \mathbb{Z}^*$, one has

$$\begin{array}{rcl} \phi^\ell(w) & = & a^{i_1}b^{m^\ell\beta_1}a^{-i_1}\cdots a^{i_k}b^{m^\ell\beta_k}a^{-i_k}a^\sigma \\ & \underset{BS(m,n)}{=} & b^{m^{\ell-i_1}n^{i_1}\beta_1}\cdots b^{m^{\ell-i_k}n^{i_k}\beta_k}a^\sigma \\ & = & b^{m^\ell\sum_{s=1}^k \beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}}a^\sigma \,. \end{array}$$

Proof of (i). Fix $n \in \mathbb{Z}^*$. The equality $w = 1$ in $\Gamma(m,n)$ implies $\sum_{s=1}^k \beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s} = 0$ and $\sigma = 0$. Consequently, one has $\phi^\ell(w) = 1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell \geqslant \ell_w$.

Proof of (ii). Fix $n \in \mathbb{Z}^*$. In the case $\sigma \neq 0$, one would have $\phi^\ell(w) \neq 1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell \in \mathbb{N}$. Thus we assume $\sigma = 0$ and the inequality $w \neq 1$ in $\Gamma(m,n)$ gives $\sum_{s=1}^k \beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s} \neq 0$. Consequently, for any $\ell \geqslant \ell_w$, one has

$$\phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} b^{m^\ell\sum_{s=1}^k \beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}} \underset{BS(m,n)}{\neq} 1 \,.$$

Proof of (iii). The equality $w = 1$ in $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ implies $\sigma = 0$ and $\sum_{s=1}^k \beta_s t^{i_s} = 0$ (as polynomials). Consequently, one has $\phi^\ell(w) = 1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell \geqslant \ell_w$ and $n \in \mathbb{Z}^*$.

Proof of (iv). In the case $\sigma \neq 0$, one would have $\phi^\ell(w) \neq 1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}^*$. Thus we assume $\sigma = 0$ and the inequality $w \neq 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ gives $\sum_{s=1}^k \beta_s t^{i_s} \neq 0$ (as polynomials). The polynomial $\sum_{s=1}^k \beta_s t^{i_s}$ having only finitely many roots, one has $\sum_{s=1}^k \beta_s \left(\frac{n}{m}\right)^{i_s} \neq 0$ for $|n|$ large enough. Consequently, for any $\ell \geqslant \ell_w$ and for $|n|$ large enough, one has

$$\phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} b^{m^\ell \sum_{s=1}^k \beta_s \left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}} \underset{BS(m,n)}{\neq} 1 \; .$$

This completes the proof. $\square$

Notice that all the limits we got here are Hopfian groups. Indeed, as they are finitely generated metabelian groups, Hall's theorem [Hal54] implies that they are residually finite, and hence Hopfian by Malcev's theorem [LS77]. So, we ask

Question B.5.2. *Are the groups $\overline{BS}(m,\xi)$ Hopfian for $|m| \geq 2$?*

The kernel of the endomorphism induced by ϕ on $\overline{BS}(m,\xi)$ contains $[b, aba^{-1}]$ which is non trivial for $|m| \geq 2$. However, the induced endomorphism fails to be surjective. This is proved the same way we show the following:

Proposition B.5.5. *The group $\overline{BS}(m,\xi)$ is not co-Hopfian.*

Proof. Choose some k coprime with both m and ξ and let ϕ_k be the endomorphism of $\mathbb{F}_2$ defined by $\phi_k(a) = a$ and $\phi_k(b) = b^k$. The map ϕ_k induces an injective endomorphism of $\overline{BS}(m,\xi)$ that we denote also ϕ_k. Indeed, the map ϕ_k induces an injective endomorphism of $BS(m,\xi_n)$ for all integer ξ_n coprime with k (see [Sou01, Lemma A.30]). Let $(\xi_n)_n$ be a sequence of integers such that $\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and $|\xi_n| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. By Lemma B.1.4, k is coprime with ξ_n for all n large enough. We apply then Lemma B.3.10 to the sequence $\left(\phi_k : BS(m,\xi_n) \longrightarrow BS(m,\xi_n)\right)_n$ of injective endomorphisms.

Finally, let us show that ϕ_k is not surjective when k is not equal to ± 1. Let σ_b be defined by $\sigma_b(a) = 1$ and $\sigma_b(b) = b$. Lemma B.3.10 shows that σ_b induces an epimorphism from $\overline{BS}(m,\xi)$ onto $\mathbb{Z}$. We also denote it by σ_b. As $\sigma_b \circ \phi_k(\overline{BS}(m,\xi)) = k\mathbb{Z}$, ϕ_k is not surjective if $k \neq \pm 1$. Hence $\overline{BS}(m,\xi)$ is not co-Hopfian. $\square$

Finally, if we consider all possible markings (with possibly more than two generators) of a given Baumslag-Solitar group (respectively of all such groups), we might want to describe the groups obtained as limits:

Problem B.5.6. *Describe the closure of the set of Baumslag-Solitar groups in the space $\mathcal{G}_n$ of groups on n generators.*

Such a description would include limits of finitely generated non abelian free groups. Indeed, limits of non abelian free groups are limits of Baumslag-Solitar goups because $\mathbb{F}_2$ is the limit of $BS(m,n)$ as m and n tend both to infinity [Sta06a] and any finitely generated non abelian free group is the limit of $\mathbb{F}_2$ endowed with a suitable sequence of markings [CG05]. A description of limits of finitely generated free groups and characterizations are given in [CG05, Thm. 1.1, Thm. 4.4 and Thm. 4.6].

B.5.3 Limits of other Baumslag's one-relator groups

We denote by $BS(m,n,l)$ the group defined by the presentation

$$\left\langle a, b \mid (ab^m a^{-1} b^{-n})^l = 1 \right\rangle \text{ with } m, n, l \in \mathbb{Z}^*.$$

This family of one-relator groups with torsion was introduce by Baumslag in [Bau67]. He proved there that such groups are residually finite if $|m| \neq 1 \neq |n|$, m and n are coprime, and $l > 1$

Proposition B.5.7. *Consider the family of marked groups $BS(m,n,l)$ (endowed with the canonical marking (a,b)) with $m, n \in \mathbb{Z}^*$ and $l \geqslant 2$. One has $BS(m,n,l) \to \mathbb{F}_2$ in $\mathcal{G}_2$ whenever $|m|, |n|$ or $|l|$ tends to infinity.*

Proof. This is a straightforward corollary of the following result of B.B. Newman [LS77, Ch. II, Pr. 5.28]. If X is a set of letters and w is any word on $X^{\pm 1}$ which is trivial in the one-relator group with torsion $\left\langle X \mid r^k = 1 \right\rangle$, then the length $|w|$ of w with respect to the word metric induced by X is not less than $(k-1)|r|$. □

Authors addresses:

L.G. Université de Genève, Section de Mathématiques, 2-4, rue du Lièvre, Case postale 64, CH-1211 Genève 4, Switzerland, luc.guyot@math.unige.ch

Y.S. Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal, Campus Universitaire des Cézeaux, F-63177 Aubière cedex, France, yves.stalder@math.univ-bpclermont.fr

Appendix C

Limits of dihedral groups

We give a characterization of limits of dihedral groups in the space of finitely generated marked groups. We also describe the topological closure of dihedral groups in the space of marked groups on a fixed number of generators.

C.1 Introduction

The space of marked groups is a topological setting for expressing approximation among groups and algebraic limit processes in terms of convergence. A convenient definition consists in topologizing the set of normal subgroups of a given free group $\mathbb{F}$ (we hence topologize its marked quotients) with the topology induced by the product topology of $\{0,1\}^{\mathbb{F}}$. The idea of topologizing the set of subgroups of a given group goes back to Chabauty's topology on the closed subgroups of a locally compact group [Cha50]. At the end of its celebrated paper "Polynomial growth and expanding maps" [Gro81], Gromov sketched what could be a topology on finitely generated groups and put it into practice in the purpose of growth results. The space of marked groups on m generators is properly defined in [Gri84] where the study of the neighborhood of the first Grigorchuk group turned out to be fruitful. This compact, totally disconnected and metrizable space has been used to prove the existence of infinite groups with unexpected or rare properties [Gro93, Ste96, Cha00, Sha00]. In [CG05] Champetier and Guirardel present a new approach of Sela's *limit groups* [Sel01] (which appeared to coincide with the long-studied class of finitely generated fully residually free groups, see definition below) in the topological framework of the space of marked groups. They give indeed the first proof not relying on the finite presentability of *limit groups* [KM98a, KM98b, Sel01, Gui04] that limits of free groups in the space of marked groups are*limit groups*. Among others, they provide a simple proof of the fact that a finitely generated group is a *limit group* if and only if it has the same universal theory as a free group of rank two. They hence relate topology and logic. In the present paper, we use these links to tackle the easier case of limits of dihedral groups. Our motivation is:

Problem. [dlH00, CG05] *Describe the topological closure of finite groups in the space of marked groups.*

We carry out such a description for the most elementary finite groups: cyclic and dihedral finite groups.

Let n be in $\{1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. We define the dihedral group $\mathbb{D}_{2n} := \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$ (we omit the relation $b^n = 1$ when $n = \infty$). If n is finite, then $\mathbb{D}_{2n}$ is a finite group of order $2n$. The groups $\mathbb{D}_2$ (which is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) and $\mathbb{D}_4$ (which is isomorphic to the Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) are the only abelian dihedral groups. If $3 \leq n < \infty$, then $\mathbb{D}_{2n}$ is isomorphic to the group of Euclidean isometries of a regular n-gon P_n (any function that maps a to a reflection and b to a rotation with angle $\frac{2\pi}{n}$, reflection and rotation both preserving P_n, extends to a unique isomorphism from $\mathbb{D}_{2n}$ to $Isom(P_n)$). In this case we can identify $\{1, b, \ldots, b^{n-1}\}$ with the group of rotations of P_n and $\{a, ab, \ldots, ab^{n-1}\}$ with the set of reflections of P_n. If $n \geq 3$ the center $Z(\mathbb{D}_{2n})$ has two elements when n is even (1 and $b^{n/2}$) and $Z(\mathbb{D}_{2n})$ is trivial when n is odd. For all $n < \infty$, the subgroup $\langle b \rangle$ generated by b is a cyclic normal subgroup of order n on which $\langle a \rangle$ acts by conjugation. Thus $\mathbb{D}_{2n}$ is isomorphic to the semidirect product $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ where the action of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is multiplying by -1. The infinite dihedral group $\mathbb{D}_\infty$ is centerless and is isomorphic to $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. All proper quotients of $\mathbb{D}_\infty$ are finite dihedral groups and any such group is a quotient of $\mathbb{D}_\infty$.

We denote by $\mathcal{M}$ the space of all finitely generated marked groups (see Section C.2 for a definition). Unless otherwise stated, limits of groups considered are limits in $\mathcal{M}$.

Let P be a group theoretic property. A group G is *fully residually* P if for any finite subset F of $G \setminus \{1\}$ there is a group H with P and a homomorphism from G to H that maps no element of F to the trivial element. We address the reader to Section C.2 for the definitions required in our first theorem (convergence in $\mathcal{M}$, universal theory $Th_\forall(G)$ of G, ultrafilter and ultraproduct). The only abelian limits in $\mathcal{M}$ of dihedral groups are easily seen to be the marked groups abstractly isomorphic to $\mathbb{D}_2$ or $\mathbb{D}_4$ (see Section C.2). We give in Section C.4 the following characterization of the non abelian limits:

Theorem A (Th. C.4.1)**.** *Let G be a non abelian finitely generated group. The following conditions are equivalent:*

(lim) *G is a limit of dihedral groups;*

(*res*) *G is fully residually dihedral;*

(*iso*) *G is isomorphic to a semidirect product $A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ where A is a limit of cyclic groups on which $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ acts by multiplication by -1;*

($Th_\forall$) *$Th_\forall(G) \supset \bigcap_{n \geq 3} Th_\forall(\mathbb{D}_{2n})$;*

($\Pi/\mathfrak{U}$) *G is isomorphic to a subgroup of $\left(\prod_{n \geq 3} \mathbb{D}_{2n}\right)/\mathfrak{U}$ for some ultra-filter $\mathfrak{U}$ on $\mathbb{N}$.*

Proposition C.4.2 shows that limits of cyclic groups are finitely generated abelian groups with cyclic torsion subgroup.

We denote by ω the smallest infinite ordinal, *i.e.* the set $\mathbb{N}$ of positive integers endowed with its natural order. In Section C.5 we finally describe the set of limits of dihedral groups on m generators:

Theorem B (Th.C.5.2)**.** *The topological closure $\mathcal{D}_m$ of dihedral marked groups in $\mathcal{M}_m$ is homeomorphic to $\omega^{m-1}(2^m-1)+1$ endowed with the order topology.*

In other words, $\mathcal{D}_m$ is the disjoint union of $2^m - 1$ copies of $\overline{\mathbb{N}}^{m-1}$ where $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ is the Alexandroff compactification of $\mathbb{N}$. We use a theorem of Mazurkiewicz and Sierpinski [MS20] on Cantor-Bendixson invariants of countable compact spaces to prove our last result. For comparison, the set of abelian marked groups on m generators is homeomorphic to $\omega^m + 1$. This fact can be easily derived from the proof of Theorem B.

C.2 Convergence and logic

Here, we give preliminary definitions and results that we need for the proofs of the main theorems. We first define marked groups and the topology (called Chabauty's topology, Cayley's topology or weak topology) on the set of marked groups. Second, we relate convergence in the space of marked groups to universal theory and ultraproducts (see [CG05] for a more full-bodied exposition).

Definition C.2.1. *The pair (G, S) is a marked group on m generators if G is a group and $S = (g_1, \ldots, g_m)$ is an ordered system of generators of G. We call also S a generating G-vector of length m (or simply a marking of G of length m) and we denote by $V(G, m)$ the set of these G-vectors.*

We denote by $r(G)$ the *rank* of G, *i.e.* the smallest number of generators of G. Two marked groups (G, S) and (G', S') (with $S = (g_1, \ldots, g_m)$ and $S' = (g'_1, \ldots, g'_m)$) are *equivalent* if there is an isomorphism $\phi : G \longrightarrow G'$ such that $\phi(g_i) = g'_i$ for $i = 1, \ldots, m$.

Nota Bene C.2.1. *We denote also by (G, S) the equivalence class of (G, S) and we call this class a marked group.*

Let $\mathbb{F}_m$ be the free group with basis $(e_1, \ldots, e_m)$ and let $\mathbb{F}_\infty$ the free group with basis $(e_i)_{i \geq 1}$. Let G and G' be two groups and let $p : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G$ and $p' : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G'$ be two epimorphisms. The epimorphisms p and p' are *equivalent* if there is an isomorphism ϕ such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_m \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "p'"'] & G \arrow[d, "\phi"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

Using the universal property of $\mathbb{F}_m$, we establish a natural bijection from marked groups on m generators to equivalence classes of epimorphisms with source $\mathbb{F}_m$. The last set is clearly in one-one correspondence with the set $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ of all normal subgroups of $\mathbb{F}_m$. We endow $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ with the topology induced by the Tychonoff topology on the product $\{0,1\}^{\mathbb{F}_m}$ which identifies with the set of all subsets of $\mathbb{F}_m$. We easily check that $\mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ is a closed subspace of $\{0,1\}^{\mathbb{F}_m}$. We hence define a compact, metrizable and totally discontinuous topology on the corresponding set $\mathcal{M}_m$ of marked groups on m generators. We have for instance $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, [1]_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbb{Z}, 1)$ in $\mathcal{M}_1$ and $(\mathbb{D}_{2k}, (a,b)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbb{D}_\infty, (a,b))$ in $\mathcal{M}_2$ with respect to Chabauty's topology. Let G be a finitely generated group. We define $\mathcal{N}(G)$ as the set of normal subgroups of G endowed with the topology induced by $\{0,1\}^G$. Let $p : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G$ be an epimorphism and let $p^* : \mathcal{N}(G) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathbb{F}_m)$ be defined by $p^*(N) = p^{-1}(N)$. The map p^* is clearly continuous and injective.

Lemma C.2.2. [CG05, Lemma 2.2] *If G is finitely presented then p^* is an open embedding.*

Thus, for any marking S of a finitely presented group G in $\mathcal{M}_m$, there is a neighborhood of (G,S) containing only quotients of G (the quotient map is induced by the natural bijection between the markings). Namely, this is the set corresponding to the image of p^* where p is the epimorphism defined by means of S. More generally, $p : G \twoheadrightarrow H$ induces an open embedding $p^* : \mathcal{N}(H) \hookrightarrow \mathcal{N}(G)$ if and only if $\ker p$ is finitely generated as a normal subgroup of G.

Remark C.2.3. *It follows from Lemma C.2.2 that finite groups are isolated in $\mathcal{M}$. Isolated groups are characterized in* [Gri05, dCGP07]. *Since nilpotent groups are finitely presented, we can also derive of Lemma C.2.2 that the set of nilpotent groups of a given class c is open in $\mathcal{M}$.*

From the spaces $\mathcal{M}_m$, we build up the space $\mathcal{M}$ of all finitely generated marked groups. Observe first that the map $(G,(g_1,\ldots,g_m)) \mapsto (G,(g_1,\ldots,g_m,1))$ defines a continuous and open embedding $i_m : \mathcal{M}_m \hookrightarrow \mathcal{M}_{m+1}$. The inductive limit $\mathcal{M}$ of the of the system $\{i_m : \mathcal{M}_m \hookrightarrow \mathcal{M}_{m+1}\}_{m\geq 1}$ is a metrizable locally compact and totally discontinuous space. Observe that a convergence in $\mathcal{M}$ boils down to a convergence in $\mathcal{M}_m$ for some m and the converse is obvious. The space $\mathcal{M}$ can be viewed as the set of (equivalence classes) of groups marked with an infinite sequence of generators which are eventually trivial. Let $v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_l$ be elements of $\mathbb{F}_\infty$ and let (Σ) be the system $\begin{cases} v_1 = 1,\ldots,v_k = 1 \\ w_1 \neq 1,\ldots,w_l \neq 1 \end{cases}$. We denote by O_Σ the set of marked groups (G,S) of $\mathcal{M}$ for which S (possibly completed by trivial elements) is a solution of (Σ) in G. The family of sets O_Σ defines a countable basis of open and closed subsets of $\mathcal{M}$.

Remark C.2.4. *Let P be group theoretic property stable under taking subgroups and let G be a fully residually P group. Using the previous basis, we* *easily deduce that for any marking S of G, (G,S) is the limit in $\mathcal{M}$ of a sequence of marked groups with P. The converse is also true when G is finitely presented because of Lemma C.2.2.*

Lemma C.2.5 (Subgroup and convergence [CG05])**.** *Let $(G_n,S_n)_n$ be a convergent sequence in $\mathcal{M}$ with limit (G,S). Let H be a finitely generated subgroup of G. Then, for any marking T of H there is a sequence of marked groups $(H_n,T_n)_n$ which converges in $\mathcal{M}$ to (H,T) and such that H_n is a subgroup of G_n.*

It is important to note that being a limit in $\mathcal{M}$ of marked groups with a given property P does not depend on the marking:

Lemma C.2.6. [Cha00, dCGP07] *Let (G,S) and (H,T) be in $\mathcal{M}$. Assume that G and H are abstractly isomorphic. Then we can find a neighborhood U of (G,S), a neighborhood V of (H,T), and a homeomorphism $\phi : U \longrightarrow V$ mapping (G,S) onto (H,T). Moreover, ϕ preserves the isomorphism relation.*

Thus, being a limit of finite (or equally free, cyclic, dihedral) groups is a group property that doesn't depend on the marking. As $\mathbb{D}_\infty$ is a limit of finite dihedral groups, limits of dihedral groups are all limits of finite ones.

Let G be a finite group. For all $m \geq r(G)$, there are only finitely many marked groups isomorphic to G in $\mathcal{M}_m$ (there are only finitely many equivalence classes of epimorphisms $p : \mathbb{F}_m \twoheadrightarrow G$). Hence any compact subset of $\mathcal{M}$ contains only finitely many marked groups isomorphic to G. Since the property of being abelian is open in $\mathcal{M}$ (use Lemma C.2.2 for instance), abelian limits of dihedral groups are limits of (finite) abelian dihedral groups $\mathbb{D}_2$ or $\mathbb{D}_4$. These limits are consequently isomorphic either to $\mathbb{D}_2$ or $\mathbb{D}_4$. For this reason, we consider only non abelian limits.

We turn now to relations between convergence and logic. We fix a countable set of variables $\{x_1, x_2, \ldots\}$ and the set of symbols $\{\wedge, \vee, \neg, \forall, (,), \cdot, ^{-1}, =, 1\}$ that stand for the usual logic and group operations. We consider the set $Th_\forall$ of *universal sentences* in group theory written with the variables, *i.e.* all formulas $\forall x_1 \ldots \forall x_k\, \phi(x_1, \ldots, x_k)$, where $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ is a quantifier free formula built up from the variables and the available symbols (see [BS69, CG05] for a precise definition). For instance, $\forall x \forall y\, (xy = yx)$ is a universal sentence that is true in any abelian group while $\forall x\, (x = 1 \vee x^2 \neq 1)$ expresses that there is no 2-torsion in a group. If a universal sentence σ is true in G (we also say that G *satisfies* σ), we write $G \models \sigma$. We denote by $Th_\forall(G)$ the set of universal sentences which are true in G. Let $(A_n)_n$ be a sequence of subsets of $Th_\forall$. We set $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k$ and $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k$. The set of marked groups of $\mathcal{M}$ satisfying a given family of universal sentences defines a closed subset. More precisely, quoting Proposition 5.2 of [CG05] 5.3 and reformulating slightly Proposition 5.3, we have:

Proposition C.2.7 (Limits and universal theory)**.** *Let G be a finitely generated group and let $(G_n)_n$ be a sequence of finitely generated groups.*

(*i*) *Assume that* (G,S) *is the limit in* $\mathcal{M}$ *of* $(G_n,S_n)_n$ *for some ordered generating set* S *of* G *and some ordered generating set* S_n *of* G_n*. Then* $Th_\forall(G) \supset \limsup Th_\forall(G_n)$.

(*ii*) *Assume* $Th_\forall(G) \supset \bigcap_n Th_\forall(G_n)$*. Then, for any ordered generating set* S *of* G*, there is some integer sequence* $(n_k)_k$ *such that* (G,S) *is the limit in* $\mathcal{M}$ *of some sequence* (H_k,T_k) *satisfying* $H_k \leq G_{n_k}$.

It directly follows that a variety of groups (see [Neu67] for a definition) defines closed subspaces of $\mathcal{M}_m$ and $\mathcal{M}$. For example, limits of dihedral groups are metabelian groups (2-solvable groups) because dihedral groups are metabelian. It can be easily proved, by using Lemma C.2.2, that a variety of groups defines an open subspace of $\mathcal{M}_m$ if and only if its free group on m generators is finitely presented.

Convergence of a sequence $(G_n)_n$ in $\mathcal{M}$ can also be related to ultraproducts of the G_n's that we define now.

Definition C.2.8 (Ultrafilter). *An ultrafilter* $\mathfrak{U}$ *on* $\mathbb{N}$ *is a finitely additive measure with total mass* 1 *which takes values in* $\{0,1\}$*. In other words, it is map from* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *(the set of all subsets of* $\mathbb{N}$*) to* $\{0,1\}$ *satisfying* $\mathfrak{U}(\mathbb{N}) = 1$ *and such that, for all disjoint subsets* A *and* B *of* $\mathbb{N}$*, we have* $\mathfrak{U}(A \cup B) = \mathfrak{U}(A) + \mathfrak{U}(B)$.

Let $\mathfrak{U}$ be an ultrafiler on $\mathbb{N}$ and let $(G_n)_n$ be sequence of groups. There is a natural relation on the cartesian product $\prod_n G_n$: $(g_n)_n$ and $(h_n)_n$ are *equal* $\mathfrak{U}$*-almost everywhere* if $\mathfrak{U}(\{n \in \mathbb{N} \mid g_n = g'_n\}) = 1$.

Definition C.2.9 (Ultraproduct). *The ultraproduct of the sequence* $(G_n)_n$ *relatively to* $\mathfrak{U}$ *is the quotient of* $\prod_n G_n$ *by the equivalence relation of equality* $\mathfrak{U}$*-almost everywhere. We denote it by* $\left(\prod_n G_n\right)/\mathfrak{U}$.

Let $(A_n)_n$ be a sequence of subsets of $Th_\forall$. We set $\lim_{\mathfrak{U}} A_n := \{\phi \in Th_\forall \mid \phi \text{ belongs to } A_n \text{ for } \mathfrak{U} - \text{almost every } n\}$. We have:

Theorem C.2.10 (Lŏs [BS69]). $Th_\forall\left(\left(\prod_n G_n\right)/\mathfrak{U}\right) = \lim_{\mathfrak{U}} Th_\forall(G_n)$.

An ultrafilter is said to be *principal* if it is a Dirac mass. The following proposition relates convergence in $\mathcal{M}$ to ultraproducts:

Proposition C.2.11. (Limits and ultraproducts [CG05, Prop. 6.4]) *Let* (G,S) *be in* $\mathcal{M}$ *and let* $(G_n,S_n)_n$ *be sequence in* $\mathcal{M}$.

(*i*) *If* $(G_n,S_n)_n$ *accumulates on* (G,S) *in* $\mathcal{M}$*, then* G *embeds isomorphically into* $\left(\prod_n G_n\right)/\mathfrak{U}$ *for some non principal ultrafilter* $\mathfrak{U}$.

(*ii*) *If* $(G_n,S_n)_n$ *converges to* (G,S) *in* $\mathcal{M}$*, then* G *embeds isomorphically into* $\left(\prod_n G_n\right)/\mathfrak{U}$ *for all non principal ultrafilter* $\mathfrak{U}$.

(*iii*) *Let* H *be a finitely generated group. If* H *embeds isomorphically into* $\left(\prod_n G_n\right)/\mathfrak{U}$ *for some non principal ultrafilter* $\mathfrak{U}$*, then for all ordered generating set* T *of* H*, we can find a sequence of integers* $(n_k)_k$ *and a sequence* $(H_k,T_k)_k$ *that converges to* (H,T) *in* $\mathcal{M}$ *and such that* $H_k \leq G_{n_k}$ *for all* k.

C.3 Cantor-Bendixson invariants

This section is devoted to the basics of the Cantor-Bendixson analysis we use in Theorem C.5.2. Let X be a topological space. We denote by X' the set of accumulation points of X. Let $X^{(0)} := X$. We define by transfinite induction the α-th derived set of X: $X^{(\alpha)} = (X^{\alpha-1})'$ if α is a successor and $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{\beta}$ if α is a limit ordinal. We denote by ω the set $\mathbb{N}$ of integers endowed with its natural order. We use the following topological classification theorem:

Theorem (Mazurkiewicz-Sierpinski Theorem [MS20]). *For any given pair (α, n) where α is countable ordinal number and n belongs to $\mathbb{N}$, there is (up to homeomorphism) a unique countable compact space X such that $X^{(\alpha)}$ has exactly n points: the set $\omega^{\alpha}n + 1$ endowed with the order topology.*

The pair (α, n) is *the characteristic system of* X. For example, the Alexandroff compactification $\overline{\mathbb{N}}$ of $\mathbb{N}$ is homeomorphic to $\omega + 1$. Its characteristic system is then $(1, 1)$. Similarly, the caracteristic system of $\overline{\mathbb{N}}^k$ is $(k, 1)$. The *Cantor-Bendixson rank of a point* x in X is the smallest ordinal number α such that x doesn't belong to $X^{(\alpha)}$. A countable compact space has the characteristic system (α, n) if and only if the set of points of maximal Cantor-Bendixson rank (*i.e.* rank α) has cardinal n. Observe that the Cantor-Bendixson rank of (G, S) in $\mathcal{M}_m$ is the Cantor-Bendixson rank of (G, S) in $\mathcal{M}$ and does not depend on S because of Lemma C.2.6.

C.4 Characterization of limits

Theorem C.4.1. *Let G be a non abelian finitely generated group. The following conditions are equivalent:*

(lim) *G is a limit of dihedral groups;*

(res) *G is fully residually dihedral;*

(iso) *G is isomorphic to a semi-direct product $A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ where A is a limit of cyclic groups on which $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ acts by multiplication by -1;*

$(Th_\forall)$ $Th_\forall(G) \supset \bigcap_{n\geq 3} Th_\forall(\mathbb{D}_{2n})$*;*

$(\Pi/\mathfrak{U})$ *G is isomorphic to a subgroup of $\left(\prod_{n\geq 3} \mathbb{D}_{2n}\right)/\mathfrak{U}$ for some ultra-filter $\mathfrak{U}$ on $\mathbb{N}$.*

We first give a characterization of limits of cyclic groups that we use in the proof of theorem C.4.1:

Proposition C.4.2. *Let G be a finitely generated group. The following conditions are equivalent:*

$(\lim)_c$ *G is a limit of cyclic groups;*

$(res)_c$ *G is fully residually cyclic;*

$(iso)_c$ *G is isomorphic to an abelian group with cyclic torsion subgroup;*

$(Th_\forall)_c$ $Th_\forall(G) \supset \bigcap_{n\geq 1} Th_\forall(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$;

$(\Pi/\mathfrak{U})_c$ *G is isomorphic to a subgroup of $\left(\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)/\mathfrak{U}$ for some ultra-filter $\mathfrak{U}$ on $\mathbb{N}$.*

We now show Proposition C.4.2 and then Theorem C.4.1.

Proof of Proposition C.4.2. Here is the logical scheme of the proof:

$$\begin{tikzcd}
(res)_c \arrow[dr, Rightarrow] & & (\Pi/\mathfrak{U})_c \arrow[dd, Rightarrow] \\
& (\lim)_c \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \\
(iso)_c \arrow[uu, Rightarrow] & & (Th_\forall)_c \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

We begin with the right triangle of implications.

$(\lim)_c \Longrightarrow (\Pi/\mathfrak{U})_c$: we first assume that there is a sequence $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, S_n)_n$ in $\mathcal{M}$ which accumulates on (G,S) for some ordered generating set S of G. Then G embeds isomorphically into $\left(\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)/\mathfrak{U}$ for some non principal ultrafilter $\mathfrak{U}$ by Proposition C.2.11(i). If G is the limit of stationary sequence of finite cyclic groups, then G is a finite cyclic group isomorphic to $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ for some $k \geq 1$. We then set $\mathfrak{U}$ as the dirac mass at k.

$(\Pi/\mathfrak{U})_c \Longrightarrow (Th_\forall)_c$: as G embeds in $\left(\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)/\mathfrak{U}$ for some ultrafilter $\mathfrak{U}$, we get then $Th_\forall(G) \supset Th_\forall(\left(\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)/\mathfrak{U})$. By Lŏs's theorem, we have $Th_\forall(\left(\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)/\mathfrak{U}) = \lim_{\mathfrak{U}} Th_\forall(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
Since $\lim_{\mathfrak{U}} Th_\forall(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \supset \bigcap_{n\geq 1} Th_\forall(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, the result follows.

$(Th_\forall)_c \Longrightarrow (\lim)_c$: as $Th_\forall(G) \supset \bigcap_{n\geq 1} Th_\forall(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, we get by Proposition C.2.7(ii) that G is a limit in $\mathcal{M}$ of subgroups of cyclic groups. Hence G is a limit of cyclic groups.

We now consider the left triangle.

$(\lim)_c \Longrightarrow (iso)_c$: as G is a limit of cyclic groups, G is abelian (recall that the property of being abelian is closed in $\mathcal{M}$). By the subgroup convergence lemma, the torsion subgroup $Tor(G)$ of G is itself a limit of cyclic groups. Because $Tor(G)$ is finite, it is isolated in $\mathcal{M}$ (Rem. C.2.3). Any sequence converging to $Tor(G)$ is then a stationary sequence. As a result, $Tor(G)$ is cyclic.

$(iso)_c \Longrightarrow (res)_c$: we write $G = \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ with $r \geq 0$ and $k \geq 1$. Let F be a finite subset of $G \setminus \{0\}$ and let $E \subset \mathbb{Z}$ be the set of all i-th coordinates of elements of F for all $1 \leq i \leq r$. Choose distinct primes $p_1, \ldots, p_r$ such that each p_j is coprime with all elements of $E \cup \{k\}$. The quotient map $q : G \twoheadrightarrow \left(\prod_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}\right) \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ defined in an obvious way has cyclic image by the Chinese Theorem. Clearly, no element of F is mapped to the trivial element by q.

$(res)_c \Longrightarrow (\lim)_c$: follows from Remark C.2.4. $\square$

Beginning of the proof of Theorem C.4.1. The first part of the proof is similar to the proof of Proposition C.4.2. Actually, the following implications can be shown in the very same way:

$$\begin{tikzcd}
(res) \arrow[dr, Rightarrow] & & (\Pi/\mathfrak{U}) \arrow[dd, Rightarrow] \\
& (\lim) \arrow[ur, Rightarrow] & \\
(iso) \arrow[uu, Rightarrow] & & (Th_\forall) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

The only noticeable changes occure in the proof of $(Th_\forall) \Longrightarrow (\lim)$: if G is isomorphic to an abelian dihedral group then G is obviously the limit of a stationary sequence of dihedral groups. We can assume then that G is not abelian. Since the property of being abelian is open in $\mathcal{M}$, G is the limit of non abelian subgroups of dihedral groups. Hence, G is the limit of dihedral groups.

We then complete the proof by showing: $(Th_\forall) \Longrightarrow (iso)$. This last step relies on specific sentences that can be found in the universal theory of all non abelian dihedral groups. We use the following lemma:

Lemma C.4.3. *The following sentences are true in any non abelian dihedral group:*

(P_1) $\forall x \forall y\, (x^2 \neq 1 \wedge y^2 \neq 1) \Rightarrow xy = yx$ (*rotations commute*);

(P_2) $\forall x \forall y \forall z\, (x \neq 1 \wedge x^2 = 1 \wedge y^2 \neq 1 \wedge xz \neq zx) \Rightarrow x^{-1}yx = y^{-1}$ (*conjugation of a rotation by a reflection reverses its angle*);

(P_3) $\forall x \forall y \forall z \forall t \forall u\, (xz \neq zx \wedge yt \neq ty \wedge x^2 = 1 \wedge y^2 = 1 \wedge (xy)^2 = 1) \Rightarrow (xy)u = u(xy)$ (*the product of two commuting reflections is central*);

(P_4) $\forall x \forall y \forall z \forall t\, (x \neq 1 \wedge x^2 = 1 \wedge y \neq 1 \wedge y^2 = 1 \wedge z^2 \neq 1 \wedge t^2 \neq 1 \wedge xz = zx \wedge yt = ty) \Rightarrow x = y$ (*there is at most one central element of order* 2).

Proof of Lemma C.4.3. There are two kinds of symmetries in a dihedral group $\mathbb{D}_{2n}$ ($n \geq 3$): the rotations (positive isometries of the Euclidean plane or the Euclidean line) and the reflections (negative isometries). The non central rotations x of $\mathbb{D}_{2n}$ are characterized by the inequation $x^2 \neq 1$. All reflections have order 2 and there is possibly one central rotation of order 2. All sentences can be readily shown by writing $\mathbb{D}_{2n}$ as the semidirect product $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\square$

In fact, the three first sentences are true in any *generalized dihedral group* $Dih(A) := A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ where A is abelian and $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ acts on A by multiplication by -1.

End of the proof of Theorem C.4.1

By assumption, all sentences of Lemma C.4.3 are true in G. We denote by A the subgroup of G generated by the set $\{x \in G \,|\, x^2 \neq 1\} \cup Z(G)$. We show the following claims:

(i) A is an abelian subgroup of index 2 in G;

(ii) G is isomorphic to the semidirect product $A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ where $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ acts on A by taking the inverse;

(iii) there is at most one element of order 2 in A;

(iv) A is a limit of cyclic groups.

Let us prove (i). By (P_1) of Lemma C.4.3, A is generated by a set of pairwise commuting elements. Hence A is abelian. As G is not abelian, the sentence (P_1) implies that G has at least one non central element of order 2. Let s be such an element. We show that $G = A \sqcup sA$. Let x be in $G \setminus A$. There are two cases:

(case 1) $(sx)^2 \neq 1$. Then sx belongs to A;

(case 2) $(sx)^2 = 1$. Since $s^2 = x^2 = 1$, s and x commute. Hence s and x are non central commuting elements of order 2. We deduce from (P_3) that sx belongs to $Z(G) \subset A$.

Thus x belongs to sA in both cases, which shows that A has index 2 in G. As G is finitely generated, so is A.

By (P_2), central elements of G have order at most 2. The sentence (P_3) shows then that the conjugation by s of an element of A consists in taking its inverse. Hence (ii) is proved.

Let us prove (iii). Using (P_4), we deduce that the center of G has at most two elements. We now show that elements of A which have order 2 are central in G. Let a be in A and such that $a^2 = 1$. Write $a = yz$ with y in the subgroup of G generated by $\{x \in G \,|\, x^2 \neq 1\}$ and z in $Z(G)$. By (P_2), we have $s^{-1}as = y^{-1}z$. Since $a^2 = y^2 = 1$, we deduce that $s^{-1}as = a$. Thus a is central, which completes the proof of (iii).

We now prove (iv). We set $A^2 := \{a^2 \,|\, a \in A\}$ and $\mathbb{D}_{2n}^2 := \{g^2 \,|\, g \in \mathbb{D}_{2n}\}$. We first show that A^2 is a limit of cyclic groups. By proposition C.4.2, it suffices to show that $Th_\forall(A^2) \supset \bigcap_n Th_\forall(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Let $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ be a quantifier free formula in variables $x_1, \ldots, x_k$ and consider the sentences $(P)\forall x_1 \ldots \forall x_k\, \phi(x_1, \ldots, x_k)$ and $(P^2)\forall x_1 \ldots \forall x_k\, \phi(x_1^2, \ldots, x_k^2)$. We observe the following equivalences:

$$\mathbb{D}_{2n} \models P^2 \iff \mathbb{D}_{2n}^2 \models P \text{ and } A \models P^2 \iff A^2 \models P.$$

Assume $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \models P$ for all $n \geq 1$. Then $\mathbb{D}_{2n}^2 \models P$ for all $n \geq 3$ because $\mathbb{D}_{2n}^2$ is a finite cyclic group. It follows that $\mathbb{D}_{2n} \models P^2$ for all $n \geq 3$. By assumption, $G \models P^2$, hence $A \models P^2$. Consequently, $A^2 \models P$. We deduce that A^2 is a limit of cyclic group, hence A^2 is isomorphic to $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ for some $n \geq 0, k \geq 1$ by Proposition C.4.2. By (P_4), there is at most one element of order 2 in A. We deduce that A is isomorphic to $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/k'\mathbb{Z}$ with k' in $\{k, 2k\}$. □

C.5 The space of limits of dihedral groups on m generators

Let G be a non abelian limit of dihedral groups that is generated by two of its (necessarily non trivial) elements, say x and y. It follows from (P_1) of Lemma C.4.3 that either x or y has order 2. Assume then $x^2 = 1$. By (P_3) of the same lemma, we have either $y^2 = 1$ or simultaneously $y^2 \neq 1$ and $x^{-1}yx = y^{-1}$. Thus G is an homomorphic image of $\mathbb{D}_\infty$ (both $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1\rangle$ and $\langle x, y \mid x^2 = 1, x^{-1}yx = y^{-1}\rangle$ are presentations of $\mathbb{D}_\infty$). Hence G is a dihedral group. This shows that 2-generated limits of dihedral groups are dihedral groups (more generally, the rank of a limit $G = A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ of dihedral groups is $r(A) + 1$). Consequently:

Corollary C.5.1. *The space of dihedral marked groups on* 2 *generators is a closed and open subspace of* $\mathcal{M}_2$.

Proof. It only remains to show that this subspace is open. As a quotient of a dihedral group is a dihedral group, the result follows from Lemma C.2.2. □

We have a complete topological description of the space of dihedral groups on two generators. For each $n \neq 2$, there are exactly three distinct marked groups on two generators which are isomorphic to $\mathbb{D}_{2n}$:

$$\begin{array}{rcl} A_{2n} & := & \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle, \\ B_{2n} & := & \langle a, b \mid a^2 = b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle, \\ \overline{B}_{2n} & := & \langle a, b \mid b^2 = a^n = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle. \end{array}$$

There is a unique marked group of $\mathcal{M}_2$ isomorphic to $\mathbb{D}_4$: $A_4 = B_4 = \overline{B}_4$. The only accumulation points in the space of dihedral groups on two generators are the three distinct marked infinite dihedral groups A_∞, B_∞ and $\overline{B}_\infty$ (see Figure C.1 below). This last fact is proved in Proposition C.5.4. The remaining statements can be readily adapted from this proposition.

We can carry out such an analysis in the space of marked groups on m generators by using Cantor-Bendixson invariants defined in Section C.3. We denote by ω the smallest infinite ordinal, *i.e.* the set $\mathbb{N}$ of positive integers endowed with its natural order.

Theorem C.5.2. *The topological closure* $\mathcal{D}_m$ *of dihedral marked groups in* $\mathcal{M}_m$ *is homeomorphic to* $\omega^{m-1}(2^m - 1) + 1$ *endowed with the order topology.*

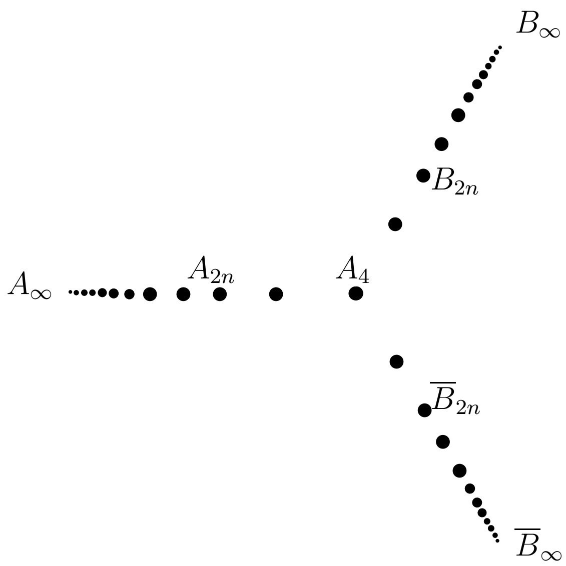


Figure C.1: dihedral marked groups on 2 generators

Because of the Mazurkiewicz-Sierpinski Theorem (Section C.3), it suffices to show that the $(m-1)$-th derived set $\mathcal{D}_m^{(m-1)}$ of $\mathcal{D}_m$ contains $2^m - 1$ points. This is carried out with the two following propositions:

Proposition C.5.3. *Let $G = A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ be a limit of dihedral groups on m generators. Then the Cantor-Bendixson rank of G in $\mathcal{D}_m$ is the free rank of A.*

Hence, the only remaining marked groups in $\mathcal{D}_m^{(m-1)}$ are marked groups abstractly isomorphic to $\mathbb{Z}^{m-1} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. We now count them:

Proposition C.5.4. *Let $G = \mathbb{Z}^{m-1} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ with $m \geq 2$. In $\mathcal{M}_m$, there are exactly $2^m - 1$ marked groups which are abstractly isomorphic to G.*

We show Propositions C.5.3 and C.5.4. Theorem C.5.2 then directly follows.

Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ be the set of abelian marked groups, let $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ be the set of dihedral marked groups and let $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}$ be the set of generalized dihedral marked groups. Let $\mathcal{C}$ be the topological closure of cyclic marked groups in $\mathcal{M}$. We define $Dih(A, S)$ with $S = (a_1, a_2, \dots)$ as the marked group $(Dih(A), S')$ with $S' = (a, a_1, a_2, \dots)$ where a denotes the generator of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lemma C.5.5. *The map $Dih : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ is a continuous and open embedding. Moreover, $Dih(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.*

Proof of Lemma C.5.5. We fix words $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ in $\mathbb{F}_{m+1}$ for which the exponent sum of e_1 is zero. We then define the system

$$(\Sigma) : \begin{cases} v_1 = 1, \dots, v_k = 1, \\ w_1 \neq 1, \dots, w_l \neq 1. \end{cases}$$

Let

$$D := \left\langle e_1, \dots, e_{m+1} \mid e_1^2 = 1, e_1 e_i e_1^{-1} = e_i^{-1}, [e_i, e_j] = 1, i = 2, \dots, m+1 \right\rangle .$$

We reduce the words v_i, w_j in D for $i = 1, \dots, k$ and $j = 1, \dots, l$ to get words without symbols $e_1^{\pm 1}$. We then shift the indices on the left (e_i becomes e_{i-1}) to obtain words v_i', w_j' in $\mathbb{F}_m$. We define (Σ') by replacing v_i by v_i' and w_j by w_j' in (Σ). We consider the elementary open sets $O_{\Sigma'} \subset \mathcal{A}$ and $O_\Sigma \subset \mathcal{D}$. Let (A, S) be in $\mathcal{A}$. It is trivial to check that $Dih(A, S) \in O_\Sigma \iff (A, S) \in O_{\Sigma'}$. Hence Dih is a continuous and open map.

The injectivity of Dih is obvious. The inclusion $Dih(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ follows from Theorem C.4.1. $\square$

Lemma C.5.6. *Let A be a finitely generated abelian group (respectively a limit of cyclic groups). Then the Cantor-Bendixson rank of A in $\mathcal{M}$ (respectively in $\mathcal{C}$) is the free rank of A.*

Proof of Lemma C.5.6. Consider a finitely generated abelian group A. Since A is finitely presented, the Cantor-Bendixson rank of A in $\mathcal{M}$ is the Cantor-Bendixson rank of $\{0\}$ in $\mathcal{N}(A)$ by Lemma C.2.2. The proof is an induction on the free rank r of A. We first show that the Cantor-Bendixson rank of $\{0\}$ is not less than r. It is clear if $r = 0$. Assume $r \geq 1$. Consider an infinite cyclic subgroup $\langle z \rangle$ of A. For all n in $\mathbb{N}$, the Cantor-Bendixson rank of $\langle z^n \rangle$ in $\mathcal{N}(A)$ is the Cantor-Bendixson rank of $\{0\}$ in $\mathcal{N}(A/\langle z^n \rangle)$ by Lemma C.2.2. By the induction hypothesis, this rank is at least $r - 1$. Since $\langle z^n \rangle$ tends to $\{0\}$ in $\mathcal{N}(A)$ as n tends to infinity, the Cantor-Bendixson of $\{0\}$ is at least r. We now show that the Cantor-Bendixson rank of A is not greater than r. If $r = 0$, then A is finite. It follows that $\mathcal{N}(A)$ is a finite discrete space in which $\{0\}$ is obviously isolated. Assume $r \geq 1$. Consider the set V of subgroups of A whose intersection with $Tor(A)$ is trivial. Then V is an open neighborhood of $\{0\}$ in $\mathcal{N}(A)$. Let $B \neq \{0\}$ be in V. By the induction hypothesis, the Cantor-Bendixson rank of $\{0\}$ in $\mathcal{N}(A/B)$ is at most $r - 1$. Since this is also the Cantor-Bendixson rank of B in $\mathcal{N}(A)$, the Cantor-Bendixson rank of $\{0\}$ in $\mathcal{N}(A)$ is at most r.

If A is in $\mathcal{C}$, we then consider the set $\mathcal{N}_\mathcal{C}(A)$ of subgroups B of A such that A/B is a limit of cyclic groups. For any infinite cyclic factor $\langle z \rangle$ of A, the subgroup $\langle z^n \rangle$ belongs to $\mathcal{N}_\mathcal{C}(A)$ for all $n \geq 1$ coprime with $|Tor(A)|$. We can hence apply the reasoning above to such an A. $\square$

Proof of Proposition C.5.3. Let $G = A \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ be a limit of dihedral groups on m generators. As (G, S) is in the image of Dih for a suitable ordered generating set S, its Cantor-Bendixson rank in $\mathcal{D}_m$ is the Cantor-Bendixson rank of A in $\mathcal{C}$ by Lemma C.5.5. This is the free rank of A by Lemma C.5.6. $\square$

We fix $m \geq 2$ and $G = \mathbb{Z}^{m-1} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. We denote by a the generating element of the subgroup $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and we use the additive notation in the normal subgroup $\mathbb{Z}^{m-1}$ of G. Let ϕ be in $Aut(G)$. Since $\phi(a)$ has order 2, we can write $\phi(a) = v(\phi)a$ with $v(\phi)$ in $\mathbb{Z}^{m-1}$. We denote by $\mathbb{Z}^{m-1} \rtimes GL_{n-1}(\mathbb{Z})$ the semidirect product where $GL_{m-1}(\mathbb{Z})$ acts on $\mathbb{Z}^{m-1}$ in the standard way. We denote by $(e_i)_{1\leq i\leq n-1}$ the canonical basis of $\mathbb{Z}^{m-1}$.

Lemma C.5.7. *The map*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : Aut(G) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{m-1} \rtimes GL_{m-1}(\mathbb{Z}) \\ \phi & \longmapsto & (v(\phi), \phi_{|\mathbb{Z}^{m-1}}) \end{array}$$

is an isomorphism.

Proof of Lemma C.5.7. Since $\mathbb{Z}^{m-1}$ is the subgroup of G generated by elements of infinite order, $\mathbb{Z}^{m-1}$ is a characteristic subgroup. Hence Φ is well defined. Checking that Φ is a homomorphism is routine. Consider v in $\mathbb{Z}^{m-1}$ and f in $GL_{m-1}(\mathbb{Z})$. The group G has the presentation $\left\langle a, e_1, \ldots, e_{m-1} \;\middle|\; a^2 = 1, ae_ia^{-1} = e_i^{-1}, [e_i, e_j] = 1, i, j = 1, \ldots, m-1 \right\rangle$. We use then Von Dyck's Theorem to show that there is unique automorphism ϕ of G such that $\phi(a) = va$ and $\phi_{|\mathbb{Z}^{m-1}} = f$. □

Proof of Proposition C.5.4. The set of marked groups which are isomorphic to G in $\mathcal{M}_m$ corresponds bijectively to the the set of $Aut(G)$-orbits of $V(G,m)$ of the diagonal action. For $S = (g_1, \ldots, g_m)$ in $V(G,m)$, we define $I(S) \subset \{1, \ldots, m\}$ as the set of indices i satisfying $g_i^2 = 1$. Let P be a non empty subset of $\{1, \ldots, m\}$. We denote by $V(P)$, the set of all generating G-vectors S of length m such that $I(S) = P$. Clearly, the sets $V(P)$ are pairwise disjoint $Aut(G)$-invariant sets and there are $2^m - 1$ such sets. We now prove that the action of $Aut(G)$ is transitive on $V(P)$ for all P. Starting with the generating vector $S_0 = (e_1, \ldots, e_{m-1}, a)$ and using elementary Nielsen transformations, we can get a generating system S' such that $I(S') = P$ for any non empty P. Since the actions of the Nielsen group $Aut(\mathbb{F}_m)$ on $V(G,m)$ commutes with the action of $Aut(G)$, it suffices to prove that $Aut(G) \cdot S_0 = V(\{m\})$. Let $S = (f_1, \ldots, f_{m-1}, va)$ be in $V(\{m\})$. It is easy to check that any word on the elements of S that belongs to $\mathbb{Z}^{m-1}$ can actually be generated by the elements $f_1, \ldots, f_{m-1}$ only. Consequently, $(f_1, \ldots, f_{m-1})$ is a basis of $\mathbb{Z}^{m-1}$ and there is f in $GL_{m-1}(\mathbb{Z})$ such that $f(e_i) = f_i$ for $i = 1, \ldots, m-1$. By Lemma C.5.7, there is ϕ in $Aut(G)$ such that $\phi(a) = va$ and $\phi_{|\mathbb{Z}^{m-1}} = f$. Thus we have $\phi \cdot S_0 = S$. □

Appendix D

Estimations de dimensions métriques dans l'espace des groupes marqués

Dans cet article, on montre que l'espace des groupes marqués est un sous-espace fermé d'un ensemble de Cantor dont la dimension de Hausdorff est infinie. On prouve que la dimension de Minkowski de cet espace est infinie en exhibant des sous-ensembles de groupes marqués à petite simplification dont les dimensions de Minkowski sont arbitrairement grandes. On donne une estimation des dimensions de Minkowski de sous-espaces de groupes à un relateur. On démontre enfin que les dimensions de Minkowski du sous-espace des groupes commutatifs marqués et d'un ensemble de Cantor défini par Grigorchuk sont nulles.

In this article we show that the space of marked groups is a closed subspace of a Cantor space with infinite Hausdorff dimension. We prove that the Minkowski dimension of this space is infinite by exhibiting subsets of marked groups with small cancellation the dimensions of which are arbitrarly large. We give estimates of the Minkowski dimensions of of subsets of marked groups with one relator. Eventually, we prove that the Minkowski dimensions of the subspace of abelian marked groups and a Cantor space defined by Grigorchuk are zero.

D.1 Introduction

L'étude de la généricité de différentes classes de groupes a donné lieu à de nombreux travaux depuis le théorème de généricité des groupes hyperboliques énoncé par Gromov [Gro87]. Un nouvel aspect dans la caractérisation de cette généricité a été développé par Champetier [Cha00] en considérant l'espace topologique des groupes marqués à m générateurs et les catégories de Baire de parties spécifiques de cet espace.

Dans l'idée de caractériser cette généricité d'un point de vue métrique et de mesurer l'importance relative de certaines classes de groupes, on s'intéresse ici à l'estimation des dimensions de Minkowski et de Hausdorff de l'espace des groupes marqués à m générateurs et de certaines de ses parties, qu'on munit de la métrique employée par Champetier [Cha00].

On décrit dans un premier temps un plongement isométrique naturel de l'espace des groupes marqués dans un Cantor dont on montre que la dimension de Hausdorff est infinie. On considère ensuite la partie $PS = PS(m,k,\lambda)$ formée des groupes à k relateurs de même longueur vérifiant la condition de petite simplification $C'(\lambda)$:

Théorème D.1.1. *Lorsque $m \geq 2$ et $\lambda \in]0, \frac{1}{6}]$, on a l'encadrement suivant des dimensions inférieure et supérieure de Minkowski*

$$k \log_2(2m-1) \leq \underline{\dim} PS \leq \overline{\dim} PS \leq \frac{k}{1-3\lambda} \log_2(2m-1).$$

Corollaire D.1.2. *La dimension de Minkowski inférieure de l'espace des groupes marqués à m générateurs ($m \geq 2$) est infinie.*

On introduit après cela la partie $UR = UR(m,q)$ des groupes à un relateur et dont le relateur est une puissance q-ème, partie pour laquelle on montre le

Théorème D.1.3. *Lorsque $q \geq 2$, on a l'encadrement*

$$\frac{\log_2(2m-1)}{q} \leq \underline{\dim} UR \leq \overline{\dim} UR \leq \frac{\log_2(2m-1)}{q-1}.$$

Dans le cas de $m = 4$ générateurs, on s'intéresse au sous-espace $\mathfrak{B}$ défini par Grigorchuk [Gri98] dont on rappelle en détail la construction au chapitre D.7 et pour lequel on montre

Théorème D.1.4. *La dimension de Minkowski supérieure de l'espace $\mathfrak{B}$ est nulle.*

On montre enfin le

Théorème D.1.5. *La dimension de Minkowski supérieure du sous-espace des groupes commutatifs est nulle.*

Les chapitres D.2 et D.3 sont deux chapitres préliminaires où toutes les définitions utiles regardant l'espace des groupes marqués et les dimensions métriques de Minkowski et de Hausdorff ont été rassemblées ainsi que quelques exemples. Dans le chapitre D.4 on prouve, lorsque $m \geq 2$, que l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ des parties de $\mathbb{L}_m$ dans lequel se plonge isométriquement $\mathcal{G}_m$ a une dimension de Hausdorff infinie (celle-ci étant $2\log 2$ lorsque $m = 1$). On y montre également que la dimension supérieure de Minkowski de $\mathcal{G}_1$ est nulle. Les chapitres D.5 à D.8 présentent dans l'ordre les démonstrations des quatre résultats principaux énoncés dans cette introduction.

Remerciements. *Je tiens à remercier très chaleureusement Roland Bacher, autant pour ses idées précieuses que ses remarques judicieuses. Je remercie également Goulnara Arjantseva et Pierre De La Harpe pour leurs patientes et minutieuses relectures, ainsi que Frédéric Mouton pour ses très opportunes suggestions.*

D.2 Les espaces $\mathcal{G}(G)$ et $\mathcal{P}(G)$

Soit $\mathbb{L}_m$ le groupe libre de base $S = \{e_1, \ldots, e_m\}$. A chaque sous-groupe distingué de $\mathbb{L}_m$ correspond un quotient marqué de $\mathbb{L}_m$, c'est-à-dire un groupe muni d'un système de générateurs privilégié qui est l'image du système S par l'application quotient. L'ensemble $\mathcal{G}_m$ des sous-groupes distingués de $\mathbb{L}_m$, lorsqu'il est muni d'une topologie métrisable dite topologie de Cayley, est un espace compact appelé espace des groupes marqués à m générateurs.

La topologie de Cayley sur $\mathcal{G}_m$ est induite par une topologie métrisable sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ des parties de $\mathbb{L}_m$ qui fait de $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ un espace de Cantor (un espace de Cantor est un espace topologique métrique compact, totalement discontinu et sans points isolés ; un tel espace est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor). On donne ci-dessous une construction plus générale qui permet de définir une topologie compacte et métrisable sur l'ensemble des parties d'un groupe de type fini ainsi que sur l'ensemble de ses sous-groupes distingués.

Soit G un groupe de type fini muni d'un système ordonné de générateurs $X = (g_1, \ldots, g_m)$. La longueur $|g|_X$ d'un élément $g \in G$ relativement à X est la longueur minimale d'un mot en les lettres $X \cup X^{-1}$ qui représente g. On désigne par $B_X(r)$ l'ensemble des éléments de G de longueur inférieure ou égale à r.

Si R est une partie de G, on désigne par $\mathcal{N}(R)$ le plus petit sous-groupe distingué de G contenant R appelé clôture normale de R. On écrit $< R >$ pour le sous-groupe de G engendré par R. Si A est un ensemble fini, on désigne par $|A|$ le cardinal de A.

Définition D.2.1. *Une distance d sur un ensemble E vérifie l'inégalité ultra-métrique si*

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}, \text{ pour tout } x, y \text{ et } z \text{ de } E.$$

Soit $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G. On définit sur $\mathcal{P}(G)$ la distance ultra-métrique $d_{\mathcal{P}}$ à partir de la “valuation”

$$\nu(A, B) = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid B_X(n) \cap A = B_X(n) \cap B\}$$

pour des parties A et B de G. On pose alors $d_{\mathcal{P}}(A, B) = 2^{-\nu(A,B)}$. Il est immédiat de vérifier que la topologie induite par $d_{\mathcal{P}}$ sur $\mathcal{P}(G)$ est aussi celle de la topologie produit sur $\{0, 1\}^G$ où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète. On montre sans peine que $(\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$ est un espace de Cantor si G est infini et un espace discret fini sinon.

Définition D.2.2. *On désigne par $\mathcal{G}(G)$ l'ensemble des sous-groupes distingués de G. On considère sur $\mathcal{G}(G)$ la métrique $d_{\mathcal{G}}$ induite par $d_{\mathcal{P}}$. L'espace métrique $\mathcal{G}(G)$ est appelé espace des quotients marqués de G. Lorsque $G = \mathbb{L}_m$, on écrit $\mathcal{G}_m = \mathcal{G}(\mathbb{L}_m)$.*

L'espace $\mathcal{G}(G)$ est une partie fermée de $\mathcal{P}(G)$ qui possède des points isolés. Ainsi $\mathcal{G}(G)$ est un espace métrique compact totalement discontinu et donc de dimension topologique nulle (pour plus d'informations, voir par exemple [Cha00, CG05] et [Gri84]). Lorsque $G = \mathbb{L}_m$, on écrit $d_{\mathcal{G}} = d_m$.

D.3 Dimensions de Minkowski et de Hausdorff

Les dimensions de Minkowski et de Hausdorff sont des dimensions métriques qui renseignent sur les possibilités de plongement dans un espace métrique standard tel qu'un espace euclidien ou hyperbolique. Pour les notions de base concernant les dimensions métriques on se réfère au livre de Falconer [Fal03].

On désigne par (E, d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, $diam(A)$ est le diamètre de A. Un espace précompact est un espace métrique qui possède pour tout $\varepsilon > 0$ un recouvrement fini par des boules fermées de rayon ε.

Notation D.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique précompact. On désigne par $N(E, \varepsilon)$ le minimum des cardinaux des recouvrements de E par des boules fermées de rayon ε. On désigne par $P(E, \varepsilon)$ le nombre maximum de boules fermées de rayon ε disjointes.*

Définition D.3.2. *Les dimensions de Minkowski inférieure et supérieure d'un espace métrique précompact (E, d) se définissent respectivement par les formules*

$$\underline{\dim} E = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

$$\overline{\dim} E = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Ces dimensions métriques sont aussi connues sous les noms de dimensions fractales ou "box-counting dimensions" inférieure et supérieure.

Définition D.3.3. *La dimension de Hausdorff d'un ensemble $A \subset E$ est*

$$\begin{aligned}\dim_H A &= \sup \{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \inf \{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} = \inf \{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\},\end{aligned}$$

où $\mathcal{H}^s$ est la mesure de Hausdorff de dimension s

$$\mathcal{H}^s(A) = \liminf_{\delta \to 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} diam(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ E_i \subset E,\ diam(E_i) \leq \delta \right\}.$$

Les propriétés élémentaires suivantes sont vérifiées lorsque dim désigne soit $\underline{\dim}$, $\overline{\dim}$ ou $\dim_H$ (voir [Fal03, Ch.2]).

Monotonie : Si $E_1 \subset E_2$ alors $\dim E_1 \leq \dim E_2$.
Ensemble fini : Si E est fini alors $\dim E = 0$.

La dimension de Minkowski supérieure est *finiment stable* , c'est-à-dire

$$\overline{\dim}\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \max_{1\leq i\leq n} \overline{\dim} E_i\,,\ \text{ pour } E_i \subset E, i = 1, 2, \ldots, n,$$

alors que la dimension de Hausdorff est *dénombrablement stable* , c'est-à-dire

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \sup_{i\geq 1} \dim_H E_i\,,\ \text{ pour } E_i \subset E, i = 1, 2, \ldots.$$

La dimension de Hausdorff d'un ensemble dénombrable est donc nulle. Si dim désigne l'une des dimensions de Minkowski, alors $\dim A = \dim \overline{A}$ où $\overline{A}$ est l'adhérence de $A \subset E$. Pour cette raison, dimension de Hausdorff et dimensions de Minkowski peuvent être très différentes.

Proposition D.3.4. [Mat95] *Pour tout espace métrique précompact E,*

$$\dim_{top} E \leq \dim_H E \leq \underline{\dim} E \leq \overline{\dim} E.$$

où $\dim_{top}$ désigne la dimension topologique ou dimension de recouvrement de Lebesgue.

Exemples Si E est la boule unité d'un espace vectoriel normé de dimension n, munie de l'une quelconque de ses normes, alors ses dimensions de Hausdorff et de Minkowski sont toutes égales à n qui est aussi sa dimension topologique. Si E est l'espace triadique de Cantor, construit dans le segment $[0, 1]$ muni de la métrique euclidienne, ses dimensions de Minkowski et de Hausdorff valent toutes trois $\log(2)/\log(3)$ alors que sa dimension topologique est nulle.
Si $E = [0, 1]$, muni de la métrique euclidienne, et si α est un réel strictement positif, alors

(1) $\underline{\dim} A = \overline{\dim} A = \frac{1}{1+\alpha}$ lorsque $A = \{\frac{1}{n^\alpha}\}_{n\geq 1}$,

(2) $\underline{\dim} A = \overline{\dim} A = 1$ lorsque $A = \{\frac{1}{\log n}\}_{n\geq 2}$,

(3) $\underline{\dim} A = \overline{\dim} A = 0$ lorsque $A = \{2^{-n}\}_{n\geq 0}$.

Dans chacun de ces cas, la dimension de Hausdorff est nulle. Ces résultats s'obtiennent directement à partir de la définition. Le troisième cas suggère que la dimension de Minkowski supérieure de l'ensemble des valeurs d'une suite qui converge vers son unique point d'accumulation à vitesse exponentielle, est nulle. C'est le cas dans l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ où $d_1(n\mathbb{Z}, \{0\}) = 2^{-n}$ et où le sous-groupe distingué trivial est l'unique point d'accumulation de cet espace. Comme premier exemple de calcul, on montre dans la proposition D.4.8 du chapitre suivant qu'effectivement $\overline{\dim}\mathcal{G}(\mathbb{Z}) = 0$. De manière générale, majorer la dimension de Minkowski supérieure de l'ensemble des valeurs d'une suite convergeant vers son unique point d'accumulation revient estimer la vitesse de convergence de cette suite.

D.4 Dimension de Hausdorff de l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$

On considère, comme dans le chapitre D.2, un groupe G muni d'un système ordonné de générateurs X ainsi que l'espace métrique $(\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$. On pose $\beta(n) = |B_X(n)|$ et $\sigma(n) = \beta(n+1) - \beta(n)$. La limite $\omega(G, X) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta(n)}$ est appelée taux de croissance exponentiel du groupe G relativement à X. Si $\omega(G, X) > 1$, on dit que le groupe G est de *croissance exponentielle.*Cette dernière définition ne dépend pas du choix de X (voir [dlH00, chap.VI.C]*)*. On dit que deux points d'un espace métrique sont ε-distinguables si la distance qui les sépare est strictement supérieure à ε.

On exprime dans la propositon D.4.3 les dimensions de Minkowski de $\mathcal{P}(G)$ en fonction de β. Le lemme D.4.4 donne une condition suffisante portant sur la croissance de G pour que l'égalité ait lieu entre dimension de Hausdorff et dimension de Minkowski inférieure de l'espace $\mathcal{P}(G)$. Il en résulte immédiatement que la dimension de Hausdorff de $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ est infinie.

La démonstration de notre premier lemme est laissée au lecteur.

Lemme D.4.1. *Soit (E, d) un espace ultra-métrique compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique recouvrement fini minimal $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ de E par des boules fermées de rayon ε, c'est-à-dire tel qu'aucune sous-famille propre de $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ n'est un recouvrement de E. De plus ce recouvrement est une partition et l'on a $|\mathcal{F}(E, \varepsilon)| = N(E, \varepsilon) = P(E, \varepsilon)$. En outre, $P(E, \varepsilon)$ est égal au nombre maximal de points ε-distinguables dans E.*

Lemme D.4.2. *Soit G un groupe de type fini muni d'un système ordonné de générateurs X. Si $(E, d) = (\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$ ou $(\mathcal{G}(G), d_{\mathcal{G}})$ alors, pour tout entier $n \geq 0$, $N(E, 2^{-n})$ est le nombre de parties de la boule $B_X(n)$ qui s'obtiennent comme l'intersection d'un élément de E avec cette boule.*

Démonstration. Supposons que $(E, d) = (\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$. On se donne $n \geq 0$. Ayant posé $\varepsilon = 2^{-n}$, on considère le sous-ensemble $P_n = \mathcal{P}(B_X(n))$ de E formé des parties de la boule $B_X(n)$. Alors, l'ensemble des boules centrées en les points de P_n et de rayon ε est un recouvrement de E par des boules disjointes. C'est donc le recouvrement minimal $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ d'après le lemme D.4.1. En effet, deux centres x_i et x_j distincts vérifient $d(x_i, x_j) > \varepsilon$. Si les boules associées n'étaient pas disjointes, elles seraient alors égales à une même boule de diamètre strictement supérieur à ε. Ceci est absurde puisque le diamètre d'une boule de rayon ε d'un espace ultra-métrique n'excède pas ε. Lorsque $(E, d) = (\mathcal{G}(G), d_{\mathcal{G}})$, la preuve reste en tout point semblable. □

Proposition D.4.3. *Les dimensions de Minkowski inférieures et supérieures de l'espace métrique $\big(\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}(G)}\big)$ sont données par les formules*

$$\underline{\dim}\mathcal{P}(G) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{n}, \quad \overline{\dim}\mathcal{P}(G) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{n}.$$

Démonstration. Ayant fixé $n \geq 0$, on pose $\varepsilon = 2^{-n}$. Par le lemme D.4.2,

$$N(E, \varepsilon) = 2^{|B_X(n)|} = 2^{\beta(n)}.$$

$$\text{D'où } \underline{\dim}\mathcal{P}(\mathbb{L}_m) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \liminf_{n \to \infty} \frac{\beta(n)}{n},$$

avec une formule analogue pour la dimension de Minkowski supérieure. □

Si d est une distance sur un ensemble E, on désigne par $val(d)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ constitué des valeurs prises par d sur $E \times E$. Pour tout $x \in E$, $\varepsilon > 0$, on désigne par $B(x, \varepsilon)$ la boule fermée de centre x et de rayon ε.

Le lemme suivant montre que sous une condition de contrôle uniforme des "s-volumes" $\varepsilon'^s N(B(x, \varepsilon), \varepsilon')$ des partitions régulières des boules, dimension de Hausdorff et dimension inférieure de Minkowski d'un espace ultra-métrique compact sont égales. On laisse au lecteur la preuve de ce lemme qui est élémentaire.

Lemme D.4.4. *Soit (E, d) un espace ultra-métrique compact vérifiant les deux hypothèses suivantes.*

(1) *Pour toute boule B de rayon $r \in val(d)$, $diam(B) = r$.*

(2) *Pour tout $s > 0$, il existe un nombre réel $\eta = \eta(s) > 0$ tel que l'une des deux inégalités*

(i) $\varepsilon^s \leq \varepsilon'^s N(B(x, \varepsilon), \varepsilon')$,

(ii) $\varepsilon^s \geq \varepsilon'^s N(B(x, \varepsilon), \varepsilon')$,

soit vérifiée pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon' \leq \varepsilon \leq \eta$, $\varepsilon, \varepsilon' \in val(d)$.

Alors $\dim_H E = \underline{\dim} E$.

Remarque D.4.5. *Si (E, d) est un espace ultra-métrique compact on peut montrer facilement que $val(d)$ est l'ensemble des valeurs d'une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ strictement décroissante et tendant vers 0. Les conditions (i) et (ii) du lemme précédent peuvent alors se reformuler de la manière suivante : pour tout $s > 0$ il existe un entier $K = K(s)$ tel que l'une des deux inégalités*

(i) $N(B(x, \varepsilon_n), \varepsilon_{n+1}) \geq \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^s$,

(ii) $N(B(x, \varepsilon_n), \varepsilon_{n+1}) \leq \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^s$,

soit vérifiée pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq K$.

Proposition D.4.6. *Si la suite $(\sigma(n))_{n \geq 0}$ est stationnaire ou si elle tend vers l'infini, alors*

$$\dim_H \mathcal{P}(G) = \underline{\dim}\mathcal{P}(G).$$

En particulier, si G est de croissance exponentielle alors $\dim_H \mathcal{P}(G) = \infty$.

Corollaire D.4.7. *Si $m = 1$ alors* $\dim_H \mathcal{P}(\mathbb{L}_m) = \dim_H \mathcal{P}(\mathbb{Z}) = 2 \log 2$. *Si $m \geq 2$ alors* $\dim_H \mathcal{P}(\mathbb{L}_m) = \infty$.

Démonstration de la proposition D.4.6. On montre d'abord que $\mathcal{P}(G)$ remplit la condition (1) du lemme D.4.4. Soit B une boule fermée de $\mathcal{P}(G)$ de rayon $r = 2^{-n} \in val(d_{\mathcal{P}})$ et dont le centre est une partie x de G. Si $B_X(n+1) \nsubseteq x$, on pose $x' = x \cup \{g\}$, où g est un élément quelconque de $B_X(n+1) \backslash x$. Si $B_X(n+1) \subset x$, on pose $x' = B_X(n)$. Les parties x et x' sont deux points de B vérifiant $d_{\mathcal{P}}(x, x') = r$ si bien que $diam(B) = r$. Ce qui montre que $\mathcal{P}(G)$ vérifie (1).
On fixe maintenant $s > 0$ et l'on prouve que, si σ est croissante ou tend vers l'infini, alors la condition (2) du lemme D.4.4 est aussi remplie. Soit n un entier positif ou nul. Alors $N\left(B(x, 2^{-n}), 2^{-n-1}\right) = 2^{|B_X(n+1) \backslash B_X(n)|} = 2^{\sigma(n)}$. Si σ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, il existe $K = K(s)$ tel que $2^{\sigma(n)} \geq \left(\frac{2^{-n}}{2^{-n-1}}\right)^s = 2^s$ pour tout $n \geq K$. Dans ce cas (2.i) est vérifiée. Supposons que σ est stationnaire et prend la valeur constante $S < \infty$ pour tout $n \geq K$, pour un certain entier K. Si $s < \log 2^S$ (respectivement $s \geq \log_2 2^S$) alors $2^{\sigma(n)} \geq 2^s$ (respectivement $2^{\sigma(n)} \leq 2^S$) pour tout $n \geq K$. La condition (2) est donc satisfaite. Si G est de croissance exponentielle alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$ (voir [dlH00, Ch.VI.C, Remarque 53.v]) et $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{n} = \infty$. L'application des proposition D.4.3 et lemme D.4.4 conduit à l'égalité $\dim_H \mathcal{P}(G) = \infty$. □

Terminons ce chapitre avec le calcul de la dimension de Minkowski de $\mathcal{G}_1$. Ce calcul est une application du lemme D.4.2.

Proposition D.4.8. *Lorsque $m = 1$, $\mathcal{G}_m = \mathcal{G}(\mathbb{Z})$ et l'on a*

$$\overline{\dim}\mathcal{G}(\mathbb{Z}) = 0.$$

Démonstration. Fixons $n \geq 1$ et posons $\varepsilon = 2^{-n}$. Par le lemme D.4.2, $N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}), \varepsilon)$ est le cardinal de l'ensemble $\{P \subset \mathbb{Z} \,|\, P = k\mathbb{Z} \cap \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi $N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}), \varepsilon) = n + 1$, si bien que

$$\overline{\dim}\mathcal{G}(\mathbb{Z}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}), 2^{-n})}{\log 2^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0.$$

□

Cette dernière proposition est aussi un cas particulier du théorème D.8.1 démontré au chapitre D.8.

D.5 Estimations des dimensions de Minkowski d'un sous-espace de groupes à petite simplification

On suppose $m \geq 2$. Un mot réduit $w = avb \in \mathbb{L}_m$ avec $a, b \in S \cup S^{-1}$ est cycliquement réduit si $a \neq b^{-1}$. Pour tout entier $n \geq 1$, $cyc(n)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathbb{L}_m$ qui sont cycliquement réduits et de longueur n. On trouve facilement

$$|B_S(n)| = \frac{m}{m-1}((2m-1)^n - 1) + 1\,(n \geq 1). \tag{D.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|cyc(n)|}{(2m-1)^n} = 1. \tag{D.2}$$

Soit u et v deux mots cycliquement réduits. Un sous-mot d'un conjugué cyclique de u ou de u^{-1} qui est aussi un sous-mot de l'un des conjugués cycliques de v ou de v^{-1} est appelé une *pièce* entre u et v. Soit $\lambda > 0$. Si R est une partie de $\mathbb{L}_m$ formée de mots cycliquement réduits telle que toute pièce p entre deux éléments de R vérifie $|p|_S < \lambda \min_{r\in R} |r|_S$, on dit que R vérifie *la condition de petite simplification* $C'(\lambda)$.

On suppose dorénavant que $\lambda \in]0, 1/6]$. Pour tout couple d'entiers n et k, on écrit $ps(n) = ps_{k,\lambda}(n)$ l'ensemble des k-uplets d'éléments de $cyc(n)$ vérifiant l'hypothèse métrique de petite simplification $C'(\lambda)$. On définit les sous-espaces

$$PS(n) = \{\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k) \lhd \mathbb{L}_m \mid (r_1, \ldots, r_k) \in ps(n)\} \text{ et } PS = \bigcup_{n\geq 1} PS(n).$$

Théorème D.5.1.

$$k \log_2(2m-1) \leq \underline{\dim} PS \leq \overline{\dim} PS \leq \frac{k}{1-3\lambda} \log_2(2m-1).$$

Le sous-espace PS est dénombrable et peut être regardé comme l'ensemble des valeurs d'une suite dans $\mathcal{G}_m$ dont la seule valeur d'adhérence est le groupe distingué trivial $\{1\}$. La majoration de la dimension supérieure de Minkowski de cet ensemble est rendue possible grâce à un théorème classique de la théorie de la petite simplification, le théorème de Greendlinger :

Théorème D.5.2. [LS77, Ch.V,Th.4.4] *Soit $\mathcal{N}$ la clôture normale d'un ensemble de relateurs $R \subset \mathbb{L}_m$ vérifiant la condition $C'(\lambda), \lambda \in]0, 1/6]$. Alors tout élément non trivial de $\mathcal{N}$ contient un sous-mot s d'un conjugué cyclique d'un élément $r \in R$ ou de r^{-1} avec $|s|_S > (1-3\lambda)|r|_S$.*

Le théorème précédent montre en effet que lorsque les relateurs de groupes à petite simplification sont suffisamment grands, les clôtures normales de ces relateurs ne sont plus ε-distinguables du sous-groupe trivial $\{1\}$ pour $\varepsilon > 0$ fixé. Cette considération permet alors de majorer très simplement $P(PS, \varepsilon)$.

Minorer la dimension de Minkowski inférieure de PS s'obtient en minorant $P(PS, \varepsilon)$. Cette minoration repose sur trois observations. Tout d'abord, des clôtures normales distinctes de relateurs de longueurs suffisamment petites sont ε-distinguables. En suite, on sait par un résultat de Greendlinger que la clôture normale de relateurs vérifiant $C'(\lambda)$ détermine presque uniquement le choix de ces relateurs. Enfin, un résultat classique de généricité affirme que des

k-uplets de tels relateurs ayant tous même longueur sont asymptotiquement aussi nombreux que les k-uplets de mots cycliquement réduits ayant tous même longueur.

Démonstration du théorème D.5.1. Démontrons en premier lieu que

$$\overline{\dim} PS \leq \frac{k}{1-3\lambda}\log_2(2m-1).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, fixons $\varepsilon = 2^{-n}$. Remarquons alors que les points de $\bigcup_{j>\frac{n}{1-3\lambda}} PS(j)$ ne sont pas ε-distinguables. En effet, soit $\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k) \in \bigcup_{j>\frac{n}{1-3\lambda}} PS(j)$, le théorème D.5.2 implique que $\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k) \cap B_S(n) = \{1\}$ et donc $d_m(\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k), \{1\}) \leq \varepsilon$. Puisque d_m est ultra-métrique, la distance entre deux points quelconques de $\bigcup_{j>\frac{n}{1-3\lambda}} PS(j)$ est inférieure ou égale à ε. En conservant les notations du chapitre D.3, il s'ensuit que

$$P(PS,\varepsilon) \leq |B_S\left(\frac{n}{1-3\lambda}\right)|^k \leq \left(\frac{m}{m-1}\right)^k (2m-1)^{\frac{kn}{1-3\lambda}}.$$

D'où : $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\log P(PS,2^{-n})}{n\log 2} \leq \frac{k}{1-3\lambda}\log_2(2m-1)$.

Prouvons maintenant la minoration. Lorsque $\varepsilon = 2^{-n}$, les points de $PS(n)$ sont tous ε-distinguables. En effet, si $\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k)$ et $\mathcal{N}(r'_1,\ldots,r'_k)$ sont deux éléments de $PS(n)$ et si l'on suppose en outre que $d_m(\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k), \mathcal{N}(r'_1,\ldots,r'_k)) \leq \varepsilon$, il s'ensuit que

$$\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k) \cap B_S(n) = \mathcal{N}(r'_1,\ldots,r'_k) \cap B_S(n),$$

si bien que $\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k) = \mathcal{N}(r'_1,\ldots,r'_k)$. Majorons maintenant le cardinal d'une fibre de l'application

$$\begin{array}{ccc} ps(n) & \longrightarrow & PS(n) \\ (r_1,\ldots,r_k) & \longmapsto & \mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k) \end{array}$$

Il est prouvé dans [Gre61] que si l'on a

$$\mathcal{N}(r_1,\ldots,r_k) = \mathcal{N}(t_1,\ldots,t_k) \text{ avec } (r_1,\ldots,r_k),(t_1,\ldots,t_k) \in ps(n)$$

alors pour tout $i = 1,\ldots,k$, r_i est un conjugué cyclique de l'un des t_j ou de son inverse. Donc le cardinal d'une fibre est majoré par $k!(2n)^k$, de sorte que $|PS(n)| \geq \frac{|ps(n)|}{k!(2n)^k}$. On observe ainsi que $P(PS,\varepsilon) \geq \frac{|ps(n)|}{k!(2n)^k}$. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|ps(n)|}{(2m-1)^{kn}} = 1, \tag{D.3}$$

par le lemme 10 de [AOs96](voir aussi [Cha00]), on en déduit que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log P(PS,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \frac{ps(n)}{k!(2n)^k}}{n\log 2} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \frac{(2m-1)^{kn}}{k!(2k)^n}}{n\log 2} = k\log_2(2m-1).$$

□

Corollaire D.5.3. *Si $m \geq 2$ alors $\underline{\dim}\mathcal{G}_m = \infty$.*

D.6 Estimations des dimensions de Minkowski d'un sous-espace de groupes à un relateur

On suppose $m \geq 2$. Soit $q \geq 2$ un entier. On définit $UR(n) = \{\mathcal{N}(r^q), r \in cyc(n)\}$ et $UR = \bigcup_{n \geq 1} UR(n)$. A nouveau, le sous-espace dénombrable UR est l'ensemble des valeurs d'une suite dans $\mathcal{G}_m$ dont la seule valeur d'adhérence est $\{1\}$.

Théorème D.6.1. $\frac{\log_2(2m-1)}{q} \leq \underline{\dim} UR \leq \overline{\dim} UR \leq \frac{\log_2(2m-1)}{q-1}$.

Le principe de majoration est le même que celui employé dans la preuve du théorème D.5.1. Il s'agit d'une majoration du nombre d'éléments de UR qui sont ε-distinguables. Cette majoration repose sur un théorème de Neumann, analogue pour les groupes à un relateur avec torsion du théorème de Greendlinger.

Théorème D.6.2. [LS77, Chap.II, Pr.5.28] *Soit un entier $q \geq 2$ et soit r un mot cycliquement réduit de $\mathbb{L}_m$. On considère le groupe à un relateur $G = \langle S | r^q \rangle$. Si w est un mot réduit de $\mathbb{L}_m$ dont l'image est triviale dans G, alors il existe un sous-mot réduit u de w qui est aussi un sous-mot de r^q ou de son inverse et vérifiant $|u|_S > (q-1)|r|_S$.*

La minoration des dimensions provient d'une minoration du nombre d'éléments ε-distinguables et tient en ces deux observations : des clôtures normales distinctes de relateurs suffisamment petits sont ε-distinguables ; deux mots cyliquement réduits et tels qu'eux même et leurs inverses ne sont pas conjugués ont des clôtures normales distinctes. Ce dernier fait est un résultat de Magnus.

Démonstration du théorème D.6.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, fixons $\varepsilon = 2^{-n}$. Montrons que les points de $\bigcup_{i > \frac{n}{q-1}} UR(i)$ ne sont pas ε- distinguables. Si $\mathcal{N}(r^q)$ est tel que $r \in cyc(i)$ avec $i > \frac{n}{q-1}$, alors $d_m(\mathcal{N}(r^q), \{1\}) \leq \varepsilon$. En effet, le théorème D.6.2 assure que tout mot $w \in \mathcal{N}(r^q)$ est tel que $|w|_S > (q-1)|r|_S$, si bien que $\mathcal{N}(r^q) \cap B_S(n) = \{1\}$. Puisque d_m est ultra-métrique, la distance entre deux points quelconques de $\bigcup_{i > \frac{n}{q-1}} UR(i)$ est inférieure ou égale à ε. Ainsi

$$P(UR, \varepsilon) \leq |\bigcup_{i \leq \frac{n}{q-1}} UR(i)| \leq |B_S\left(\frac{n}{q-1}\right)| \leq \frac{m}{m-1}(2m-1)^{\frac{n}{q-1}}. \tag{D.4}$$

Montrons maintenant que les points de $\bigcup_{i \leq \frac{n}{q}} UR(i)$ sont ε-distinguables. En effet, si $\mathcal{N}(r^q)$ et $\mathcal{N}(r'^q)$ sont des éléments de $\bigcup_{i \leq \frac{n}{q}} UR(i)$ tels que $d_m(\mathcal{N}(r^q), \mathcal{N}(r'^q)) \leq \varepsilon$, alors $\mathcal{N}(r^q) \cap B_S(n) = \mathcal{N}(r'^q) \cap B_S(n)$, si bien que $\mathcal{N}(r^q) = \mathcal{N}(r'^q)$ puisque $|r^q|_S, |r'^q|_S \leq n$.

Par un résultat dû à Magnus [LS77, Chap.II, Pr. 5.8], on sait que lorsque r_1 et r_2 sont des éléments cycliquement réduits de $\mathbb{L}_m$ tels que $\mathcal{N}(r_1) = \mathcal{N}(r_2)$, alors r_1 est un conjugué cyclique de r_2 ou de r_2^{-1}. Le cardinal d'une fibre de l'application

$$\begin{array}{ccc} cyc([\frac{n}{q}]) & \to & UR([\frac{n}{q}]) \\ r & \mapsto & \mathcal{N}(r^q) \end{array}$$

est donc au plus $2[\frac{n}{q}]$, si bien que $|\bigcup_{i\leq\frac{n}{q}} UR(i)| \geq |UR(\frac{n}{q})| \geq \frac{|cyc([\frac{n}{q}])|}{2[\frac{n}{q}]}$. Ainsi,

$$P(UR,\varepsilon) \geq \frac{|cyc([\frac{n}{q}])|}{2[\frac{n}{q}]}. \tag{D.5}$$

Le théorème s'en déduit par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini dans les inégalités (D.4) et (D.5) où l'on applique (D.2). $\square$

D.7 Dimension de Minkowski supérieure du Cantor $\mathfrak{B}$ de Grigorchuk

Dans ce chapitre on montre que la dimension de Minkowski supérieure de l'espace de Cantor construit par Grigorchuk dans [Gri84, Ch.6] est nulle. Rappelons cette construction. Grigorchuk définit à partir d'un algorithme une famille de groupes $\widetilde{G}_\omega$ paramétrés par des suites ω de symboles pris dans l'ensemble $\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$. Une sous-famille de ces groupes est formée de groupes de croissance intermédiaire qui répondent à une question posée par Milnor. Grigorchuk montre aussi [Gri84, Ch.6, Pr. 6.2] que l'ensemble de tous ces groupes est un espace de Cantor lorsqu'on le munit de la topologie de Cayley.

On fixe l'alphabet $\{a,b,c,d\}$ et l'on définit $\overline{0}=(a,a,1), \overline{1}=(a,1,a)$ et $\overline{2}=(1,a,a)$ où 1 désigne le mot vide. On désigne par $\mathbb{F}(a,b,c,d)$ le groupe libre sur $\{a,b,c,d\}$, par $|w|$ la longueur d'un mot $w\in\mathbb{F}(a,b,c,d)$ relativement à $\{a,b,c,d\}$ et par Ω l'ensemble des suites d'éléments de $\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$.

Pour tout mot $w\in\mathbb{F}(a,b,c,d)$, on considère la forme réduite positive $r(w)\in\mathbb{F}(a,b,c,d)$ obtenue en appliquant les règles de réécriture suivantes :

(i) $x^{-1}\to x$
(ii) $x^2\to 1$
(ii) $xy\to z$

où $x,y,z\in\{a,b,c,d\}$ pour les deux premières règles et $x,y,z\in\{b,c,d\}$ et sont distincts pour la troisième. L' applications de ces règles à un mot w sont appelées *simplifications élémentaires.* Itérées jusqu'au moment où plus aucune règle ne s'applique, ces simplifications donnent une forme réduite positive $r(w)$ de w dans le groupe

$$\Gamma=\langle a,b,c,d \mid a^2=b^2=c^2=d^2=bcd=1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2*(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2).$$

Ainsi, $w\overset{\Gamma}{=}1$ si et seulement si $r(w)=1$.

Ayant fixé $\omega \in \Omega$, $\omega = (a_n, b_n, c_n)_{n\geq 1}$, on définit comme dans [Gri84, Ch.6, pp 287-288], l'ensemble $\widetilde{S}_\omega$ des éléments de $\mathbb{F}(a,b,c,d)$ pour lesquels l'algorithme $\mathfrak{a}$ d'oracle ω ([Gri84, Ch.2] et [Gri98, pp 84-86]) que l'on décrit plus bas, conduit à un résultat positif. Pour tout mot positif $w = w(a,b,c,d)$ où la lettre a apparait un nombre pair de fois, on définit deux procédés de réécriture $\varphi_0^{(n)}$ et $\varphi_1^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat $\varphi_i^{(n)}(w)$ du i-ème processus de réécriture, $i = 0,1$, est un mot sur l'alphabet $\{a,b,c,d\}$ obtenu à partir de w en associant à chaque lettre de w un symbole de l'alphabet $\{a,b,c,d\}$ en observant les règles de substitutions suivantes :

$$\varphi_i^{(n)} : \begin{cases} a & \to & 1 \\ b & \to & b_n \\ c & \to & c_n \\ d & \to & d_n \end{cases}$$

si le nombre de lettres a dans w précédant le symbole courant auquel on applique la règle de substitution est pair lorsque $i = 0$ ou impair lorsque $i = 1$. De manière analogue,

$$\varphi_i^{(n)} : \begin{cases} a & \to & 1 \\ b & \to & b \\ c & \to & c \\ d & \to & d \end{cases}$$

si le nombre de lettres a dans w précédant le symbole courant auquel on applique la règle de substitution est impair lorsque $i = 0$ ou pair lorsque $i = 1$. L'algorithme $\mathfrak{a}$ d'oracle ω est le suivant :

Algorithme. *Pour décider si $\widetilde{S}_\omega$ contient le mot $w = w(a,b,c,d)$ on procède comme suit.*

(1) *On évalue la somme des exposants de la lettre a dans w. Si cette somme est impaire alors w n'est pas retenu. Si elle est paire on calcule $r(w)$. Si $r(w) = 1$, alors w est retenu et l'algorithme s'arrête. Si $r(w) \neq 1$ et si $|r(w)| = 1$ alors w n'est pas retenu et l'algorithme s'arrête. Si $|r(w)| > 1$, on procède à l'étape* (2)

(2) *On calcule $w_i = \varphi_i^{(1)}(r(w)), i = 0,1$, et l'on retourne à l'étape* (1) *où les vérifications s'appliquent maintenant à deux mots $w_i, i = 0,1$. Si l'algorithme se poursuit après $2n$ étapes, dans l'étape* (1) *les vérifications portent alors sur 2^n mots*

$$w_{0\ldots 0}, \ldots, w_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \ldots, w_{1\ldots 1}$$

et l'on calcule ensuite dans l'étape (2), *si elle a lieu,*

$$\varphi_i^{(n+1)}(r(w_{0\ldots 0})), \ldots, \varphi_i^{(n+1)}(r(w_{i_1 i_2 \ldots i_n})), \ldots, \varphi_i^{(n+1)}(r(w_{1\ldots 1})), \quad i = 0,1.$$

Puisque $|\varphi_i^n(r(w))| \leq \frac{|w|+1}{2}$ pour $i = 0,1$ et tout $n \geq 1$, un mot w est accepté ou rejeté au bout d'au plus $\log_2(|w|)$ applications récursives de cet algorithme. L'ensemble $\widetilde{S}_\omega$ est l'ensemble des mots $w = w(a,b,c,d)$ retenus par l'algorithme. On vérifie aisément que $\widetilde{S}_\omega$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{F}(a,b,c,d)$ contenant les relateurs qui définissent Γ.

Le groupe marqué $\widetilde{G}_\omega$ est le quotient $\mathbb{F}(a,b,c,d)/\widetilde{S}_\omega$ marqué par l'image des générateurs $\{a,b,c,d\}$. Pour simplifier on identifie $\mathcal{G}_4$ et $\mathcal{G}(a,b,c,d)$.

Un algorithme complémentaire décrit dans [Gri84, Ch. 5], permet de reconstituer les n premiers symboles de ω en connaissant les éléments de $\widetilde{S}_\omega$ de longueur inférieure ou égale à 2^{n+2}. Les deux algorithmes considérés par Grigorchuk conduisent aux résultats de la proposition 6.2 dont une reformulation est la suivante :

Proposition D.7.1. [Gri84, Ch.6]

(i) Soit $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Si ω_1 et ω_2 coincident sur les n premières coordonnées, alors $d_4(\widetilde{S}_{\omega_1}, \widetilde{S}_{\omega_2}) \leq 2^{-2^n}$.

(ii) Si $d_4(\widetilde{S}_{\omega_1}, \widetilde{S}_{\omega_2}) \leq 2^{-2^{n+2}}$, alors ω_1 et ω_2 coincident sur les n premières coordonnées.

(iii) Le sous-espace $\mathfrak{B} = \{\widetilde{S}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de $\mathcal{G}_4$ est un espace de Cantor.

Théorème D.7.2. *La dimension de Minkowski supérieure du sous-espace* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{G}_4$ *est nulle.*

Démonstration du théorème D.7.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, fixons $\varepsilon = 2^{-2^n}$. On considère dans $\mathcal{G}_4$ l'ensemble des boules de rayon ε centrées en les groupes $\widetilde{S}_\omega$ pour lesquels ω est constante à partir de la n-ème coordonnée. Il s'agit d'un recouvrement de $\mathfrak{B}$ en vertu du point (i) de la proposition D.7.1. Le cardinal de ce recouvrement est au plus 3^n. Ainsi, $\frac{\log N(\mathfrak{B},\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{\log 3^n}{2^n \log 2}$. D'où $\overline{\dim}\mathfrak{B} = 0$. □

D.8 Dimension de Minkowski supérieure du sous-espace des groupes commutatifs marqués à m générateurs

Soit $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ l'ensemble ordonné des générateurs canoniques du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^m$. On désigne par $B_\mathcal{A}(n)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}^m$ de longueur inférieure ou égale à n relativement à $\mathcal{A}$. Soit b_n le cardinal de $B_\mathcal{A}(n)$. Il est immédiat de vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^m} = vol(K)$, où $vol(K) = \frac{2^m}{m!}$ est le volume de l'enveloppe convexe K de $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ dans $\mathbb{R}^m$. Il existe donc $C \geq 0$ tel que $b_n \leq Cn^m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conserve les notations de l'introduction en considérant l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m)$ muni de la métrique $d_\mathcal{G}$. L'épimorphisme de $\mathbb{L}_m$ sur $\mathbb{Z}^m$ défini à partir de la bijection naturelle entre les ensembles de générateurs ordonnés S et $\mathcal{A}$ induit un plongement de $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m)$ dans $\mathcal{G}_m$ qui est isométrique sur son image. Cette image est l'ensemble des groupes commutatifs marqués.

Théorème D.8.1. *La dimension de Minkowski supérieure de l'espace métrique* $(\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m), d_\mathcal{G})$ *est nulle.*

Démonstration. Soit n un entier supérieur ou égale à deux. Soit $\mathcal{P}_n = \{B_{\mathcal{A}}(n) \cap R \mid R \leq \mathbb{Z}^m\}$. Par le lemme D.4.2, $N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m), 2^{-n}) = |\mathcal{P}_n|$. Le cardinal de $\mathcal{P}_n$ est inférieur au nombre de sous-groupes de $\mathbb{Z}^m$ dont une base est dans la boule $B_{\mathcal{A}}(n)$. On a donc $|\mathcal{P}_n| \leq \sum_{l=0}^{m} \binom{b_n}{l} \leq b_n^{m+1}$. Il s'ensuit que

$$\overline{\dim}\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m), 2^{-n})}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n^{m(m+1)}}{n} = 0.$$

$\square$

Bibliographie

[Abe79] H. Abels. An example of a finitely presented solvable group. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 205–211. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.

[ABL+05] G. Arzhantseva, J. Burillo, M. Lustig, L. Reeves, H. Short, and E. Ventura. Uniform non-amenability. *Adv. Math.*, 197(2) :499–522, 2005.

[AOs96] G. Arzhantseva and A. Ol′ shanskiĭ. Generality of the class of groups in which subgroups with a lesser number of generators are free. *Mat. Zametki*, 59(4) :489–496, 638, 1996.

[Bau61] G. Baumslag. Wreath products and finitely presented groups. *Math. Z.*, 75 :22–28, 1960/1961.

[Bau67] G. Baumslag. Residually finite one-relator groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :618–620, 1967.

[BH74] W. Boone and G. Higman. An algebraic characterization of groups with soluble word problem. *J. Austral. Math. Soc.*, 18 :41–53, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, IX.

[Bro87] K. Brown. Finiteness properties of groups. In *Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups (Evanston, Ill., 1985)*, volume 44, pages 45–75, 1987.

[BS62] G. Baumslag and D. Solitar. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 :199–201, 1962.

[BS69] J. L. Bell and A. B. Slomson. *Models and ultraproducts : An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969.

[BS76] G. Baumslag and R. Strebel. Some finitely generated, infinitely related metabelian groups with trivial multiplicator. *J. Algebra*, 40(1) :46–62, 1976.

[BS80] R. Bieri and R. Strebel. Valuations and finitely presented metabelian groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 41(3) :439–464, 1980.

[CCJ+01] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, and A. Valette. *Groups with the Haagerup property*, volume 197 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov's a-T-menability.

[CFP96] J. Cannon, W. Floyd, and W. Parry. Introductory notes on Richard Thompson's groups. *Enseign. Math. (2)*, 42(3-4) :215–256, 1996.

[CG05] C. Champetier and V. Guirardel. Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.*, 146 :1–75, 2005.

[Cha50] C. Chabauty. Limite d'ensembles et géométrie des nombres. *Bull. Soc. Math. France*, 78 :143–151, 1950.

[Cha00] C. Champetier. L'espace des groupes de type fini. *Topology*, 39(4) :657–680, 2000.

[Chi01] I. Chiswell. *Introduction to* Λ*-trees*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.

[Cho80] C. Chou. Elementary amenable groups. *Illinois J. Math.*, 24(3) :396–407, 1980.

[CR06] P.-E. Caprace and B. Rémy. Simplicité abstraite des groupes de Kac-Moody non affines. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(8) :539–544, 2006.

[dC06] Y. de Cornulier. Finitely presented wreath products and double coset decompositions. *Geom. Dedicata*, 122 :89–108, 2006.

[dC07] Yves de Cornulier. Finitely presentable, non-Hopfian groups with Kazhdan's property (T) and infinite outer automorphism group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(4) :951–959 (electronic), 2007.

[dCGP07] Y. de Cornulier, L. Guyot, and W. Pitsch. On the isolated points in the space of groups. *J. Algebra*, 307(1) :254–227, 2007.

[Del78] P. Deligne. Extensions centrales non résiduellement finies de groupes arithmétiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(4) :A203–A208, 1978.

[dlH00] P. de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[Ers04] A. Erschler. Not residually finite groups of intermediate growth, commensurability and non-geometricity. *J. Algebra*, 272(1) :154–172, 2004.

[Fal03] K. Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, second edition, 2003. Mathematical foundations and applications.

[For03] M. Forester. On uniqueness of JSJ decompositions of finitely generated groups. *Comment. Math. Helv.*, 78(4) :740–751, 2003.

[Ghy04] É. Ghys. Groupes aléatoires (d'après Misha Gromov,. . .). *Astérisque*, (294) :viii, 173–204, 2004.

[GJ03] Ś. Gal and T. Januszkiewicz. New a-T-menable HNN-extensions. *J. Lie Theory*, 13(2) :383–385, 2003.

[Gre61] M. Greendlinger. An analogue of a theorem of Magnus. *Arch. Math.*, 12 :94–96, 1961.

[Gri80] R. Grigorchuk. On Burnside's problem on periodic groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(1) :53–54, 1980.

[Gri84] R. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(5) :939–985, 1984.

[Gri98] R. Grigorchuk. An example of a finitely presented amenable group that does not belong to the class EG. *Mat. Sb.*, 189(1) :79–100, 1998.

[Gri05] R. Grigorchuk. Solved and unsolved problems around one group. In *Infinite groups : geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 117–218. Birkhäuser, Basel, 2005.

[Gro78] J. Groves. Finitely presented centre-by-metabelian groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 18(1) :65–69, 1978.

[Gro81] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (53) :53–73, 1981.

[Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Gro93] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[GS] L. Guyot and Y. Stalder. Limits of Baumslag-Solitar groups. math.GR/0507236.

[Gui04] V. Guirardel. Limit groups and groups acting freely on $\mathbb{R}^n$-trees. *Geom. Topol.*, 8 :1427–1470 (electronic), 2004.

[Hal54] P. Hall. Finiteness conditions for soluble groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 4 :419–436, 1954.

[Hal59] P. Hall. On the finiteness of certain soluble groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 9 :595–622, 1959.

[Hal61] P. Hall. The Frattini subgroups of finitely generated groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 11 :327–352, 1961.

[Hou79] C. H. Houghton. The first cohomology of a group with permutation module coefficients. *Arch. Math. (Basel)*, 31(3) :254–258, 1978/79.

[HR63] E. Hewitt and K. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I : Structure of topological groups. Integration theory, group representations.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 115. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.

[HS88] G. Higman and E. Scott. *Existentially closed groups*, volume 3 of *London Mathematical Society Monographs. New Series.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1988. , Oxford Science Publications.

[Kel75] J. Kelley. *General topology.* Springer-Verlag, New York, 1975. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27.

[Kha81] O. Kharlampovič. A finitely presented solvable group with unsolvable word problem. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 45(4) :852–873, 928, 1981.

[KM98a] O. Kharlampovich and A. Myasnikov. Irreducible affine varieties over a free group. I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz. *J. Algebra*, 200(2) :472–516, 1998.

[KM98b] O. Kharlampovich and A. Myasnikov. Irreducible affine varieties over a free group. II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups. *J. Algebra*, 200(2) :517–570, 1998.

[Kro90] P. Kropholler. Baumslag-Solitar groups and some other groups of cohomological dimension two. *Comment. Math. Helv.*, 65(4) :547–558, 1990.

[LS77] R. Lyndon and P. Schupp. *Combinatorial group theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

[Mac72] A. Macintyre. On algebraically closed groups. *Ann. of Math. (2)*, 96 :53–97, 1972.

[Man82] A. Mann. A note on recursively presented and co-recursively presented groups. *Bull. London Math. Soc.*, 14(2) :112–118, 1982.

[Mas67] W. Massey. *Algebraic topology : An introduction.* Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.

[Mat95] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[Mil81] C. Miller. The word problem in quotients of a group. In *Aspects of effective algebra (Clayton, 1979)*, pages 246–250. Upside Down A Book Co. Yarra Glen, Vic., 1981.

[MKS04] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial group theory.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, second edition, 2004. Presentations of groups in terms of generators and relations.

[Mol91] D. Moldavanskiĭ. On the isomorphisms of Baumslag-Solitar groups. *Ukrain. Mat. Zh.*, 43(12) :1684–1686, 1991.

[MS20] S. Mazurkiewicz and W. Sierpinski. Contribution à la topologie des ensembles dénombrables. *Fund. Math.*, 1 :17–27, 1920.

[Nek07] V. Nekrashevych. A minimal cantor set in the space of 3-generated groups. *Geometriae Dedicata, In Press*, 2007.

[Neu67] H. Neumann. *Varieties of groups.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[Neu73] B. Neumann. The isomorphism problem for algebraically closed groups. In *Word problems : decision problems and the Burnside problem in group theory (Conf. on Decision Problems in Group Theory, Univ. California, Irvine, Calif. 1969 ; dedicated to Hanna Neumann)*, pages 553–562. Studies in Logic and the Foundations of Math., Vol. 71. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[New60a] M. Newman. On a class of metabelian groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 10 :354–364, 1960.

[New60b] M. Newman. On a class of nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 10 :365–375, 1960.

[Osi02] D. Osin. Weakly amenable groups. In *Computational and statistical group theory (Las Vegas, NV/Hoboken, NJ, 2001)*, volume 298 of *Contemp. Math.*, pages 105–113. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[Pau04] F. Paulin. Sur la théorie élémentaire des groupes libres (d'après Sela). *Astérisque*, (294) :ix, 363–402, 2004.

[Pea75] A. Pears. *Dimension theory of general spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1975.

[Pic06] M. Pichot. Semi-continuity of the first l^2-Betti number on the space of finitely generated groups. *Comment. Math. Helv.*, 81(3) :643–652, 2006.

[Rag84] M. Raghunathan. Torsion in cocompact lattices in coverings of Spin(2, n). *Math. Ann.*, 266(4) :403–419, 1984.

[Rem89] V. Remeslennikov. $\exists$-free groups. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 30(6) :193–197, 1989.

[Rip82] E. Rips. Another characterization of finitely generated groups with a solvable word problem. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1) :43–44, 1982.

[Rob96] D. Robinson. *A course in the theory of groups*, volume 80 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1996.

[Rot95] J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.

[Sco51] W. Scott. Algebraically closed groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2 :118–121, 1951.

[Sel01] Z. Sela. Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93) :31–105, 2001.

[Ser77] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[Sha00] Y. Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math.*, 141(1) :1–54, 2000.

[Sim73] H. Simmons. The word problem for absolute presentations. *J. London Math. Soc. (2)*, 6 :275–280, 1973.

[Sou01] E. Souche. *Quasi-isométries et quasi-plans dans l'étude des groupes discrets*. Thèse de doctorat, Université de Provence, U.F.R., M.I.M., Cambridge, England, 2001.

[Sta05] Y. Stalder. *Espace des groupes marqués et groupes de Baumslag-Solitar*. PhD thesis, Université de Neuchâtel, http ://doc.rero.ch/search.py ?recid=5501&ln=en, 2005.

[Sta06a] Y. Stalder. Convergence of Baumslag-Solitar groups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 13(2) :221–233, 2006.

[Sta06b] Y. Stalder. Moyennabilité intérieure et extensions HNN. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(2) :309–323, 2006.

[Ste84] A. Stepin. A remark on the approximability of groups. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (4) :85–87, 1984.

[Ste96] A. Stepin. Approximation of groups and group actions, the Cayley topology. In *Ergodic theory of* $\mathbf{Z}^d$ *actions (Warwick, 1993–1994)*, volume 228 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 475–484. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[SW02] M. Sapir and D. Wise. Ascending HNN extensions of residually finite groups can be non-Hopfian and can have very few finite quotients. *J. Pure Appl. Algebra*, 166(1-2) :191–202, 2002.

[VG97] A. Vershik and E. Gordon. Groups that are locally embeddable in the class of finite groups. *Algebra i Analiz*, 9(1) :71–97, 1997.

[Wie39] H. Wielandt. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. *Math. Z.*, 45(1) :209–244, 1939.

[Yah62] S. Yahya. P-pure exact sequences and the group of P-pure extensions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 5 :179–181, 1962.

[Zar07] R. Zarzicky. Limits of (thompson's) group f. 2007.

[Zim84] R. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.