



Article scientifique

Article

1996

Published version

Open Access

This is the published version of the publication, made available in accordance with the publisher's policy.

Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions

Dorier, Jean-Luc

How to cite

DORIER, Jean-Luc. Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions. In: Revue d'histoire des mathématiques, 1996, vol. 2, n° 2, p. 265–307.

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16641>

GENÈSE DES PREMIERS ESPACES VECTORIELS DE FONCTIONS

Jean-Luc DORIER (*)

RÉSUMÉ. — Cet article examine comment la notion d'espace vectoriel de fonctions s'est peu à peu imposée dans l'analyse entre 1880 et 1930 environ. Malgré certaines approches formelles précoces, les questions linéaires en dimension infinie sont longtemps restées marquées par l'analogie avec la dimension finie, que l'on traitait alors à l'aide des déterminants. Nous regardons comment l'étude de l'équation de Fredholm d'une part, en particulier le travail de Hilbert, et l'émergence de notions topologiques d'autre part, ont fait apparaître, par des généralisations successives, la nécessité d'une approche axiomatique.

ABSTRACT. — THE INCEPTION OF THE FIRST VECTOR SPACES OF FUNCTIONS. The paper surveys the gradual rise and initial adoption in the field of analysis of the concept of vector spaces of functions, in the period from ca. 1880 to ca. 1930. Some early formalistic approaches notwithstanding, the treatment of linear problems for an infinite number of dimensions long bore the mark of the analogy with finite-number of dimensions situations, this at the time involving the use of determinants. The paper examines how the Fredholm equation, on the one hand, and particularly Hilbert's contribution on the matter, and the emergence of topological concepts on the other hand, came to show, through a succession of generalisations, the requirement for an axiomatic approach.

Dans la deuxième moitié du XIX^e siècle, sans que le concept d'espace vectoriel ne soit encore dégagé, se consolide un corpus théorique autour des questions de linéarité. Ce corpus est issu de divers horizons : calcul vectoriel et géométrie, étude des systèmes d'équations numériques et différentielles linéaires, formes bilinéaires et quadratiques, etc. L'outil central en est le déterminant, qui, depuis sa popularisation en 1750 avec les

(*) Texte reçu le 16 octobre 1995, révisé le 25 juin 1996.

Jean-Luc DORIER, Équipe de didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz, UMR 5522 CNRS-UJF-INPG, IMAG, Université Joseph Fourier, 46 av. F. Viallet, 36031 Grenoble CEDEX (France). Courrier électronique : jldorier@grenet.fr.

(Sauf mention d'une traduction française dans la bibliographie, les citations dans le texte, ont été traduites par l'auteur. Dans les références, les pages sont toujours données d'après la publication des œuvres lorsqu'elle existe.)

travaux de Cramer, n'a cessé d'être à la base de toutes les questions de linéarité. À la fin du XIX^e siècle, plusieurs faits distincts conduisent à un changement qui arrive à son terme vers 1930. Tout d'abord, à l'intérieur même du corpus, les objets et les outils deviennent plus sophistiqués et s'affranchissent peu à peu de la théorie des déterminants (par exemple, pour les travaux de Frobenius sur le rang, voir [Dorier 1993]) permettant ainsi de mieux dégager les contours du concept d'espace \mathbb{R}^n . Parallèlement, des approches formelles et même axiomatiques apparaissent, dégageant la notion d'espace vectoriel formel, caractérisé par sa structure linéaire. Ces premières tentatives restent cependant isolées et sans grand écho. Enfin, de plus en plus de problèmes d'analyse conduisent à étudier la linéarité en dimension infinie.

Pour un mathématicien contemporain, une fonction, en tant qu'élément d'un espace vectoriel, est le prototype du vecteur qui ne se laisse pas réduire à ses coordonnées. C'est pourquoi, à la lecture du bref bilan que nous venons de dresser, on pourrait croire qu'à la fin du XIX^e siècle, sont réunis tous les ingrédients pour imposer l'approche formelle de la notion d'espace vectoriel, et qu'il existe, dans l'histoire de l'algèbre linéaire, une rupture conceptuelle où l'apparition de la dimension infinie est intrinsèquement liée à l'adoption de l'approche axiomatique. Mais ceci est en grande partie faux. En effet, malgré les travaux de certains mathématiciens, tels que Lebesgue et Baire, par exemple, la représentation d'une fonction par un développement en série est encore au début du XX^e siècle la conception dominante dans beaucoup de domaines de l'analyse. Or, une série est, avant tout, une suite infinie de coefficients, ce qui correspond au cas limite de la représentation en coordonnées. Ainsi, la rupture attendue entre dimension finie et dimension infinie n'a pas eu lieu (et ce, même pour des espaces fonctionnels qui sont de dimension non dénombrable, comme les espaces de Hilbert).

De fait, nous allons voir que les premiers travaux en dimension infinie se sont fondés sur une analogie avec la dimension finie et n'ont fait que généraliser le corpus établi dans ce cadre, même si l'évolution des recherches a permis de construire des méthodes et des outils plus sophistiqués. Par ailleurs, la nature topologique des problèmes a permis d'introduire un point de vue géométrique dans les ensembles de fonctions, *via* une distance ou un produit scalaire. Ainsi retrouve-t-on dans le cadre

de la dimension infinie, les mêmes débats qu'en géométrie entre méthodes synthétique et analytique. Dans un premier temps, les travaux les plus marquants ne tentent pas de mettre en place une approche formelle de type synthétique. La plupart sont consacrés à résoudre des problèmes précis, élaborant des méthodes dans un cadre descriptif très peu formel, où apparaissent cependant ce qu'on appellera plus tard les espaces de Hilbert (d'abord sous la forme de l'espace ℓ^2 des séries de carré sommable et de celui des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue, noté L^2). Puis, interviennent des espaces plus sophistiqués, tel que les espaces L^p , avec leur dual L^q (où $p > 1$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1$), pour atteindre enfin les espaces les plus généraux.

L'analogie avec la résolution des systèmes linéaires et d'autres problèmes de la dimension finie est toujours présente. Cependant, la répétition des mêmes types de démarches, dans des cadres de plus en plus généraux, et l'introduction du langage géométrique, permettent graduellement de dégager des similitudes (avant tout en terme de structure topologique). Ceci conduit à l'émergence du concept d'espace fonctionnel, où la nature topologique prime d'abord sur l'aspect algébrique souvent implicite. En ce sens, la possibilité d'introduire une structure topologique intrinsèque entre fonctions sans passer par une infinité de coordonnées et une généralisation de la norme euclidienne ont permis un traitement plus synthétique des problèmes d'analyse fonctionnelle dont l'aboutissement est une théorie axiomatique, où la structure d'espace vectoriel normé est centrale. Dégageons maintenant les grandes lignes de l'évolution ainsi esquissée¹.

1. LES DÉBUTS DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE EN DIMENSION INFINIE

De nombreux problèmes « traditionnels » issus de la physique (corde vibrante, équation de la chaleur, mouvement des planètes, etc.) conduisent à l'étude de systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires. Depuis la fin du XVIII^e siècle, ces problèmes étaient abordés avec les outils et les méthodes liées aux déterminants et, plus tard, aux

¹ En complément de notre approche, on pourra également consulter sur l'histoire des espaces fonctionnels : [Pincherle 1912], [Hadamard 1912], [Hellinger et Toeplitz 1927], [Bernkopf 1966, 1968], [Monna 1973], [Dieudonné 1981] et [Pécot 1992, 1993a,b].

matrices et aux formes bilinéaires. Qu'une combinaison linéaire de solutions d'une équation ou d'un système d'équations différentielles linéaires homogènes soit aussi une solution, qu'on obtienne la solution générale de l'équation complète en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière, étaient des résultats connus depuis longtemps. L'utilisation d'outils plus sophistiqués, comme le Wronskien, a permis de donner à l'étude des équations différentielles linéaires un corpus théorique, directement lié à la théorie des déterminants, mais assez spécifique. C'est dans la lignée de ces travaux qu'à la fin du XIX^e siècle se constitue un élargissement à un nombre infini de variables du corpus théorique déjà existant en dimension finie (voir [Dorier 1995]).

Dès 1822, Joseph Fourier utilisant des développements en série pour résoudre des équations fonctionnelles, différentielles et aux dérivées partielles étudie des systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues [Fourier 1822, p. 149, 187]. Les connaissances de l'époque sur la convergence des séries et les conditions sous lesquelles on pouvait les dériver ne lui ont pas permis de donner une approche entièrement rigoureuse de ce problème, mais il a pu ainsi mettre en place les principes élémentaires de résolution de tels systèmes : étude du sous-système tronqué à l'ordre n , puis passage à la limite quand n tend vers l'infini (dénommé *principe des réduites*). Il semble cependant que les travaux de Fourier soient restés dans l'oubli pendant près d'un demi-siècle. Après quelques tentatives dues entre autres à Fürstenau en 1860 et Koetteritzsch en 1870, c'est à George William Hill [1877], Henri Poincaré [1886] et Helge von Koch [1891, 1892] que l'on doit les résultats fondamentaux sur les systèmes linéaires infinis, selon le principe des réduites. Ces travaux ont permis de jeter les bases d'un élargissement de la théorie des déterminants à la dimension infinie. Le problème n'était pas purement algébrique, il fallait bien sûr savoir ce qu'on acceptait comme solution, c'est-à-dire quelle restriction donner sur la convergence. En 1913, Frédéric Riesz disait de ces débuts :

«*Pour appliquer la méthode classique des déterminants aux systèmes infinis, il fallait imposer des conditions plus ou moins restrictives, et il faut bien avouer que c'est la méthode et non le problème qui exigeait ces restrictions*» [Riesz 1913, p. 876].

Ajoutons que, dans ce cadre, la théorie des déterminants restait l'outil

essentiel. Pourtant, assez rapidement, la lourdeur et l'extrême technicité des méthodes associées les firent remettre en cause. Ainsi, en 1909, Otto Toeplitz écrit en introduction d'un texte sur la résolution des systèmes linéaires infinis :

«*On a coutume de déduire les théorèmes sur la résolution de n équations linéaires à n inconnues à l'aide de la théorie des déterminants. On peut cependant distinguer parmi ces théorèmes, ceux dont le contenu ne comporte rien en rapport avec le concept de déterminant (même si leur démonstration usuelle n'en est pas exempte), de ceux dont on ne peut formuler l'énoncé sans parler de déterminant. [...] Dans ce qui suit nous allons élargir, d'une façon particulière, les théorèmes de la première classe aux systèmes infinis d'équations linéaires*»².

Ainsi Toeplitz démontre d'une façon très formelle l'équivalence de tout système linéaire fini avec un système triangulaire, en reliant cette méthode au concept de rang. Il élargit ensuite sa méthode au cas des systèmes *zeilenfinit* c'est-à-dire d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, mais tels que chaque équation ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables. Il utilise ce résultat pour exprimer le théorème dit de l'alternative sur les conditions d'existence d'une solution et la dimension de l'ensemble des solutions. L'approche de Toeplitz restera isolée, elle montre bien pourtant la difficulté théorique liée au passage du fini à l'infini. En fait, les modifications vont se faire petit à petit sur plusieurs fronts, dans des contextes parfois assez éloignés.

2. PEANO, PINCHERLE : APPROCHES AXIOMATIQUES PRÉCOCES

La première définition axiomatique de la structure d'espace vectoriel remonte à 1888, et fut donnée dans le *Calcolo geometrico* de Giuseppe Peano [1888a, p. 141–142]. Cette définition apparaît à la fin d'un traité présentant une partie de l'*Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann, et

² «*Die Sätze über die Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten pflegt man mit Hilfe der Theorie der Determinanten abzuleiten. Man kann jedoch unter diesen Sätzen solche, deren Inhalt den Determinantenbegriff garnicht enthält (wenn auch der übliche Beweis nicht davon frei ist), von den übrigen scheiden, deren Wortlaut man nicht formulieren könnte, ohne von Determinanten zu reden. [...] Im folgenden sollen die Sätze der ersten Classe auf eine besondere Art auf unendliche lineare Gleichungssysteme übertragen werden*» [Toeplitz 1909, p. 88–89].

trouve donc ses origines en géométrie (voir [Dorier 1995, 1996]). Peano ne développe pas une véritable théorie des espaces vectoriels, il donne seulement les premières définitions. De plus, ses exemples sont essentiellement issus du travail de Grassmann et s'il remarque qu'un système linéaire (l'équivalent dans son langage de l'espace vectoriel) peut avoir une infinité de dimensions, le seul exemple qu'il cite est celui des séries entières. Par ailleurs, Peano n'a réutilisé qu'une seule fois son début de théorie en analyse dans un texte intitulé « Intégration par séries des équations différentielles linéaires »³ [1888b], où il présente une étude d'un système de n équations différentielles linéaires d'ordre un à n inconnues. Son approche qui utilise la norme euclidienne, les valeurs propres d'une substitution linéaire, etc. est très moderne et permet de montrer son intérêt dans un domaine autre que la géométrie. Pourtant ce court texte restera la seule utilisation vraiment nouvelle que Peano fera de sa propre théorie axiomatique, alors qu'en 1888, il n'est qu'au seuil d'une carrière brillante. Son approche ne connut guère de succès au-delà d'un cercle de proches.

Le travail de Salvatore Pincherle s'inscrit partiellement dans la lignée de celui de Peano, auquel il fait référence. À partir d'environ 1890, cet auteur publie plusieurs textes présentant des approches très formelles de questions relatives aux équations différentielles ou intégrales. Puis en 1901 il publie, avec la collaboration de son élève Ugo Amaldi, un traité intitulé *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, qui présente une théorie axiomatique des opérateurs fonctionnels. De fait, ce traité dépasse assez largement la première approche de Peano, tout en se démarquant de son origine dans la théorie de l'extension de Grassmann et même de ses liens avec la géométrie. Comme son titre l'indique, la préoccupation de Pincherle est avant tout le traitement de problèmes d'analyse et de questions linéaires en dimension infinie. En ce sens, son approche est singulière pour l'époque et marque une anticipation de questions qui seront surtout discutées dans le courant des années 1920. Bien que s'intéressant à la dimension infinie, Pincherle présente une théorie axiomatique très complète de la dimension finie. De plus, il explicite clairement les points

³ Ce texte publié en français dans les *Mathematische Annalen* est en fait une traduction légèrement modifiée d'un texte publié en italien l'année précédente dans les *Atti della reale Accademia delle scienze di Torino*.

liés au concept de dimension (contrairement à Peano, et à plusieurs successeurs).

Il s'avère que son travail n'a eu que peu d'influence, au moins immédiate, sur les développements de l'analyse et des questions linéaires en dimension infinie; les raisons en sont difficiles à évaluer. Il semble toutefois que le parti pris d'une approche très générale et explicitement axiomatique, telle que la propose Pincherle, ne corresponde pas à l'état des recherches (et peut-être des mentalités) en ce tout début du XX^e siècle. En effet, comme nous l'avons vu précédemment la représentation fréquente d'une fonction par un développement en série conduit naturellement les mathématiciens de l'époque à résoudre les nouveaux problèmes qu'ils se posent avec les outils du corpus théorique de la dimension finie. Cette approche présente l'avantage de s'inscrire dans la continuité au plan des outils et des méthodes et bénéficie ainsi d'un champ riche et stable qui n'a pas encore montré ses limites. Ainsi, l'approche de Pincherle peut sembler inutilement formaliste, là où des outils et des méthodes si bien rodés permettent encore de donner des réponses satisfaisantes même si celles-ci deviennent parfois fort complexes et techniques.

Pincherle se démarque entièrement de ce courant, comme il l'exprime dans la préface de son livre :

«En premier lieu, en remarquant que toute fonction analytique d'une variable est caractérisée par les valeurs données à un nombre infini mais dénombrable de paramètres, on peut donc considérer les classes de fonctions qui contiennent toutes les combinaisons linéaires de leurs éléments, par exemple la totalité des fonctions régulières dans le voisinage d'un point donné, comme des espaces ayant un nombre généralement infini, mais dénombrable, de dimensions. Les opérations distributives applicables aux fonctions d'une même classe se présentent alors comme une généralisation naturelle de ce que sont les homographies dans les espaces linéaires ayant un nombre fini de dimensions; et ce concept, d'autant plus qu'il est doté d'une notation simple et expressive, permettra d'induire dans un mode synthétique, et avec l'aide d'une analogie continue avec la géométrie, de multiples relations de composition, de décomposition, de classification en groupes, de transformations de telles opérations»⁴.

Ainsi, Pincherle considère non seulement comme acquis l'intérêt d'une

⁴ «*In primo luogo, osservando che ogni funzione analitica di una variabile è individuata*

approche axiomatique pour l'étude et la classification des endomorphismes en dimension finie, mais il trouve naturel que cette méthode se prolonge à l'étude des opérateurs fonctionnels. Ce faisant, il se place très en avance sur son époque. Le seul fait de considérer l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de certaines fonctions est un point de vue neuf. Par contre, il reste attaché à la conception pourtant en partie dépassée à l'époque qui assimile une fonction à son expression analytique sous forme d'une série.

Dans un premier chapitre, il présente une théorie très complète de l'ensemble linéaire général à un nombre fini de dimensions. La définition axiomatique qu'il propose diffère peu de celle de Peano, mais il présente un concept de dimension plus complet⁵. De plus, Pincherle aborde le concept de rang indépendamment de la notion de matrice :

«*Entre les éléments donnés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, il y a r relations linéaires indépendantes et pas plus ($r < n$), l'ensemble des éléments $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ contient $(n - r)$ éléments indépendants et pas plus, et sera donc à $(n - r)$ dimensions*»⁶.

Plus haut, il avait remarqué que l'ensemble des relations linéaires entre les α_i forme un ensemble linéaire. Il relie alors ces concepts à celui de rang d'une matrice. Puis il examine la question des changements de bases, introduit la notion d'hyperplan et de sous-espace, et leur représentation

dai valori attribuiti ad un numero generalmente infinito ma numerabile di parametri, si possono considerare quelle classi di funzioni che contengono tutte le combinazioni lineari dei loro elementi, ad esempio la totalità delle funzioni regolari nell'intorno di uno stesso punto, come spazi ad un numero generalmente infinito, ma numerabile di dimensioni. Le operazioni distributive applicabili alle funzioni di una simile classe si presentano allora come una generalizzazione naturale di ciò che sono le omografie negli spazi lineari ad un numero finito di dimensioni; e questo concetto, tanto più se sussidiato da una notazione semplice ed espressiva, permetterà di intuire in modo sintetico, e colla guida di continuate analogie colla geometria, molteplici relazioni di composizione, di scomposizione, di classificazione in gruppi, di trasformazioni di siffatte operazioni» [Pincherle et Amaldi 1901, préface, p. iii].

⁵ En effet, s'il définit aussi la dimension comme le nombre maximal de vecteurs indépendants, Pincherle démontre que dans un espace à n dimensions il ne peut y avoir de système générateur à moins de n éléments (§ 18, p. 3-4), ce que Peano a admis implicitement. Or ce résultat est fondamental pour prouver que toutes les bases ont même cardinal.

⁶ «*Dati gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, se fra essi passano r relazioni lineari indipendenti e non più ($r < n$), l'insieme degli elementi $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ conterrà $(n - r)$ elementi e non più linearmente indipendenti, e sarà pertanto ad $(n - r)$ dimensioni*» [Ibid., p. 9].

par des équations. Il démontre le théorème sur la dimension de la somme de deux sous-espaces, en admettant au passage le théorème de la base incomplète. Il en vient ensuite à l'étude de ce qu'il appelle *operazioni* qui correspond au concept moderne d'application et plus particulièrement *d'operazioni distributive*, c'est-à-dire d'application linéaire (chapitres 2, 3 et 4). Il reprend ainsi la plupart des résultats connus sur les matrices (en particulier la théorie spectrale), mais d'un point de vue entièrement neuf en termes d'opérateurs, développant ainsi ce que Peano n'avait fait qu'esquisser. De plus, la référence à la dimension finie n'est pas toujours explicite et de fait, certains résultats pourront être repris tels quels dans les chapitres ultérieurs. Dans le chapitre 5, il introduit l'ensemble linéaire des suites numériques (noté S), dont il montre qu'il vérifie les mêmes axiomes. Par ailleurs, il montre que dans S , on peut toujours trouver une famille libre plus grande qu'une famille libre donnée et qu'en conséquence le nombre de dimensions de S est infini. En remarquant que S est identique à l'ensemble des séries entières, il ajoute :

«Pour les considérations de nature purement formelle, il ne sera pas nécessaire de spécifier la convergence ou la divergence de la série, qui servira uniquement à unir en un tout la succession des nombres $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Mais pour les applications à la théorie des fonctions, il sera nécessaire de tenir compte de la convergence d'une telle série»⁷.

Il remarque alors que l'ensemble, qu'il note S^0 , des séries qui ont un rayon de convergence non nul, est un sous-espace vectoriel de S . Dans la suite, il utilise la notation S^r pour désigner l'ensemble linéaire des séries dont le rayon de convergence dépasse r , et S^∞ pour désigner l'ensemble linéaire des séries dont le rayon de convergence est infini. Il introduit également l'ensemble linéaire des séries de Laurent $\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n x^n\right)$.

Il étudie alors en détail, et sous un angle très formel, divers opérateurs (dérivation, opérateurs normaux, différence finie, etc.). De plus, il préconise l'utilisation du langage géométrique dans les espaces fonctionnels, mais il reste assez flou sur ce point. On voit donc que l'approche de Pincherle dépasse très largement l'esquisse proposée par Peano et propose une

⁷ «Per le considerazioni di natura puramente formale, non sarà necessario distinguere le convergenza dalla divergenza della serie [...], che avrà semplicemente l'ufficio di unire in un tutto la successione de numeri $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Ma per le applicazioni alla teoria delle funzioni, sarà necessario di tenere conto della convergenza di una serie come la [...]» [Ibid., p. 72].

démarche unifiée centrée sur l'axiomatique, l'étude des opérateurs et l'utilisation du langage géométrique pour aborder les questions linéaires en dimension finie ou infinie. Cependant, comme on l'a dit plus haut, son travail n'aura que peu d'influence, bien qu'il rédige en 1912, pour la version française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, un article très riche sur les équations et les opérations fonctionnelles, où il fait référence à ses propres travaux en les plaçant dans le contexte de l'époque [Pincherle 1912]. Sur de nombreux points relatifs à ce qui deviendra l'analyse fonctionnelle, Pincherle a été très en avance sur son temps, mais son travail est resté sous-estimé à bien des égards.

3. AUTOUR DES ÉQUATIONS INTÉGRALES : CONSTITUTION D'UN CHAMP DE PROBLÈMES

Avant que l'approche axiomatique ne puisse s'imposer, il a fallu de nombreuses recherches qui ont mis en évidence la nature des problèmes fonctionnels linéaires. Dans ce contexte, l'étude des équations intégrales, souvent elles-mêmes obtenues par transformation d'équations aux dérivées partielles, a joué un rôle clé, focalisant la plupart des travaux sur la linéarité en dimension infinie. Entre 1904 et 1910, David Hilbert publie six articles fondamentaux dans ce domaine ; mais avant d'examiner ces textes, il nous faut commencer par un article d'Ivar Fredholm de 1903 contenant en germe nombre d'idées novatrices pour l'époque⁸, qui seront une source d'inspiration pour Hilbert et beaucoup d'autres⁹. L'origine du problème que se pose Fredholm se trouve à nouveau dans des questions traditionnelles de mécanique qui avaient conduit Niels Abel, puis Joseph Liouville,

⁸ Les idées essentielles de cet article se trouvent déjà dans un article de Fredholm de 1900, présenté devant l'Académie des sciences de Stockholm par G. Mittag-Leffler. L'article de 1903 est plus complet et sa diffusion a été plus grande, c'est pourquoi nous avons choisi de ne faire notre analyse qu'à partir de celui-ci, d'autant que rien de très significatif concernant cette question ne s'est passé entre-temps.

⁹ Certains travaux de Poincaré publiés entre 1890 et 1896 ont également influencé le travail de Hilbert en théorie spectrale. On pourra à ce sujet consulter [Pécot 1993a]. Pour ce qui nous concerne, le travail de Fredholm est plus important dans la mesure où il est plus formalisé et introduit des notations très modernes, alors que le travail de Poincaré foisonne d'idées mais n'innove guère au niveau d'une formalisation en termes d'espace vectoriel.

Carl Neumann et Vito Volterra à étudier des équations intégrales du type

$$(a) \quad \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x)$$

où f et ψ sont données et φ est inconnue, ou plus généralement des types

$$(b) \quad \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x),$$

$$(c) \quad \lambda \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

Fredholm s'intéresse à la résolution de l'équation (b), dans le cas où f est une fonction finie (*i.e.* bornée) et intégrable. Nous allons détailler un peu sa démarche parce qu'elle montre bien comment l'analogie avec la résolution des systèmes finis d'équations linéaires peut conduire à des généralisations très élaborées. Il commence ainsi :

«*Il existe une quantité D_f qui joue par rapport à l'équation fonctionnelle (b) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d'équations linéaires.*

Pour définir D_f j'introduis la notation abrégée

$$(1) \quad f \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

et je pose

$$(2) \quad D_f = 1 + \int_0^1 f(x, x) dx + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 f \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 f \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n \text{ »}$$

[Fredholm 1903, p. 83].

Après avoir justifié la convergence d'une telle expression (par un résultat sur les déterminants dû à Hadamard), Fredholm introduit une notion de mineurs qui lui permet d'établir plusieurs formules, qu'il généralise au cas où on remplace f par λf (ce qui conduit à une équation voisine du type (c)). Il montre alors comment ces mineurs sont liés aux valeurs des dérivées successives de $D_{\lambda f}$ par rapport à λ . Il peut ainsi conclure que si D_f est nul, il existe nécessairement un premier mineur non nul.

Fredholm en dit peu sur les origines de sa méthode. Elle repose au départ sur une idée déjà utilisée par ses prédécesseurs¹⁰ pour étudier l'équation de type (c). Comme dans le cas de Fourier, elle consiste à se ramener à un système fini d'équations linéaires. Ici, on considère n valeurs x_i dans un découpage de pas $1/n$ de l'intervalle $[0, 1]$, puis on substitue à x dans l'équation (c) successivement chacune des valeurs x_i , tout en utilisant, par ailleurs, une approximation de l'intégrale en y par une somme de Riemann. On arrive de la sorte au système de n équations linéaires à n inconnues

$$\varphi(x_i) + \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^n f(x_i, x_j) \varphi(x_j) = \psi(x_i); \quad i = 1 \text{ à } n.$$

Ainsi, dans le cas où ψ est nulle, $(-\lambda/n)$ apparaît comme l'inverse d'une valeur propre de la matrice $[f(x_i, x_j)]_{i,j=1 \text{ à } n}$ dont le déterminant est identique formellement à celui introduit par Fredholm, et dont le polynôme caractéristique peut s'écrire

$$P_n\left(\frac{\lambda}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{croissant}}} f\left(\begin{matrix} x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)} \\ x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)} \end{matrix}\right) \right).$$

Naturellement, la difficulté est alors de passer à la limite, donc d'étudier le système infini. On peut montrer que le polynôme caractéristique tend vers une fonction entière en λ qui correspond exactement à $D_\lambda f$. Fredholm n'a pas explicité précisément ce passage du fini à l'infini, mais les origines de sa méthode sont claires. De plus, il joue consciemment sur l'analogie même si elle n'est pas explicite. On verra que Hilbert précisera dans le détail le passage du fini à l'infini. Ce qui est intéressant chez Fredholm, c'est qu'il introduit directement les outils de la dimension infinie. Ainsi le fait que le passage à la limite soit occulté nous prive d'explication, mais cela permet aussi de mettre en avant la nouveauté de la méthode. En effet, contrairement à la méthode des réduites, le cas infini ne se déduit pas, au sens mathématique, du cas fini, il est abordé, par analogie, avec des outils propres, même si les techniques classiques sur les déterminants finis sont encore utilisées. Cet aspect de nouveauté va être encore plus marqué dans la suite.

¹⁰ En particulier par Leroux en 1895 et Volterra en 1896 [Pécot 1993b, p. 210].

En effet, Fredholm introduit un point de vue nouveau pour l'époque :

«*En considérant l'équation (b) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\psi(x)$ j'écris cette même équation*

$$(7) \quad S_f \varphi(x) = \psi(x)$$

et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction $f(x, y)$. Les transformations (7) forment un groupe» [*Ibid.*, p. 88].

L'idée de considérer une équation fonctionnelle comme la transformation d'une fonction en une autre fonction était déjà présente vers 1886 dans les travaux de Volterra, qui a introduit l'expression *fonction de ligne* (*funzione de una linea*), pour désigner une fonction d'une autre fonction (le terme ligne souligne l'idée que la fonction est assimilée à une courbe dépendant d'un paramètre). Le point de vue de Fredholm est plus révolutionnaire, même s'il ne fait aucune allusion à une sorte d'espace fonctionnel. En effet, l'aspect opérateur est non seulement introduit mais devient un outil de résolution. Après avoir remarqué que la composée de deux opérateurs S_f et S_g est du type S_F où

$$F(x, y) = g(x, y) + f(x, y) + \int_0^1 g(x, t) f(t, y) dt,$$

il pose clairement le problème de la résolution de l'équation (b) en terme d'inversion de l'opérateur S_f , ce qui revient à trouver un noyau résolvant, c'est-à-dire g tel que $S_f S_g = S_0 = \text{id}$. Dans ce contexte, et grâce aux outils introduits précédemment, il arrive au résultat fondamental connu sous le nom d'alternative de Fredholm :

«*La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation :*

$$S_f \varphi(x) = 0$$

*c'est que $D_f = 0$. Si n est l'ordre du premier mineur de D_f qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède n solutions linéairement indépendantes» [*Ibid.*, p. 91].*

Il montre ensuite que l'équation (b) admet une solution unique si $D_f \neq 0$, cette solution est $S_g \psi(x)$, où g est le noyau résolvant. Dans le cas où $D_f = 0$, il montre qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution est que

$$\int_0^1 \Psi_k(x) \psi(x) = 0, \quad k = 1 \text{ à } n,$$

où les Ψ_k désignent n solutions indépendantes de l'équation homogène. À l'époque, ce genre de relations n'est pas encore interprété en terme d'orthogonalité, on verra que c'est Schmidt qui a introduit ce vocabulaire et ce point de vue, vers 1905.

Fredholm trouve ainsi une complète analogie avec le cas fini. Il examine ensuite quelques généralisations, mais l'essentiel de son texte se trouve dans les résultats explicités précédemment. S'il s'appuie sur une analogie avec la théorie des déterminants et s'il en utilise aussi certains outils, le travail de Fredholm présente toutefois de nombreuses avancées dans le traitement de la dimension infinie. Cela est vrai non seulement par la nouveauté des résultats, mais aussi par celle des méthodes, en particulier, l'utilisation d'opérateurs pour traiter les équations fonctionnelles est une idée novatrice qui s'avèrera fondamentale.

Le travail de Hilbert présente un prolongement très riche de celui de Fredholm, pourtant il reste un peu en retrait quant à l'utilisation du nouveau formalisme. Il représente avant tout un progrès (considérable) par le nombre de nouveaux résultats obtenus et la diversité de méthodes employées plus qu'une avancée dans l'élaboration du formalisme qui aurait permis de donner un point de vue unifié. Il s'intéresse essentiellement au cas de l'équation intégrale (c) quand le noyau $f(x, y)$ est symétrique, bien que certains des résultats qu'il établit soient indépendants de ce cas. Il reprend la méthode de Fredholm, dont il montre en détail l'analogie avec le cas fini. Cela le conduit à commencer ses travaux par un exposé sur la question de la réduction des matrices symétriques finies qu'il aborde sous l'angle des formes bilinéaires. Les résultats qu'il énonce sont pour la plupart des résultats connus à l'époque, mais sa méthode est nouvelle, sa caractéristique principale étant d'être adaptée pour pouvoir être généralisée à la dimension infinie. Ainsi, il redémontre le théorème sur la diagonalisation des matrices symétriques en une base orthonormée de vecteurs propres. Cependant s'il utilise des relations où l'on reconnaît le produit scalaire et la norme euclidienne, il n'utilise aucun vocabulaire de géométrie. Par ailleurs, il est important de remarquer que Hilbert étudie l'équation

$$(c') \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$$

et que donc ce qu'il appelle valeurs propres (*Eigenwerte*) sont en fait les inverses des valeurs propres au sens moderne. Hilbert passe ensuite au

cas du problème transcendant. Il explicite sa méthode qui est identique à ce qui a été exposé plus haut. Il prouve la convergence du polynôme caractéristique (il n'utilise pas de terme pour le désigner) et introduit donc les mêmes outils que Fredholm, mais en montrant clairement l'analogie avec le cas fini. Ainsi, il établit d'abord l'unicité de la solution de (c') dans le cas où le déterminant infini est non nul, en introduisant le noyau résolvant (*die lösende Funktion für den Kern* $K(s, t)$), mais sans employer la notation en terme d'opérateur, comme Fredholm l'avait fait. Ensuite il passe au cas où le déterminant est nul. Ceci le conduit à établir l'analogie du théorème de diagonalisation d'une matrice symétrique dans le cas infini :

«Théorème : si le noyau $K(s, t)$ d'une équation intégrale du deuxième type

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

est une fonction symétrique continue en s et t ; si de plus $\lambda^{(h)}$ sont les valeurs propres de $K(s, t)$ et $\psi^{(h)}(s)$ les fonctions propres normées, enfin si $x(s)$ et $y(s)$ sont deux fonctions continues quelconques de s , alors on a le développement

$$(44) \int_a^b \int_a^b K(s, t) x(s) y(t) ds dt = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_a^b \psi^{(1)}(s) x(s) ds \times \int_a^b \psi^{(1)}(s) y(s) ds + \frac{1}{\lambda^{(2)}} \int_a^b \psi^{(2)}(s) x(s) ds \times \int_a^b \psi^{(2)}(s) y(s) ds + \dots$$

où la série de droite converge absolument et uniformément, quelles que soient les fonctions $x(s)$, $y(s)$ pour lesquelles les intégrales

$$\int_a^b (x(s))^2 ds, \quad \int_a^b (y(s))^2 ds$$

sont moindres qu'une valeur finie donnée»¹¹.

¹¹ «Theorem. Es sei der Kern $K(s, t)$ einer Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

eine symmetrische stetige Funktion von s, t ; ferner seien $\lambda^{(h)}$ die zu $K(s, t)$ gehörigen

En fait, Hilbert a montré juste avant l'existence des valeurs propres comme limite du cas fini et l'existence des fonctions propres associées. Il a également montré qu'une valeur propre ne peut être nulle et que les fonctions propres vérifient des relations d'orthogonalité (il n'utilise pas ce terme) et qu'on peut les normer (c'est le seul terme géométrique qu'il emploie, et de façon non systématique). Il ne précise pas dans le théorème si le nombre des valeurs propres est ou non fini, mais il a remarqué que les deux cas étaient possibles, et la fin du théorème est surtout intéressante quand ce nombre est infini.

Il montre ensuite que si une fonction f s'écrit $f(s) = \int_a^b K(s, t)g(t) dt$, alors on peut l'écrire comme combinaison linéaire (éventuellement infinie) des fonctions propres, les coefficients étant (en termes modernes) le produit scalaire de f avec les fonctions propres. Dans le cas où la somme est infinie, il précise qu'elle converge absolument et uniformément. Le but de cet article n'est pas d'analyser le détail du contenu des six textes de Hilbert¹². Dans la suite des trois premiers textes, il applique les résultats précédents à la résolution d'équations intégrales ou d'équations différentielles s'y ramenant. De plus, dans le courant de ces applications, il est amené à généraliser ses méthodes et ses énoncés au cas des fonctions de variables complexes.

Dans le quatrième texte datant de 1906, Hilbert s'intéresse aux formes quadratiques infinies, dont il souligne l'importance sur plusieurs plans.

Eigenwerte und $\psi^{(h)}(s)$ di zugehörigen normierten Eigenfunktionen; endlich seien $x(s)$, $y(s)$ irgendwelche stetige Funktionen von s : alsdann gilt die entwicklung

$$(44) \quad \int_a^b \int_a^b K(s, t)x(s)y(t) ds dt = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_a^b \psi^{(1)}(s)x(s) ds \times \int_a^b \psi^{(1)}(s)y(s) ds \\ + \frac{1}{\lambda^{(2)}} \int_a^b \psi^{(2)}(s)x(s) ds \times \int_a^b \psi^{(2)}(s)y(s) ds + \dots$$

wobei die Reihe rechter Hand absolut und gleichmässig für alle Funktionen $x(s)$, $y(s)$ konvergiert, für welche die Integrale

$$\int_a^b (x(s))^2 ds, \quad \int_a^b (y(s))^2 ds$$

unterhalb einer festen endlichen Grenze bleiben) [Hilbert 1904a/1953, p. 19–20]. (Pour les six textes de Hilbert dont il est question ici, les numéros de pages indiqués sont ceux de la réédition de 1953 de la compilation publiée par Hilbert en 1912.)

¹² Voir l'analyse de Ernst Hellinger [1935] publiée dans les œuvres complètes de Hilbert. On pourra également consulter [Bernkopf 1966] et [Pécot 1993b].

Pour ce faire, il utilise des méthodes très voisines de celles précédemment appliquées. Formellement, au lieu de travailler avec des fonctions, il travaille avec des suites de nombres et l'analogie de $\int_a^b (x(s))^2 ds$ devient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, et de même pour le produit scalaire. Mais cette analogie reste implicite, le but principal est d'étudier le spectre d'une forme quadratique infinie. Tout d'abord, il met en évidence l'importance de savoir si 0 est ou non une valeur d'adhérence du spectre. Puis il introduit la distinction entre la partie continue et la partie discontinue du spectre. Il établit alors l'équivalent dans le cas infini de la mise sous forme canonique par transformation orthogonale. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ce résultat, qui est sensiblement plus complexe que dans le cas fini puisqu'il fait intervenir outre une somme infinie, également une intégrale de Stieltjes correspondant à la partie discontinue du spectre.

Hilbert utilise ces résultats pour étudier sous une nouvelle forme les équations intégrales, c'est ce qu'on peut appeler la deuxième théorie spectrale de Hilbert¹³. À présent, il ne se restreint plus aux noyaux symétriques et utilise les développements en série de Fourier pour ramener l'étude à un système infini d'équations linéaires. Ainsi, il introduit un système orthonormé complet :

«d'une infinité de fonctions continues

$$\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$$

de la variable s , qui dans l'intervalle $s = a$ à $s = b$, vérifient les propriétés suivantes :

I. la propriété dite d'orthogonalité

$$\int_a^b \Phi_p(s) \Phi_q(s) ds = 0 \quad (p \neq q), \quad \int_a^b (\Phi_p(s))^2 ds = 1;$$

II. la relation de complétude, selon laquelle pour toute paire de fonctions continues $u(s)$, $v(s)$ de la variable s , on a l'identité

$$\begin{aligned} \int_a^b u(s) v(s) ds &= \int_a^b u(s) \Phi_1(s) ds \int_a^b v(s) \Phi_1(s) ds \\ &\quad + \int_a^b u(s) \Phi_2(s) ds \int_a^b v(s) \Phi_2(s) ds + \dots \end{aligned}$$

¹³ On verra plus loin (§ 5) que cette deuxième théorie s'est faite, en partie, en réaction au travail de son élève E. Schmidt, auquel il emprunte néanmoins le peu de vocabulaire géométrique qu'il emploie (orthogonalité par exemple).

Nous qualifierons un tel système de fonctions $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$ de système de fonctions orthogonal complet pour l'intervalle de $s = a$ à $s = b$ »¹⁴.

La dernière formule fait intervenir les coefficients de Fourier des fonctions u et v par rapport au système orthonormé complet et permet donc d'identifier le produit scalaire (ce terme n'est pas employé par Hilbert) sous forme intégrale avec le produit scalaire sur la suite des coefficients. Après avoir montré l'existence de tels systèmes, Hilbert montre ensuite que l'égalité de la norme de toute fonction de carré sommable avec celle de ses coefficients de Fourier est un critère pour qu'un système soit orthonormé complet. Ces outils mis en place, Hilbert peut attaquer l'étude de l'équation fonctionnelle en remplaçant les fonctions par les développements de Fourier, il obtient ainsi des résultats tout à fait semblables à ceux de Fredholm dans un cadre plus général. Il termine en redémontrant, avec sa nouvelle méthode, la plupart des résultats déjà obtenus dans le cas du noyau symétrique, puis il passe aux applications.

Par cette brève présentation du travail de Hilbert, nous voulons montrer à travers les méthodes employées, les nouvelles idées que l'on voit surgir. La diversité des problèmes abordés par Hilbert et surtout celle des méthodes, où les nombreux passages du fini à l'infini donnent à l'analogie de nombreux angles d'approche, lui ont permis de mettre à jour (plus ou moins implicitement) des liens entre des domaines assez éloignés. Pourtant

¹⁴ «von unendlich vielen stetigen Funktionen

$$\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$$

der Variablen s , die im Intervalle $s = a$ bis $s = b$, die folgenden Eigenschaft erfüllen :

I. die sogenannte Orthogonalitäts-Eigenschaft

$$\int_a^b \Phi_p(s)\Phi_q(s) ds = 0 \quad (p \neq q), \quad \int_a^b (\Phi_p(s))^2 ds = 1;$$

II. die Vollständigkeits-Relation, die darin besteht, dass identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s), v(s)$ der Variablen s

$$\begin{aligned} \int_a^b u(s)v(s) ds &= \int_a^b u(s)\Phi_1(s) ds \int_a^b v(s)\Phi_1(s) ds \\ &\quad + \int_a^b u(s)\Phi_2(s) ds \int_a^b v(s)\Phi_2(s) ds + \dots \end{aligned}$$

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots$ als ein orthogonales vollständiges Funktionensystem für das Intervall $s = a$ bis $s = b$ » [Hilbert 1906a/1953, p. 177–178].

il n'a jamais vraiment essayé de formaliser ses méthodes en une approche unificatrice, et, en particulier, n'a pas donné d'interprétation en terme d'espaces fonctionnels munis d'un produit scalaire. Même son utilisation du langage géométrique est très succincte et partielle. Dans l'introduction du livre qui regroupera ses six articles en 1912, il reconnaît pourtant la nécessité d'une théorie unifiée :

*«la construction systématique d'une théorie générale des équations intégrales linéaires est de la plus grande importance pour toute l'analyse, spécialement pour la théorie de l'intégrale définie et la théorie du développement de fonctions arbitraires en séries infinies, mais aussi pour la théorie des équations différentielles linéaires et celle des fonctions analytiques, comme aussi pour la théorie du potentiel et le calcul des variations»*¹⁵.

Plus loin, analysant la méthode de résolution des équations fonctionnelles :

*«La méthode [...] consiste en ce que, partant d'un problème algébrique, à savoir le problème de la transformation orthogonale d'une forme quadratique à n variables en une somme de carrés, je parviens, par des passages à la limite rigoureux pour $n = \infty$, à la solution du problème transcendant considéré»*¹⁶.

On voit bien ici tout à la fois l'ampleur et les limites du travail de Hilbert : avant tout pouvoir résoudre les problèmes d'analyse et rester dans le cadre d'une analogie entre le fini et l'infini. Contrairement à Schmidt, Hilbert a une démarche essentiellement analytique, qui lui permet de mettre au point des méthodes constructives, mais qui par contre ne se prête pas à une vision formelle unifiante. Nous verrons plus loin comment ses successeurs ont peu à peu généralisé et unifié son travail pour arriver au

¹⁵ *«der systematische Aufbau einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen für die gesamte Analysis, insbesondere für die Theorie der bestimmten Integrale und die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen, ferner für die Theorie der linearen Differentialgleichungen und der analytischen Funktionen sowie für die Potentialtheorie und Variationsrechnung von höchster Bedeutung ist»* [Hilbert 1912/1953, p. 2].

¹⁶ *«Die Methode [...] besteht darin, dass ich von einem algebraischen Problem, nämlich dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variablen in eine Quadratsumme, ausgehe und dann durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des zu behandelnden transzendenten Problems gelange»* [Ibid., p. 3].

concept d'espace de Hilbert abstrait. Mais avant d'examiner ces travaux, il est utile de mentionner un autre courant de recherches en analyse qui a joué un rôle important dans l'émergence de la notion d'espace fonctionnel abstrait.

4. IMPORTANCE DE LA NATURE TOPOLOGIQUE DES ESPACES FONCTIONNELS

L'origine de l'explicitation de la nature topologique sur les ensembles de fonctions se trouve dans le calcul des variations. Dans ce cadre, Karl Weierstrass fut l'un des premiers à s'intéresser à la notion de voisinage d'une fonction, réalisant ainsi un travail essentiel dans l'histoire de la topologie; dès 1865, il définit la notion fondamentale de point d'accumulation.

C'est dans cette tradition que se situent les travaux des italiens, Vito Volterra, Giulio Ascoli, Cesare Arzela, ainsi que ceux de Pincherle¹⁷, qui étudièrent les propriétés des *fonctions de lignes*, en déterminant des notions de continuité et de dérivabilité de fonctions de fonctions. En France, Jacques Hadamard et surtout Maurice Fréchet s'inscrivent également dans ce courant. En 1906, ce dernier publie sa thèse « Sur quelques points du calcul fonctionnel », où dès l'introduction, il montre le caractère nouveau de son approche, présentant les idées essentielles pour une axiomatisation des espaces topologiques de fonctions :

« Le présent travail est une première tentative pour établir systématiquement quelques principes fondamentaux du Calcul Fonctionnel et les appliquer ensuite à certains exemples concrets. [...] *on a l'habitude de donner une définition spéciale de la limite pour chacune des catégories d'éléments considérés jusqu'ici : points, courbes, etc. J'ai tourné la difficulté par une méthode analogue à celle qui permet dans la théorie des groupes abstraits de raisonner sur un mode de composition non défini explicitement.*

[...] *Il fallait tout d'abord voir comment transformer les énoncés des théorèmes pour qu'ils conservent un sens dans le cas général. Il fallait*

¹⁷ Pincherle a publié en 1880 un mémoire d'une centaine de pages intitulé *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass*, qui est une présentation du cours de Weierstrass de 1878, *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*.

ensuite, soit transcrire les démonstrations dans un langage plus général, soit, lorsque cela n'était pas possible, donner des démonstrations nouvelles et plus générales. Il s'est trouvé que les démonstrations que nous avons ainsi obtenues sont souvent aussi simples, et quelquefois même plus simples, que les démonstrations particulières qu'elles remplaçaient. Cela tient sans doute à ce que la position de la question obligeait à ne faire usage que de ses particularités vraiment essentielles» [Fréchet 1906, p. 2].

Ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une évidence, témoigne chez Fréchet d'une grande modernité pour son époque.

Fréchet définit différents types d'ensembles qui correspondent à des « topologies » de plus en plus fines. Aucune structure algébrique n'est mentionnée, même implicitement, en ce sens ce texte se situe un peu hors de notre propos. Néanmoins son influence n'est pas négligeable, d'abord parce que ce que dit Fréchet en introduction, pourrait être transféré à la structure algébrique linéaire — on verra d'ailleurs que Fréchet jouera un rôle dans la diffusion de la définition axiomatique des espaces vectoriels topologiques —, et aussi parce que l'approche en termes de structure des ensembles fonctionnels est un pas décisif vers la notion moderne d'espace fonctionnel. Ainsi, ce texte montre le lien intrinsèque qui existe entre les structures algébrique et topologique des espaces fonctionnels.

Enfin, dans les applications de son approche théorique, Fréchet est amené à étudier des ensembles de fonctions qui ont des structures affines ou linéaires. Or, même si ce point reste implicite, le travail de Fréchet joue un rôle précurseur et préparatoire. Ainsi par exemple, il présente l'ensemble des suites comme une généralisation de l'espace géométrique d'une façon nouvelle, qui sera à la base de l'explicitation des espaces fonctionnels abstraits :

«On peut donc considérer les nombres de la suite qui définit chacun de ses éléments comme les coordonnées de cet élément envisagé comme un point d'un espace (E_ω) à une infinité dénombrable de dimensions. Il y a plusieurs avantages à opérer ainsi. D'abord l'avantage qui se présente toujours quand on emploie le langage géométrique si propice à l'intuition par les analogies qu'il fait naître» [Ibid., p. 39].

Même si ce travail de Fréchet ne fait pas explicitement mention des structures affine ou linéaire des espaces, le choix des classes d'ensembles fonctionnels étudiés aura une influence vingt ans plus tard dans la for-

malisation de ces structures. De plus, ce travail permettra à Fréchet, en 1925, de généraliser les définitions données dans le cas des espaces vectoriels normés complets par Banach, Wiener et Hahn (voir *infra* § 6) à des classes d'espaces affines et linéaires métrisables non normés ou même munis de topologies non métrisables, ce qui jouera un rôle fondamental en analyse fonctionnelle¹⁸.

5. PREMIÈRES GÉNÉRALISATIONS ET UNIFICATIONS DU TRAVAIL DE HILBERT

Une des premières tentatives explicites pour unifier et généraliser le travail de Hilbert est due à Eliakim Moore [1908]. Cependant ses travaux n'ont eu que peu d'écho et souffrent de plusieurs imperfections. Plus intéressante est la contribution de Frédéric Riesz [1907_{a,b,c,d}]. Dans une succession d'articles publiés en 1907, celui-ci reprend la méthode de Hilbert utilisant les séries de Fourier pour traiter l'équation fonctionnelle de Fredholm. Cela le conduit à examiner la question générale suivante : pour un système infini de fonctions orthonormées (au sens de l'intégrale de Lebesgue) donné, une suite de nombres de carré sommable correspond-elle toujours aux coefficients de Fourier d'une certaine fonction ? En termes modernes, il se pose la question de l'isomorphisme entre ℓ^2 et L^2 . Riesz réussit à établir ce résultat ; au passage, il montre qu'un système orthonormé est fini ou dénombrable. Ensuite il généralise ses résultats au cas de fonctions de plusieurs variables et enfin généralise le théorème de l'alternative de Fredholm, selon la méthode de Hilbert, au cas où le noyau de l'équation est une fonction mesurable de carré intégrable. La même année, Ernst Fischer déclare dans une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* qu'il a obtenu les mêmes résultats que Riesz¹⁹, de façon indépendante. Sa méthode repose sur la notion de convergence en moyenne²⁰ (*i.e.* $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n - f)^2 dx = 0$), et le caractère fermé de L^2 (il n'utilise pas cette notation) au sens de la convergence en

¹⁸ Il est intéressant de noter ici que Bourbaki a retenu le nom d'espace de Fréchet pour désigner la structure d'espace topologique linéaire localement convexe, métrisable et complet.

¹⁹ D'où la dénomination de théorème de Riesz-Fischer, classiquement utilisée pour désigner ce résultat.

²⁰ Cette notion avait été introduite par Gram en 1881, après la lecture du mémoire de

moyenne. Suite à cette note de Fischer, Riesz dévoile son projet d'écrire un mémoire visant à «*approfondir la méthode des coordonnées appliquée à l'étude des systèmes de fonctions sommables*» et indique :

«l'idée de représenter une fonction par ses constantes de Fourier devait devenir très familière. De cette façon, on parvenait à représenter l'ensemble des fonctions sommables sur un sous-ensemble d'une infinité dénombrable de dimensions²¹. Quel est ce sous-ensemble ? Jusqu'à aujourd'hui on ne sait pas le dire. Or, pour une classe plus spéciale, pour le système des fonctions sommables et de carré sommable, la solution ne pose plus tant de difficultés. Pour cette classe, il existe un lien plus intime entre la fonction et sa série de Fourier [...]. Pour cette classe de fonctions on peut définir une notion de distance et l'on peut fonder sur cette notion une théorie géométrique des systèmes de fonctions, théorie qui ressemble à la géométrie synthétique» [Riesz 1907c, p. 386–387].

Il souligne alors que la géométrie sur l'espace à une infinité de coordonnées muni de la distance euclidienne correspond à la géométrie analytique de cette géométrie synthétique. Il donne enfin deux résultats. Le premier consiste à montrer qu'un opérateur fonctionnel linéaire continu sur L^2 est représentable sous la forme $U(f(x)) = \int_a^b \psi(x)f(x)dx$. Ceci peut apparaître comme une généralisation d'un résultat dû à Hadamard en 1903 et perfectionné par Fréchet en 1905, mais là où ses prédécesseurs avaient utilisé un raisonnement par approximation, Riesz innove entièrement en adoptant une méthode synthétique permettant une approche directe du problème. Le second résultat obtenu par Riesz est une généralisation d'un énoncé de Schmidt sur les systèmes complets.

Le travail de Riesz représente une avancée théorique importante, il permet de montrer les «*liens intimes*», pour reprendre son expression, entre les deux grands types de problèmes examinés par Hilbert (avec les fonctions de carré intégrable d'une part et les suites de carré sommable d'autre part). De plus, les deux espaces de suites et de fonctions de carré sommable sont explicitement dégagés et mis en rapport dans un cadre rigoureux, où l'isomorphisme est très clair sur le plan topologique.

Chebyshev sur la méthode des moindres carrés. Poincaré l'avait utilisée en 1890, mais ne reconnut pas alors tout son intérêt. De fait, c'est à Fischer que revient le mérite d'avoir saisi et exploité l'importance de cette notion [Pécot 1993a, p. 180].

²¹ La confusion entre l'existence d'une famille dense dénombrable et la dénombrabilité de la dimension algébrique était chose courante à l'époque.

L'analogie avec le cadre géométrique joue d'ailleurs essentiellement sur la structure topologique et non pas sur la structure algébrique qui reste implicite. Cependant, le parallélisme géométrie analytique / géométrie synthétique permet potentiellement de donner plus de force à la structure linéaire.

Sur un plan sensiblement différent, Erhard Schmidt propose à partir de 1905 une approche explicitement géométrique des espaces de Hilbert. Schmidt est un élève de Hilbert, sous la direction duquel il soutient en 1905, à Göttingen, une thèse sur les équations intégrales, publiée en trois parties dans les *Mathematische Annalen* [1907_{a,b}, 1908_a]. Son travail se présente comme une généralisation à des noyaux non symétriques des trois premiers mémoires de Hilbert. Néanmoins, l'élève prend une voie très différente de son maître ; au passage du fini à l'infini, il veut substituer une vision plus synthétique basée sur une géométrie des fonctions continues de carré intégrable. Dans un texte daté de 1907 mais paru en 1908, il reprend ces idées dans une approche de l'espace ℓ^2 (sans introduire cette notation) où il systématise l'utilisation du langage géométrique, en montrant la puissance des analogies [1908_b].

Schmidt considère les suites (réelles ou complexes) de carré sommable, qu'il appelle des fonctions (*Funktionen*) et introduit les notations

$$(A; B) = \sum_{x=1}^{x=\infty} A(x) B(x), \quad \text{et} \quad \|A\|^2 = (A; \bar{A}),$$

auxquelles il ne donne pas de nom, mais qui lui permettent de définir les notions de fonction normée et de fonctions orthogonales. Il établit alors les résultats à présent classiques des espaces euclidiens dans le cadre formel des espaces L^2 et ℓ^2 :

- généralisation du théorème de Pythagore dont il déduit que des fonctions orthogonales sont linéairement indépendantes ;
- projection d'une fonction sur une famille finie orthonormée ;
- inégalités de Bessel et de Schwarz, puis inégalité triangulaire ;
- définition de la convergence forte (ou en norme) ;
- critère de Cauchy (il montre que l'espace est complet) ;
- pour une combinaison linéaire infinie de fonctions orthonormées, la convergence forte équivaut à la convergence de la série des carrés de ses coefficients ;

- procédé d'orthogonalisation (connu sous le nom de Gram-Schmidt) dont il déduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre fini de fonctions soient linéairement indépendantes;
- définition de la notion de sous-espace vectoriel fermé (*abgeschlossenes lineares Funktionengebilde*) et d'adhérence (sans lui donner de nom);
- définition du sous-espace orthogonal;
- toute fonction se décompose de manière unique en la somme d'une fonction appartenant à un sous-espace fermé et d'une fonction qui lui est orthogonale;
- les fonctions de l'adhérence d'un sous-espace engendré par une famille finie ou infinie de fonctions s'écrivent comme combinaison linéaire infinie (au sens de la convergence forte) des éléments d'une base orthonormée dont les coefficients sont les produits scalaires correspondants; la suite de ces coefficients est de carré sommable et sa limite est la norme de la fonction (c'est le premier énoncé de ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème de Hilbert-Schmidt);
- la norme de la différence entre une fonction et son image dans une projection orthogonale représente la distance (*Entfernung*) de la fonction à l'espace sur lequel on projette.

Dans son texte [1908b], Schmidt applique ce qui précède à l'étude des systèmes infinis d'équations linéaires, interprétant les résultats connus en termes d'analogies géométriques. Avec ce travail, la plupart des énoncés sur les espaces euclidiens de dimension finie sont généralisés à l'espace ℓ^2 . Il faut néanmoins remarquer l'absence d'utilisation de termes tels que norme, produit scalaire, projection, etc. De plus, malgré la remarque sur la distance de la fonction à l'espace, le lien entre la norme et une notion de distance n'est pas discuté²². C'est à la suite du travail de Schmidt, et en réaction à celui-ci, qu'Hilbert présente à partir de son quatrième texte sa nouvelle théorie spectrale, persistant dans la voie de l'analogie avec la dimension finie, grâce aux formes bilinéaires infinies. Il oppose ainsi à l'approche synthétique de Schmidt une démarche analytique qui, si elle est moins unifiante, a, en revanche, l'intérêt de donner des méthodes constructives.

Les travaux de Riesz et de Schmidt sont à l'origine de l'habitude consistant à penser en termes géométriques dans les espaces fonctionnels. Ce

²² Cela est d'autant plus étonnant que Schmidt cite le texte de Fréchet.

point de vue est d'autant plus important qu'il permet une convergence des origines algébriques (cf. les débuts de la résolution de systèmes infinis), géométriques et analytiques de l'algèbre linéaire. L'importance des espaces de Hilbert est donc essentielle pour comprendre les liens qui unissent la géométrie et la théorie des espaces vectoriels.

On voit donc maintenant que l'espace de Hilbert prend forme sous deux aspects (suites et fonctions de carré sommable) dont les similitudes commencent à être éclaircies. Mais, avant d'arriver à un espace vraiment abstrait, il faudra attendre que d'autres types d'espaces fonctionnels se dégagent. Ceci se fait à travers la généralisation de problèmes issus du travail de Hilbert. Ainsi, en 1910, Riesz est conduit, en essayant de généraliser son résultat de 1907, à introduire les espaces L^p . Avec les outils de la théorie de l'intégration de Lebesgue et les inégalités (alors connues) de Hölder et Minkowski, il définit l'espace L^p et établit les relations classiques de dualité (sans utiliser ce terme) entre L^p et L^q , quand $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Il définit également les deux types de convergence, faible et forte. Ensuite, il généralise le théorème précédemment montré pour L^2 , et lui-même généralisation d'un résultat d'Hadamard pour ℓ^2 , théorème sur la représentation en terme d'intégrale de certains opérateurs linéaires (connu aujourd'hui sous le nom de *théorème de représentation de Riesz*). Dans L^p , ce théorème énonce qu'un opérateur linéaire A borné (pour la norme L^p) s'écrit

$$A(f) = \int_a^b a(x) f(x) dx, \quad \text{où } a \text{ est une fonction de } L^q.$$

Dans ce texte, Riesz utilise aussi de façon systématique une notation en terme d'opérateur, pour aborder les équations fonctionnelles, se plaçant ainsi dans la lignée du travail original de Fredholm. Il introduit également la notion d'opérateur adjoint, et aborde ensuite le problème des valeurs propres lié à la résolution de l'équation fonctionnelle de Fredholm. Il généralise ainsi les résultats connus dans le cas L^2 au cas L^p , tout en présentant une approche plus formelle du cas de L^2 .

Dans un travail datant de 1916, initialement écrit en hongrois et traduit en allemand en 1918 sous le titre « Über lineare Funktionalgleichungen », Riesz poursuit son approche abstraite des espaces fonctionnels, dans un cadre un peu plus général. Il donne en effet l'une des premières définitions

générales d'une norme et d'un opérateur linéaire borné²³ :

«La totalité que nous avons mise à la base [l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R}], nous l'appelons, pour être bref, l'espace fonctionnel. De plus, nous appelons norme de $f(x)$ et nous notons $\|f\|$, la valeur maximale de $|f(x)|$; la grandeur $\|f\|$ est donc en général positive et vaut zéro si et seulement si $f(x)$ est partout nul. En outre, les relations suivantes sont vérifiées

$$\|cf\| = |c| \cdot \|f(x)\|; \quad \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$$

[...] Dans la suite, nous nous occuperons du problème réciproque pour les transformations linéaires. Une transformation T , qui associe à tout élément f de notre espace fonctionnel un élément $T(f)$ bien défini, sera dite linéaire si elle est distributive et bornée. La transformation est dite distributive si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout f

$$T(cf) = cT(f); \quad T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$$

et T est dite bornée s'il existe une constante M , telle que pour tout f

$$\|T(f)\| \leq M\|f\|.$$

Dans ce traité, Riesz établit les bases de ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de théorie des opérateurs compacts de Riesz-Fredholm. Bien que tout le traité se situe dans l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$

²³ «Die zu Grunde gelegte Gesamtheit werden wir der Kürze halber als Funktionalraum bezeichnen. Ferner nennen wir Norm von $f(x)$ und bezeichnen mit $\|f\|$ den Maximalwert von $|f(x)|$; die Grösse $\|f\|$ ist danach im Allgemeinen positiv und verschwindet nur dann, wenn $f(x)$ identisch verschwindet. Ferner bestehen für sie die Beziehungen

$$\|cf\| = |c| \cdot \|f(x)\|; \quad \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

[...] Wir werden uns im folgenden mit dem Umkehrproblem für lineare Transformationen beschäftigen. Eine Transformation T , die jedem Elemente f unseres Funktionalraumes ein eindeutig bestimmtes Element $T(f)$ zuordnet, soll dann linearer heissen, wenn sie distributiv und beschränkt ist. Die Transformation heisst distributiv, wenn identisch für alle f

$$T(cf) = cT(f); \quad T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$$

ist. Beschränkt heisst die Transformation dann, wenn es eine Konstante M gibt derart, dass für alle f

$$\|T(f)\| \leq M\|f\|$$

[Riesz 1918, p. 1054].

à valeurs réelles, la plupart des résultats sont obtenus en ne faisant appel qu'aux propriétés dégagées plus haut, si bien qu'ils sont facilement généralisables à tout espace fonctionnel normé complet.

Dans le même ordre d'idée, en 1921, Eduard Helly s'intéresse à la résolution des systèmes infinis d'équations linéaires. En introduction, il cite le travail de Schmidt et de Riesz. Son approche est très formelle; il commence ainsi par définir de façon axiomatique une fonction d'écart (*Abstandsfunktion*) d'abord pour un nombre fini, puis pour un nombre infini de coordonnées :

«*Soit à présent une fonction d'écart $D(x)$ donnée, qui à tout point x d'un certain domaine fait correspondre un nombre réel et positif, et vérifie les conditions suivantes :*

I. Si x appartient au domaine de définition de $D(x)$, alors λx doit aussi y appartenir et doit vérifier

$$D(\lambda x) = |\lambda| D(x).$$

II. Si x et y appartiennent au domaine de définition de $D(x)$, alors $x + y$ doit aussi y appartenir et doit vérifier :

$$D(x + y) \leq D(x) + D(y).$$

III. $D(x) = 0$ implique $x = 0$ »²⁴.

On reconnaît la définition moderne d'une norme, il en utilise plusieurs types dans la suite, dont la norme de la borne supérieure et les normes ℓ^p . Il considère également des espaces linéaires de différentes dimensions. Comme chez ses prédécesseurs, la structure algébrique linéaire n'est pas axiomatisée, bien que la notion d'opérateur linéaire soit explicitement définie. Mais Helly utilise un vocabulaire et des notations très formels qui font que son travail innove même pour la dimension finie.

²⁴ «*Es sei nun eine Abstandsfunktion $D(x)$ gegeben, die jedem Punkte x eines gewissen Bereiches eine reelle positive Zahl zuordnet und die folgenden Bedingungen genügt :*

I. Wenn x dem Definitionsbereich von $D(x)$ angehört, so soll auch λx ihm angehören und es soll

$$D(\lambda x) = |\lambda| D(x).$$

II. Wenn x und y dem Definitionsbereich von $D(x)$ angehören, so soll auch $x + y$ ihm angehören und es soll

$$D(x + y) \leq D(x) + D(y).$$

III. Aus $D(x) = 0$ folgt $x = 0$ » [Helly 1921, p. 67].

Ainsi, on voit que la considération d'espaces de plus en plus généraux a peu à peu conduit à une formalisation tendant à unifier les résultats et les méthodes de divers domaines de l'analyse. On remarque aussi que la formalisation porte essentiellement sur la structure topologique et peu sur la structure algébrique qui reste implicite. La structure d'espace vectoriel n'a donc pas encore été axiomatisée dans ce contexte. Ceci va être fait de façon simultanée et indépendante par trois mathématiciens, Stefan Banach, Hans Hahn et Norbert Wiener, sans qu'aucun d'eux ne fasse référence, de façon précise, aux axiomatisations antérieures de Peano à Weyl (voir [Dorier 1995]). Tous trois définissent axiomatiquement la notion d'espace vectoriel normé complet.

6. AXIOMATISATION DE LA NOTION D'ESPACE VECTORIEL NORMÉ COMPLET

La notion d'espace vectoriel normé complet est importante dans la genèse des espaces fonctionnels. Comme le souligne Fréchet [1928, p. 24 et 38–40], c'est la première fois que l'on prend en compte explicitement et séparément les aspects algébrique et topologique des espaces fonctionnels. Or cette double prise en compte, et la distinction qu'elle comporte, sont le seul moyen de donner à la notion d'espace abstrait une fonctionnalité dans l'étude des problèmes d'analyse où, on l'a vu, les questions d'ordre topologique jouent un rôle fondamental. Le travail de Wiener est le premier à avoir été publié, dans les actes du *Congrès international des mathématiciens* de 1920, à Strasbourg, alors que l'auteur n'était qu'au début de sa carrière. Après une brève introduction, qui expose ses motivations pour étudier les aspects topologiques des espaces les plus généraux, Wiener donne la définition suivante :

«A vector system or system (V_e) , is defined as a system K of elements correlated with a system σ of entities and the operations \oplus , Θ , and $\| \cdot \|$ in a manner indicated by the following propositions :

- (1) If ξ and η belong to σ , $\xi \oplus \eta$ belong to σ ;
- (2) If ξ belongs to σ , and n is a real number ≥ 0 , $n \Theta \xi$ belongs to σ ;
- (3) If ξ belongs to σ , $\|\xi\|$ is a real number ≥ 0 ;
- (4) $n \Theta (\xi \oplus \eta) = (n \Theta \xi) \oplus (n \Theta \eta)$;
- (5) $(m \Theta \xi) \oplus (n \Theta \xi) = (m + n) \Theta \xi$;

- (6) $\|m \ominus \xi\| = m\|\xi\|$;
 (7) $\|\xi \oplus \eta\| \leq \|\xi\| \oplus \|\eta\|$;
 (8) $m \ominus (n \ominus \xi) = mn \ominus \xi$;
 (9) *If A and B belong to K , there is associated with them a single member AB of σ ;*
 (10) $\|AB\| = \|BA\|$,
 (11) *Given an element A of K and an element ξ of σ , there is an element B of K such that : $AB = \xi$;*
 (12) $AC = AB \oplus BC$;
 (13) $\|AB\| = 0$, *when and only when $A = B$;*
 (14) *If $AB = CD$, $BA = DC$ » [Wiener 1920, p. 281–282].*

Il précise immédiatement que $\|AB\|$ détermine un *écart*²⁵ au sens de Fréchet. Cette définition appelle plusieurs remarques. Sur le plan algébrique, elle présente une structure affine avec une structure vectorielle sous-jacente. C'est une originalité par rapport aux travaux de Hahn et de Banach. Or c'est le point de vue qui s'imposera dans la suite, puisque Fréchet et Banach lui-même le reprendront dans leurs travaux ultérieurs dans ce domaine. Par contre, les axiomes de la structure linéaire ne sont pas suffisants pour définir un espace vectoriel : il manque toutes les propriétés de la loi d'addition et, outre que la multiplication est restreinte aux nombres positifs, il manque l'axiome $1 \ominus \xi = \xi$. Pour la structure topologique, la définition est identique aux approches modernes. Wiener donne ensuite quelques exemples de tels espaces, mais son exposé reste très théorique et ne donne pas lieu à des applications concrètes. Il publie deux autres textes, en 1922, où il reprend les mêmes axiomes. Dans le premier, il définit également une structure (V_r) (appelée *restricted vector system*), pour laquelle il rajoute la propriété de commutativité de l'addition. La même année, il publie une note sur le travail de Banach, dont il reconnaît la priorité (Banach a soutenu sa thèse quelques mois avant le congrès de Strasbourg de 1920, mais elle n'a été publiée qu'en 1922). Il reconnaît aussi que les axiomes de Banach «*are in a form more immediately adapted to the treatment of the problem in hand*». Après 1922, Wiener n'a plus travaillé à l'étude des espaces normés (voir [Wiener 1956, p. 60–64]).

Le travail de Hahn publié en 1922 s'appuie partiellement sur celui de Helly. Par opposition à Wiener et Banach, pour qui l'axiomatisation était

²⁵ En français dans le texte.

le but principal, Hahn cherche avant tout à unifier des problèmes précis d'analyse dans une théorie générale :

«*J'ai ainsi cherché à mettre en place une théorie générale, dans laquelle non seulement la théorie de l'intégrale singulière mais aussi les recherches de J. Schur soient comprises comme des cas particuliers*»²⁶.

Hahn introduit immédiatement ce qu'il appelle un espace linéaire (*linearer Raum*) qu'il définit axiomatiquement et qui correspond à la définition moderne d'espace vectoriel normé. Les éléments sont appelés des points (et non des vecteurs), les axiomes de la structure algébrique sont assez semblables et équivalents (sans redondance, ni lacune) aux axiomes actuels, mais ne donnent pas lieu à une définition séparée. La définition de la norme est identique à celle de Helly, auquel Hahn fait d'ailleurs référence. Il définit la propriété de complétude (*Vollständigkeit*), puis il étudie de nombreux exemples d'espaces particuliers avec leurs opérateurs, s'intéressant essentiellement à la convergence de suites bornées d'opérateurs. Ce premier travail de Hahn ne contient pas de résultats généraux, hormis les quelques définitions de départ. Dans le texte de 1927 en revanche, citant les travaux de Banach, il s'intéresse à la résolution de l'équation de Fredholm dans un espace linéaire général. Cela le conduit à énoncer de nombreux résultats généraux sur les espaces bornés complets, dont le plus important est la première version de ce qui restera connu sous le nom de *théorème de Hahn-Banach* :

«*Théorème III. Soit R_0 un sous espace linéaire complet de R et $f_0(x)$ une forme linéaire dans R_0 de borne M . Alors il existe une forme linéaire $f(x)$ dans R de borne M , qui coïncide avec f_0 sur R_0* »²⁷.

Hahn met également en place dans ce texte les premiers résultats théoriques sur la notion d'espace dual (au sens topologique). Pourtant, le travail de Banach reste le plus important dans l'axiomatisation des espaces vectoriels normés complets, d'ailleurs aujourd'hui dénommés *espaces de Banach*. Dans sa thèse de doctorat intitulée «*Sur les opérations linéaires dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*»,

²⁶ «*Ich habe nun versucht, eine allgemeine Theorie aufzustellen, in der sowohl die Theorie der singulären Integrale, als auch die Untersuchungen von J. Schur als Spezialfälle enthalten sind*» [Hahn 1922, p. 3].

²⁷ «*Satz III. Sei R_0 ein vollständiger linearer Teilraum von R und $f_0(x)$ eine Linearform in R_0 der Steigung M . Dann gibt es eine Linearform $f(x)$ in R der Steigung M , die auf R_0 mit f_0 übereinstimmt*» [Hahn 1927, p. 217].

soutenue en 1920 et partiellement publiée en 1922, Banach écrit en introduction :

«L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui» [Banach 1922, p. 308].

Cette citation montre que Banach se situe vraiment dans l'optique moderne d'une axiomatisation de structure, ce qui pour l'époque est assez nouveau, surtout dans le domaine de l'analyse. Cette attitude correspond à un mouvement général de l'école mathématique polonaise de cette époque. Dans sa définition, bien qu'il distingue deux groupes d'axiomes²⁸, il ne distingue pas par des noms différents la structure algébrique de la structure topologique, et ne donne pas non plus de nom à la structure générale. De plus, si après avoir énoncé la première série d'axiomes (relative à la structure vectorielle²⁹), il donne les exemples des vecteurs, des formes de Grassmann, des quaternions et des nombres complexes, il ne fait référence à aucun de ses prédécesseurs. Il est fort probable que Banach ait entièrement redécouvert cette définition, comme Hahn et Wiener ; on en est tenu sur ce point à des conjectures (cf. [Moore 1995]).

La plus grande partie du traité de Banach est consacrée à établir des résultats généraux sur les liens entre les caractères borné et continu d'un opérateur et plus généralement sur les propriétés des opérateurs additifs. Dans la dernière partie, il montre que les axiomes qu'il a introduits (plus trois nouveaux axiomes liés à une notion de convergence asymptotique, rajoutés vers la fin) sont vérifiés par divers espaces fonctionnels, dont l'espace des fonctions continues, les espaces L^p , celui des fonctions mesurables bornées, l'espace des fonctions dont les $(n - 1)$ premières dérivées sont absolument continues et la n -ième est soit continue soit L^p , etc. Mais il n'y a pas d'applications de ces résultats à la résolution

²⁸ En fait, il serait plus exact de dire trois groupes, car l'axiome de complétude est séparé de ceux définissant la norme.

²⁹ Ses axiomes sont à la fois incomplets et redondants.

de problèmes d'analyse, sans que l'on sache si de telles applications ont ou non été traitées dans son travail original de thèse de 1920. De fait, ce premier travail de Banach, s'il a séduit par sa modernité certains esprits d'avant-garde, a eu un succès relativement réduit. C'est avec son livre de 1932, *Théorie des opérateurs linéaires*, que Banach impose son point de vue en analyse fonctionnelle, mais il nous faut examiner quelques autres contributions avant d'en venir là.

Maurice Fréchet est l'un des premiers mathématiciens à avoir repris la définition axiomatique d'un espace vectoriel normé complet. Il a découvert cette approche dans le travail de Wiener, mais il a eu rapidement également connaissance de la définition de Banach et adopte vers 1925 une définition hybride, qui conserve l'idée de distinction entre structure affine et structure vectorielle de Wiener, tout en étant formellement plus proche de la définition de Banach. En relation avec ses travaux antérieurs (voir *supra* § 4), Fréchet distingue donc avec les points et les vecteurs, une notion d'écart (ou distance) et une notion de norme. Il définit la notion d'espace vectoriel abstrait puis d'espace affine abstrait, dont il donne également une définition géométrique. Il définit aussi une notion plus générale d'espace affine topologique (non nécessairement normé) et fait un inventaire assez large d'ensembles répondant à sa définition.

En 1928, Fréchet publie, dans une collection de monographies consacrées à la théorie des fonctions et dirigée par Émile Borel, un ouvrage intitulé *Les espaces abstraits et leur théorie générale considérée comme introduction à l'analyse générale*, dont l'introduction présente une perspective historique fort documentée. L'ensemble des résultats est présenté sous un angle axiomatique très général et abstrait. L'introduction est à ce titre très claire; ainsi à propos de la méthode consistant à utiliser l'analogie avec la dimension finie à l'aide de la représentation en série des fonctions, voici comment s'exprime Fréchet :

«Nous croyons que cette méthode a joué un rôle, mais qu'elle a fini son temps. C'est un artifice inutile de substituer à la fonction une suite infinie de nombres qui d'ailleurs, peut être choisie de plusieurs façons³⁰. On le voit bien, par exemple dans la théorie des équations intégrales où les

³⁰ Note de Fréchet : «Notre critique doit être étendue dans le même sens et avec les mêmes limitations que celle qui s'adresse à un emploi abusif des coordonnées dans les questions qui relèvent de géométrie pure.»

solutions de Fredholm ou de Schmidt sont beaucoup plus simples et plus élégantes que celle de Hilbert, ce qui n'enlève pas à ce dernier le mérite essentiel d'avoir obtenu par sa méthode un grand nombre de résultats nouveaux.

En résumé, la méthode la plus féconde en Analyse fonctionnelle nous paraît être celle qui consiste à traiter l'élément dont dépend la fonctionnelle directement comme une variable et sous la forme même où il se présente naturellement. Cela permettra d'utiliser immédiatement un grand nombre de propositions actuellement établies en analyse générale. Et cela évitera d'introduire des éléments parasites (paramètres, coefficients) susceptibles d'amener des complications inutiles et étrangères au fond du problème» [Fréchet 1928, p. 5].

On mesure à travers cette citation à quel point le concept d'espace de fonctions est lié à la reconnaissance du statut d'objet donné à la fonction intervenant dans une équation. Objet variable, pour lequel il est fondamental de définir un environnement (l'espace) et une notion de proximité (grâce à la distance). La citation de Fréchet permet aussi de mettre en perspective les diverses méthodes et de comprendre comment son point de vue a pu s'imposer. Sa remarque sur la question des coordonnées montre également les similitudes profondes entre les traitements des dimensions finie et infinie, et souligne le rôle important joué par le cadre géométrique dans la formalisation de la notion d'espace de fonctions et l'abandon de la représentation par les coordonnées. À cette époque, le débat sur l'intérêt d'un calcul géométrique intrinsèque, usant de notations propres, contre l'emploi des coordonnées n'est pas encore clos. L'utilisation du langage géométrique en analyse et le parallélisme avec la dimension finie permet d'élargir ce débat aux espaces fonctionnels. Tout en s'appuyant sur les arguments déjà développés dans le cadre géométrique — élargi à la dimension finie quelconque —, les défenseurs d'une approche formelle des espaces fonctionnels ont de nouveaux arguments à leur disposition liés à la complexification des méthodes analytiques en dimension infinie, à la performance des méthodes synthétiques, mais aussi à l'élargissement du champ des problèmes en jeu créant le besoin d'une approche unifiante et synthétique.

7. L'ESPACE DE HILBERT ABSTRAIT

On peut maintenant examiner comment l'espace de Hilbert est enfin défini de manière entièrement abstraite. Cette tâche est accomplie par John von Neumann en 1927, donc sept ans après les premières axiomatisations d'espaces vectoriels normés. Son but est de donner des bases mathématiques cohérentes et rigoureuses à la théorie de la mécanique quantique. En effet, à la suite du travail initial dû essentiellement à Max Planck, Albert Einstein et Niels Bohr, deux approches différentes existent : la *mécanique des matrices* développée par Werner Heisenberg, Max Born et Pascal Jordan et la *mécanique ondulatoire* d'Erwin Schrödinger. Ces deux approches conduisent à des modélisations très différentes, la première utilisant des suites et des matrices infinies, la seconde étant basée sur la notion de fonction d'onde. Sur le plan mathématique, le problème essentiel est, dans les deux cas, de résoudre une équation fonctionnelle, qui conduit à un problème de valeurs propres abordé en terme de suites et de matrices infinies, dans le premier cas, ou à l'aide de fonctions et d'opérateurs fonctionnels dans le deuxième. Ainsi, dans un cas, on travaille dans l'espace ℓ^2 et dans l'autre, dans l'espace L^2 .

Schrödinger est le premier à montrer l'équivalence mathématique des deux théories, en 1926. Le mérite de von Neumann est d'élaborer cette analogie à un point tel qu'il en dégage une notion d'espace de Hilbert abstrait. De plus, l'ancrage de sa problématique dans la physique quantique donne à sa quête d'analogies une teneur bien particulière qui fait la richesse de son approche. Von Neumann commence par expliquer qu'une fonction de deux séries de k variables (comme le noyau intégral en mécanique ondulatoire)

$$h(q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k)$$

peut être considérée comme une matrice dont chaque ensemble de lignes ou de colonnes est caractérisé par k variables continues. Cette généralisation de la notion de matrice permet d'unifier les deux modèles de la mécanique quantique. De plus, von Neumann explique le bien-fondé de cette interprétation quelque peu excessive :

« Cette analogie peut paraître purement formelle, mais en réalité elle ne l'est pas ; en effet, les indices n et n' peuvent être considérés comme des coordonnées dans un espace de configuration, lorsqu'on les interprète

comme des nombres quantiques, dans le sens de la théorie de Bohr (c'est-à-dire comme des nombres caractérisant les trajectoires possibles dans l'extension en phase, trajectoire dont l'ensemble continu classique a été transformé en suite discrète au moyen des restrictions imposées par les conditions de quanta)»³¹ [von Neumann 1932/1946, p. 19].

Ainsi l'isomorphisme que propose von Neumann ne se limite-t-il pas à une correspondance mathématique, mais il prend aussi son sens dans le contexte physique de la théorie. Il a conscience de la difficulté mathématique que cette double correspondance soulève :

«La méthode esquissée dans le paragraphe précédent consistait à établir une analogie entre l'espace discontinu, Z ($= 1, 2, \dots$), des valeurs de l'indice ν et l'espace de configuration, continu et à k dimensions, du système mécanique considéré, k étant le nombre de degrés de liberté du système en mécanique classique. On constate qu'il est impossible d'y arriver, sans forcer dans une certaine mesure la rigueur mathématique, et cela n'est pas étonnant : les espaces Z et Ω sont réellement très différents l'un de l'autre et toute tentative de les rapprocher doit nécessairement se heurter à de grosses difficultés»³² [*Ibid.*, p. 19].

Von Neumann montre alors, en analysant les grandes lignes de la résolution du problème des valeurs propres selon les deux méthodes, comment se fait l'analogie entre les deux facettes de l'espace de Hilbert, puis il en déduit, en la commentant largement, sa définition axiomatique de l'espace de Hilbert abstrait, c'est-à-dire d'un espace vectoriel complexe muni d'un produit intérieur «hermitique» (*Hermiteches inneres Produkt*) — on dirait aujourd'hui hermitien —, de dimension infinie, complet et séparable (*i.e.* possédant une famille dénombrable partout dense). Dans

³¹ «Diese Analogie mag bloss formal erscheinen, ist es aber in Wahrheit nicht : denn auch die Indices n bzw. n' können als Koordinaten in einem Zustandsraume angesehen werden, nämlich wenn man sie als Quantenzahlen (im Sinne der Bohrschen Theorie : als Nummern der, durch die Verbote der Quantenbedingungen diskret gewordenen, möglichen Bahnkurven im Phasenraume) deutet» [von Neumann 1932, p. 15]. (Les principaux résultats de von Neumann étaient contenus dans son article de 1927.)

³² «Die skizzierte Methode kam darauf hinaus, den 'diskreten' Raum der Indexwerte, Z ($= 1, 2, \dots$), mit dem kontinuierlichen Zustandsraum W des mechanischen Systems (W ist k -dimensional, wenn k die Zahl der klassisch-mechanischen Freiheitsgrade ist) in Analogie zu setzen. Dass dies nicht ohne einige Gewalttätigkeit an Formalismus und Mathematik gelingen kann, ist kein Wunder : die Räume Z und W sind wirklich sehr verschieden, und jeder Versuch, sie in Beziehung zu setzen, muss auf grosse Schwierigkeiten stossen» [*Ibid.*, p. 15].

son texte de 1927 et dans sa très complète monographie de 1932, von Neumann fait une étude très générale de l'espace de Hilbert, il reprend également des résultats sur les espaces hermitiens de dimension finie.

La même année, Marshall Stone publie un livre qui restera longtemps une référence sur les transformations linéaires dans les espaces de Hilbert [Stone 1932]. Signalons enfin que, par la suite, on a élargi la notion d'espace de Hilbert à des espaces plus généraux qui ne sont pas nécessairement isomorphes à leur dual.

8. ÉPILOGUE ET CONCLUSION

De son côté, après sept années au cours desquelles il s'est intéressé à d'autres sujets, Banach publie en 1929 deux textes sur les fonctionnelles linéaires, où il approfondit son travail initial tout en reprenant des idées de Fréchet. Il est important de noter que ces textes sont publiés dans le premier numéro de la revue *Studia mathematica*, que Banach a fondé avec Hugo Steinhaus à Lwów, et qui est exclusivement consacrée à l'analyse fonctionnelle. Le second de ces articles contient la version générale et actuelle du théorème de Hahn-Banach. En 1932, Banach publie une monographie intitulée *Théorie des opérateurs linéaires* qui aura un grand retentissement. Ce livre présente une approche très complète sur le plan théorique et également de nombreuses applications à des problèmes classiques d'analyse, de plus il ouvre de nouveaux horizons et de nouveaux types de questionnement dans le domaine. Contrairement à ce qu'il faisait en 1922, Banach sépare les structures algébriques des structures topologiques. Il définit ainsi la notion de groupe et d'espace vectoriel abstrait (la seule distinction par rapport à la définition actuelle est que les axiomes d'existence d'un élément neutre et d'un opposé sont remplacés par le seul axiome de régularité : si $x + y = x + z$, alors $y = z$). De plus, dans le dernier chapitre, pour comparer la taille des différents espaces fonctionnels qu'il a étudiés, il introduit la notion de dimension linéaire : E est de dimension linéaire supérieure ou égale à celle de F , s'il existe un sous espace fermé de E isomorphe à F . Une question typique de la dimension infinie, insoluble sans l'appui d'une axiomatique, est de savoir si deux espaces ayant même dimension linéaire sont nécessairement isomorphes. Banach laisse d'abord la question ouverte. Cependant, l'année suivante,

dans une Note écrite avec Stanislaw Mazur et présentée par Élie Cartan à l'Académie des sciences de Paris, il donne des contre-exemples à cette conjecture [1933]. Les travaux de Banach ont connu un large succès et ses méthodes se sont imposées en analyse fonctionnelle.

On voit donc que les problèmes linéaires en dimension infinie ont subi, dans le champ de l'analyse, de profondes mutations entre 1880 et 1932, date à laquelle ils prennent plus ou moins la forme que nous leur connaissons aujourd'hui. On peut, à la suite de cette étude, dégager les grands traits suivants :

i) La tendance naturelle à généraliser à partir de ce qui est connu et qui fonctionne bien, a conduit les mathématiciens à aborder les problèmes linéaires de dimension infinie d'abord en généralisant à partir des coordonnées et de la théorie des déterminants. Cette position a été renforcée par les conceptions dominantes jusqu'au début du XX^e siècle sur la notion de fonction, qu'on assimilait souvent à un de ses développements en série. Les deux points précédents expliquent en grande partie l'échec de tentatives plus formalistes et abstraites avant 1920.

ii) Les travaux de Hilbert sur l'équation de Fredholm, fort riches mais dénués d'un point de vue unificateur, vont focaliser l'activité mathématique dans ce domaine. Dans ce cadre, les généralisations et les clarifications successives mettant en évidence des similitudes de plus en plus fortes ont peu à peu rendu incontournable une unification générale. Or celle-ci porte avant tout sur les méthodes et les outils ; le problème des valeurs propres joue un rôle central dans ce processus.

iii) Par ailleurs, une idée forte a été de généraliser le concept de fonction numérique aux fonctions de fonctions (la fonction de ligne de Volterra, mais aussi des conceptions plus générales, cf. Pincherle, Fréchet). Dans ce contexte, les recherches de définitions générales de continuité et de dérivabilité ont conduit à l'étude de questions topologiques et à la création des notions de distance et de norme sur des champs fonctionnels (Fréchet et Riesz).

iv) Les contributions de Wiener, Hahn et surtout de Banach et de Fréchet, si elles sont décisives, ne peuvent être comprises que dans la perspective de ce qui a précédé. En particulier, leur succès doit beaucoup au fait d'être tombées à point nommé pour répondre aux deux problématiques rappelées en ii) et iii).

v) Il faut souligner l'importance de l'aspect topologique dans l'émergence de la notion d'espace fonctionnel. Ainsi, la notion d'espace vectoriel normé s'impose avant même que celle d'espace vectoriel général ne soit formellement explorée. Les termes de vecteur ou de point sont avant tout hérités de l'analogie avec la géométrie, née dans le cadre de l'étude des espaces de Hilbert grâce à la norme et au produit scalaire. C'est donc la théorie des espaces vectoriels euclidiens et affines, normés, ou simplement topologiques (Fréchet puis Banach) qui est en jeu. Même si les structures linéaires et affines restent dans un premier temps implicites, l'étude de classes d'ensembles fonctionnels, par leurs propriétés topologiques, prépare le terrain pour la formalisation des structures algébriques.

vi) Le jeu de l'analogie fait que la constitution des théories en dimension infinie a également permis de retravailler la théorie en dimension finie, selon des bases formelles plus systématiques. L'étude de l'espace de Hilbert a joué un rôle clé dans ce sens.

Le concept général d'espace vectoriel de fonctions s'impose à partir de 1932 et devient l'une des clés de l'analyse fonctionnelle moderne. Dans le domaine de la géométrie et de l'algèbre, la notion moderne d'espace vectoriel s'impose également vers la même période, en particulier avec la publication en 1930-1931, de la première édition en deux tomes de la *Moderne Algebra* de Bartel L. van der Waerden. Néanmoins c'est surtout à partir de la deuxième édition de 1937, que l'espace vectoriel devient une notion vraiment centrale dans cet ouvrage (voir [Dorier 1995]). Cependant les deux points de vue, algébrique et analytique, restent encore un temps assez séparés. En 1941, Israël Gelfand les unifie, introduisant ce qu'on appelle depuis les algèbres de Banach.

Remerciements

Je tiens à remercier les rapporteurs pour leurs remarques et les compléments bibliographiques qu'ils m'ont permis d'apporter à la première version de ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

BANACH (Stefan)

- [*Œuvres*] *Œuvres*, 2 vol., Warszawa : Éditions scientifiques de Pologne, 1967–1979.
- [1922] Sur les opérations linéaires dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta mathematica*, 3 (1922), p. 133–181; *Œuvres* 2, p. 306–348.
- [1929] Sur les fonctionnelles linéaires, (en deux parties), *Studia mathematica*, 1 (1929), p. 211–216 et 223–239; *Œuvres* 2, p. 375–395.

- [1932] *Théorie des opérateurs linéaires*, Warszawa : Funduszu Kultury Narodowej, 1932; *Œuvres* 2, p. 19–217; rééd. New York : Chelsea, 1955.
- BANACH (Stefan) et MAZUR (Stanislaw)
- [1933] Sur la dimension linéaire des espaces fonctionnels, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 196 (1933), p. 86–88; *Œuvres* 2, p. 431–433.
- BERNKOPF (Michael)
- [1966] The development of function spaces with particular references to their origins in integral equation theory, *Archive for History of Exact Sciences*, 3 (1966), p. 1–96.
- [1968] A history of infinite matrices – A study of denumerably infinite linear systems as the first step in the history of operators defined on function spaces, *Ibid.*, 4 (1968), p. 308–358.
- DIEUDONNÉ (Jean)
- [1981] *History of functional analysis*, Amsterdam : North-Holland (Mathematics Study 49), 1981.
- DORIER (Jean-Luc)
- [1993] L'émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, (II) 3 (1993), p. 159–190.
- [1995] A general outline of the genesis of vector space theory, *Historia mathematica*, 22 (1995), p. 227–261.
- [1996] Basis and dimension, from Grassmann to van der Waerden, dans G. Schubring (éd.), *Hermann Günther Grassmann (1809–1877), visionary, scientist and neohumanist scholar*, Dordrecht : Kluwer (Boston Studies in the Philosophy of Science), 1996.
- FISCHER (Ernst)
- [1907] Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 144 (1907), p. 1022–1024.
- FOURIER (Joseph)
- [1822] *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822; *Œuvres de Fourier*, vol. 1, Paris, 1888; rééd., Paris : J. Gabay, 1988.
- FRÉCHET (Maurice)
- [1904] Sur les opérations linéaires, *Transactions of the American Mathematical Society*, 5 (1904), p. 493–499.
- [1905] Sur les opérations linéaires (deuxième note), *Ibid.*, 6 (1905), p. 134–140.
- [1906] Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 22 (1906), p. 1–72.
- [1907] Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 144 (1907), p. 1414–1416.
- [1925] Les espaces vectoriels abstraits, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 16 (1925–26), p. 51–62.
- [1926] Les espaces abstraits topologiquement affines, *Acta mathematica*, 47 (1926), p. 25–52.
- [1928] *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris : Gauthiers-Villars, 1928; rééd., 1951.
- FREDHOLM (Ivar)
- [*Œuvres*] *Œuvres complètes*, publiées sous les auspices de la Kungliga Svenska Vetenskapsakademien par l'Institut Mittag-Leffler, Malmö : Litos reprotryck, 1955.

- [1900] Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet, *Öfversigt af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar Stockholm*, 57 (1900), p. 39–46; *Œuvres*, p. 61–68.
- [1903] Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta math.*, 27 (1903), p. 365–390; *Œuvres*, p. 81–106.
- GELFAND (Israël)
- [1941] Normierte Ringe, *Matematicheskij Sbornik*, 9 (1941), p. 3–23.
- HADAMARD (Jacques)
- [1912] Le calcul fonctionnel, *L'enseignement mathématique*, 14 (1912), p. 5–18; *Œuvres*, Paris : Éditions du CNRS, 1968, vol. 4, p. 2253–2266.
- HAHN (Hans)
- [1908] Bemerkung zu den Untersuchungen des Herrn M. Fréchet : sur quelques points de calcul fonctionnel, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 19 (1908), p. 247–257.
- [1922] Über Folgen linearer Operationen, *Ibid.*, 32 (1922), p. 1–88.
- [1927] Über lineare Gleichungssystem in linearen Räumen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 157 (1927), p. 214–229.
- HELLINGER (Ernst)
- [1935] Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssystem, dans *Hilberts Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 1935; rééd., New York : Chelsea, 1953, vol. 3, p. 94–140.
- HELLINGER (Ernst) et TOEPLITZ (Otto)
- [1927] Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig : Teubner, article II C 13, p. 1335–1601; rééd. sous forme de livre, New York : Chelsea, 1953.
- HELLY (Eduard)
- [1921] Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Mh. Math. Phys.*, 31 (1921), p. 60–91.
- HILBERT (David)
- [1904a] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1904), p. 49–91.
- [1904b] Anwendung der Theorie auf lineare Differentialgleichungen, *Ibid.* (1904), p. 213–259.
- [1905] Anwendung der Theorie auf Probleme der Funktionentheorie, *Ibid.* (1905), p. 307–338.
- [1906a] Theorie der Funktionen von unendlich vielen Variablen, *Ibid.* (1906), p. 157–227.
- [1906b] Neue Begründung und Erweiterung der Theorie der Integralgleichungen, *Ibid.* (1906), p. 439–480.
- [1910] Anwendung der Theorie auf verschiedene Probleme der Analysis, Geometrie und Gastheorie, *Ibid.* (1910), p. 355–417.
- [1912] *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig/Berlin : Teubner, 1912 [rééd. sous forme de livre des six articles précédents]; réimp. New York : Chelsea, 1953.
- HILL (George William)
- [1877] *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*, Cambridge (Mass.) : Wilson, 1877.

KOCH (Helge von)

- [1891] Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires, *Acta math.*, 15 (1891), p. 53–63.
- [1892] Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires, *Ibid.*, 16 (1892–93), p. 217–295.

MONNA (A. F.)

- [1973] *Functional analysis in historical perspective*, Utrecht : Oosthoek, 1973.

MOORE (Eliakim)

- [1908] On a form of general analysis with application to linear differential and integral equations, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, (Rome, 1908), vol. 2, p. 98–114.

MOORE (Gregory H.)

- [1995] The axiomatization of linear algebra, *Hist. math.*, 22 (1995), p. 262–303.

NEUMANN (John von)

- [1927] Mathematische Begründung der Quantenmechanik, *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen* (1927), p. 1–57; *Collected Works*, Oxford : Pergamon Press, vol. I, p. 151–207.
- [1932] *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin : Springer, 1932; rééd. New York : Dover, 1943. Trad. fr., A. Proca, *Les fondements mathématiques de la mécanique quantique*, Paris : Alcan, 1946; rééd. Paris : Gabay 1988. Trad. angl., Robert T. Beyer, Princeton : Princeton University Press, 1955.

PEANO (Giuseppe)

- [Opere] *Opere scelte*, 3 vol., Roma : Cremonese, 1957–1959.
- [1888a] *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann e preadutto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino : Fratelli Bocca, 1888.
- [1888b] Intégration par séries des équations différentielles linéaires, *Mathematische Annalen*, 32 (1888), p. 450–456; *Opere* 1, p. 83–90.

PÉCOT (Jean-Bernard)

- [1992] *Histoire des relations d'orthogonalité en analyse*, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1992.
- [1993a] Les théories spectrales de Poincaré, *Sciences et techniques en perspective*, 26 (1993), p. 173–205.
- [1993b] Les théories spectrales de Hilbert et de Schmidt, *Ibid.*, 26 (1993), p. 206–249.

PINCHERLE (Salvatore)

- [1912] Équations et opérations fonctionnelles, dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, tome II, vol. 5, fasc. 1, 1912, article II 26, p. 1–81.

PINCHERLE (Salvatore) et AMALDI (Ugo)

- [1901] *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, Bologna : Zanichelli, 1901.

POINCARÉ (Henri)

- [1886] Sur les déterminants d'ordre infini, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 14 (1886), p. 77–90.

RIESZ (Frédéric)

- [Œuvres] *Œuvres complètes*, Paris : Gauthier-Villars et Budapest : Maison d'édition de l'Académie des sciences de Hongrie, 2 vol., 1960.
- [1907a] Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 144 (1907), p. 615–619; *Œuvres* 1, p. 378–381.

- [1907b] Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm, *Ibid.*, 144 (1907), p. 734–736; *Œuvres* 1, p. 382–385.
- [1907c] Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables, *Ibid.*, 144 (1907), p. 1409–1411; *Œuvres* 1, p. 386–388.
- [1907d] Über orthogonale Funktionensysteme, *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen* (1907), p. 116–122; *Œuvres* 1, p. 389–395.
- [1910] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, 69 (1910), p. 449–497; *Œuvres* 1, p. 441–489.
- [1913] *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris : Gauthier-Villars, 1913; *Œuvres* 2, p. 829–1016.
- [1918] Über lineare Funktionalgleichungen (trad. d'un texte hongrois de 1916), *Acta math.*, 41 (1918), p. 71–98; *Œuvres* 2, p. 1053–1080.
- SCHMIDT (Erhard)
- [1907a] Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, (partie I), *Math. Ann.*, 63 (1907), p. 433–467.
- [1907b] Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, (partie II), *Ibid.*, 64 (1907), p. 161–174.
- [1908a] Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, (partie III), *Ibid.*, 65 (1908), p. 370–399.
- [1908b] Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rend. Circ. math. Palermo*, 25 (1908), p. 53–77.
- STONE (Marshall Harvey)
- [1932] *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, New York : American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XV, 1932; rééd., 1958.
- TOEPLITZ (Otto)
- [1909] Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, *Rend. Circ. math. Palermo*, 28 (1909), p. 88–96.
- VAN DER WAERDEN (Bartel, L.)
- [1930] *Moderne Algebra*, 2 vol., Berlin : Springer, 1930–31; 2^e éd., 1937.
- WIENER (Norbert)
- [Works] *Collected works with commentaries*, éd. P. Masani, Cambridge (MA)/London : The MIT Press, 4 vol., 1976–1985.
- [1920] On the theory of sets of points in terms of continuous transformations, *Compte rendu du congrès international des mathématiciens*, (Strasbourg, 1920), p. 312–315; *Œuvres* 1, p. 281–284.
- [1922a] The group of linear continuum, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 20 (1922), p. 329–346; *Œuvres* 1, p. 285–302.
- [1922b] Limit in terms of continuous transformation, *Bull. Soc. math. France*, 50 (1922), p. 119–134; *Œuvres* 1, p. 303–318.
- [1923] Note on a paper of M. Banach, *Fund. math.*, 4 (1923), p. 136–143; *Œuvres* 3, p. 676–683.
- [1956] *I am a mathematician. The later life of a prodigy*, New York : Doubleday, 1956.