



Article scientifique

Article

2022

Accepted version

Open Access

This is an author manuscript post-peer-reviewing (accepted version) of the original publication. The layout of the published version may differ .

L'héritage de Piaget en didactique des mathématiques

Dorier, Jean-Luc

How to cite

DORIER, Jean-Luc. L'héritage de Piaget en didactique des mathématiques. In: ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant, 2022, n° 176, p. 45–52.

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159966>

L'héritage de Piaget en didactique des mathématiques

Jean-Luc Dorier – Equipe DiMaGe, FPSE, Université de Genève

Résumé :

Ce texte vise à montrer comment les travaux de Piaget ont influencé les débuts de ce qui allait devenir dans les années 1980 la didactique des mathématiques. Je vais me concentrer sur deux théories qui sont unanimement reconnues comme les travaux fondateurs de ce champ disciplinaire en France : la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau et la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud. Je pars de l'hypothèse que ces deux auteurs avaient comme point de départ commun l'idée que les mathématiques ne se transmettent pas par un texte du savoir bien organisé, mais par une activité cognitive basée sur la résolution de problèmes et que c'est par des chemins différents qu'ils ont puisé dans les travaux de Piaget l'inspiration à la base de leur travaux fondateurs.

Mots-Clés : Didactique des mathématiques, Théorie des situations, Théorie des champs conceptuels, schème.

Nés tous les deux début février 1933 dans des milieux modestes de la France rurale, Guy Brousseau et Gérard Vergnaud ont, par des chemins toutefois fort différents, contribué à créer une discipline académique totalement nouvelle qui a finalement pris le nom de didactique des mathématiques dans les années 1980. Cependant dans les années 1970, Jean-Louis Ovaert avait suggéré à Brousseau de nommer ce champ l'« épistémologie expérimentale ». Il lui aurait en effet dit : « Tu étudies les conditions d'apparition de la connaissance mathématique, c'est de l'épistémologie. Tu reproduis ces conditions et tu observes lesquelles produisent les effets attendus. C'est de l'épistémologie expérimentale ! ». Ce choix outre qu'il rendait bien compte de la dimension expérimentale du travail de Brousseau montrait aussi bien le lien fort avec les travaux de Piaget. C'est toutefois le terme de didactique dans la tradition germanique issue de Comenius l'a finalement emporté.

Ce que nous allons décrire brièvement dans la suite est une toute petite partie d'une plus grande histoire qui a marqué dans les années 1960-1980 de grands bouleversements dans l'école et la recherche en éducation, en particulier en mathématiques mais aussi pour les autres disciplines et à un niveau plus général. Les travaux de Piaget, mais aussi toutes les approches des éducations dites nouvelles y ont joué un rôle central, dans un cadre sociétal plus large. En effet, le contexte international des « trente glorieuses » marqué par l'essor industriel a nécessité la formation d'une main d'œuvre de plus en plus qualifiée, qui coïncide avec l'avènement de ce que l'on a appelé les mathématiques modernes et dans les sciences humaines du structuralisme, dont se revendiquait Piaget.

Pour avoir une idée plus générale du développement des recherches sur l'éducation mathématique dans le monde à cette époque et ses liens avec les mathématiques modernes et la psychologie, on pourra se référer entre autres à (Brun 1996 ; Charlot, 1984 ; D'enfert & Gisert, 2011 ; Dorier, 2008, 2012, 2014 et 2017 ; Dorier, Gueudet, Peltier, Roditi & Robert, 2018 ; Furinghetti, Matos, & Menghini, 2013 ; Kilpatrick, 2008 ; Greco, 1980 ; Piaget, 1973 ; Revuz, 1980 ; Rouchier, 1994 ; Sarremaejane, 2001 ; Schubauer-Leoni, 2001).

1. Contexte général

Dans les années 1950, les mathématiques « savantes » subissent de grands bouleversements dont le groupe Bourbaki (Beaulieu, 1999) en France est l'un des plus célèbres artisans. Jean Piaget a eu des contacts proches avec Jean Dieudonné, l'un des proto-Bourbaki, qui a joué un

rôle majeur dans la mise en place de la réforme dite des mathématiques modernes en France. C'est, entre autres par ce biais, que Jean Gréco, un proche de Piaget et de Vergnaud s'est retrouvé à siéger dans la fameuse commission Lichnerowicz, qui a eu la charge de la mise en place de la réforme dans les années 1970.

Guy Brousseau et sa femme Nadine ont commencé ensemble leurs carrières d'institutrice et instituteur dans un village du sud-ouest de la France (Brousseau, 1998, pp.17-22 ; Dorier 2020, 2021a). La première rencontre qui a marqué la carrière de chercheur de Guy Brousseau est celle qu'il a faite avec Lucienne Felix, mathématicienne accomplie, assistante de Lebesgue, et très tôt intéressée par les questions d'enseignement. Elle lui présente André Lichnerowicz qui est celui qui va le pousser à la recherche académique. Et c'est aussi elle qui l'invite en 1961 à une rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM) fondée en 1950 par Caleb Gattegno, Gustave Choquet et Jean Piaget. C'est à travers ces différents réseaux que Guy Brousseau va passer d'instituteur de campagne, à la recherche universitaire, soutenu à Bordeaux par un ami de Lichnerowicz, le mathématicien Jean Colmez. Mais c'est surtout au sein du *Centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques* (COREM) que dans les années 1970-80, Guy Brousseau à la tête d'une équipe de *l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques* (IREM) de Bordeaux, en collaboration avec l'équipe enseignante de l'école de Jules Michelet, dirigée par sa femme Nadine, va développer toute sa théorie en prise directe et quotidienne avec l'expérimentation et l'observation de terrain. Le parcours de Gérard Vergnaud est tout autre (Artigue & Rogalski, 2021). Etudiant brillant issu d'un milieu très modeste, il a intégré la Haute Ecole de Commerce, HEC Paris, où pour tuer l'ennui il avait fondé un groupe de théâtre, ce qui l'a amené au mime et à la psychologie, pour tenter de mieux comprendre certains aspects de l'esthétique du mime. C'est là qu'en suivant les cours de la Sorbonne, il « tombe¹ » sur Piaget, dont il dit que ça a été un « choc ». De là va naître une collaboration qui a permis à Vergnaud de rentrer dès 1961 au Centre national pour la recherche scientifique (CNRS) et de faire une thèse sous la direction de Piaget, sur la résolution de problème, soutenue en 1968. Vergnaud a, durant cette période, participé régulièrement aux travaux du Centre d'épistémologie génétique à Genève.

On voit donc que ces deux hommes, Brousseau et Vergnaud, ont des histoires par rapport à l'enseignement des mathématiques d'une part, et au monde académique d'autre part, très différentes². Cependant ils partagent plusieurs points de vue proches sur ce que devait être l'enseignement des mathématiques dans cette période bouillonnante où en même temps l'enseignement se démocratise sans commune mesure avec aucune réforme précédente et où les mathématiques prennent une place centrale, tout en se renouvelant drastiquement. Ainsi un des points essentiels, qu'ils partagent avec de nombreux mathématiciens et pédagogues de leur temps, c'est que les mathématiques ne s'apprennent pas en inculquant un texte du savoir bien rédigé, mais qu'elles doivent se faire et que l'essentiel est de trouver de moyen de bien organiser la rencontre des élèves avec ce qui leur permettra de construire un savoir mathématique efficace. De plus, tous deux revendiquent le fait que c'est chez Piaget

¹ Selon ses propres termes, voir l'interview réalisé par Sophie Baudelot de l'équipe « Sémiotique cognitives-Nouveaux medias », de la Maison des sciences de l'homme de Paris en novembre 2004, https://www.canal-u.tv/video/fmsh/didactique_professionnelle_et_didactique_des_disciplines.28357).

² Je n'aurai pas la place ici de tenter de montrer les complémentarités des deux points de vue et je renvoie sur ce point à Flückiger (2000), qui sous la direction de Jean Brun à Genève a mené des travaux sur le double point de vue de Brousseau et Vergnaud.

et son approche constructiviste qu'ils ont trouvé l'inspiration pour élaborer leur réponse à cette problématique.

Dans un entretien donné par Piaget³, celui-ci répond à la critique qui lui a souvent été faite que la structure n'existerait que dans l'esprit de l'expérimentateur et pas du sujet :

(...) la structure c'est ce que l'enfant sait faire et pas ce qu'il en pense. Il ne fait pas lui-même une théorie de la structure bien entendu, mais il exécute des actions et nous constatons nous que ce qu'il sait faire dans ces actions est bien coordonné surtout que cela lui permet d'en tirer par déduction des conséquences auxquelles il n'avait pas pensé (...) Autrement dit, la structure c'est un ensemble de pouvoirs coordonnés que le sujet a acquis et dont le théoricien peut formuler les lois d'une manière abstraite, mais dans l'esprit de l'enfant cela n'a rien d'abstrait, ça n'a même rien de théorique (...)

C'est bien là une des caractéristiques des travaux de Piaget qui ont pu inspirer à la fois Vergnaud et Brousseau, dont nous allons à présent brièvement montré comment ils ont fondé leurs théories de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques et leur filiation avec Piaget.

2. Vergnaud et le couple Schème/ Situation

Vergnaud déclare⁴ que les travaux de Piaget qui l'ont le plus inspiré sont ceux sur le développement, mais pas les stades, en particulier les trois ouvrages : *La naissance de l'intelligence chez l'enfant* (1936), *La construction du réel chez l'enfant* (1937) et *La formation du symbole chez l'enfant* (1945), ainsi que toutes les recherches sur la conservation, des quantités discrètes et continues, du nombre, du volume, du poids, mais pas celles sur la logique.

L'approche de Vergnaud⁵ repose sur le couple Schème / Situation. Alors que le schème est un concept de psychologie, la situation est un concept propre aux didacticiens qui eux veulent faire évoluer les conceptions et les compétences des élèves. Ils doivent donc construire des situations pour provoquer les élèves et déstabiliser leurs conceptions pour les faire accéder à de nouvelles conceptualisations. Le schème est un concept très présent chez Piaget, que Vergnaud va élaborer. Il reprend de sa collaboration avec Piaget, l'idée maîtresse que la connaissance est adaptation, à travers le couple assimilation / accommodation. La répétition de tâches c'est l'assimilation et la surprise c'est l'accommodation. Vergnaud fait remonter l'origine du concept de schème à Kant, suivi en particulier par les travaux de Revault d'Allones (Vergnaud & Récopé, 2000), pour qui c'est essentiellement la base d'une théorie de la perception. Selon Vergnaud, c'est Piaget qui fait la rupture avec ces premières approches et fait du schème la forme d'organisation de l'activité perceptivo-gestuelle (que Piaget appelle plutôt sensori-moteur).

Si on associe souvent le schème à des cas où l'activité du sujet se répète, ce que revendique Vergnaud à la suite de Piaget, c'est que c'est aussi un bon concept pour comprendre ce que le sujet va faire dans une situation nouvelle, face à la surprise. En effet, dans ce cas le sujet ne peut que puiser dans son répertoire de schèmes, des ressources qui peuvent être

³ Entretien réalisé par Yale University Media Studio, intitulé « The epistemology of Jean Piaget », vue en ligne le 5 juillet 2021 à <https://www.youtube.com/watch?v=UEogByYS9XY> (10min.15 – 11min.45)

⁴ Voir son entretien réalisé en 2016 avec Michèle Artigue en préparation de la *National presentation* par la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM) au congrès ICME-13, en Juillet 2016 à Hambourg : <http://www.cfem.asso.fr/cfem/ICME-13-didactique-francaise>.

⁵ Dans ce qui suit je me suis appuyé sur les deux interviews de Vergnaud précédemment cités.

décomposées et recomposées, avec en plus une éventuelle découverte en situation, de telle manière qu'il va développer une forme d'organisation nouvelle (voir entretien 2004).

C'est sur la base de ces idées, que Vergnaud va développer sa théorie des champs conceptuels (Vergnaud 1991). Dans cette approche, un concept est défini comme un triplet constitué de :

- l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;
- l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;
- l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés et les procédures de traitement (le signifiant).

Par ailleurs, pour Vergnaud il existe deux formes principales de connaissance : la forme opératoire, celle qui permet de faire et de réussir et la forme prédicative, qui prend la forme de textes, de traités et de manuels. Or, il insiste sur le fait que la forme opératoire issue de l'expérience est toujours plus riche que la forme prédicative.

Avec la notion de champ conceptuel, Vergnaud vise aussi à dépasser les points de vue trop locaux pour mieux saisir les phénomènes développementaux dans la durée. Ses premiers travaux ont ainsi porté sur les structures additives et les structures multiplicatives. Ici le terme de structures au pluriel est essentiel car il montre bien que dans le champ de l'addition il n'y pas qu'une addition ou qu'une soustraction, mais il y a plusieurs situations qui appellent une addition et plusieurs situations qui appellent une soustraction.

Voilà de façon très sommaire la part des fondements de l'approche de Vergnaud en didactique des mathématiques, qu'il a puisé chez Piaget. Mais Vergnaud se détachera aussi rapidement du seul cadre Piagétien, non seulement parce que contrairement à lui qui s'intéresse essentiellement à la logique, Vergnaud explore des contenus mathématiques différents, mais aussi parce que Vergnaud va rapidement percevoir l'importance du langage et des interactions sociales dans la classe. C'est alors vers les travaux de Vygotsky et non plus de Piaget qu'il trouvera son inspiration.

Lors du colloque organisé à Paris en 1993 pour célébrer les 20 ans de la didactique des mathématiques, Jean Brun (professeur à Genève) dans sa conférence sur l'évolution des liens entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques atteste du rôle tout à fait précurseur de Vergnaud, dont il dit que c'est le premier psychologue à avoir placé la question des contenus de savoir au cœur de ses préoccupations. En parlant du contexte de l'époque il dit :

La psychologie cognitive est confrontée au double problème de tenir compte au plus près des savoirs sociaux constitués (scientifiques, techniques, culturels, pratiques...) et en même temps de ne pas rester prisonnière de leur description actuelle, de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances chez le sujet individuel. La psychologie cognitive est confrontée au double problème de tenir compte au plus près des savoirs sociaux constitués (scientifiques, techniques, culturels, pratiques...) et en même temps de ne pas rester prisonnière de leur description actuelle, de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances chez le sujet individuel. (Brun 1994, pp.71–72)

On mesure à l'aune de cette citation tout l'apport de Vergnaud à un champ par nature interdisciplinaire mais dont l'objet propre nécessite la création de concepts et d'outils spécifiques. Nous allons voir maintenant comment sur des bases plus éloignées de la psychologie, Brousseau a contribué à cette constitution de la didactique des mathématiques.

3. Brousseau et la théorie des situations

Pour Brousseau l'idée qu'il faut contourner la question du texte et de la rhétorique liée à l'exposition du savoir est à la source de sa réflexion. C'est ce qu'il explique dans l'entretien⁶ qu'il a réalisé en 2016 :

Autrement dit, il faudrait imaginer un enseignement... un enseignement qui ne passerait pas par la description des savoirs, mais par une certaine pratique. Il faudrait enseigner au maître cette chose-là. (...). Enseigner au professeur comment la faire marcher, ce qu'il faut faire ou ne pas faire. Tout cela fait déjà pas mal de choses... Lui enseigner pourquoi il vaut mieux faire ça que autrement, alors là c'est énorme, le travail à refaire va apparaître énorme. (...) C'est très ambitieux et y'a aucune explication. Parce que c'est dans les explications qu'en général on produit les phénomènes parasites. C'est des phrases qu'on dit aux enfants et qu'est-ce qu'ils ont à faire ou pas faire, qui apparaît là. Et déjà... je ne vais pas dire que j'ai déjà désespéré, mais j'ai mesuré cet énorme travail... je ne vois pas comment on peut éviter les erreurs des méthodes traditionnelles. Les gens, les professeurs, les enseignants utilisaient tous les ressorts de la rhétorique pour convaincre les élèves, pour les éclairer, pour représenter... La compréhension était autre chose, (...) On expliquait bien et l'enfant comprenait ou pas... on ne savait pas quoi faire avec l'incompréhension des élèves.

Dans (Brousseau, 2012) il explique bien comment les dispositifs des expérimentations de Piaget l'ont intéressé, en même temps que le défi que cela représenter, quand il fallait en faire des objets d'études, les adapter pour concevoir des situations d'enseignement et non plus seulement des moyens de faire émerger les connaissances ou les dysfonctionnements des sujets.

En épistémologie génétique, les épreuves n'ont pas pour objet les modalités concrètes des apprentissages, mais l'ordre de leurs résultats. Cet ordre est supposé être déterminé par des lois du développement mental indépendantes des individus et des cultures, qu'il s'agit d'élucider. Les apprentissages scolaires et l'environnement culturel produisent donc des connaissances qui brouillent évidemment l'étude de ces lois. Piaget sera donc conduit à éviter l'étude des sujets scolaires. (Op. cité, pp. 106–107)

Dans ce texte, il explique entre autres comment il avait été intéressé par l'épreuve de conservation. Mais il souligne que Piaget n'indique pas la raison pour laquelle c'est ce qui est conservé -la quantité ou le nombre-, et non ce qui est modifié – l'espace occupé – qui doit inspirer la réponse de l'élève. Et c'est pour lui le nœud du problème, en effet, un des objets de la didactique va être pour chaque connaissance identifiée de déterminer au moins un dispositif d'usage et d'apprentissage qui lui est propre. De fait dans l'ingénierie didactique développée par Brousseau pour l'apprentissage du nombre, les jeunes élèves (4-6 ans) sont confrontés à des dispositifs proches de ceux que l'on retrouve dans les expérimentations Piagétienne mais avec des conditions très différentes (Dorier, 2021c ; Margolinas & Bessot, 2020 ; Margolinas et Wozniack, 2013) dont je vais tenter de présenter succinctement quels sont les ressorts théoriques.

La distinction essentielle à comprendre dans l'approche de Brousseau est celle qu'il fait entre connaissance et savoir et qu'il faut rattacher au schéma très classique suivant :

⁶ Comme précédemment pour Vergnaud cet entretien a été réalisé par Patrick Gibel en préparation de la *National presentation* par la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM) au congrès ICME-13, en Juillet 2016 à Hambourg : <http://www.cfem.asso.fr/cfem/ICME-13-didactique-francaise>.

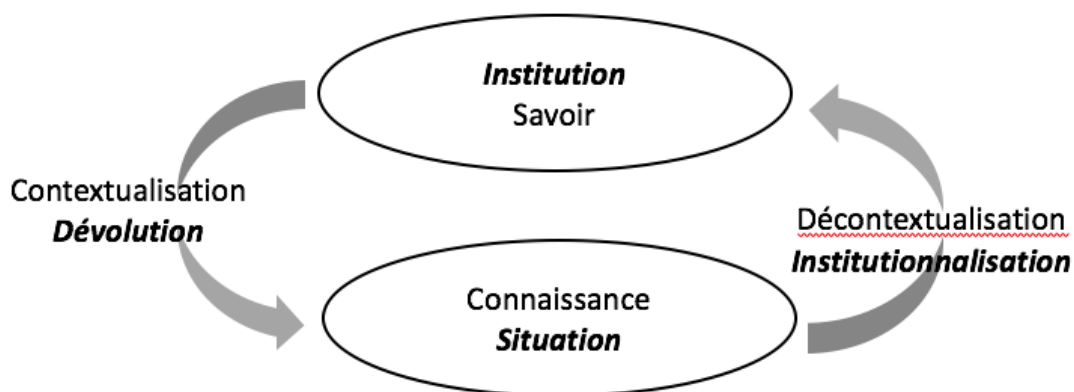


Figure 1 – Le double processus de dévolution/institutionnalisation entre savoir et connaissance

Pour Brousseau, en comparant la résolution des problèmes à l'histoire des concepts mathématiques, il apparaît que certaines conditions, qui disparaissent de l'énoncé final, jouent un rôle essentiel. Ces conditions peuvent être considérées comme un milieu dans lequel le sujet poursuit un but. Ce jeu peut être modélisé par une « situation ». Ainsi chaque concept mathématique peut être associé à des conditions dans lesquelles un être humain est amené à produire, comme réponse, un comportement spécifique témoignant d'une certaine connaissance d'un concept mathématique. C'est un élément clé pour comprendre le concept de situation dans le travail de Brousseau.

Les mathématiques ne s'enseignent pas en diffusant un discours bien fait. Elles se « rencontrent » dans une interaction avec un milieu non finalisé mais antagoniste.

Une situation a-didactique est une situation à finalité didactique (c-à-d organisée par l'enseignant) où le sujet agit comme si la situation était non didactique (il répond indépendamment des attentes de l'enseignant).

Cette situation ou ce problème choisi par l'enseignant est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. Pour cela il communique ou s'abstient de communiquer, selon le cas, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissage, des heuristiques, etc. L'enseignant est donc impliqué dans le jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation est la *situation didactique*. (...)

Dans la didactique moderne l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation adidactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation. (Brousseau 1998, p.60)

Ceci peut être représenté par le schéma suivant :

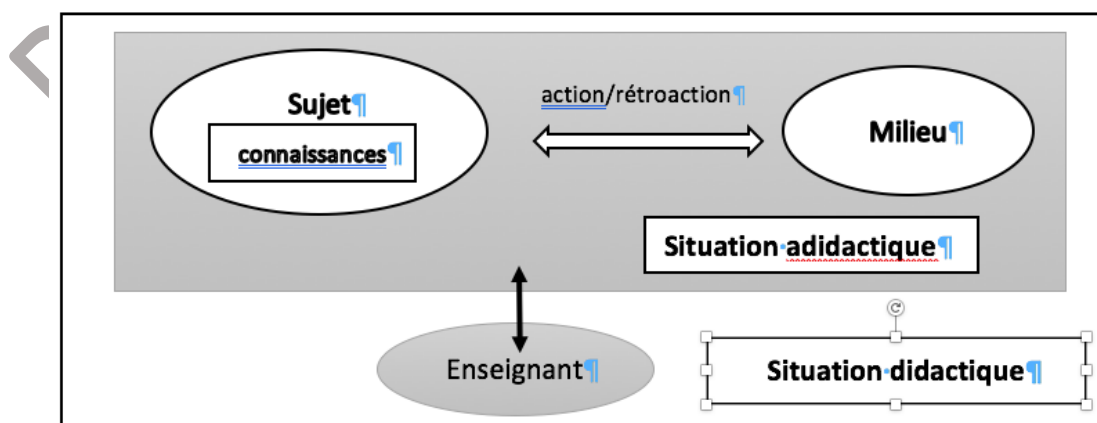


Figure 2 – Schéma de la situation adidactique incluse dans une situation didactique

Dans l'autre sens, « la phase d'institutionnalisation à la fin d'une séquence, correspond au moment où l'enseignant reprend sa position de détenteur du savoir pour montrer que le travail fait a abouti à l'acquisition de connaissances contextualisées et d'un savoir identifié dans le champ des mathématiques, attestant ainsi d'une acculturation à la communauté des mathématiciens. » (Dorier2021c, p.160).

La prise en compte « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'institutionnalisation. (Brousseau, 1998, p.311)

Dans son travail de thèse, Margolinas montre l'importance du double processus dévolution/institutionnalisation à l'appui de la Figure 1, qu'elle a contribué à populariser :

Pour nous l'institutionnalisation est un processus, c'est-à-dire que le maître, en dehors même des phases spécifiques d'institutionnalisation, a un projet qui lui permet de conduire les phases d'institutionnalisation sans rupture de sens. Dans le déroulement de la séquence, ce projet appelle la mise en place de connaissances, qui, en fonctionnant comme critères de validité, permettent une décontextualisation progressive.

Le maître rétablit progressivement la dissymétrie du point de vue du savoir. Dans les phases de bilan, le maître peut intervenir, et les formulations des élèves ont aussi lieu pour lui. Nous pensons que ces phases sont cruciales pour le processus d'institutionnalisation. (Margolinas 1993, p.138)

Dans la modélisation de Brousseau, le rôle de l'enseignant est complexe parce que celui-ci est contraint par des injonctions contradictoires. En effet comme l'a bien résumé Chevallard (1986) :

L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent mais bien de faire en sorte qu'ils *puissent apprendre*. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage -ce qui demeure hors de son pouvoir- mais la prise en charge de la création des *conditions de possibilité de l'apprentissage*. (Op, cité, p.40)

Aussi face à ce paradoxe et pour expliquer comment les interactions peuvent être comprises et régulées entre l'enseignant et les élèves, Brousseau introduit dans sa modélisation le concept de contrat didactique :

Alors se noue une relation qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre responsable devant l'autre. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du « contenu » : la connaissance mathématique visée. (Brousseau 1998, p.61)

Ce concept est essentiel pour comprendre comment le partage des tâches s'organise dans une situation d'apprentissage.

Il nous reste pour finir cette présentation succincte à montrer comment l'approche de Brousseau prend en compte l'évolution des apprentissages à travers les trois dialectiques entre l'élève et le milieu de l'action, de la formulation et de la validation (qu'il complètera tardivement par celle de l'institutionnalisation). Nous renvoyons à Margolinas et Wozniack (2013) pour une présentation de ces notions dans le contexte de l'apprentissage du nombre. Pour notre part, nous allons reprendre l'exemple de la course à 20, rendu célèbre dans l'introduction de (Brousseau, 1998) et (Bessot 2004).

La course à 20 est un exemple de jeu de Nim. Il se joue à deux joueurs ou équipes adverses. Le ou la première choisit de dire 1 ou 2, le ou la suivante choisit de rajouter 1 ou 2 et ainsi de suite, le ou la gagnant.e est celui ou celle qui dit 20. Ce jeu peut être proposé à des élèves dès 10 ans environ.

Brousseau propose un scénario de ce jeu selon 4 scènes.

Dans la Scène 1, l'enseignant.e explique la règle aux élèves. Il ou elle commence une partie avec un.e élève en écrivant la suite des nombres au tableau selon deux colonnes.

Élève 1	2		6		9		12		15		18	
Enseignant /élève 2		4		7		11		14		17		20

Figure 3 – Un exemple de partie

Puis il ou elle laisse la main à un.e autre élève. Dans cette scène, l'enjeu principal est d'entamer le processus de dévolution. L'enseignant.e commence la partie parce que c'est le meilleur moyen de s'assurer que la règle sera comprise, mais il ou elle laisse rapidement la main pour que les élèves n'essaient pas d'interpréter ses choix et se concentrent sur le jeu.

Dans la deuxième scène, l'enseignant.e demande aux élèves de se mettre par deux et de jouer des parties en les écrivant sur une feuille. Dans cette scène, on n'attend pas de l'élève qu'il ou elle essaie de trouver une stratégie gagnante. Il ou elle a toutes les raisons de jouer au hasard. Son seul but est de gagner mais pas de chercher à savoir comment gagner. Aussi l'enseignant.e ne doit pas répondre à des questions éventuelles d'élèves sur la valeur de stratégies, il doit juste s'assurer que les élèves respectent les règles et écrivent les parties. En effet, ce dernier point est important parce que chaque partie jouée vient enrichir le milieu de l'élève, c'est ce qui lui permet de commencer à construire une connaissance et il sera important dans la suite qu'il ou elle puisse se référer aux parties jouées. Entre l'élève et le milieu c'est donc une dialectique d'action qui prévaut. Dans ce sens, jouer de façon gratuite sans construire de stratégie permet l'enrichissement du milieu, étape importante non seulement pour renforcer la dévolution mais aussi préparer la suite. Dans cette étape, beaucoup d'élèves comprennent que celui ou celle qui dit 17 est sûr.e de gagner. Mais ils et elles n'ont pas besoin de le justifier et le plus souvent ils et elles ne voient d'ailleurs pas comment en déduire une stratégie plus élaborée. S'ils ou elles construisent des connaissances sur le jeu, celles-ci restent implicites et en acte, non formulées. C'est ce qui caractérise une situation d'action.

Dans la troisième scène, l'enseignant.e divise la classe en deux équipes et explique qu'à présent dans chaque équipe, les élèves doivent se mettre d'accord sur un moyen de gagner, puis qu'après une dizaine de minutes, on tirera au sort un.e champion.ne par équipe et que les deux champion.ne.s joueront une partie au tableau. Dans cette scène, l'enjeu est totalement différent, le fait de ne pas savoir à l'avance qui va être choisi.e comme champion.ne nécessite que, dans chaque équipe, les élèves fassent preuve à la fois de conviction s'ils ou elles ont une idée mais aussi d'écoute pour pouvoir faire face s'ils ou elles sont choisi.e.s comme champion.ne.s. Dans les argumentations entre élèves, les parties précédemment jouées vont devenir un élément essentiel du milieu et c'est une dialectique de formulation qui va dès lors prévaloir. Quand la ou les partie(s) vont être jouées entre les champion.ne.s, les équipes vont pouvoir juger de la validité des stratégies adoptées et ainsi rentrer dans la dialectique de validation.

Mais c'est surtout l'objet de la quatrième et dernière scène. En effet, dès lors, les deux équipes vont devoir à tour de rôle proposer une règle pour gagner. L'équipe proposante gagne 1 point si sa règle ne peut être invalidée par l'autre équipe, mais si l'équipe opposante arrive à l'invalider par un contre-exemple, c'est elle qui gagne 3 points. C'est donc là la dialectique de

la validation qui est en jeu. Enfin les règles validées pourront être institutionnalisées comme des règles du débat mathématique⁷.

Même si la course à 20 permet de travailler des connaissances intéressantes sur la division euclidienne, c'est bien pour ses capacités à faire travailler les élèves sur les règles du débat mathématiques que Brousseau l'a expérimentée et diffusée.

Les raisons qu'un enfant peut donner pour en convaincre un autre, celles qu'il peut accepter pour changer d'avis sans « perdre sa dignité » doivent être élucidées progressivement, construites, éprouvées, formulées, débattues et convenues.

Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à recevoir, apprendre et émettre des messages de mathématiques corrects et pertinents (appropriés).

Énoncer un théorème, ce n'est pas communiquer une information, c'est toujours affirmer que ce que l'on dit est vrai dans un certain système, c'est se déclarer prêt à soutenir cette opinion, en donner une démonstration.

Il ne s'agit donc pas seulement pour l'enfant de « savoir » des mathématiques mais de les utiliser en tant que raisons d'accepter ou de rejeter une proposition (un théorème), une stratégie, un modèle, ce qui exige une attitude de preuve. Cette attitude n'est pas innée. Elle se développe et s'entretient par des situations didactiques particulières (...).

En mathématiques, le « pourquoi » ne peut être appris seulement par référence à l'autorité de l'adulte. La vérité ne peut être la conformité à la règle, à la convention sociale comme le « beau » ou le « bon ». Elle exige une adhésion, une convention personnelle, une intériorisation qui par essence ne peut être reçue d'autrui sans perdre justement sa valeur. Nous pensons qu'elle commence à se construire dans une genèse dont Piaget a montré l'essentiel mais qui implique aussi des relations spécifiques avec le milieu, en particulier lors de la scolarité. Nous considérons donc que faire des mathématiques est d'abord pour l'enfant une activité sociale et non pas seulement individuelle. (Brousseau, 1998, pp.39-40)

Nous espérons avoir pu ainsi montrer dans les fondements des deux théories à l'origine de la didactique des mathématiques française la part d'inspiration que les travaux de Piaget a pu représenter.

Bibliographie

- Artigue, M. & Rogalski, J. (2021). In memoriam Gérard Vergnaud. In J.-L. Dorier, M. Goos & L. Koch (eds.) *ICMI Newsletter – July 2021*. <https://www.mathunion.org/icmi/icmi-news-july-2021>
- Beaulieu, L. (1999). Bourbaki's art of memory. *Osiris, 2nd Series, Vol. 14, Commemorative practices in science: historical perspectives on the politics of collective memory*, 219-251.
- Bessot, A. (2004). Une introduction à la théorie des situations didactiques (Master "Mathématiques, Informatique" de Grenoble 2003-2004). hal-00078794. Consulté en ligne le 5 juillet 2021 <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00078794/document>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Coöper, Rosamund Sutherland, Virginia Wrafield)*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétien... aux situations didactiques ». *Éducation et didactique*, 6 (2), 101–127. Consulté le 5 juillet 202 à <http://journals.openedition.org/educationdidactique/1475>
- Brun, J. (1996). *Didactiques des mathématiques*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Brun, J. (1994). Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnnot. (eds.). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp :51-66). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Charlot, B.(1984) *Le Virage des mathématiques modernes – Histoire d'une réforme : idées directrices et contraintes*, *Bulletin de l'APMEP* **352**, 15-31.

⁷ Voir (Brousseau, 1998, pp. 25-44) pour plus de détails.

- Chevallard, Y. (1986). Les programmes et la transposition didactique – Illusion, contraintes et possibles. *Bulletin de l'APMEP*, 352, 32–50.
- D'Enfert, R., & Gispert, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités : Le cas des « mathématiques modernes » en France, au tournant des années 1960-1970. *Histoire De L'éducation* 131, 27-49. Consulté en ligne le 4 juillet 2021 : <http://www.jstor.org/stable/41705752>
- Dorier, J.-L. (2008). Reaction to Jeremy Kilpatrick's conference: The development of mathematics education as an academic field, In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi & F. Arzarello (eds.) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 40-46). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Dorier J.-L. (2012). La didactique des mathématiques : émergence d'un champ autonome au carrefour des mathématiques, de la psychologie et des sciences de l'éducation. In M.-A. Elaouf, A. Robert, A. Belhadjin & M.-F. Bishop (eds.). *Les didactiques en question(s) - Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (pp. 42–48). Bruxelles : de Boeck (col. Perspectives en éducation & formation).
- Dorier J.-L. (2014). Aperçu de l'histoire de la didactique des mathématiques francophone. *Perspectivas da Educação Matemática*, 7. 365–379. <http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/892>
- Dorier, J.-L. (2017). La didactique des mathématiques : une épistémologie expérimentale ?. In M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (eds.). *Epistémologie et Didactique – Synthèse et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp.23–44). Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Dorier, J.-L. (2020). Module 0 : Career and Background. Brousseau Unit in the ICMI Awardees Multimedia Online Resources Project (ICMI AMOR). <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>
- Dorier, J.-L. (2021a). In memoriam Nadine Brousseau. In J.-L. Dorier, M. Goos & L. Koch (eds.) *ICMI Newsletter – July 2021*. <https://www.mathunion.org/icmi/icmi-news-july-2021>
- Dorier, J.-L. (2021b). Institutionnalisation. In E. Runtz-Christian & P.-F. Coen (eds.) *Collection de concepts-clés de la formation des enseignantes et des enseignants en Suisse romande et au Tessin* (pp.160–164). Lausanne : Editions Loisirs et Pédagogie.
- Dorier, J.-L. (2021c). *S'il te plait, comte moi les moutons ! – Voyage épistémologique et didactique au pays du nombre* (Carnets des sciences de l'éducation). Genève : Université de Genève.
- Dorier, J.-L. ; Gueudet, G. ; Peltier M.-L. ; Roditi, E. & Robert A. (2018). *Enseigner les mathématiques – Didactique et enjeux de l'apprentissage*. Paris : Belin.
- Fluckiger, A. (2004). Analyse didactique et schème : une étude qui articule théorie des situations et théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(2–3), 169–204.
- Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 273-302). Dordrecht – Heidelberg – London - New York: Springer.
- Kilpatrick, J. (2008). The development of mathematics education as an academic field, In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi & F. Arzarello (eds.) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 25–39). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Greco, P. (1980) Pédagogie et Mathématiques, in *Encyclopedia Universalis* t.12, pp. 675-677.
- Margolinas, C. (1993). De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. & Bessot, A. (2020). Brousseau Unit in the ICMI Awardees Multimedia Online Resources Project (ICMI AMOR). <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>
- Margolinas, C. & Wozniak, F. (2013). *Le nombre à l'école maternelle – Une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Piaget, J. (1945). *La formation du symbole chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Piaget, J. (1973) Remarques sur l'éducation mathématique, *Math Ecole* 58, 1-7.
- Revuz, A. (1980) Mathématiques (Enseignement), in *Encyclopedia Universalis* t.10, pp. 617-619.
- Rouchier, A. (1994) Naissance et développement de la didactique des mathématiques, In M. Artigue et al. (eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions, pp. 149-160.
- Sarremaejane, P. (2001) *Histoire des didactiques disciplinaires*, Paris : L'Harmattan. (extraits)
- Schubauer-Leoni, M.-L. (2001) Les sciences didactiques parmi les sciences de l'éducation : l'étude d'un projet scientifique de la didactique des mathématiques, In R. Hofstetter et B. Schneuwly (Eds.) *Le pari des sciences de l'éducation* (pp. 333-341). Bruxelles : De Boeck Université.

- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 133-170.
- Vergnaud, G. & Récopé, M. (2000). De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie Française (numéro spécial : « La Société Française de Psychologie a cent ans »)*, 45 (1), 35-50.

Preprint version auteur