



Preprint

2002

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

Introduction à la physique quantique

Piron, Constantin

How to cite

PIRON, Constantin. Introduction à la physique quantique. 2002, p. 8.

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:1898>

INTRODUCTION À LA PHYSIQUE QUANTIQUE

C. Piron

Département de Physique Théorique, 24 quai Ernest-Ansermet, CH-1211 Genève 4

Abstract. En nous laissant guider par la notion de champ qui en fait domine toute la physique nous définissons la nature physique d'un système, ses propriétés et ses états possibles. Nous proposons alors un cadre très générale permettant la description de tels systèmes et la construction de modèles consistants. Nous en donnons des exemples et pour illustrer les concepts de notre théorie nous décrivons différents types d'évolutions. Pour terminer nous discutons en détails un processus physique, les échos de spins.

1 La nature d'un système physique

Pour comprendre l'évolution de notre conception de la physique en y intégrant ses aspects quantiques sans en être choqué ou bouleversé, il faut absolument abandonner la vieille image d'un monde formé de très petites particules de matière, circulant dans un vide qui n'aurait aucune existence en soi. Au contraire, il faut admettre comme fondamental l'existence de l'espace vide et du temps qui s'écoule [Barut 1993]. Les particules ne sont alors rien d'autre que des manifestations de l'espace, des sortes de singularités du champ [Piron et Moore 1995]. Il peut paraître surprenant que l'espace et le temps puissent être traités séparément, mais c'est le résultat qui s'impose quand on constate que les points de l'espace-temps de Minkowski, définis par les satellites qui gravitent au voisinage de la terre, restent toujours confinés dans un sous-espace à trois dimensions correspondant à une même valeur du temps coordonnée [Piron 1990 et Audoin et Guinot 1998]. Ainsi contrairement au préjugé du siècle passé il n'y a pas un seul et même espace de Minkowski dans lequel nous serions tous plongés, mais chaque observateur, ayant adopté un repère de

Galilée, construit avec ses unités son propre espace-temps de Minkowski à partir du même espace et du même temps physique. A première vue, il semble qu'il y aurait une difficulté conceptuelle à attribuer des propriétés à l'espace vide, comme par exemple affirmer qu'il est quasi-Euclidien et qu'il y règne un champ de gravitation. En effet comment vérifier de telles affirmations sans devoir y introduire des appareils et dans ce cas on n'a plus le vide. Cet apparent paradoxe a été résolu par Dirk Aerts grâce à une formulation précise de la notion d'éléments de réalité jointe à une définition précise des projets expérimentaux [Aerts 1982]. En effet selon Aerts, un projet expérimental est une expérience, qu'on pourrait fort bien éventuellement exécuter, et dont le résultat positif a été défini une fois pour toutes. En plein accord avec la définition d'Einstein, Aerts prétend alors, que le système possède un élément de réalité et que la propriété est actuelle, si on peut affirmer par avance que dans l'éventualité de l'exécution du projet correspondant la réponse positive est certaine. Ainsi, affirmer qu'ici l'espace est Euclidien, c'est affirmer qu'ici la somme des angles d'un triangle qu'on construirait à l'aide de trois solides règles rectilignes serait à coup sûr égale à 180° . De même affirmer qu'ici règne un champ de gravitation, c'est prétendre qu'une particule qui serait lâchée ici serait certainement accélérée vers le bas. Il est important de remarquer qu'être Euclidien et posséder un champ de gravitation sont des propriétés propres à l'espace, donc en l'absence d'appareils. Enfin, par définition, se donner l'état actuel de l'espace (ou plus modestement de l'espace d'une cavité), c'est se donner toutes ses propriétés actuelles; autrement dit, c'est se donner l'ensemble des expériences qui si on réalisait l'une quelconque d'entre-elles, celle-ci réussirait à coup sûr.

2 Description générale d'un système

Dans [Piron 96] nous avons réussi à dériver les règles habituelles de la théorie quantique à partir de cette notion de champ, en utilisant pour la dynamique un principe du même type que celui qu'on utilise pour formuler les champs de jauge du modèle standard. Nous ne voulons pas dériver ces règles [Cohen-Tannoudji 1973 II A,1 et III B,1,2,3] ici mais juste les rappeler, en préciser les limites de validité, en montrer les généralisations et finalement en donner l'interprétation physique. Donnons-nous un système, c'est-à-dire, une partie limitée de la réalité physique, celle que nous voulons décrire et qui est suffisamment protégée du reste de l'univers pour être alors bien définie au cours du temps. Admettons donc qu'un tel système existe et puisse être valablement décrit par ses propriétés et ses états possibles, en plein accord avec les définitions et concepts du paragraphe précédent. D'une manière générale, sur l'ensemble \mathcal{L} de toutes les propriétés de ce système, nous définirons une relation d'ordre: nous dirons que la propriété a est plus forte que la propriété b , ce que nous noterons $a < b$, si chaque fois que a est actuelle b est actuelle. De même, sur l'ensemble Σ de tous les états correspondants possibles nous définirons une relation d'orthogonalité: nous dirons que deux états \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont orthogonaux s'il existe un projet expérimental dont le résultat positif est certain dans l'état \mathcal{E}_1 et impossible dans l'état \mathcal{E}_2 . En physique classique on remarque tout de suite que deux états sont orthogonaux dès qu'ils sont différents. Il est commode de représenter une propriété $a \in \mathcal{L}$ par le sous-ensemble A des états de Σ pour lesquels la propriété a est actuelle. Le sous-ensemble des états orthogonaux à tous ceux d'un A donné est noté A^\perp . A l'aide de quelques axiomes très généraux [Piron 1998 1.7.2] on peut alors démontrer que A^\perp est une propriété, l'orthogonale de

A , et que les sous-ensembles de Σ qui représentent des propriétés sont exactement les sous-ensembles biorthogonaux [Piron 1998 1.7.3]. Une propriété représentée par le sous-ensemble A est dite classique si son orthogonale est représentée par le complémentaire de A . Dans la suite nous conviendrons de ne plus distinguer une propriété a de son sous-ensemble représentatif A . Deux états \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont dit macroscopiquement équivalents si les propriétés classiques ne permettent pas à elles-seules de les distinguer en d'autres termes, si chaque propriété classique qui contient l'un des deux états contient aussi l'autre. Les classes d'équivalences ainsi définies sont appelées les états macroscopiques. Ces classes forment un ensemble dont les sous-ensembles correspondent univoquement aux propriétés classiques du système. On voit ainsi que la description classique d'un système doit être considérée comme une première approche où on n'aurait considéré que les propriétés classiques et négligé les autres. Ainsi le formalisme développé à Genève durant ces quarante dernières années permet tout naturellement d'englober, à la fois dans une même théorie, les aspects classiques et quantiques d'un système physique. On remarquera que, dans cette théorie, l'aspect classique ne provient pas d'un brouillage dû à l'influence d'un extérieur aléatoire mais qu'au contraire c'est des conditions nettes et précises qui permettent au système d'acquérir les propriétés quantiques que des expériences fines vont alors mettre en évidence. Donnons maintenant trois exemples: 1) Les états d'une particule classique sont décrits par les points (\vec{x}, \vec{p}, t) de R^7 . Deux états sont physiquement orthogonaux dès qu'ils sont différents. Ainsi chaque sous-ensemble de R^7 est biorthogonal et représente une propriété. Chaque point de R^7 est à lui seul un état macroscopique. C'est le prototype d'une théorie mécanique. Longtemps certains physiciens, plus ou moins sectaires, se sont acharnés à vouloir tout expliquer, même la physique quantique, dans ce schéma purement mécanique. 2) Les états d'une particule quantique sans spin sont décrits par les rayons définis par les fonctions d'un même espace de Hilbert, l'espace $L^2(R^3, dv)$. L'orthogonalité physique que nous venons de définir est alors identique à l'orthogonalité géométrique et les sous-ensembles biorthogonaux sont exactement les sous-espaces linéaires fermés. Il n'y a qu'un état macroscopique, l'espace tout entier. C'est le prototype d'une théorie hilbertienne. D'autres physiciens, tout aussi sectaires, s'acharnent alors à vouloir tout expliquer, même la physique classique, dans ce schéma purement hilbertien. Bien que toute variable classique soit manifestement exclue par cette description, physiquement il y en a au moins une, c'est la variable t dont la valeur permet de préciser l'instant actuel du système. La particule quantique doit donc en fait être décrite par une famille d'espaces de Hilbert indexés par t . Des états à deux temps différents ne peuvent pas être superposés, car ils sont macroscopiquement séparés. On peut montrer rigoureusement qu'il est parfaitement impossible de plonger toute cette famille dans un seul espace de Hilbert, car ce dernier n'a qu'un nombre dénombrable de sous-espaces orthogonaux entre-eux et non un continuum. Mais ce n'est pas tout il y a encore d'autres variables classiques, moins explicites, mais qui doivent aussi entrer dans cette description comme par exemples celles qui définissent la masse, la charge ou encore le repère de Galilée choisi. Ainsi, considérons le centre de gravité:

$$X^j = \int \phi_t^*(\vec{x}) x^j \phi_t(\vec{x}) dv$$

et la quantité de mouvement totale:

$$P_j = \int \phi_t^*(\vec{x})(-i\hbar\partial_j)\phi_t(\vec{x})dv$$

Ce sont des grandeurs qui dépendent manifestement de ce choix. En changeant de repère de Galilée on change leurs valeurs. Grâce au théorème d' Ehrenfest, on conçoit alors l'utilité d'un modèle où la particule serait donnée simplement par une famille d'espaces de Hilbert indexés par (P, X, t) et où chaque espace ne décrirait que la partie interne correspondante de l'état. C'est dans ce cadre que nous avons formulé le modèle à deux corps de l'atome d'hydrogène où les états stationnaires existent bel et bien [Piron 1965, Piron 1998 5.7]. C'est aussi dans ce cadre qu'il faut comprendre le formalisme à deux niveaux [Cohen-Tannoudji 1973 IV C] fréquemment utilisé dans les calculs d'expériences.

3) Il est hors de doute qu'un atome avant même d'interagir et d'entrer dans une cavité est séparé de celle-ci. Ce sont deux systèmes séparés car on a encore la possibilité à cet instant de faire une expérience sur l'un des deux sans perturber l'autre. Or si nous considérons deux tels systèmes séparés, décrits chacun par son espace de Hilbert, le système global ne peut pas être décrit valablement et sans contradiction par le produit tensoriel des deux espaces, c'est le paradoxe EPR [Einstein 1935]. Dans sa thèse, Dirk Aerts a résolu ce problème [Aerts 1982]. Les états possibles du système global correspondent aux couples $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, formés d'un état du premier et d'un état du deuxième, c'est-à-dire au produit cartésien. Dirk Aerts démontre alors que deux états du produit $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ sont physiquement orthogonaux si et seulement si \mathcal{E}_1 est orthogonal à \mathcal{F}_1 ou \mathcal{E}_2 est orthogonal à \mathcal{F}_2 . Il montre ensuite que les propriétés physiques du système global satisfont les axiomes généraux et donc correspondent univoquement aux sous-ensembles biorthogonaux de ce produit, mais ne correspondent pas seulement aux sous-espaces linéaires fermés du produit tensoriel ou même d'un autre espace de Hilbert [Piron 1998 1.8.2, 1.8.3 et 8.2.3]. Ainsi la contradiction est levée et la suggestion d'Einstein faite à la fin de l'article de 1935 est parfaitement correcte. Ce sont ces états produits qui sont couramment utilisés dans la littérature (sans justification ni référence!) pour décrire avant toute interaction les états possibles d'un système composé. Tous ces exemples sont comme toujours rien plus que des modèles, mais c'est le formalisme général dont ils sont tirés qui lui en assure la cohérence interne, sans qu'il soit besoin de faire appel à une hypothétique théorie hilbertienne.

3 Evolutions

Pour fixer les idées, considérons une particule quantique sans spin décrite par la valeur de t définissant l'instant actuel et par la fonction $\phi_t(\vec{x})$ définissant à cet instant ses propriétés actuelles. Deux cas extrêmes sont relativement faciles à décrire. a) **L'évolution déterministe et réversible:** Pour ce cas on démontre tout d'abord que la relation d'orthogonalité doit être conservée et donc, que l'évolution est induite par une transformation unitaire. Ainsi $\phi_t(\vec{x})$ obéit à une équation de Schrödinger:

$$i\partial_t\phi_t(\vec{x}) = H\phi_t(\vec{x})$$

où H est un opérateur auto-adjoint qui peut dépendre du temps et dont la forme est imposée par le principe de Galilée. C'est là un résultat important qui se démontre [Piron 1998 3.3.1, 3.3.5] et n'a donc pas besoin d'être postulé. b) **Le processus de mesure idéale**: Parmi les projets expérimentaux qui définissent une propriété donnée a , il y en a qui perturbent complètement le système ou même le détruisent. Mais il y en a aussi qui le perturbent le moins possible, fournissent une information et sont en quelques sortes des mesures. C'est pourquoi on définira une mesure idéale α par les trois conditions suivantes [Piron 1998 3.5]: 1) α est un projet expérimental définissant a , dont la réponse positive est impossible si a^\perp est actuelle. 2) En cas de réponse positive, la propriété a est actuelle en fin de mesure. 3) De plus dans ce cas, le système a été perturbé le moins possible. On montre facilement que si la réponse est positive l'effet d'une telle mesure est de transformer l'état initial ϕ_{t_1} dans l'état final $\phi_{t_2} = P_a \phi_{t_1}$ où P_a est le projecteur associé à a . La fonction $P_a \phi_{t_1}$ n'est pas forcément normalisée mais elle n'est jamais nulle en vertu de la première condition. Il est possible de déterminer pour ce type de mesure la probabilité a priori d'obtenir une réponse positive, c'est-à-dire indépendante des conditions particulières du déroulement de l'expérience. Notons $w(a, \phi)$ cette probabilité et supposons qu'elle existe pour tout a et tout ϕ . Vu son interprétation, il est naturel de lui imposer les trois conditions suivantes: 1) $w(a, \phi) = 1$, si a est actuelle pour ϕ . 2) $w(a^\perp, \phi) = 1 - w(a, \phi)$, car a et a^\perp correspondent souvent à la même expérience. 3) $w(a \cap b, \phi) = w(a, \phi)w(b, P_a \phi)$ chaque fois que P_a et P_b commutent. Car dans ce cas la mesure idéale de a suivie de la mesure idéale de b peut être interprétée comme une mesure idéale de $a \cap b$. Pour s'en convaincre il faut tout d'abord remarquer que dans le cas d'une double réponse positive l'état final sera bien $P_{a \cap b} \phi = P_b P_a \phi$. En suite il faut montrer que si l'état initial est dans $(a \cap b)^\perp$ c'est-à-dire, de la forme $(I - P_b P_a) \phi$, alors une double réponse positive est impossible. Or si la première réponse a été positive, l'état avant la seconde mesure sera de la forme $(I - P_b) P_a \phi$ et une deuxième réponse positive est alors impossible. Il est tout à fait remarquable qu'une telle fonction existe et que de plus elle soit unique:

$$w(a, \phi) = \|\phi\|^{-2} \|P_a \phi\|^2$$

L'unicité de cette fonction en montre l'universalité et explique pourquoi elle est très souvent appliquée. Il est important de remarquer que nous n'avons utilisé pour sa dérivation que les lois habituelles des probabilités, ce qui montre à l'évidence que cette probabilité est de même nature que celles qui interviennent en théorie classiques. Enfin cette formule est l'équivalent en théorie quantique des probabilités égales a priori. Il n'y a pas ici de problème d'interprétation de la mesure et de réduction du paquet d'ondes car la définition de l'état n'utilise pas ces concepts et c'est bel et bien l'appareil qui perturbe le système et non les pensées de l'observateur. Mesurer une observable A définie par sa décomposition spectrale

$$A = \sum_{i \in J} \lambda_i P_{a_i}$$

revient à effectuer une série de mesures idéales P_{a_i} . Vu la condition 3) on peut calculer directement et justifier ainsi la formule bien connue:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i \in J} \lambda_i \|\phi\|^{-2} \|P_{a_i} \phi\|^2 = \text{tr}(PA)$$

où P désigne le projecteur sur l'état ϕ et $\bar{\lambda}$ la moyenne statistique des λ_i ainsi obtenus. Souvent l'état du système mesuré n'est pas complètement connu, tout au plus peut-on supposer donné un ensemble E d'états ϕ_ω et une distribution de probabilité $d\mu(\omega)$ [Cohen-Tannoudji 1973 E_{III}.4.a. et Piron 1998 3.5.6] Dans ce cas la formule précédente se généralise en remplaçant le projecteur P par l'opérateur

$$\rho = \int_E P_\omega d\mu(\omega)$$

où P_ω désigne le projecteur sur ϕ_ω . L'opérateur ρ est appelé la matrice densité. Par construction la donnée de ρ est suffisante pour calculer toutes les valeurs moyennes de ce type. Pour d'autres expériences, où interviennent explicitement les ϕ_ω et leurs corrélations, la donnée de ρ ne suffit cependant pas pour prédire les résultats [Cohen-Tannoudji 1973 E_{III}.4.c. et Piron 1998 3.6.5]. c) En plus de ces deux types d'évolutions, il y a des cas intermédiaires. Nous nous contenterons d'un exemple: Un spin $\frac{1}{2}$ placé dans un champ magnétique homogène tourne autour de l'axe de ce champ, c'est la précession de Larmor que décrit une transformation unitaire. Mais en même temps, en réalité, l'angle θ que fait le spin avec la direction du champ diminue lentement, c'est la relaxation longitudinale, le système tend ainsi vers un équilibre où θ est nul. Le tout est encore un processus déterministe mais qui ne peut alors être décrit que par une équation non-linéaire, par exemple:

$$i\partial_t\phi_t = -\gamma\frac{1}{2}\vec{B}\vec{\sigma}\phi_t + i(T_1|\vec{B}|)^{-1}\frac{1}{2}(\vec{B}\vec{\sigma} - \langle\phi_t, \vec{B}\vec{\sigma}\phi_t\rangle)\phi_t$$

Le premier terme décrit la précession de Larmor de pulsation $\omega_L = -\gamma|\vec{B}|$ et le second une relaxation longitudinale de temps caractéristique T_1 . Il ne faudrait pas prendre trop au sérieux cette équation qui ne décrit que l'évolution déterministe d'un spin seul, en ignorant l'action aléatoire du reste du système qui lui aussi contribue à la relaxation. Afin de démontrer sur cet exemple particulier, que conformément à la théorie générale que nous avons donnée au tout début, il est parfaitement possible de décrire une théorie quantique uniquement en termes d'éléments de réalité, transcrivons dans ces termes l'équation d'évolution précédente. Un état quelconque de spin $\frac{1}{2}$ peut s'écrire:

$$\cos(\frac{1}{2}\theta) \exp(-i\frac{1}{2}\varphi)|+\rangle + \sin(\frac{1}{2}\theta) \exp(i\frac{1}{2}\varphi)|-\rangle$$

où $|+\rangle$ et $|-\rangle$ désignent les vecteurs propres du spin dans la direction choisie, celle du champ magnétique [Cohen-Tannoudji 1973 IV A.2.b. et Piron 1998 2.9.2]. Or cet état, noté $|\theta, \varphi\rangle$, désigne un élément de réalité: un spin $\frac{1}{2}$ pointant dans la direction (θ, φ) par rapport au champ magnétique. Il n'est alors pas trop difficile de vérifier que l'équation non-linéaire précédente est bien équivalente aux deux équations suivantes:

$$\dot{\theta} = \frac{-\sin\theta}{T_1} \quad \text{et} \quad \dot{\varphi} = \omega_L$$

C'est là un cas très simple, dû au fait que l'espace de Hilbert du spin $\frac{1}{2}$ est de dimension deux. Il suffit de deux nombres pour définir l'état à un instant donné, alors qu'en mécanique il en faut six pour repérer l'état d'une particule classique et une infinité pour une particule quantique. Pour terminer et illustrer ces concepts nous allons discuter l'expérience des

échos de spins. Si sur un échantillon d'eau on applique un fort champ magnétique dans la direction verticale et si ensuite on supprime brutalement ce champ, les spins des protons qui s'étaient alignés dans la direction verticale vont se mettre tous ensemble à précesser librement autour de l'axe z du champ résiduel, le champ magnétique terrestre. Le système ainsi obtenu peut valablement être décrit par la matrice densité à un corps:

$$\rho = |\theta, \varphi\rangle\langle\theta, \varphi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & \exp(-i\varphi) \sin\theta \\ -\exp(+i\varphi) \sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

où comme précédemment

$$|\theta, \varphi\rangle = \cos(\frac{1}{2}\theta) \exp(-i\frac{1}{2}\varphi)|+\rangle + \sin(\frac{1}{2}\theta) \exp(i\frac{1}{2}\varphi)|-\rangle$$

Ce mouvement se détecte facilement avec une bobine d'axe horizontal perpendiculaire à z , mais très vite le signal disparaît car chaque spin voit un champ légèrement différent et l'angle de rotation dû à la précession de Larmor devient aléatoirement différent d'un spin à l'autre. La nouvelle matrice densité de l'ensemble est alors donnée par:

$$\rho = \int_E |\theta, \varphi\rangle\langle\theta, \varphi| d\varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ainsi les termes hors-diagonales, les termes de cohérence, ont disparu. On serait tenté de croire qu'il n'est donc pas possible de distinguer cet ensemble d'un mélange pondéré de spins $|+\rangle$ et $|-\rangle$ [Cohen-Tannoudji *EIV.3.* 1973]. Cette conclusion serait parfaitement valable si on se limitait expérimentalement à des mesures idéales de spins faites individuellement et au hasard. Mais l'expérimentateur peut agir autrement. En envoyant au temps t , perpendiculairement à z et dans le plan verticale de départ, une forte et courte impulsion de champs magnétique correspondant à un angle de Larmor de π les spins après avoir basculés continuent de tourner chacun de la même façon, mais comme les lents se sont retrouvés en tête et les rapides en queue ils se retrouvent tous en phase au temps $2t$ et le signal réapparaît. C'est le phénomène d'échos de spins [Hahn 1950], en répétant cette impulsion au temps $3t$ on obtient un second écho au temps $4t$ et ainsi de suite. Ces échos décroissent avec le temps, mais il faut remarquer que ce type de relaxation n'est pas contenue dans l'équation du mouvement précédente car l'effet du terme en T_1 , à cause du retournement, s'exerce une fois dans un sens et une fois dans l'autre et cela pendant le même temps. Il n'en serait pas de même, si on obtenait ces échos sans retourner les spins, en inversant le gradient d'un petit champs magnétique ajouté au champs terrestre très homogène [Borcard 1972]. En retournant alors ces spins par une impulsion de π on peut même espérer régénérer l'écho.

REFERENCES

- A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen 1935; "Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?" *Phys. Rev.* **47** 777-780.
 E.L. Hahn 1950; "Spin Echoes" *Phys.Rev.* **80** 580-594.

- C. Piron 1965; "Sur la quantification du système de deux particules" *Hel. Phys. Acta* **38** 104-108.
- C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë 1973; "Mécanique quantique" Hermann, Paris.
- B. Borcard et G.J. Béné 1972; "Echos de spins par inversion d'un gradient de champ magnétique" *Hel.Phys.Acta* **45** 64-66.
- D. Aerts 1982; "Description of many separated physical entities without the paradoxes encountered in quantum mechanics" *Found. Phys.* **12** 1131-1170.
- C. Piron 1990; "Time, Relativity and Quantum Theory" in *New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics Edited by A. O. Barut , Plenum Press, New York* 495-506.
- A. O. Barut, D. J. Moore and C. Piron 1993; "The Cartan formalism in field theory" *Helv. Phys. Acta* **66** 795-809.
- C. Piron and D. J. Moore 1995; "New aspects of field theory" *Turk. J. Phys.* **19** 202-216.
- C. Piron 1996; "Quantum Theory without Quantification" *Helv. Phys. Acta* **69** 694-701.
- C. Piron 1998; "Mécanique quantique bases et applications" Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- Claude Audoin et Bernard Guinot 1998; "Les fondements de la mesure du temps, comment les fréquences atomiques règlent le monde" Masson, Paris.