



Thèse

2006

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

Espaces polynomiaux et formules de cubature

Pache, Claude

How to cite

PACHE, Claude. Espaces polynomiaux et formules de cubature. Doctoral Thesis, 2006. doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:398

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:398>

Publication DOI: [10.13097/archive-ouverte/unige:398](https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:398)

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Section de mathématiques

FACULTÉ DES SCIENCES
Professeur Pierre de la Harpe

**Espaces polynomiaux
et
formules de cubature**

THÈSE

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur ès sciences, mention mathématiques

par

Claude PACHE
de
Carouge (GE)

Thèse N° 3746

GENÈVE
Atelier de reproduction de la Section de physique
2006

Espaces polynomiaux et formules de cubature

Table des matières

Remerciements	4
Introduction	5
Index des notations	10
1 Définitions et propriétés élémentaires	13
1.1 Espaces polynomiaux	13
1.2 Codes, designs et formules de cubature	15
1.3 Espaces bien séparés	18
1.4 Espaces homogènes et multiplicatifs	18
2 Variétés homogènes de groupes de Lie compacts	20
2.1 Variétés homogènes de groupes de Lie compacts	20
2.2 Grassmanniennes	24
2.3 Espaces compacts homogènes à deux points	29
3 Rayon de couverture et la force de codes pondérés, orbites de groupes finis	33
3.1 Relation entre rayon de couverture et force	33
3.2 Rayon de couverture d'orbites de groupes finis	35
3.3 Force d'orbites de groupes finis	37
3.4 Critères suffisants pour la force d'orbites de groupes finis	39
3.5 Groupes de Coxeter	41
4 Opérateurs de Markov sur les variétés riemanniennes symétriques	43
4.1 Espaces polynomiaux symétriques	43
4.2 Spectre des opérateurs de Markov associés à une formule de cubature	44
4.3 Force d'une formule de cubature ayant un certain spectre d'opérateurs de Markov	45
5 Appendices	50
5.1 Enveloppes convexes	50
5.2 Critères d'irréductibilité de représentations linéaires	53
5.3 Noyaux reproduisants et paires de Gelfand	54
5.4 Sous-groupes finis d'un groupe de Lie compact	59
5.5 Sous-groupes semi-simples d'un groupe de Lie compact	62
5.6 Linéarisation de produits de polynômes de Jacobi	63
5.7 L'algorithme WZ	65

A	Shells of selfdual lattices viewed as spherical designs	67
A.1	Spherical designs	70
A.2	Selfdual lattices and shadows	71
A.3	Theta series	72
A.4	Modular forms	73
A.5	A theorem of classification for modular forms	75
A.6	Computing the theta series of a selfdual lattice	77
A.7	Vanishing coefficients of modular forms	79
A.8	Root systems of norm 2	82
A.9	The cubic lattices	86
A.10	The Witt lattices	88
A.11	Even selfdual lattices of rank at most 24	90
A.12	Selfdual lattices with long shadow	93
A.13	Odd selfdual lattices of rank 24 and of minimum at least 2	96
A.14	Other selfdual lattices up to rank 24	99
A.15	Appendix: The cubic lattices of rank 4 and 7	99
B	Construction of spherical cubature formulas using lattices	103
B.1	Introduction	103
B.2	Bounds on the size of cubature formulas	105
B.3	Harmonic polynomials	108
B.4	Modular forms	109
B.5	Construction of cubature formulas using shells of lattices	113
B.6	Applications	114
B.7	Cubature formulas obtained by our construction	118
	Résumé français des chapitres A et B	122
A	Couches de réseaux autoduaux vues comme designs sphériques	122
B	Construction de formules de cubature sphériques à partir de réseaux	130
	Bibliographie	133

Remerciements

à Dieu, mon Créateur, qui m'a donné les facultés nécessaires pour mener à bien cette thèse ;

à Pierre de la Harpe, mon directeur de thèse ;

à Boris Venkov, qui m'a initié aux réseaux euclidiens et aux formes modulaires.

Introduction

En 1977, P. Delsarte, J.-M. Goethals et J. Seidel ont introduit la notion de *design sphérique* : Soit $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ la sphère de dimension $n-1$, munie de la mesure de Lebesgue μ normalisée à $\mu(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$. Pour un entier t positif, un t -design sphérique est un sous-ensemble fini non-vide X de \mathbb{S}^{n-1} tel que

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) = \int_{\Omega} f(u) d\mu(u)$$

pour toute fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de degré au plus t . L'entier t s'appelle la *force*.

Il existe d'autres notions qui se trouvent être étroitement apparentées, par exemple celle de *design combinatoire*, au sujet de laquelle il convient de citer [RayWil75]. On rappelle qu'un t -design sur v points avec des blocs de taille k , où $0 \leq t \leq k \leq v$, est une collection finie X de k -blocs (c'est-à-dire de parties de cardinalité k) d'un ensemble fini $\{1, \dots, v\}$, telle que toute partie de $\{1, \dots, v\}$ de cardinalité t est incluse dans exactement λ éléments de X , où λ est une constante dépendant de t, v et k .

Les notions de design combinatoire et de design sphérique ont plusieurs similitudes (c'est d'ailleurs à cause de ces similitudes que les designs sphériques ont été nommés ainsi), et plusieurs résultats concernant ces notions sont parallèles. C'est pourquoi C. Godsil a proposé une notion unificatrice d'*espace polynomial* [Gods89], [Gods93, Chap. 14]. Un cas particulier de la notion de Godsil est celle d'*espace métrique polynomial* de Levenshtein [Leven92], [Leven98], aujourd'hui bien étudiée.

Outre leur intérêt combinatoire, les designs sphériques peuvent être utilisés pour l'approximation d'intégrales sur les sphères. De ce point de vue, la recherche de designs sphériques de grande force et de petite taille est particulièrement intéressante.

Soit Ω un espace métrique ; un *code* sur Ω est un sous-ensemble fini non-vide de Ω . Il se trouve qu'il y a des relations étroites entre les forces de designs sur les espaces polynomiaux et les divers paramètres de codes sur les espaces métriques, en particulier leur *rayon de couverture*. Rappelons que le rayon de couverture d'un code $X \subseteq \Omega$ est défini par

$$\rho(X) = \sup_{u \in \Omega} \inf_{x \in X} d(x, u).$$

* * *

Notre travail est constitué de deux parties distinctes. Dans la première partie (chapitres 1 à 5), nous étudions une notion d'espace polynomial s'appliquant aux espaces homogènes de groupes de Lie compacts ; cette notion est plus générale que celle de Godsil et celle de Levenshtein, qui s'appliquent, entre autres, aux espaces compacts homogènes à deux points. Avec ce formalisme, nous généralisons aux variétés homogènes de groupes de Lie compacts les résultats de E. Bannai concernant les designs sphériques qui sont orbites de groupes finis ([Bann79], [Bann84], [Bann84b] voir aussi [HarPac04]), et nous généralisons aux espaces riemanniens symétriques l'étude d'*opérateurs de Markov* sur les sphères ([HarVen01], [HarVen01b] et [Pach04]).

La deuxième partie du travail (chapitres A et B), qui est la reproduction des deux articles [Pach05] et [HaPaVe06], est consacrée à l'étude de designs et formules de cubature sur les sphères construits au moyen de couches de réseaux euclidiens. Pour cela, nous utilisons intensément la théorie des formes modulaires.

* * *

Un *espace polynomial réel* $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est la donnée d'un espace topologique localement compact Ω muni d'une mesure de probabilité μ , et d'une famille $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de sous-espaces de dimension finies de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^1(\Omega, \mu)$. L'ensemble d'indice Λ est un

monoïde abélien ordonné avec élément neutre et minimal 0; on suppose de plus que, pour tout élément, le nombre d'éléments qui lui sont inférieurs est fini, et que tout sous-ensemble d'ordre fini admet une borne supérieure et une borne inférieure. Le cas le plus simple et le plus courant est $\Lambda = \mathbb{N}$, les entiers naturels. Les espaces \mathcal{F}_λ doivent vérifier les propriétés suivantes :

- (i) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence compacte;
- (ii) $\mathcal{F}_0 = \mathbb{R}$ (les fonctions constantes);
- (iii) $\mathcal{F}_{\inf(\lambda, \mu)} = \mathcal{F}_\lambda \cap \mathcal{F}_\mu$;
- (iv) $\mathcal{F}_{\sup(\lambda, \mu)} = \mathcal{F}_\lambda + \mathcal{F}_\mu$;
- (v) $\lambda + \mu \leq \nu \Rightarrow \mathcal{F}_\lambda \mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}_\nu$;

Une *formule de cubature de force* $\tau \in \Lambda$ sur un tel espace est la donnée d'un sous-ensemble fini non-vide X de Ω (les *nœuds*) et d'une fonction $W : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto W_x$ (les *poids*) vérifiant

$$\sum_{x \in X} W_x f(x) = \int_{\Omega} f(u) d\mu(u) \quad \forall f \in \mathcal{F}_\tau.$$

Un τ -*design* est une formule de cubature de force τ à poids constants $W_x = |X|^{-1}$.

Les espaces polynomiaux au sens de Godsil sont les espaces polynomiaux au sens ci-dessus vérifiant les propriétés suivantes :

- (vi) $\Lambda = \mathbb{N}$;
- (vii) $\mathcal{F}_{\lambda+1}$ est engendré par les produits fg , où $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et $g \in \mathcal{F}_1$;
- (viii) il existe une fonction continue symétrique $\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que \mathcal{F}_1 soit engendré par $\{a\rho(x, \cdot) + b \mid x \in \Omega, a, b \in \mathbb{R}\}$.

D'autre part, Godsil ne demande pas que $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_\lambda$ soit dense dans $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$; en fait, il ne considère même pas de topologie sur Ω . Toutefois, cette condition est vérifiée dans tous les exemples classiques d'espace polynomial¹.

Les propriétés (vii) et (viii) permettent de donner des résultats sur les valeurs que prennent $\rho(x, y)$, $x, y \in X$, lorsque (X, W) est une formule de cubature de force τ . Cependant ces deux propriétés ne sont pas vérifiées dans le cas des grassmanniennes [BcCoNe02], [BcBnCo04]; c'est pourquoi nous ne les avons pas retenues.

Quant à la propriété (vi), si nous avons décidé de prendre un ensemble d'indice plus général que \mathbb{N} , c'est afin de donner une structure d'espace polynomial naturelle sur les variétés homogènes de groupes de Lie compacts (section 2.1); dans ce cas, l'ensemble d'indices est lié aux plus hauts poids des représentations irréductibles de groupe de Lie compact.

Signalons que la notion d'espace Q-polynomial de Godsil [Gods93, Chap. 15] correspond à notre notion d'*espace polynomial multiplicatif* (section 1.4), bien sûr avec toujours les conditions supplémentaires (vi) à (viii). La notion d'espace Q-polynomial de Godsil est fortement liée à la notion de *schéma d'association Q-polynomial*.

Enfin, un espace métrique polynomial au sens de Levenshtein est un espace Q-polynomial de Godsil tel que l'espace sous-jacent Ω est métrique et tel que la fonction ρ de la propriété (viii) s'écrit $\rho(x, y) = \sigma(d(x, y))$, où σ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$ à valeurs réelles.

* * *

¹Pour être plus précis, soit (Ω, ρ) un espace polynomial au sens de Godsil; si l'on suppose que Ω est localement compact et dénombrable à l'infini, que ρ est continu, et que, pour chaque $x \in \Omega$, les ouverts $U_{x, \epsilon} = \{y \in \Omega \mid |\rho(x, y) - \rho(x, x)| < \epsilon\}$ forment un système fondamental de voisinages de x , alors $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_\lambda$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence compacte.

Les résultats principaux de notre thèse sont les suivants :

Borne pour la force de design et pour le rayon de couverture des orbites de groupes opérant sur un espace homogène compact. Définissons d'abord le *groupe des automorphismes* $\text{Aut}(\Omega)$ d'un espace polynomial $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ comme étant le groupe des homéomorphismes de Ω conservant la mesure μ et les espaces \mathcal{F}_λ . Lorsque Ω est compact et que l'espace polynomial possède une certaine condition de régularité, à savoir lorsque l'espace est *bien séparé* (voir section 1.3), $\text{Aut}(\Omega)$ est un groupe de Lie compact.

Théorème 3.3.5 Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial compact connexe bien séparé. Alors on a l'alternative

- (a) Ω est un tore ;
- (b) il existe un $\tau \in \Lambda$ tel qu'aucune orbite d'aucun sous-groupe fini $\Gamma \leq \text{Aut}(\Omega)$ n'est un design de force τ .

Ce résultat a été démontré par Eiichi Bannai dans le cas de la sphère [Bann84], [Bann84b] voir aussi [HarPac04]. Notre démonstration repose sur le résultat suivant de W.M. Boothby et H.C. Wang [BooWan65], qui est une généralisation d'un résultat bien connu de Jordan : Soit G un groupe de Lie compact connexe. Alors il existe une constante K telle qu'on a la propriété suivante : Pour tout sous-groupe fini $\Gamma \leq G$, il existe un sous-groupe distingué Δ de Γ d'indice au plus K tel que Δ soit inclus dans un tore² de G .

D'autre part, nous démontrons un résultat similaire concernant les rayons de couverture des orbites de groupes finis opérant sur les variétés riemanniennes compactes.

Théorème 3.2.3 Soit Ω une variété riemannienne compacte connexe. Alors on a l'alternative

- (a) Ω est un tore ;
- (b) il existe un $\epsilon > 0$ tel que, pour tout groupe fini Γ agissant par isométrie sur Ω , et tout $x \in \Omega$, on a $\rho(\Gamma x) \geq \epsilon$.

La démonstration de ce théorème et du théorème 3.3.5 ci-dessus sont similaires ; d'ailleurs, nous établissons aussi une relation entre rayon de couverture et force. (théorème 3.1.2).

Les deux théorèmes ci-dessus se généralisent aux groupes Γ *compact* agissant sur Ω ; c'est l'objet des théorèmes 3.3.8 et 3.2.4. Pour les démontrer, nous utilisons une variante du théorème de Boothby et Wang (théorème 5.4.5), ainsi que le fait que les sous-groupes compacts connexes semi-simples d'un groupe de Lie compact sont en nombre fini à conjugaison près (proposition 5.5.5). En particulier, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.2.4 Soit Ω une variété riemannienne compacte connexe. Alors il existe un $\epsilon' > 0$ tel que, pour tout groupe compact Γ opérant par isométries sur Ω , on a l'alternative suivante :

- (a) $\Gamma \backslash \Omega$ est un tore ;
- (b) $\text{diam}(\Gamma \backslash \Omega) \geq \epsilon'$.

Dans le cas de la sphère, cela a été démontré par S. Greenwald [Gree01].

²Dans l'énoncé de Boothby et Wang, il n'est pas précisé que Δ soit inclus dans un tore, mais seulement qu'il est abélien. Toutefois, la construction donnée dans la démonstration de Boothby et Wang donne bien un sous-groupe d'un tore.

Forces de designs d'orbites de groupes finis. Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial, et soit $G = \text{Aut}(\Omega)$. Les espaces \mathcal{F}_λ sont munis d'un produit scalaire naturel $\langle f | g \rangle = \int_\Omega f(u)g(u) d\mu(u)$. On définit alors les sous-espaces \mathcal{H}_μ de \mathcal{F}_λ de façon à ce qu'on ait une décomposition orthogonale

$$\mathcal{F}_\lambda = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \mathcal{H}_\mu.$$

De plus, $\text{Aut}(\Omega)$ opère naturellement sur les espaces \mathcal{H}_μ par $(\gamma \cdot f)(u) = f(\gamma^{-1}u)$.

Théorème 3.4.3 Soit Ω un espace homogène à deux points de type compact, à savoir la sphère \mathbb{S}^m , $m \geq 2$, l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, l'espace projectif quaternionien $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, ou le plan projectif des octaves $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, muni de sa structure naturelle d'espace polynomial décrite au paragraphe 2.3.1. Soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$. Si la représentation naturelle de Γ sur \mathcal{H}_τ est irréductible, alors toutes les orbites de Γ sur Ω sont des 2τ -designs.

Ce résultat étend un résultat de [Bann79] et [GoeSei79]³ en ce qu'il exige que seule la représentation de Γ sur \mathcal{H}_τ , et non toutes les représentations de Γ sur \mathcal{H}_λ pour $\lambda \leq \tau$, soit irréductible. D'autre part, nous dérivons notre résultat d'un résultat plus technique mais plus général (lemme 3.4.1), qui permet assez aisément de trouver d'autres critères similaires.

Le cas de la sphère apparaît dans [HarPac04, Appendix].

Opérateurs de Markov sur les variétés riemanniennes symétriques. Un espace polynomial *symétrique* est un espace polynomial réel $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ tel que Ω est une variété riemannienne *symétrique*, c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \Omega$, il existe une isométrie s_x de Ω dont la dérivée en x vérifie $D_x s_x = -\text{id}_{T_x \Omega}$; de plus, on demande que $s_x \in \text{Aut}(\Omega)$. Soit (X, W) une formule de cubature sur Ω . Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on définit l'opérateur de Markov $M_{X,W}^{(\lambda)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\lambda)$ associé à (X, W) par

$$(M_{X,W}^{(\lambda)} f)(u) = \sum_{x \in X} W_x f(s_x u).$$

Théorème 4.2.4 Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial symétrique *régulier* (voir définition 4.1.3). Supposons que les espaces \mathcal{H}_λ soient irréductibles pour l'action de $\text{Aut}(\Omega)$. Soit (X, W) une formule de cubature de force 2τ sur Ω . Alors l'opérateur de Markov $M_{X,W}^{(\tau)}$ est une homothétie de \mathcal{H}_τ .

La réciproque est aussi vraie dans certains cas :

Théorème 4.3.4 Soit Ω la sphère \mathbb{S}^m , $m \geq 2$, ou l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$. Soit X un sous-ensemble fini non-vide de Ω et $W : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto W_x$, tel que $\sum_{x \in X} W_x = 1$. Dans le cas de la sphère, supposons de plus que X soit antipodal, c'est-à-dire que $X = -X$ et $W_{-x} = W_x$ pour tout $x \in X$. Si l'opérateur de Markov $M_{X,W}^{(\tau)}$ est une homothétie de \mathcal{H}_τ , alors (X, W) une formule de cubature de force 2τ sur Ω .

De plus, nous conjecturons que le résultat est aussi vrai dans la plupart des cas pour les autres espaces métriques homogènes à deux points de type compact. Le problème se réduit à une estimation de certaines sommes contenant des termes hypergéométriques.

Dans le cas de la sphère, les deux théorèmes sont montrés dans [Pach04].

* * *

³Attention, la réciproque du théorème est fautive, contrairement à ce qui est affirmé dans [GoeSei79]. Voyez [Bann84] ou [Bann84b] pour un contre-exemple.

Designs et formules de cubature construits au moyen de couches de réseaux euclidiens. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau entier. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit Λ_k la couche de norme k de Λ , c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $\langle \lambda | \lambda \rangle = k$. On considère les problèmes suivants :

- (i) Quel sont les couches de Λ qui permettent d'obtenir des designs sphériques de force donnée ?
- (ii) Peut-on obtenir des formules de cubature intéressantes en combinant plusieurs couches d'un réseau Λ , c'est-à-dire en mettant sur un ensemble $X = \bigcup_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{k_i}} \Lambda_{k_i}$ des poids $W : X \rightarrow \mathbb{R}$ convenables ?

Dans le chapitre A, nous considérons la première question dans le cas des réseaux unimodulaires de dimension au plus 24 ; en particulier, nous classons ceux dont la plus petite couche, ainsi que ceux dont toutes les couches, forment un t -design sphérique. Dans le chapitre B, nous considérons la deuxième question dans le cas de réseaux pairs ℓ -modulaires, et nous comparons la taille de plusieurs exemples de formules de cubature obtenues de cette manière avec les bornes inférieures connues.

* * *

Plan de la thèse. Dans le chapitre 1, nous définissons les notions d'*espace polynomial* et de *formules de cubature*. Les *designs* sont des cas spéciaux de formules de cubature. Nous établissons également quelques propriétés élémentaires des espaces polynomiaux.

Dans le chapitre 2, nous construisons d'abord une structure générale d'espace polynomial sur les variétés homogènes de groupes de Lie compact ; puis nous décrivons plus en détail une structure d'espace polynomial sur les grassmaniennes, structure définie dans [BcCoNe02], ainsi qu'une structure naturelle sur les espaces homogènes à deux points de type compact.

Dans le chapitre 3, nous établissons plusieurs résultats concernant l'action de groupes finis sur les variétés homogènes compactes. Le chapitre se termine par les exemples des groupes de Coxeter agissant sur les sphères.

Dans le chapitre 4, nous étudions les opérateurs de Markov pour les espaces riemanniens symétriques. Ce chapitre reprend essentiellement les résultats de [Pach04] en les plaçant dans le cadre des espaces polynomiaux.

Les appendices (chapitre 5) contiennent certains résultats, pour la plupart bien connus mais parfois légèrement adaptés, que nous utilisons dans les quatre premiers chapitres.

Enfin, les chapitres A et B constituent la deuxième partie de la thèse, à savoir la construction de designs sphériques et formules de cubature à partir de couches de réseaux euclidiens. Il s'agit de la reproduction des articles [Pach05] et [HaPaVe06].

Index des notations

Les numéros entre parenthèses renvoient aux sections ou aux paragraphes.

Ad	représentation adjointe (d'un groupe de Lie)
ad	représentation adjointe (d'une algèbre de Lie)
$\text{Aut}(\Omega)$	groupe des automorphismes de l'espace polynomial Ω , (1.1.5)
\mathbb{C}	corps des complexes
$\mathbb{C}\mathbb{P}^m$	espace projectif complexe de dimension m
$\mathcal{C}(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω à valeurs complexes
$\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$	espace des fonctions continues sur Ω à valeurs réelles
$\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)$	espace des fonctions continues sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs complexes engendré par les produits de deux fonctions continues sur Ω , (5.3.1)
$\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})$	espace des fonctions continues sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs réelles engendré par les produits de deux fonctions continues sur Ω , (5.3.1)
$\text{codiam}(G)$	codiamètre d'un groupe G opérant sur un espace métrique Ω ; diamètre de $G \backslash \Omega$, (3.2.1)
diag	matrice diagonale
$\text{diam}(\Omega)$	diamètre de l'espace métrique Ω , (3.2.1)
Exp	application exponentielle dans $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, (5.4.1)
exp	application exponentielle (d'une algèbre de Lie vers un groupe de Lie)
\mathcal{F}_λ	espace des fonctions de degré au plus λ (pour un espace polynomial), (1.1.2)
\mathcal{F}_λ^0	orthogonal de \mathcal{F}_0 dans \mathcal{F}_λ , (1.1.3)
F_λ	noyau reproduisant de \mathcal{F}_λ , (1.4.1)
$\mathcal{G}_{k,n}(\mathbb{K})$	grassmannienne de rang k sur \mathbb{K}^n , (2.2.1)
$\mathcal{G}_{k,n}^+(\mathbb{R})$	grassmannienne orientée de rang k sur \mathbb{R}^n , (2.2.1)
$\text{GL}_n(\mathbb{K})$	groupe linéaire général de rang n sur \mathbb{K}
\mathbb{H}	algèbre réelle associative des quaternions
\mathbb{H}	demi-plan de Poincaré, (A.3), (B.4)
$\mathbb{H}\mathbb{P}^m$	espace projectif quaternionien de dimension m
\mathcal{H}_λ	orthogonal des fonctions de degré inférieur à λ dans l'espace des fonctions de degré au plus λ (pour un espace polynomial), (1.1.3)
H_λ	noyau reproduisant de \mathcal{H}_λ , (1.4.1)
$\text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$	espace des fonctions polynomiales harmoniques homogènes de degré k sur \mathbb{R}^n , (2.3.2), (A.1), (B.3)
$\text{Harm}_k(\mathbb{S}^m)$	espace des restrictions à \mathbb{S}^m des éléments de $\text{Harm}_k(\mathbb{R}^{m+1})$, (2.3.2)
$\Im m, \Im$	partie imaginaire (d'un nombre complexe)
id_V	fonction identité sur V
$\text{Isom}(\Omega)$	groupe des isométries de l'espace métrique Ω
\mathbb{K}	l'un des corps \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H}
\mathbb{K}_c	l'algèbre réelle de dimension c parmi les quatre algèbres \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} et \mathbb{O} , (2.3.1)

$\mathcal{L}(V, W)$	espace des applications linéaires de V vers W
$\mathcal{L}(V)$	algèbre des endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel V
$\mathcal{L}^*(V)$	algèbre réelle des endomorphismes linéaires autoadjoints d'un espace euclidien ou hermitien V
$\mathcal{L}_{\text{RF}}(V)$	algèbre des endomorphismes linéaires de rang fini d'un espace vectoriel V
$\mathcal{L}_{\text{RF}}^*(V)$	algèbre réelle des endomorphismes linéaires autoadjoints de rang fini d'un espace euclidien ou hermitien V
$\mathcal{L}at_n(\ell)$	classe de certains réseaux euclidiens de \mathbb{R}^n de niveau ℓ , (B.4)
$L^p(\Omega, \mu), L^p(\Omega)$	espace des fonctions de puissance p intégrable sur l'espace mesuré (Ω, μ)
$\ell^2(X, W)$	espace euclidien ou hermitien des fonctions sur le code pondéré (X, W) , (1.2.3)
\mathcal{M}_ω	espace de formes modulaires de poids ω , (A.4), (B.4)
${}^0\mathcal{M}_\omega$	espace de formes modulaires paraboliques de poids ω , (B.4)
$M_{X,W}^{(\lambda)}$	opérateur de Markov du code pondéré (X, W) sur \mathcal{H}_λ , (4.1.5)
$\overline{M}^{(\lambda)}$	opérateur de Markov moyen sur \mathcal{H}_λ , (4.1.5)
$\text{Mat}_{p,q}(\mathbb{K})$	espace des matrices $p \times q$ à coefficients dans \mathbb{K}
$\text{Mat}_n(\mathbb{K})$	algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K}
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels (y compris le zéro)
\mathbb{O}	algèbre réelle alternante des octaves
$\mathbb{O}\mathbb{P}^2$	plan projectif des octaves
$\mathcal{O}(n)$	groupe orthogonal de rang n
$P(V)$	ensemble des poids d'une représentation linéaire, (2.1.2)
P_V	projecteur orthogonal sur V
$\text{Pol}_k(\mathbb{K}^n)$	espace des fonctions polynomiales homogènes de degré k sur \mathbb{K}^n , (2.3.2), (2.3.5), (A.1)
$\text{Pol}_{\leq k}(\mathbb{R}^n)$	espace des fonctions polynomiales de degré au plus k sur \mathbb{R}^n , (2.3.2)
$\text{Pol}_k(\mathbb{S}^m),$ $\text{Pol}_{\leq k}(\mathbb{S}^m)$	espace des restrictions à \mathbb{S}^m des éléments de $\text{Pol}_k(\mathbb{R}^{m+1})$, respectivement $\text{Pol}_{\leq k}(\mathbb{R}^{m+1})$, (2.3.2)
$Q^{(k)}$	polynôme de Gegenbauer normalisé de degré k , (A.8), (B.2)
\mathbb{R}	corps des réels
$\mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]_{\leq \lambda}$	espace vectoriel des polynômes réels à p indéterminées de degré total au plus λ , (2.2.4)
$\mathbb{R}\mathbb{P}^m$	espace projectif réel de dimension m
\Re, \Im	partie réelle (d'un nombre complexe)
$R_k^{(\alpha, \beta)}$	polynôme de Jacobi normalisé de paramètres (α, β) et de degré k , (5.6.1)
\mathbb{S}^m	sphère de dimension m ; sphère unité dans \mathbb{R}^{m+1}
\mathbb{S}_r^{n-1}	sphère de rayon \sqrt{r} dans \mathbb{R}^n , (A.1), (B.1)
\mathfrak{S}_n	groupe symétrique sur n lettres
s_x	symétrie centrale en x (sur un espace riemannien symétrique), (4.1)
Sh	ombre (d'un réseau unimodulaire), (A.2)

sign	signe (d'un nombre réel)
$\text{SL}_2(\mathbb{R})$	groupe linéaire spécial de rang 2 sur \mathbb{R} , (B.4)
$\mathcal{SO}(n)$	groupe orthogonal spécial de rang n
$\text{span } X$	sous-espace vectoriel engendrée par X , (5.3)
$\mathcal{SU}(n)$	groupe unitaire spécial de rang n
$\mathcal{U}(n)$	groupe unitaire de rang n
$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$	groupe unitaire de rang n sur \mathbb{K} , (2.2.1)
W_K	groupe de Weyl de K , (2.1.2)
\mathbb{Z}	anneau des entiers relatifs
$\Theta_{A,P}$	série thêta de A avec coefficient P , (A.3), (B.4)
θ	angle maximal (d'un élément de $\mathcal{U}(n)$), (5.4.1)
ϑ	angle maximal (d'un élément d'un groupe de Lie), (5.4.4)
π_λ	représentation naturelle de $\text{Aut}(\Omega)$ dans \mathcal{H}_λ , (4.1.5)
ϱ	rayon spectral, (5.4.1)
$\rho(X)$	rayon de couverture de X , (3.2.1)
G_0	composante connexe de l'identité du groupe G
A^*	dual d'un opérateur linéaire A agissant sur un espace avec produit scalaire; transposée-conjuguée d'une matrice A
V^*	dual algébrique d'un espace vectoriel V ; espace des formes linéaires sur V
$\Lambda^*, \Lambda^\sharp$	dual d'un réseau euclidien Λ , (A.2), (B.4)
$\Phi^*(x, y)$	$\overline{\Phi(y, x)}$, (5.3.1)
$\#X, X $	cardinal d'un ensemble X
$\langle f \rangle$	moyenne d'une fonction f , (1.1.3)
$\langle f \rangle_X, \langle f \rangle_{X,W}$	moyenne d'une fonction f sur un code X ou un code pondéré (X, W) , (1.2.3)
V^G	sous-espace des vecteurs G -invariants d'un G -module V , (2.2.4), (5.2.1), (A.10), (B.3)

Nous convenons en outre que les produits scalaires sur les espaces vectoriels complexes sont antilinéaires en la *première* variable.

1 Définitions et propriétés élémentaires

Dans cet chapitre, nous définissons la notion d'*espace polynomial* et de *formules de curvatures* et *designs* sur un espace polynomial, et nous donnons quelques propriétés élémentaires. Pour une discussion sur les relations et les différences entre notre notion d'espace polynomial et des notions similaires définies par d'autres auteurs, voyez l'introduction de la thèse.

1.1 Espaces polynomiaux

1.1.1 Un **monoïde abélien ordonné de type (F)** est un ensemble Λ muni d'une loi binaire $+$ associative, commutative et avec élément neutre 0 , et d'une relation d'ordre partiel \leq , vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda ; \\ \lambda \leq \mu \wedge \nu \leq \delta &\implies \lambda + \nu \leq \mu + \delta ; \\ \#\{\mu \mid \mu \leq \lambda\} &< \infty. \end{aligned}$$

On demande en outre que tout sous-ensemble fini de Λ ait une borne supérieure et une borne inférieure.

Un monoïde abélien ordonné de type (F) est **involutif** lorsqu'il est muni d'une involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ compatible avec les structures d'ordre et de monoïde abélien. Tout monoïde abélien ordonné de type (F) peut être considéré comme involutif pour l'involution triviale $\bar{\lambda} = \lambda$.

Exemples.

- Les entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, muni de l'addition et de l'ordre habituels.
- \mathbb{N} muni de l'ordre habituel, et de la loi binaire $\lambda \top \mu = \max(\lambda, \mu)$.

1.1.2 Un **espace polynomial réel** est la donnée d'un espace topologique localement compact Ω , d'une mesure de probabilité μ de support Ω (c'est-à-dire non nulle sur les ouverts non vides de Ω), et d'une famille $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'espaces vectoriels de fonctions continues sur Ω à valeurs réelles indexée par un monoïde abélien ordonné de type (F), et vérifiant les conditions suivantes :

- toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}_\lambda$ vérifie $\int_\Omega |\varphi| d\mu < \infty$;
- $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence compacte (on rappelle que la topologie de la convergence compacte est la topologie définie par la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts) ;
- $\dim \mathcal{F}_\lambda < \infty$;
- $\mathcal{F}_0 = \mathbb{R}$ (les fonctions constantes) ;
- $\mathcal{F}_{\inf(\lambda, \mu)} = \mathcal{F}_\lambda \cap \mathcal{F}_\mu$;
- $\mathcal{F}_{\sup(\lambda, \mu)} = \mathcal{F}_\lambda + \mathcal{F}_\mu$;
- $\lambda + \mu \leq \nu \implies \mathcal{F}_\lambda \mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}_\nu$.

On définit de la même manière un **espace polynomial complexe**, sauf que les éléments de \mathcal{F}_λ sont des fonctions à valeurs complexes, la famille $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est indexée par un monoïde involutif, et

- $\overline{\mathcal{F}_\lambda} = \mathcal{F}_{\bar{\lambda}}$, où $\overline{\mathcal{F}_\lambda} = \{\varphi \mid \bar{\varphi} \in \mathcal{F}_\lambda\}$.

Un espace polynomial muni d'une métrique compatible avec la topologie, est un **espace polynomial métrique**.

Remarques.

- On a $\mathcal{F}_\lambda \subseteq \mathcal{F}_\mu$ si $\lambda \leq \mu$. En effet, $\mathcal{F}_\lambda \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_\mu$ et $1 \in \mathcal{F}_0$.
- On a $\int_\Omega |\varphi|^p d\mu < \infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_\lambda$ et tout entier $p \geq 1$. En effet, on a $\varphi^p \in \mathcal{F}_{p\lambda}$ et $\int_\Omega |\psi| d\mu < \infty$ pour $\psi \in \mathcal{F}_{p\lambda}$.
- Notre notion d'espace polynomial métrique est distincte de la notion d'« espace métrique polynomial » de Levenshtein [Leven98].

1.1.3 Notations

- Nous désignons un espace polynomial par le triplet $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ et un espace polynomial métrique par le quadruplet $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, ou simplement par Ω si aucune confusion n'est possible.
- Pour $\varphi \in L^1(\Omega, \mu)$, on pose

$$\langle \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

En particulier, chaque espace \mathcal{F}_λ est muni du produit scalaire

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \overline{\varphi} \psi \rangle.$$

- Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on note \mathcal{H}_λ l'orthogonal de $\bigcup_{\mu < \lambda} \mathcal{F}_\mu$ dans \mathcal{F}_λ pour le produit scalaire ci-dessus. On a donc la décomposition en somme directe orthogonale

$$\mathcal{F}_\lambda = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \mathcal{H}_\mu.$$

- Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on note \mathcal{F}_λ^0 l'orthogonal de \mathcal{F}_0 dans \mathcal{F}_λ .

1.1.4 On définit le **complexifié** d'un espace polynomial réel $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ comme étant l'espace polynomial complexe $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_{\lambda \in \Lambda})$, où l'involution sur Λ est donnée par $\overline{\lambda} = \lambda$. Inversément, tout espace polynomial complexe $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ tel que l'involution sur Λ est donnée par $\overline{\lambda} = \lambda$ est le complexifié de l'espace polynomial réel $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))_{\lambda \in \Lambda})$.

1.1.5 Soit Ω un espace polynomial (respectivement un espace polynomial métrique). Un **automorphisme** de Ω est un homéomorphisme (respectivement une isométrie) $\gamma : \Omega \rightarrow \Omega$ préservant la mesure μ et les espaces \mathcal{F}_λ . Le groupe des automorphismes de Ω est noté $\text{Aut}(\Omega)$.

1.1.6 Exemples Dans les exemples suivants, les espaces polynomiaux peuvent être considérés comme métriques lorsque l'espace topologique sous-jacent admet une métrique naturelle, mais cela ne change pas le groupe des automorphismes. Voyez aussi la proposition 1.3.2.

1. *Sous-ensemble fermé d'un espace euclidien.* Soit $\Lambda = \mathbb{N}$ muni de l'ordre et de l'addition habituels. Soit V un espace euclidien de dimension finie, $\Omega \subseteq V$ un sous-ensemble fermé et μ une mesure de probabilité de support Ω telle que toutes les fonctions polynomiales sur \mathbb{R}^n soient de mesure finie sur Ω . Pour $\lambda \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{F}_λ l'espace des restrictions à Ω des fonctions polynomiales sur V de degré au plus λ . Le triplet $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}})$ est un espace polynomial réel. On peut considérer plusieurs cas particuliers :
 - (a) $\Omega = [0, 1]$, l'intervalle muni de la mesure de Lebesgue. On a $\text{Aut}([0, 1]) = \{\text{id}, x \mapsto 1 - x\}$.
 - (b) $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la mesure $d\mu(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$.
 - (c) $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$, la sphère euclidienne de dimension $n - 1$ munie de la mesure de Lebesgue normalisée. On a $\text{Aut}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathcal{O}(n)$.
2. *Modèle de Johnson $J(v, k)$.*
 - (a) Soit $\Lambda = \mathbb{N}$ muni de l'ordre et de l'addition habituels. Soient v et k deux entiers strictement positifs tels que $k < v$, et soit Ω l'ensemble des sous-ensembles de cardinalité k de $\{1, \dots, v\}$. Soit μ la mesure de comptage sur Ω , normalisée par $\mu(\Omega) = 1$. Pour $x \subseteq \{1, \dots, v\}$, on définit ι_x par :

$$\iota_x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \iota_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \subseteq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{F}_λ l'espace vectoriel engendré par les ι_x avec $|x| \leq \lambda$. Le groupe des automorphisme $\text{Aut}(\Omega)$ contient \mathfrak{S}_v , le groupe symétrique agissant sur $\{1, \dots, v\}$.

(b) Dans l'exemple précédent, on peut aussi prendre comme ensemble d'indices $\Lambda = \{0, 1, \dots, k\}$ muni de l'ordre habituel et de la loi binaire $\lambda \top \mu = \min(\lambda + \mu, k)$.

3. *Bord d'un arbre enraciné.* Soit $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2. Pour $n \geq 0$, soit Ω_n l'ensemble des suites $a = (a_i)_{i=0}^{n-1}$ telles que $a_i \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ pour tout i . On construit un arbre enraciné A de la manière suivante : Les sommets sont $\bigcup_{n \geq 0} \Omega_n$, et pour chaque suite $(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \Omega_{n+1}$, $n \geq 0$, il y a une arête entre le sommet $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \Omega_n$ et le sommet $(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \Omega_{n+1}$. La racine de A est la suite vide $() \in \Omega_0$. Soit $\Omega = \partial A$, le *bord* de A , qui peut être décrit comme l'ensemble des suites $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $a_i \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ pour tout i . La topologie de Ω est alors celle de la convergence simple, et Ω est compact. Une base de la topologie est constituée des ouverts

$$B(a, n) = \{b \in \Omega \mid b_k = a_k \forall k \leq n - 1\}, \quad a \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La mesure de probabilité sur Ω est l'unique mesure telle que

$$\mu(B(a, n)) = \frac{1}{m_0 m_1 \cdots m_{n-1}}.$$

Soit $\Lambda = \mathbb{N}$ muni de la loi binaire $\lambda \top \mu = \max(\lambda, \mu)$. On pose, pour $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathcal{F}_\lambda = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est constante sur les ensembles } B(a, \lambda), a \in \Omega\}.$$

On obtient ainsi un espace polynomial réel. Le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ est égal au groupe des automorphismes de l'arbre enraciné A , c'est-à-dire

$$\left\{ \sigma : \Omega \rightarrow \Omega \left| \begin{array}{l} \sigma \text{ est bijectif et, pour tout } a, b \in \Omega \text{ et } m \in \mathbb{N} \\ \text{tels que } (a_0, \dots, a_m) = (b_0, \dots, b_m), \text{ on a} \\ (\sigma(a)_0, \dots, \sigma(a)_m) = (\sigma(b)_0, \dots, \sigma(b)_m) \end{array} \right. \right\}.$$

Soit G_n le groupe décrit ci-dessus en remplaçant Ω par Ω_n . Alors $\text{Aut}(\Omega)$ est la limite projective de la suite

$$G_0 \leftarrow G_1 \leftarrow G_2 \leftarrow G_3 \leftarrow \dots,$$

et on a $G_0 = \{1\}$ et $G_{n+1} \simeq \mathfrak{S}_{m_n}^{\Omega_n} \rtimes G_n$.

4. Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial, et soit G un sous-groupe fermé de $\text{Aut}(\Omega)$. Soit $\tilde{\mu}$ l'image de la mesure μ sur $G \backslash \Omega$. Soit \mathcal{F}_λ^G le sous-espace de \mathcal{F}_λ invariant par G . Alors

$$(G \backslash \Omega, \tilde{\mu}, (\mathcal{F}_\lambda^G)_{\lambda \in \Lambda})$$

est un espace polynomial.

D'autres familles d'exemples d'espaces polynomiaux sont décrites au chapitre 2.

1.2 Codes, designs et formules de cubature

1.2.1 Soit Ω un espace topologique localement compact. Un **code** sur Ω est un sous-ensemble fini non vide de Ω . Un **code pondéré** (X, W) sur Ω est la donnée d'un sous-ensemble fini non vide X de Ω et d'une fonction $W : x \mapsto W_x$ sur X à valeurs réelles strictement positives et vérifiant

$$\sum_{x \in X} W_x = 1.$$

Les éléments $x \in X$ sont les **noeuds** et les nombres W_x sont les **poids** du code. On identifie un code X avec le code pondéré (X, W) de poids constants égaux à $|X|^{-1}$.

1.2.2 Soit (Ω, d) un espace métrique localement compact et soit X un code sur Ω . Le **rayon de couverture** de X est

$$\rho(X) := \sup_{u \in \Omega} d(u, X),$$

où $d(u, X) = \min_{x \in X} d(u, x)$.

1.2.3 Notation Pour un code pondéré (X, W) et une fonction f sur X , on pose

$$\langle f \rangle_{X, W} = \sum_{x \in X} W_x f(x).$$

De même, si X est un code, on pose $\langle f \rangle_X = |X|^{-1} \sum_{x \in X} f(x)$. D'autre part, l'espace des fonctions sur X à valeurs réelles (respectivement complexes) est un espace euclidien (respectivement hermitien) pour le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle_{X, W} = \langle \bar{f} g \rangle_{X, W};$$

cet espace est noté $\ell^2(X, W)$.

1.2.4 Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial. Une **formule de cubature de force** $\tau \in \mathbf{A}$ sur Ω est un code pondéré (X, W) sur Ω vérifiant

$$\langle f \rangle_{X, W} = \langle f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{F}_\tau,$$

ou, de façon équivalente,

$$\langle f \rangle_{X, W} = 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}_\tau^0.$$

Lorsque le code n'est pas pondéré, c'est-à-dire lorsque ses poids sont constants égaux à $|X|^{-1}$, on parle aussi de **design de force** τ ou de **τ -design**.

Remarque. Une formule de cubature sur un espace polynomial réel est identique à une formule de cubature sur l'espace polynomial complexifié correspondant.

1.2.5 Proposition Soit Ω un espace polynomial et (X, W) un code pondéré sur Ω . Si (X, W) est une formule de cubature de force $\tau + \bar{\tau}$, alors la restriction

$$\begin{aligned} r_X : \mathcal{F}_\tau &\rightarrow \ell^2(X, W) \\ \varphi &\mapsto \varphi|_X \end{aligned}$$

est une isométrie. En particulier, si (X, W) est une formule de cubature de force $\tau + \bar{\tau}$, on a $|X| \geq \dim \mathcal{F}_\tau$.

DÉMONSTRATION L'application r_X est une isométrie si et seulement si

$$\langle \bar{f} g \rangle = \langle \bar{f} g \rangle_{X, W}, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_\tau.$$

Pour $f, g \in \mathcal{F}_\tau$, on a $\bar{f} g \in \mathcal{F}_{\bar{\tau}} \mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau + \bar{\tau}}$, d'où le résultat.

Remarque. Cette proposition répond à [Gods89, Theorem 3.1] et [Gods93, Section 14, Theorem 5.1, p. 293].

1.2.6 Formules de cubature invariantes Soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$. Un code pondéré (X, W) est **Γ -invariant** lorsque, pour tout $x \in X$ et tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma x \in X$ et $W_{\gamma x} = W_x$.

Lorsque Γ opère sur un espace V , on note V^Γ le sous-espace des vecteurs de V invariants par l'action de Γ .

Lemme Soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$ et (X, W) un code Γ -invariant sur Ω . Alors (X, W) est une formule de cubature de force $\tau \in \Lambda$ si et seulement si

$$\langle f \rangle_{X, W} = \langle f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{F}_\tau^\Gamma,$$

ou, de façon équivalente,

$$\langle f \rangle_{X, W} = 0, \quad \forall f \in (\mathcal{F}_\tau^0)^\Gamma.$$

En particulier, soit $\tilde{\Omega} = \Gamma \backslash \Omega$ comme dans l'exemple 1.1.6(4), soit (X, W) un code pondéré Γ -invariant sur Ω , et soit (\tilde{X}, \tilde{W}) le code pondéré correspondant sur $\tilde{\Omega}$, où $\tilde{X} = \Gamma \backslash X$ et $\tilde{W}_{\Gamma x} = |\Gamma x| W_x$. Alors (\tilde{X}, \tilde{W}) est de force τ si et seulement si (X, W) est de force τ .

DÉMONSTRATION Pour $f \in \mathcal{F}_\tau$, on définit $f^\Gamma \in \mathcal{F}_\tau^\Gamma$ par $f^\Gamma(x) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x)$. Par Γ -invariance de (X, W) , on a

$$\sum_{x \in X} W_x f(x) = \sum_{x \in X} W_x f(\gamma x)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. En prenant la moyenne sur tous les $\gamma \in \Gamma$, on obtient

$$\sum_{x \in X} W_x f(x) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{x \in X} W_x f(\gamma x) = \sum_{x \in X} W_x f^\Gamma(x).$$

D'autre part, par Γ -invariance de la mesure μ , on a

$$\int_{\Omega} f(u) d\mu(u) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Omega} f(\gamma u) d\mu(u) = \int_{\Omega} f^\Gamma(u) d\mu(u).$$

Par conséquent, l'égalité $\sum_{x \in X} W_x f(x) = \int_{\Omega} f(u) d\mu(u)$ est équivalente à l'égalité $\sum_{x \in X} W_x f^\Gamma(x) = \int_{\Omega} f^\Gamma(u) d\mu(u)$, d'où le résultat. \square

1.2.7 Exemples

Nous reprenons les exemples 1 à 3 du paragraphe 1.1.6

- 1a. *Intervalle* $[0, 1]$. Une formule de cubature de force $\tau \in \mathbb{N}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ n'est rien d'autre qu'une *formule de quadrature d'ordre $\tau + 1$* . Cette notion a été étudiée depuis longtemps en Analyse numérique. On notera que la proposition 1.2.5 démontre le fait bien connu qu'une formule de quadrature à s nœuds est d'ordre maximal $2s$ (c'est-à-dire de force au plus $2s - 1$; en effet, pour avoir la force $2s$, il faut au moins $\dim \mathcal{F}_s = s + 1$ nœuds).
- 1c. *Sphère* \mathbb{S}^{n-1} . Les designs de force τ sur la sphère sont les *τ -designs sphériques* introduits dans [DeGoSe77] (voir aussi [GoeSei79]). La proposition 1.2.5 donne la borne classique $|X| \geq \binom{n+s-1}{n-1} + \binom{n+s-2}{n-1}$ pour les designs sphériques de force $2s$ [DeGoSe77, Theorem 5.11].
2. *Modèle de Johnson* $J(v, k)$. Les designs de force τ sur $J(v, k)$ correspondent aux τ -designs sur v points avec des blocs de taille k introduits dans [RayWil75]. La proposition 1.2.5 donne la borne $\binom{v}{s}$ pour le nombre minimal de blocs dans un $2s$ -design lorsque $s \leq \min(k, v - k)$ [RayWil75, Theorem 1].
- 3 *Bord d'un arbre enraciné*. Fixons $n \in \Lambda = (\mathbb{N}, \top)$. Pour chaque $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \Omega_n$ choisissons un $\hat{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1}, \dots) \in \Omega$. Alors $X = \{\hat{a} \mid a \in \Omega_n\}$ est un n -design de cardinalité $m_0 m_1 \cdots m_{n-1}$. Or la proposition 1.2.5 donne précisément $|X| \geq \dim \mathcal{F}_n = m_0 m_1 \cdots m_{n-1}$ pour un design de force n (noter que, ici, $2n = n$). Ainsi, nous avons construit des n -designs avec le plus petit nombre de nœuds possible.

1.3 Espaces bien séparés

1.3.1 Définition Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a une application continue

$$\epsilon^\lambda : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_\lambda^*, \quad x \mapsto \epsilon_x^\lambda \quad \text{définie par } \epsilon_x^\lambda(f) = f(x),$$

où V^* désigne le dual de l'espace vectoriel V . L'espace Ω est **λ -séparé** lorsque ϵ^λ est fermée et est un homéomorphisme sur son image. L'espace Ω est **bien séparé** lorsqu'il est λ -séparé pour un $\lambda \in \Lambda$.

Remarque. Pour qu'un espace polynomial *compact* Ω soit λ -séparé, il faut et il suffit que, pour tous $x, y \in \Omega$ distincts, il existe un $f \in \mathcal{F}_\lambda$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

1.3.2 Proposition Si Ω est bien séparé, alors $\text{Aut}(\Omega)$ s'identifie à un groupe de Lie⁴ compact, et il existe une distance sur Ω tel que $\text{Aut}(\Omega)$ soit un sous-groupe des isométries de Ω .

En effet, si Ω est λ -séparé, alors Ω s'identifie à un sous-ensemble de \mathcal{F}_λ^* via ϵ^λ , et $\text{Aut}(\Omega)$ à un sous-groupe fermé de $\mathcal{U}(\mathcal{F}_\lambda^*)$. \square

1.3.3 Exemples Nous reprenons les exemples 1 à 3 du paragraphe 1.1.6

- 1, 2. *Sous-ensemble fermé d'un espace euclidien et modèle de Johnson $J(v, k)$.* Ces espaces sont 1-séparés.
3. *Bord d'un arbre enraciné.* Cet espace n'est pas bien séparé, et son groupe d'automorphisme n'est pas un groupe de Lie (comparer avec la proposition 1.3.2).

1.4 Espaces homogènes et multiplicatifs

1.4.1 Notations Étant donné un espace polynomial $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, on note F_λ , H_λ , etc. le *noyau reproduisant* (voir définition 5.3.3) de \mathcal{F}_λ , \mathcal{H}_λ , etc.

Pour deux fonctions continues Φ et Ψ sur $\Omega \times \Omega$, on définit la *convolution* $\Phi * \Psi$ par :

$$\Phi * \Psi(x, z) := \int_{\Omega} \Phi(x, y) \Psi(y, z) d\mu(y).$$

On a $H_\lambda * H_\mu = \delta_{\lambda\mu} H_\lambda$ et $F_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} H_\mu$ (voir paragraphe 5.3.3).

1.4.2 Définitions L'espace polynomial $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est **homogène** lorsque, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la valeur $H_\lambda(x, x)$ est indépendante de $x \in \Omega$.

L'espace polynomial $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est **multiplicatif** lorsque l'espace vectoriel engendré par les H_λ , $\lambda \in \Lambda$, est stable pour la multiplication $\Phi\Psi(x, y) = \Phi(x, y)\Psi(x, y)$.

Remarque. Pour tout $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$ et $x \in \Omega$, on a $H(\gamma x, \gamma y) = H(x, y)$. Par conséquent, si $\text{Aut}(\Omega)$ est transitif, alors l'espace polynomial est homogène.

1.4.3 Proposition Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial compact, soit G un sous-groupe compact de $\text{Aut}(\Omega)$. Supposons que

- G opère généreusement transitivement sur Ω ;
- pour tout $\lambda \in \Lambda$, le G -module \mathcal{H}_λ est irréductible ou réduit à $\{0\}$.

Alors les espaces \mathcal{H}_λ sont absolument irréductibles et deux à deux inéquivalents en tant que G -modules, et $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est un espace polynomial homogène et multiplicatif.

DÉMONSTRATION C'est une conséquence directe du théorème 5.3.5. \square

⁴Un groupe discret est considéré comme un groupe de Lie de dimension 0.

1.4.4 Exemples Nous reprenons les exemples 1 à 3 du paragraphe 1.1.6

- 1a. *Intervalle* $[0, 1]$. Cet espace n'est ni homogène, ni multiplicatif.
- 1c. *Sphère* \mathbb{S}^{n-1} . On a $\text{Aut}(\Omega) = \mathcal{O}(n)$. Comme $\mathcal{O}(n)$ est transitif sur \mathbb{S}^{n-1} , cet espace est homogène. On montrera dans le chapitre suivant qu'il est multiplicatif (théorème 2.2.5).
2. *Modèle de Johnson* $J(v, k)$. Nous allons appliquer la proposition 1.4.3 pour montrer que cet espace est homogène et multiplicatif.
 Pour commencer, remarquons que $\text{Aut}(\Omega)$ contient \mathfrak{S}_v , le groupe des permutations de $\{1, \dots, v\}$, lequel opère généreusement transitivement sur Ω .
 Soit $e = \{1, \dots, k\} \in \Omega$. Le sous-groupe de $G = \mathfrak{S}_v$ fixant e est $H = \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{v-k}$.

Lemme On a

$$\mathcal{F}_\lambda^H = \{y \mapsto f(|e \cap y|) \mid f \text{ polynôme de degré au plus } \lambda\}.$$

DÉMONSTRATION

\subseteq : Pour $x \subseteq \{1, \dots, v\}$ de cardinalité au plus λ , on a

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} (h * \iota_x)(y) = \frac{\binom{|e \cap y|}{|e \cap x|} \binom{k - |e \cap y|}{|x| - |e \cap x|}}{\binom{k}{|e \cap x|} \binom{v - k}{|x| - |e \cap x|}},$$

qui est un polynôme en $|e \cap y|$ de degré au plus $|x| \leq \lambda$.

\supseteq : On a

$$|e \cap y|^\lambda = \sum_{i_1 + \dots + i_k = \lambda} \binom{\lambda}{i_1 \dots i_k} \iota_{\{1\}}^{i_1} \dots \iota_{\{k\}}^{i_k} \in \mathcal{F}_\lambda. \quad \square$$

Comme $\mathcal{F}_\lambda^H = \mathcal{F}_{\lambda-1}^H \oplus \mathcal{H}_\lambda^H$ et que $\dim \mathcal{F}_\lambda^H = \min(\lambda + 1, k + 1)$, on a

$$\dim \mathcal{H}_\lambda^H = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par la proposition 5.2.3, les \mathcal{H}_λ sont réduits à $\{0\}$ ou irréductibles. Selon la proposition 1.4.3, l'espace polynomial est donc multiplicatif.

Remarque. On peut montrer que

$$F_\lambda(x, y) = \binom{v}{k} \sum_{i=0}^s \binom{v-s-i}{k-i}^{-1} \binom{s-k}{s-i} \binom{|x \cap y|}{i}.$$

Voyez par exemple [Gods93, p. 327].

3. *Bord d'un arbre enraciné.* On a

$$F_\lambda(x, y) = \begin{cases} m_0 m_1 \dots m_{\lambda-1} & \text{si } y \in B(x, \lambda), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, cet espace polynomial est homogène et multiplicatif. Plus précisément, on a

$$F_\lambda F_\mu = m_0 m_1 \dots m_{\lambda-1} F_\mu \quad \text{si } \lambda \leq \mu,$$

d'où l'on déduit, en utilisant $H_\lambda = F_\lambda - F_{\lambda-1}$,

$$H_\lambda H_\mu = \begin{cases} H_\mu & \text{si } \lambda = 0, \\ m_0 m_1 \dots m_{\lambda-2} (m_{\lambda-1} - 1) H_\mu & \text{si } 1 \leq \lambda < \mu, \\ m_0 m_1 \dots m_{\lambda-2} (m_{\lambda-1} - 2) H_\lambda \\ \quad + m_0 m_1 \dots m_{\lambda-2} (m_{\lambda-1} - 1) \sum_{\nu < \lambda} H_\nu & \text{si } 1 \leq \lambda = \mu. \end{cases}$$

2 Variétés homogènes de groupes de Lie compacts

Ce chapitre est consacré à la description de trois familles d'exemples d'espaces polynomiaux.

2.1 Variétés homogènes de groupes de Lie compacts

Dans cette section, nous donnons une construction générale d'espaces polynomiaux compacts connexes sur les variétés homogènes de groupes de Lie compacts.

Les deux premiers paragraphes de cette section sont des rappels sur la théorie des représentations de groupes de Lie compacts ; on trouvera plus de détails dans tout bon livre traitant des représentations des groupes de Lie, comme par exemple [FulHar91]. Plusieurs de nos notations ont été reprises de [Bour81].

2.1.1 Poids et racines Soit K un groupe de Lie compact connexe, \mathfrak{k} son algèbre de Lie, T un tore maximal de K , et \mathfrak{t} son algèbre de Lie, qui est une algèbre de Cartan de \mathfrak{k} . Notons $X(T)$ l'ensemble des morphismes de T dans \mathbb{C}^* , qui est un groupe abélien pour l'addition

$$(\lambda + \mu)(t) = \lambda(t) \mu(t).$$

Pour une algèbre de Lie réelle \mathfrak{h} , on note $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ l'algèbre complexifiée correspondante.

Soit V un K -module complexe de dimension finie ; on a une décomposition $V = \sum_{\lambda \in X(T)} V_{(\lambda)}$, où $V_{(\lambda)}$ est le sous-espace des $v \in V$ tels que $t v = \lambda(t) v$ pour tout $t \in T$. Les $\lambda \in X(T)$ tels que $V_{(\lambda)}$ est non nul sont les *poids* de V ; leur ensemble est noté $P(V)$. Le sous-espace $V_{(\lambda)}$ de V est le *sous-espace propre* de poids λ et ses éléments non-nuls sont les *vecteurs propres* de poids λ .

Soit $\text{Ad} : K \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{k})$ la représentation adjointe et soit $R = P(\text{Ad}) \setminus \{0\}$ le *système de racines* de K (relativement à T). On a une décomposition $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{k}_{\alpha}$, où \mathfrak{k}_{α} est l'espace propre de poids α pour la représentation adjointe ; on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k}_{\alpha} = 1$. Soit X_R le sous-groupe de $X(T)$ engendré par R .

Soit $\Delta \subseteq R$ un sous-ensemble de racines *simples*, c'est-à-dire tel que tout $\beta \in R$ s'écrive de manière unique $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} \alpha$, où les c_{α} sont des entiers soit tous positifs, soit tous négatifs. On a un ordre partiel sur $X(T)$ donné par

$$\lambda \geq \mu \iff \begin{array}{l} \text{il existe des entiers } c > 0 \text{ et } c_{\alpha} \geq 0, \alpha \in \Delta, \\ \text{tels que } c(\lambda - \mu) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} \alpha. \end{array}$$

On note $X_+ = \{\lambda \in X(T) \mid \lambda \geq 0\}$ et $R_+ = X_+ \cap R$.

2.1.2 Poids dominants La plupart des affirmations données dans ce paragraphe se déduisent de [FulHar91, Theorem 4.18, p. 205], en se rappelant que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact est la somme directe d'algèbres de Lie simples et d'une algèbre de Lie abélienne.

On reprend les notations du paragraphe précédent. Soit V un K -module complexe de dimension finie et $V = \sum_{\lambda \in P(V)} V_{(\lambda)}$ sa décomposition en sous-espaces propres. L'algèbre de Lie \mathfrak{k} opère naturellement sur V , et pour toute racine $\alpha \in R$ on a $\mathfrak{k}_{\alpha} V_{(\lambda)} \subseteq V_{(\lambda + \alpha)}$. On appelle *plus haut poids* de V tout poids $\lambda \in P(V)$ pour lequel il existe un $v \in V_{(\lambda)}$ non-nul, appelé *vecteur de plus haut poids*, tel que $\mathfrak{k}_{\alpha} v = \{0\}$ pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$. Les *poids dominants* sont les poids $\lambda \in X(T)$ qui apparaissent comme plus haut poids d'un K -module ; leur ensemble est noté X_{++} .

Si λ et μ sont deux poids dominants, alors $\lambda + \mu$ est aussi un poids dominant, ce qui munit X_{++} d'une structure de monoïde abélien ordonné. Lorsque K est semi-simple, on a $X_{++} \subseteq X_+$, c'est-à-dire $\lambda \geq 0$ pour tout $\lambda \in X_{++}$. Tout K -module complexe irréductible possède un unique plus haut poids, et, pour tout poids dominant $\lambda \in X_{++}$, il existe, à équivalence près, un unique K -module complexe irréductible de plus haut poids λ , noté V_{λ} .

Soit $W_K = N_K(T)/T$ le groupe de Weyl de K relativement à T ; ce groupe opère par conjugaison sur T , donc sur $X(T)$. L'ensemble X_{++} des poids dominants est un domaine fondamental pour l'action de W_K sur $X(T)$.

Pour un sous-ensemble fini non-vide E de $X(T)$, soit $\text{Conv}(E)$ l'enveloppe convexe de E dans $X(T)$, c'est-à-dire l'ensemble des $\mu \in X(T)$ pour lesquels il existe des entiers $c > 0$ et $c_\lambda \geq 0$, $\lambda \in E$, tels que $\sum_{\lambda \in E} c_\lambda = c$ et $c\mu = \sum_{\lambda \in E} c_\lambda \lambda$. On a les propriétés suivantes :

- (i) $P(V_\lambda) = \text{Conv}(W_K \lambda) \cap (X_R + \lambda)$, où X_R est le sous-groupe de $X(T)$ engendré par l'ensemble R des racines;
- (ii) $P(V_{\lambda+\mu}) = P(V_\lambda) + P(V_\mu)$;
- (iii) pour $\lambda, \mu \in X_{++}$, les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\lambda \leq \mu$,
 - (b) $\lambda \in \text{Conv}(P(V_\mu))$,
 - (c) $\text{Conv}(P(V_\lambda)) \subseteq \text{Conv}(P(V_\mu))$.

2.1.3 Soit G un groupe de Lie compact et soit $K = [G_0, G_0]$ la partie semi-simple de la composante connexe de l'identité; K est distingué dans G . On reprend les notations des paragraphes précédents.

Soit V un K -module; pour tout $g \in G$, on construit un K -module gV ainsi : en tant qu'espace vectoriel, gV est une copie de V avec un isomorphisme donné par $V \rightarrow gV$, $v \mapsto gv$, et K opère sur gV par

$$k(gv) = g((g^{-1}kg)v).$$

On a $g(hV) \simeq (gh)V$ pour tout $g, h \in G$.

Lemme Soient G et K comme ci-dessus. On reprend, pour K , les notations des deux paragraphes précédents.

- (i) On a une involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ sur X_{++} donnée par

$$V_{\bar{\lambda}} \simeq V_\lambda^*,$$

où $V_\lambda^* = \mathcal{L}(V_\lambda, \mathbb{C})$, qui est compatible avec la structure de monoïde abélien ordonné de X_{++} .

- (ii) On a une action de G sur X_{++} donnée par

$$V_{g*\lambda} \simeq gV_\lambda,$$

qui est compatible avec la structure de monoïde abélien ordonné involutif de X_{++} .⁵

DÉMONSTRATION (i) Soient $\lambda, \mu \in X_{++}$. On a $P(V_{\bar{\lambda}}) = -P(V_\lambda)$, d'où

$$\begin{aligned} \lambda \leq \mu &\iff \text{Conv}(P(V_\lambda)) \subseteq \text{Conv}(P(V_\mu)) \\ &\iff \text{Conv}(P(V_{\bar{\lambda}})) \subseteq \text{Conv}(P(V_{\bar{\mu}})) \iff \bar{\lambda} \leq \bar{\mu}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$P(V_{\overline{\lambda+\mu}}) = -P(V_{\lambda+\mu}) = -P(V_\lambda) - P(V_\mu) = P(V_{\bar{\lambda}}) + P(V_{\bar{\mu}}) = P(V_{\bar{\lambda}+\bar{\mu}}),$$

d'où $\overline{\lambda+\mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$.

(ii) On a clairement $(gh)*\lambda = g*(h*\lambda)$ et $g*\bar{\lambda} = \overline{g*\lambda}$. Il reste à voir la compatibilité avec l'ordre et l'addition.

⁵Remarquez que cette action est triviale lorsque G est connexe. Un exemple où cette action n'est pas triviale est $SU(3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où l'élément non-trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par $z \mapsto \bar{z}$ sur \mathbb{C}^3 .

On rappelle que K est distingué dans G . Comme $k * \lambda = \lambda$ pour tout $k \in K$ et tout $\lambda \in X_{++}$, l'action d'un élément $g \in G$ sur X_{++} dépend uniquement de sa classe modulo K . D'autre part, pour $g \in G$, le sous-groupe gTg^{-1} est un tore de K , et il existe un $k \in K$ tel que $gTg^{-1} = kTk^{-1}$. Par suite, l'élément $g' = k^{-1}g$ vérifie $g'Tg'^{-1} = T$ et $g' * \lambda = g * \lambda$ pour tout $\lambda \in X_{++}$. Ainsi, il suffit de vérifier la compatibilité avec l'ordre et l'addition pour les éléments $g' \in N_G(T)$.

Le groupe $N_G(T)$ opère sur $X(T)$ par $(g\lambda)(t) = \lambda(g^{-1}tg)$, et on a $P(gV) = gP(V)$ pour $g \in N_G(T)$. Soient $g \in N_G(T)$ et $\lambda, \mu \in X_{++}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \leq \mu &\iff \text{Conv}(P(V_\lambda)) \subseteq \text{Conv}(P(V_\mu)) \\ &\iff \text{Conv}(gP(V_\lambda)) \subseteq \text{Conv}(gP(V_\mu)) \iff \text{Conv}(P(gV_\lambda)) \subseteq \text{Conv}(P(gV_\mu)) \\ &\iff \text{Conv}(P(V_{g*\lambda})) \subseteq \text{Conv}(P(V_{g*\mu})) \iff g * \lambda \leq g * \mu. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} P(V_{g*(\lambda+\mu)}) &= gP(V_{\lambda+\mu}) = g(P(V_\lambda) + P(V_\mu)) \\ &= gP(V_\lambda) + gP(V_\mu) = P(V_{g*\lambda}) + P(V_{g*\mu}) = P(V_{g*\lambda+g*\mu}), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $g * (\lambda + \mu) = g * \lambda + g * \mu$, ce qui achève la démonstration. \square

2.1.4 Structure d'espace polynomial sur les variétés homogènes de groupe de Lie compact Soit Ω une variété connexe sur laquelle opère transitivement un groupe de Lie compact G ; soit μ la mesure de probabilité sur Ω image de la mesure de Haar de G . Soit K la partie semi-simple de la composante connexe de l'identité de G . Supposons que l'on ait la condition suivante :

$$\begin{aligned} &\text{la partie semi-simple } K \text{ de la composante connexe} \\ &\text{de l'identité de } G \text{ est transitive sur } \Omega \end{aligned} \quad (*)$$

Cette condition sera toujours vérifiée si la composante connexe de l'identité de G est semi-simple.

On reprend les notations des trois paragraphes précédents. Soit Λ_0 l'ensemble des poids dominants de K qui apparaissent comme plus haut poids d'un sous- K -module de dimension finie de $\mathcal{C}(\Omega)$. Pour V et W deux sous- K -modules de $\mathcal{C}(\Omega)$, on note VW le sous- K -module engendré par les produits vw avec $v \in V$ et $w \in W$. L'ensemble Λ_0 est fermé pour l'addition ainsi que pour l'involution et l'action de G sur X_{++} définies au paragraphe précédent; cela découle immédiatement de $P(\overline{V}) = -P(V)$ et $P(VW) = P(V) + P(W)$ pour des sous- K -modules V et W de $\mathcal{C}(\Omega)$, et du fait que le produit de deux vecteurs de plus haut poids dans $\mathcal{C}(\Omega)$ est un vecteur de plus haut poids.

Pour E un sous-ensemble fini de X_{++} , on note $\text{Max}(E)$ l'ensemble de ses éléments maximaux, c'est-à-dire des éléments $\lambda \in E$ tels que pour tout $\mu \in E$ on a $\lambda \leq \mu \Rightarrow \lambda = \mu$.

Soit Λ l'ensemble des parties finies non-vides π de Λ_0 invariantes par l'action de G et telles qu'on ait

$$\lambda, \mu \in \pi \wedge \lambda \leq \mu \implies \lambda = \mu,$$

c'est-à-dire telles que $\text{Max}(\pi) = \pi$. Pour $\pi, \rho \in \Lambda$, on définit

$$\pi + \rho = \text{Max}(\{\lambda + \mu \mid \lambda \in \pi, \mu \in \rho\}).$$

On ordonne Λ par

$$\pi \leq \rho \iff \forall \lambda \in \pi, \exists \mu \in \rho, \lambda \leq \mu.$$

Cela munit Λ d'une structure de monoïde abélien ordonné de type (F) (définition 1.1.1). On note encore Λ' le sous-monoïde de Λ constitué des éléments invariants par l'involution $\pi \mapsto \overline{\pi}$.

Pour tout $\pi \in \Lambda$, on note \mathcal{F}_π le plus petit sous- G -module de $\mathcal{C}(\Omega)$ dont tous les plus hauts poids λ en tant que K -module vérifient $\lambda \leq \mu$ pour un $\mu \in \pi$.

De la discussion depuis le début de la section, il suit :

Proposition Le triplet $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\pi)_{\pi \in \Lambda})$ est un espace polynomial complexe homogène. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'espace $\mathcal{H}_{G*\lambda}$ est le plus petit sous- G -module de $\mathcal{C}(\Omega)$ contenant tous les vecteurs de plus haut poids $g * \lambda$ pour tout $g \in G$, et $\mathcal{H}_\pi = \{0\}$ si π n'est pas de la forme $G * \lambda$. Enfin, on a $\text{Aut}(\Omega) \geq G$.

De même, $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\pi \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))_{\pi \in \Lambda'})$ est un espace polynomial réel homogène, avec les mêmes propriétés *mutatis mutandis*. \square

2.1.5 Proposition Soit Ω une variété sur laquelle opère transitivement un groupe de Lie compact G ; soit μ la mesure de probabilité sur Ω image de la mesure de Haar de G . Supposons que la condition (*) du paragraphe 2.1.4 soit vérifiée. Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\pi)_{\pi \in \Lambda})$ l'espace polynomial construit au paragraphe précédent.

- (i) Si l'une des conditions du théorème 5.3.4 est vérifiée, — c'est-à-dire si (G, G_e) est une paire de Gelfand, où G_e est le stabilisateur d'un point $e \in \Omega$, — alors $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\pi)_{\pi \in \Lambda})$ est un espace polynomial homogène multiplicatif.
- (ii) Si G opère généreusement transitivement sur Ω , — autrement dit, si (G, G_e) est une paire de Gelfand symétrique, pour un point $e \in \Omega$: voyez le théorème 5.3.5, — alors $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\pi \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))_{\pi \in \Lambda})$ est un espace polynomial réel homogène et multiplicatif.

DÉMONSTRATION C'est une conséquence directe des théorèmes 5.3.4 et 5.3.5 et du fait que les sous-espaces \mathcal{H}_π non-nuls sont les composantes isotypiques de $\mathcal{C}(\Omega)$ en tant que G -module. Pour le point (ii), on note en outre que $\Lambda' = \Lambda$ et que $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\pi)_{\pi \in \Lambda})$ est le complexifié (voir définition 1.1.4) de l'espace $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\pi \cap \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))_{\pi \in \Lambda})$. \square

2.1.6 Exemples

1. Si $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$, $n \geq 3$, et $G = \mathcal{O}(n)$, alors $K = \mathcal{SO}(n)$, et $\Lambda \simeq \Lambda_0 \simeq \mathbb{N}$, et l'espace polynomial construit au paragraphe 2.1.4 est le même que celui de l'exemple 1.1.6(1c).
2. Plus généralement, si Ω est un espace homogène à deux points de type compact (voir paragraphe 2.3.1) et si $G = \text{Isom}(\Omega)$, le groupe des isométries de Ω , alors K est la composante connexe de l'identité de G , on a $\Lambda \simeq \Lambda_0 \simeq \mathbb{N}$, et on obtient sur Ω une structure d'espace polynomial réel homogène et multiplicatif. Ces espaces sont décrits plus en détail à la section 2.3.
3. Soient n et p deux entiers strictement positifs tels que $n \geq 3$ et $p \leq n/2$. Soit $\Omega = \mathcal{G}_{n,p}^+(\mathbb{R})$ l'espace des sous-espaces orientés de \mathbb{R}^n de dimension p (voir section 2.2.1) et soit $G = \mathcal{O}(n)$. Alors $K = \mathcal{SO}(n)$, et Λ_0 est équivalent au monoïde formé des suites décroissantes $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p)$ d'entiers positifs de même parité, muni de l'ordre

$$\lambda \leq \mu \iff \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k \mu_i \quad \forall k \leq p$$

(voir par exemple [GooWal98, §12.3.2, pp. 544–547]). On obtient ainsi un espace polynomial réel Ω , homogène et multiplicatif.

4. Dans la situation de l'exemple précédent, soit Λ'' le monoïde abélien formé des entiers positifs pairs et des entiers impairs plus grands ou égaux à p . Soit, pour $k \in \Lambda''$,

$$\lambda(k) = \left\{ \lambda \in \Lambda_0 \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i = k \right\} \in \Lambda.$$

On a $\lambda(k+l) \geq \lambda(k) + \lambda(l)$. Alors $\tilde{\Omega} = (\Omega, \mu, (\mathcal{F}_{\lambda(k)})_{k \in \Lambda''})$ est un espace polynomial réel, et une formule de cubature de force k sur $\tilde{\Omega}$ correspond à une formule

de cubature de force $\lambda(k)$ sur Ω . Notons que, en général, l'espace $\tilde{\Omega}$ n'est pas multiplicatif.

Les designs pour l'espace polynomial $\tilde{\Omega}$ sont les mêmes que les designs sur les grassmanniennes de [BcCoNe02].

2.2 Grassmanniennes

Dans cette section, nous définissons une structure d'espace polynomial réel sur les grassmanniennes réelles, complexes et quaternioniennes. Dans le cas des grassmanniennes réelles orientées, cette structure correspond à celle décrite dans l'exemple 2.1.6(4).

Les designs sur les grassmanniennes réelles ont été définis et étudiés dans [BcCoNe02] et [BcBnCo04].

2.2.1 Définitions et notations Soit \mathbb{K} l'un des corps \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} . On considère \mathbb{K}^n comme un espace vectoriel avec multiplication par les scalaires à droite. Les transformations linéaires de \mathbb{K}^m dans \mathbb{K}^n s'identifient aux matrices de dimension $n \times m$ à coefficients dans \mathbb{K} , dont l'ensemble est noté $\text{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$. On munit \mathbb{K}^n d'un produit scalaire défini par

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

Un endomorphisme linéaire qui conserve le produit scalaire est *unitaire*. On note $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ le groupe des transformations unitaires de \mathbb{K}^n . On identifie de façon naturelle $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(q)$ à un sous-groupe de $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p+q)$. On note aussi $\mathcal{O}(n) = \mathcal{U}_{\mathbb{R}}(n)$, $\mathcal{U}(n) = \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(n)$ et $\mathcal{S}p(n) = \mathcal{U}_{\mathbb{H}}(n)$. Enfin, $\mathcal{SO}(n)$ est le groupe des éléments de $\mathcal{O}(n)$ de déterminant 1.

On identifie \mathbb{C} à une sous-algèbre de $\text{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ par

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et \mathbb{H} à une sous-algèbre de $\text{Mat}_{4,4}(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & i &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ j &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & k &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cela donne une identification naturelle de $\text{Mat}_{n,m}(\mathbb{C})$, respectivement $\text{Mat}_{n,m}(\mathbb{H})$ à une sous-algèbre de $\text{Mat}_{2n,2m}(\mathbb{R})$, respectivement $\text{Mat}_{4n,4m}(\mathbb{R})$.

Soient n et p des entiers tels que $1 \leq p \leq n/2$. La *grassmannienne* de rang p dans \mathbb{K}^n , notée $\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des sous-espaces \mathbb{K} -linéaires de dimension p dans \mathbb{K}^n . On a une identification

$$\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n) / (\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n-p))$$

obtenue ainsi : À la classe de $A \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ modulo $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n-p)$, on associe le sous-espace de \mathbb{K}^n engendré par les p premières colonnes de A . Le groupe $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ agit naturellement sur l'espace $\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})$.

La *grassmannienne orientée* de rang p dans \mathbb{R}^n , notée $\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})$, est l'ensemble des sous-espaces \mathbb{R} -linéaires orientés de dimension p dans \mathbb{R}^n . Comme dans le cas de la grassmannienne non-orientée, on a une identification

$$\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R}) = \mathcal{O}(n) / (\mathcal{SO}(p) \times \mathcal{O}(n-p)).$$

On munit $\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})$ d'une structure d'espace polynomial en suivant les exemples 1.1.6(1, 4). Plus précisément, pour $\lambda \in \mathbb{N}$, on définit d'abord $\mathcal{F}_\lambda(\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}))$ comme l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus λ sur $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ vu comme espace polynomial *réel*, ou, de façon équivalente, vu comme sous-espace de $\text{Mat}_{cn,cn}(\mathbb{R})$, où $c = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$; puis $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n))$ comme l'espace des restrictions à $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ des éléments de $\mathcal{F}_\lambda(\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}))$. Enfin, en utilisant l'identification $\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)/(\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n-p))$, on définit $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}))$ comme l'espace des éléments de $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n))$ qui sont invariants sous l'action de $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n-p)$ par multiplication à droite. On munit $\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace polynomial de la même manière.

On a

$$\text{Aut}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})) \supseteq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n) \quad \text{et} \quad \text{Aut}(\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})) \supseteq \mathcal{O}(n).$$

2.2.2 Le résultat suivant d'algèbre linéaire nous est utile pour décrire les noyaux reproduisants de $\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}))$, définis dans la section 1.4.

Proposition

- (i) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} et soient $0 \leq p \leq q$ deux entiers. Soit $A \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p+q)$. Alors il existe $X, Y \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(q)$ tels que

$$X^* A Y = \begin{pmatrix} D & -E & 0 \\ E & D & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-p} \end{pmatrix},$$

où D et E sont des matrices diagonales de dimension p à coefficients réels positifs. De plus, les matrices D et E sont uniques à permutation des coefficients près.

- (ii) Soient $0 \leq p \leq q$ deux entiers. Soit $A \in \mathcal{O}(p+q)$. Alors il existe $X, Y \in \mathcal{SO}(p) \times \mathcal{O}(q)$ tels que

$$X^* A Y = \begin{pmatrix} D & -E & 0 \\ E & D & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-p} \end{pmatrix},$$

où D et E sont des matrices diagonales de dimension p à coefficients réels (non nécessairement positifs), et les matrices D et E sont uniques à permutation des coefficients et à inversion d'un nombre pair de signes près (de sorte que les signes de $\det D$ et $\det E$ restent inchangés).

DÉMONSTRATION Nous ne démontrons que le point (i), car le point (ii) en découle immédiatement. On procède par récurrence sur $p+q$.

Écrivons $A = \begin{pmatrix} F & G \\ H & J \end{pmatrix}$, où $F \in \text{Mat}_{p,p}(\mathbb{K})$, $G \in \text{Mat}_{p,q}(\mathbb{K})$, $H \in \text{Mat}_{q,p}(\mathbb{K})$, $J \in \text{Mat}_{q,q}(\mathbb{K})$.

On a $\|F\|_2 \leq \|A\|_2 = 1$, donc, pour tout $v \in \mathbb{K}^p$, on a $\|Fv\|_2 \leq \|v\|_2$. Supposons d'abord que, pour tout $v \in \mathbb{K}^p$, $\|Fv\|_2 = \|v\|_2$ (cela inclut le cas $p=0$). Dans ce cas, on vérifie que $F \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p)$, $J \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(q)$, $G=0$ et $H=0$. On choisit alors $X=A$ et $Y=I_{p+q}$.

Dans le cas contraire, soit $S = \{u \in \mathbb{K}^p \mid \langle u \mid u \rangle = 1\}$ (qui est compact), et soit $v \in S$ un minimum de la fonction $S \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \langle Fu \mid Fu \rangle$; on a $\|Fv\|_2 < 1$. On vérifie que, pour tout $u \in \mathbb{K}^p$ orthogonal à v , le vecteur Fu est orthogonal à Fv . Soit $w = Fv/\|Fv\|$ lorsque $Fv \neq 0$, ou w un vecteur unitaire orthogonal à $\{Fu \mid u \perp v\}$ lorsque $Fv = 0$. Soient $M \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p)$ une matrice unitaire dont la première colonne est v , et $N \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p)$ une matrice unitaire la première colonne est w . Par construction, on a

$$N^* F M = \begin{pmatrix} \|Fv\| & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } F_1 \in \text{Mat}_{p-1,p-1}(\mathbb{K}).$$

Soit $P \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(q)$ tel que P^* envoie la première colonne de G^*N sur un vecteur du type $(-\alpha, 0, \dots, 0)^T$ avec α un nombre réel positif. Soit $Q \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(q)$ tel que Q^* envoie la

première colonne de HM sur un vecteur du type $(\beta, 0, \dots, 0)^\top$ avec β un nombre réel positif. Posons $X_0 = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. Par construction,

$$X_0^* A Y_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} \|Fv\| & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & F_1 & u_1 & G_1 \\ \hline \beta & u_2^* & \gamma & u_3^* \\ 0 & H_1 & u_4 & J_1 \end{array} \right).$$

En utilisant les relations d'orthonormalité entre les lignes et les colonnes de $X_0^* A Y_0$, on voit que $\alpha^2 = \beta^2 = 1 - \|Fv\|^2 > 0$, que $\gamma = \|Fv\|$, et que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont nuls. Il s'ensuit que $A_1 = \begin{pmatrix} F_1 & G_1 \\ H_1 & J_1 \end{pmatrix}$ est unitaire. Par récurrence, il existe $X_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p-1) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(q-1)$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p-1) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(q-1)$ tels que

$$X_1^* A_1 Y_1 = \begin{pmatrix} D_1 & -E_1 & 0 \\ E_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-p} \end{pmatrix},$$

où D_1 et E_1 sont des matrices diagonales à coefficients réels positifs. On pose alors

$$X = X_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & Q_1 \end{pmatrix}, \quad Y = Y_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & P_1 \end{pmatrix},$$

et $X^* A Y$ est bien de la forme désirée. Cela termine la démonstration de l'existence.

Pour l'unicité, il suffit de remarquer que les carrés des coefficients de D sont les valeurs propres de $F^* F$ et que les coefficients de E sont déterminés par ceux de D . \square

2.2.3 On définit une application

$$\rho : \mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \{t \in \mathbb{R}^p \mid 1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p \geq 0\}$$

de la manière suivante : Soient $a, b \in \mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})$ et A et $B \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ des représentants de a et b respectivement. Par le théorème 2.2.2, il existe des matrices $X, Y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{U}_{n-p}(\mathbb{K})$ et des uniques coefficients $1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_p \geq 0$ tels que

$$X^* A^* B Y = \begin{pmatrix} D & -E & 0 \\ E & D & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2p} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } D = \text{diag}(t_1, \dots, t_p).$$

On pose alors

$$\rho(a, b) = (t_1, t_2, \dots, t_n).$$

On vérifie aisément que ρ est bien défini. De plus, on a les propriétés suivantes :

- (i) ρ est surjectif;
- (ii) $\rho(a, b) = (1, \dots, 1)$ si et seulement si $a = b$;
- (iii) $\rho(ga, gb) = \rho(a, b)$ pour tout $g \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$.

On définit de manière similaire une application

$$\rho : \mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{K}) \rightarrow \{t \in \mathbb{R}^p \mid 1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{p-1} \geq |t_p|\}$$

vérifiant les mêmes propriétés.

Remarque. Géométriquement, les t_i correspondent aux cosinus des *angles principaux* entre a et b .

2.2.4 On note $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]_{\leq \lambda}$ l'espace vectoriel des polynômes réels à p indéterminées de degré total au plus λ . On fait agir $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ diagonalement sur $\mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})) \otimes \mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}))$, et on fait agir $\mathbb{Z}_2^p \rtimes \mathfrak{S}_p$ sur $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]$ par permutation des variables et changements de signes. On note $\mathbb{Z}_2^{p-1} \rtimes \mathfrak{S}_p$ le sous-groupe des éléments de $\mathbb{Z}_2^p \rtimes \mathfrak{S}_p$ qui induisent un nombre pair de changements de signes. On rappelle que, lorsque un groupe G opère sur un espace vectoriel V , le sous-espace des vecteurs de G invariants par l'action de G est noté V^G .

Proposition Il y a des isomorphismes linéaires

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]_{\leq \lambda}^{\mathbb{Z}_2^p \rtimes \mathfrak{S}_p} &\longrightarrow (\mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})) \otimes \mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})))^{\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)} \\ \text{et } \alpha : \mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]_{\leq \lambda}^{\mathbb{Z}_2^{p-1} \rtimes \mathfrak{S}_p} &\longrightarrow (\mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})))^{\mathcal{O}(n)} \end{aligned}$$

définis par

$$\alpha(\varphi)(a, b) = \varphi(\rho(a, b)).$$

DÉMONSTRATION Montrons d'abord que, pour $\varphi \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]_{\leq \lambda}^{\mathbb{Z}_2^p \rtimes \mathfrak{S}_p}$, on a bien $\alpha(\varphi) \in (\mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})) \otimes \mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})))^{\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)}$.

Soient $a, b \in \mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n) / (\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n-p))$ et A et $B \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ des représentants de a et b . Selon le théorème 2.2.2, il existe $X, Y \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n-p)$ tels que

$$X^* A^* B Y = \begin{pmatrix} D & -E & 0 \\ E & D & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2p} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } D = \text{diag}(t_1, \dots, t_p) \text{ et } E = \text{diag}\left(\sqrt{1-t_1^2}, \dots, \sqrt{1-t_p^2}\right).$$

Notons A_1 , respectivement B_1 , la matrice des p premières colonnes de A , respectivement B , et notons $X_1, Y_1 \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p)$ les matrices telles que $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. On a alors

$$D = X_1^* A_1^* B_1 Y_1,$$

et donc t_1^2, \dots, t_p^2 sont les valeurs propres de $A_1^* B_1 B_1^* A_1 = X_1 D^2 X_1^*$. Posons

$$p(s) = \det_{\mathbb{R}}(sI_p - A_1^* B_1 B_1^* A_1),$$

où $\det_{\mathbb{R}}(C)$ désigne le déterminant de C vu comme matrice à coefficients réels, via l'identification $\mathbb{C} \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{H} \subseteq \text{Mat}_4(\mathbb{R})$ donnée au paragraphe 2.2.1. On a alors

$$p(s) = \prod_{i=1}^p (s - t_i^2)^c,$$

où $c = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. En comparant d'une part l'expression de $\det_{\mathbb{R}}(sI - A_1^* B_1 B_1^* A_1)$ en les coefficients de A et B , et d'autre part le développement de $\prod_{i=1}^p (s - t_i^2)^c$, on voit que les polynômes symétriques en t_1^2, \dots, t_p^2 de degré total au plus λ s'écrivent comme fonction polynomiale de degré au plus λ en les coefficients de chacune des matrices A et B . Comme l'espace $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]_{\leq \lambda}^{\mathbb{Z}_2^p \rtimes \mathfrak{S}_p}$ consiste précisément en les polynômes symétriques en T_1^2, \dots, T_p^2 de degré au plus λ , cela montre que, pour $\varphi \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]_{\leq \lambda}^{\mathbb{Z}_2^p \rtimes \mathfrak{S}_p}$, on a $\alpha(\varphi) \in (\mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})) \otimes \mathcal{F}_{\lambda}(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})))^{\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)}$.

L'injectivité de α vient de ce que l'image de ρ est $\{t \in \mathbb{R}^p \mid 1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p \geq 0\}$, et qu'un polynôme en T_1, \dots, T_p est déterminé par ses valeurs prises sur cet ensemble.

Il reste à montrer la surjectivité. Soit $\Phi \in (\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})) \otimes \mathcal{F}_\lambda(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})))^{\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)}$, $a, b \in \mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})$, et A, B, X, Y, D et E comme au début de la démonstration. Par abus, nous notons $\Phi(A, B)$ pour $\Phi(a, b)$. En utilisant l'invariance de Φ , on obtient

$$\Phi(A, B) = \Phi(AX, BY) = \Phi(I_n, X^* A^* B Y) = \Phi(I_n, N),$$

$$\text{où } N = \begin{pmatrix} D & -E & 0 \\ E & D & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2p} \end{pmatrix}.$$

Comme $\Phi(I_n, \cdot) \in \mathcal{F}_\lambda(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}))$, alors $\Phi(A, B)$ est un polynôme de degré total au plus λ en les coefficients de N . En utilisant l'invariance par certaines matrices de permutations signées, on voit qu'il s'agit en fait d'un polynôme symétrique en t_1^2, \dots, t_p^2 , donc qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]^{\mathbb{Z}_2^p \times \mathfrak{S}_p}$ tel que $\Phi(a, b) = \varphi(\rho(a, b))$.

Le cas $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]^{\mathbb{Z}_2^{p-1} \times \mathfrak{S}_p} \rightarrow (\mathcal{F}_\lambda(\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{F}_\lambda(\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})))^{\mathcal{O}(n)}$ se traite de la même manière. \square

2.2.5 Considérons pour $\Omega = \mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})$ la décomposition

$$\mathcal{F}_\lambda(\Omega) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \mathcal{H}_\mu(\Omega),$$

et soient F_λ et H_μ comme dans le paragraphe 1.4.1. De la proposition 2.2.4, on déduit

- $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})) \neq \{0\}$ si et seulement si μ est pair ;
- $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{G}_{p,n}^+(\mathbb{R})) \neq \{0\}$ si et seulement si μ est pair ou $\mu \geq p$;
- $H_\mu(a, b) = h_\mu(\rho(a, b))$ pour un certain $h_\mu \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]^{\mathbb{Z}_2^p \times \mathfrak{S}_p}$ (ou $h_\mu \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_p]^{\mathbb{Z}_2^{p-1} \times \mathfrak{S}_p}$) de degré total μ .

Selon la formule 5.3.3(v), les polynômes h_μ vérifient

$$h_\mu(1, \dots, 1) = \dim \mathcal{H}_\mu.$$

Dans le cas $p = 1$, on a

$$\bigoplus_{\mu \leq \lambda} \mathbb{R} h_\mu = \mathbb{R}[T]_{\leq \lambda}^{\mathbb{Z}_2} \quad (\text{pour } \Omega = \mathcal{G}_{1,n}(\mathbb{K}))$$

et $\bigoplus_{\mu \leq \lambda} \mathbb{R} h_\mu = \mathbb{R}[T]_{\leq \lambda}$ (pour $\Omega = \mathcal{G}_{1,n}^+(\mathbb{R})$),

d'où l'on déduit :

Théorème Les espaces polynomiaux

- $\mathcal{G}_{1,n}^+(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^{n-1}$,
- $\mathcal{G}_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}/\{\pm 1\}$,
- $\mathcal{G}_{1,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1$ et
- $\mathcal{G}_{1,n}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{S}^{4n-1}/\mathbb{S}^3$

sont multiplicatifs. \square

2.2.6 Remarques

- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} et soit $c = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. L'application continue

$$\mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{K}, \quad (a, b) \mapsto (|a|^2 - |b|^2, 2a\bar{b})$$

induit un homéomorphisme $\mathcal{G}_{1,2}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^{2c-1}/\mathbb{S}^{c-1} \rightarrow \mathbb{S}^c$ et des isomorphismes $\mathcal{F}_\lambda(\mathbb{S}^c) \rightarrow \mathcal{F}_{2\lambda}(\mathbb{K}\mathbb{P}^1)$. Ainsi, une formule de cubature de force τ sur \mathbb{S}^c est équivalente à une formule de cubature de force 2τ sur $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$.

- Le plan projectif des octaves $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ est également muni d'une structure naturelle d'espace polynomial multiplicatif; voyez la section 2.3.1 ci-dessous.

2.3 Espaces compacts homogènes à deux points

Dans cette section, nous décrivons la structure d'espace polynomial sur les espaces compacts homogènes à deux points, qui correspond à celle définie à la section 2.1. Les structures d'espace polynomial sur les sphère et les espaces projectifs réels, complexes et quaternioniens décrites à la section précédente sont les mêmes que celles décrites ici.

2.3.1 Structure d'espace polynomial multiplicatif sur les espaces compacts homogènes à deux points Dans ce paragraphe, nous ne donnons aucune démonstration, mais nous utilisons quelques faits bien connus sur les espaces compacts homogènes à deux points ; voyez par exemple [Helg00, Chapter I, Section 4].

On rappelle qu'un *espace homogène à deux points* est un espace métrique connexe non-vide Ω tel que, pour tout $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \Omega$ avec $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$, il existe une isométrie γ de Ω telle que $\gamma x_1 = x_2$ et $\gamma y_1 = y_2$. Les espaces compacts homogènes à deux points ont été classés par H.-C. Wang [Wang56] ; ce sont, outre l'espace à un point,

- les sphères \mathbb{S}^m , $m \geq 1$, de dimension m ;
- les espaces projectifs réels $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, de dimension m ;
- les espaces projectifs complexes $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, de dimension $2m$;
- les espaces projectifs quaternioniens $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, de dimension $4m$;
- le plan projectif des octaves $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ de dimension 16.

Nous appelons *espace homogène à deux points de type compact* un espace homogène à deux points dont le revêtement universel est compact. Cela inclut tous les espaces homogènes à deux points compacts à l'exclusion de la sphère \mathbb{S}^1 .

Posons

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{R}, \quad \mathbb{K}_2 = \mathbb{C}, \quad \mathbb{K}_4 = \mathbb{H}, \quad \mathbb{K}_8 = \mathbb{O},$$

de sorte que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_c = c$ et $\dim \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m = cm$. Soit Ω un espace compact homogène à deux points et d la distance convexe sur Ω normalisée de façon à ce que les géodésiques soient toutes de longueur 2π lorsque $\Omega = \mathbb{S}^m$ et de longueur π lorsque $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$. Soit

$$\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow [-1, 1], \quad \rho(x, y) = \cos(d(x, y)).$$

Noter que, lorsque $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, on a $\rho(x, y) \in [0, 1]$. Lorsque $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, soit

$$\tilde{\rho} : \Omega \times \Omega \rightarrow [-1, 1], \quad \tilde{\rho}(x, y) = \cos(2d(x, y)) = 2\rho(x, y)^2 - 1.$$

On a une décomposition

$$\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\lambda},$$

et les noyaux reproduisants H_λ de \mathcal{H}_λ vérifient

$$H_\lambda(x, y) = h_\lambda(\rho(x, y)),$$

où h_λ est un polynôme de degré λ . Lorsque $\Omega = \mathbb{S}^m$, on a

$$\int_{-1}^1 h_\lambda(t) h_\mu(t) \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m-2} dt = \delta_{\lambda\mu} h_\lambda(1) \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m-2} dt.$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, on a

$$\begin{aligned} h_\lambda &= 0 \text{ lorsque } \lambda \equiv 1 \pmod{2}, \\ h_\lambda(t) &\text{ est un polynôme en } t^2 \text{ lorsque } \lambda \equiv 0 \pmod{2}, \\ \int_0^1 h_\lambda(t) h_\mu(t) \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{mc-2} t^{c-1} dt &= \delta_{\lambda\mu} h_\lambda(1) \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{mc-2} t^{c-1} dt. \end{aligned}$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, définissons les polynômes \tilde{h}_λ par

$$\tilde{h}_\lambda(2t^2 - 1) = h_{2\lambda}(t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{2\lambda}(x, y) &= \tilde{h}_\lambda(\tilde{\rho}(x, y)), \\ \int_{-1}^1 \tilde{h}_\lambda(u) \tilde{h}_\mu(u) (\sqrt{1-u})^{cm-2} (\sqrt{1+u})^{c-2} du \\ &= \delta_{\lambda\mu} \tilde{h}_\lambda(1) \int_{-1}^1 (\sqrt{1-u})^{cm-2} (\sqrt{1+u})^{c-2} du. \end{aligned}$$

Soit $R_k^{(\alpha, \beta)}$ le polynôme de Jacobi de paramètre (α, β) de degré k normalisé par $R_k^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$ (voir section 5.6). Ainsi, lorsque $\Omega = \mathbb{S}^m$, on a

$$h_\lambda(t) = R_\lambda^{(\alpha, \alpha)}(t) \dim \mathcal{H}_\lambda, \quad \alpha = m/2 - 1,$$

et, lorsque $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, on a

$$h_{2\lambda}(t) = \tilde{h}_\lambda(2t^2 - 1) = R_\lambda^{(\alpha, \beta)}(2t^2 - 1) \dim \mathcal{H}_{2\lambda}, \quad \alpha = cm/2 - 1, \quad \beta = c/2 - 1.$$

2.3.2 Cas de la sphère Soit $\Omega = \mathcal{G}_{1, m+1}^+(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^m$, $m \geq 1$. L'application ρ des paragraphes 2.2.3 et 2.3.1 est

$$\rho(x, y) = \langle x | y \rangle,$$

et $\text{Aut}(\mathbb{S}^m) = \mathcal{O}(m+1)$. Soient les espaces

$$\text{Pol}_{\leq k}(\mathbb{R}^{m+1}) = \{f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ polynomial de degré au plus } k\},$$

$$\text{Pol}_k(\mathbb{R}^{m+1}) = \{f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ polynomial homogène de degré } k\},$$

$$\text{Harm}_k(\mathbb{R}^{m+1}) = \{f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ polynomial harmonique homogène de degré } k\};$$

(on rappelle qu'une fonction lisse f est *harmonique* lorsque $\sum_i (\partial/\partial x_i)^2 f(x) = 0$;) et soit $\omega(x) = \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2$. Soient $\text{Pol}_{\leq k}(\mathbb{S}^m)$, $\text{Pol}_k(\mathbb{S}^m)$, etc. l'espace des restrictions à \mathbb{S}^m des éléments de $\text{Pol}_{\leq k}(\mathbb{R}^{m+1})$, $\text{Pol}_k(\mathbb{R}^{m+1})$, etc. respectivement. On a les décompositions

$$\text{Pol}_{\leq l}(\mathbb{R}^{m+1}) = \bigoplus_{k=0}^l \text{Pol}_k(\mathbb{R}^{m+1}), \quad \text{Pol}_k(\mathbb{R}^{m+1}) = \bigoplus_{i=0}^{[k/2]} \omega^i \text{Harm}_{k-2i}(\mathbb{R}^{m+1}),$$

d'où l'on déduit

$$\text{Pol}_k(\mathbb{S}^m) = \bigoplus_{i=0}^{[k/2]} \text{Harm}_{k-2i}(\mathbb{S}^m),$$

$$\text{Pol}_{\leq l}(\mathbb{S}^m) = \text{Pol}_l(\mathbb{S}^m) \oplus \text{Pol}_{l-1}(\mathbb{S}^m) = \bigoplus_{j=0}^l \text{Harm}_j(\mathbb{S}^m),$$

et donc

$$\mathcal{F}_\lambda = \text{Pol}_\lambda(\mathbb{S}^m) \oplus \text{Pol}_{\lambda-1}(\mathbb{S}^m), \quad \dim \mathcal{F}_\lambda = \binom{\lambda+m}{m} + \binom{\lambda+m-1}{m},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mu &= \text{Harm}_\mu(\mathbb{S}^m), \\ \dim \mathcal{H}_\mu &= \binom{\mu+m}{m} - \binom{\mu+m-2}{m} \\ &= \frac{(2\mu+m-1)(\mu+m-2)!}{(m-1)!\mu!}. \end{aligned}$$

2.3.3 Calcul des coefficients des polynômes h_λ dans le cas de la sphère

Proposition Soit $\Omega = \mathbb{S}^m$. Les polynômes h_λ des paragraphes 2.2.5 et 2.3.1 sont donnés par

$$h_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{[\lambda/2]} q_j^{(\lambda)} T^{\lambda-2j}$$

où les $q_j^{(\lambda)}$ sont donnés par

$$q_0^{(\lambda)} = \frac{(m+1)(m+3)\cdots(m+2\lambda-1)}{\lambda!},$$

$$2j(2\lambda-2j+m-1)q_j^{(\lambda)} + (\lambda-2j+1)(\lambda-2j+2)q_{j-1}^{(\lambda)} = 0, \quad 1 \leq j \leq [\lambda/2],$$

c'est-à-dire

$$q_j^{(\lambda)} = \frac{(-1)^j 2^\lambda (\lambda + m/2 - 1/2) \Gamma(\lambda - j + m/2 - 1/2)}{4^j \Gamma(m/2 + 1/2) \Gamma(j+1) \Gamma(\lambda - 2j + 1)}.$$

DÉMONSTRATION Fixons $e \in \mathbb{S}^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$.

Pour raison de symétrie, on a $h_\lambda(-1) = H_\lambda(\langle e | -e \rangle) = (-1)^\lambda H_\lambda(\langle e | e \rangle) = (-1)^\lambda h_\lambda(1)$, donc h_λ est bien de la forme $h_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{[\lambda/2]} q_j^{(\lambda)} T^{\lambda-2j}$.

Soit $p_\lambda \in \text{Pol}_\lambda(\mathbb{R}^{m+1})$ défini par

$$p_\lambda(y) = \sum_{j=0}^{[\lambda/2]} q_j^{(\lambda)} \langle e | y \rangle^{\lambda-2j} \langle y | y \rangle^j;$$

on a $p_\lambda|_{\mathbb{S}^m} \in \mathcal{H}_\lambda$. Selon le paragraphe 2.3.2, $p_\lambda \in \text{Harm}_\lambda(\mathbb{R}^{m+1})$. En utilisant la relation

$$\Delta_y(\langle e | y \rangle^{\lambda-2j} \langle y | y \rangle^j) = 2j(2\lambda-2j+m-1)\langle e | y \rangle^{\lambda-2j} \langle y | y \rangle^{j-1} \\ + (\lambda-2j-1)(\lambda-2j)\langle e | e \rangle \langle e | y \rangle^{\lambda-2j-2} \langle y | y \rangle^j,$$

valable pour $\lambda \geq 0$ et $0 \leq j \leq \lambda/2$, on obtient

$$0 = \Delta p_\lambda(y) = \sum_{j=1}^{[\lambda/2]} \left(2j(2\lambda-2j+m-1)q_j^{(\lambda)} + (\lambda-2j+1)(\lambda-2j+2)q_{j-1}^{(\lambda)} \right) \langle e | y \rangle^{\lambda-2j} \langle y | y \rangle^{j-1}.$$

Cette équation donne la relation de récurrence entre $q_j^{(\lambda)}$ et $q_{j-1}^{(\lambda)}$, ce qui détermine h_λ à multiplication près par une constante. Pour terminer, on utilise que

$$h_\lambda(1) = \dim \mathcal{H}_\lambda = \frac{(2\lambda+m-1)\Gamma(\lambda+m-1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda+1)};$$

ainsi, il suffit de vérifier l'équation $\sum_{j=0}^{[\lambda/2]} f(\lambda, j) = r(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$, où

$$f(\lambda, j) = \frac{(-1)^j 2^\lambda (\lambda + m/2 - 1/2) \Gamma(\lambda - j + m/2 - 1/2)}{4^j \Gamma(m/2 + 1/2) \Gamma(j+1) \Gamma(\lambda - 2j + 1)},$$

$$r(\lambda) = h_\lambda(1) = \frac{(2\lambda+m-1)\Gamma(\lambda+m-1)}{\Gamma(m)\Gamma(\lambda+1)}.$$

Pour cela, on utilise l'algorithme WZ (paragraphe 5.7.1). Le certificat correspondant est

$$R(\lambda, j) = -\frac{2j(2\lambda-2j+m-1)}{(\lambda-2j+1)(\lambda+m-1)}. \quad \square$$

2.3.4 Cas de l'espace projectif réel Soit $\Omega = \mathcal{G}_{1,m+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^m / \{\pm 1\} = \mathbb{R}\mathbb{P}^m$. On reprend les notations du paragraphe 2.3.2. On a simplement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2\lambda} = \mathcal{F}_{2\lambda+1} &= \text{Pol}_{2\lambda}(\mathbb{S}^m), & \dim \mathcal{F}_{2\lambda} &= \binom{2\lambda + m}{m}, \\ \mathcal{H}_{2\mu} &= \text{Harm}_{2\mu}(\mathbb{S}^m), & \mathcal{H}_{2\mu+1} &= \{0\}.\end{aligned}$$

Une formule de cubature de force 2τ (ou $2\tau + 1$) sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ correspond à une formule de cubature *antipodale* de même force sur \mathbb{S}^m . (Un code pondéré (X, W) sur \mathbb{S}^m est antipodal lorsque $X = -X$ et $W_{-x} = W_x$ pour tout $x \in X$.)

2.3.5 Cas de l'espace projectif complexe Soit $\Omega = \mathcal{G}_{1,m+1}(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2m+1}/\mathbb{S}^1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^m$. L'application ρ des paragraphes 2.2.3 et 2.3.1 est donnée par

$$\rho(x, y) = |\langle x | y \rangle|,$$

et $\text{Aut}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m) = \mathcal{U}(m+1)/\mathbb{S}^1 = \mathcal{S}\mathcal{U}(m+1)/C_{m+1}$, où $C_{m+1} = \{\zeta I_{m+1} \mid \zeta^{m+1} = 1\}$. Soient les espaces

$$\begin{aligned}\text{Pol}_k(\mathbb{C}^{m+1}) &= \{f : \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ polynomial homogène de degré } k\}, \\ \overline{\text{Pol}_k(\mathbb{C}^{m+1})} &= \{f : \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C} \mid \bar{f} \text{ polynomial homogène de degré } k\}.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que les éléments de $\mathcal{F}_\lambda(\mathbb{C}\mathbb{P}^m)$ sont les restrictions à \mathbb{S}^{2m+1} de fonctions polynomiales en $|z_1|^2, \dots, |z_{m+1}|^2$, et donc que

$$\mathcal{F}_{2\lambda}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m) \simeq \text{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^{m+1}) \overline{\text{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^{m+1})}, \quad \dim \mathcal{F}_{2\lambda}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m) = \binom{\lambda + m}{m}^2.$$

Comme $\overline{\text{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^{m+1})} \simeq \text{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^{m+1})^*$ en tant que $\mathcal{S}\mathcal{U}(m+1)$ -module, on déduit l'isomorphisme de $\mathcal{S}\mathcal{U}(m+1)$ -modules

$$\mathcal{F}_{2\lambda}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m) \simeq \mathcal{L}(\text{Pol}_\lambda(\mathbb{C}^{m+1})).$$

3 Rayon de couverture et la force de codes pondérés, orbites de groupes finis

Ce chapitre contient les résultats principaux concernant le rayon de couverture et la force de codes pondérés, ainsi que les groupes agissant sur des espaces métriques et des espaces polynomiaux.

3.1 Relation entre rayon de couverture et force

Le but de cette section est de montrer que rechercher des codes de rayon de couverture arbitrairement petit et rechercher des formules de cubature de force arbitrairement grande sont deux problèmes équivalents.

3.1.1 Lemme Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial, soit $X \subseteq \Omega$ un sous-ensemble compact, et soit $\tau \in \Lambda$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) il existe un sous-ensemble fini $X' \subseteq X$ et une fonction $W : X' \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tels que (X', W) soit une formule de cubature de poids τ ;
- (b) pour tout $f \in \mathcal{F}_\tau^0$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) \geq 0$.

DÉMONSTRATION Le point (a) signifie qu'il existe une fonction $W : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de support fini X' telle que $\sum_{x \in X} W_x = 1$ et

$$\sum_{x \in X} W_x f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}_\tau^0.$$

Pour $x \in \Omega$, soit $\epsilon_x \in (\mathcal{F}_\tau^0)^*$ défini par $\epsilon_x(f) = f(x)$. La condition ci-dessus s'écrit

$$\sum_{x \in X} W_x \epsilon_x = 0 \quad \text{dans } (\mathcal{F}_\tau^0)^*.$$

Ainsi, le point (a) est équivalent à

$$0 \in \text{Conv}(\{\epsilon_x\}_{x \in X}) \subseteq (\mathcal{F}_\tau^0)^*,$$

où Conv désigne l'enveloppe convexe (voir appendice 5.1). Par la proposition 5.1.7, appliquée à $V = (\mathcal{F}_\tau^0)^*$ et $A = \{\epsilon_x\}_{x \in X}$, cela est équivalent à ce que, pour tout $\phi \in (\mathcal{F}_\tau^0)^{**}$, il existe un $x \in X$ tel que $\phi(\epsilon_x) \geq 0$. Par l'identification naturelle de $(\mathcal{F}_\tau^0)^{**}$ avec \mathcal{F}_τ^0 , cela est équivalent au point (b) de l'énoncé du lemme. \square

3.1.2 Théorème Soit $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial métrique compact.

- (i) Pour tout $\delta > 0$, il existe $\tau \in \Lambda$ tel que, si (X, W) est une formule de cubature de force τ sur Ω , alors $\rho(X) \leq \delta$. Plus précisément, on peut choisir τ tel que

$$\forall u \in \Omega, \quad \exists f \in \mathcal{F}_\tau^0, \quad \forall v \in \Omega, \quad f(v) \geq 0 \implies d(v, u) \leq \delta. \quad (*)$$

- (ii) Pour tout $\tau \in \Lambda$, il existe $\delta > 0$ tel que, si X est un sous-ensemble compact non vide de Ω avec $\rho(X) \leq \delta$, alors il existe un sous-ensemble fini X' de X et une fonction $W : X' \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tels que (X', W) soit une formule de cubature de force τ . Plus précisément, on peut choisir

$$\delta = \inf_{f \in \mathcal{F}_\tau^0} r(f), \quad (**)$$

où $r(f)$ est le plus grand réel $\eta \geq 0$ pour lequel il existe un $u \in \Omega$ avec $(d(u, v) \leq \eta \implies f(v) \geq 0)$ pour tout $v \in \Omega$.

DÉMONSTRATION (i) Soit $\delta > 0$. Montrons d'abord qu'un τ vérifiant (*) existe.

Comme Ω est compact, il existe un sous-ensemble fini Z de Ω tel que $d(u, Z) \leq \delta/2$ pour tout $u \in \Omega$. Pour chaque $z \in Z$, il existe une fonction continue $f_z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f_z(z) > 0, \quad f_z(v) \geq 0 \implies d(z, v) \leq \delta/2, \quad \langle f \rangle = \int_{\Omega} f(u) d\mu(u) = 0.$$

Comme $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_{\lambda}$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$, on peut choisir les f_z dans $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_{\lambda}$. Soit alors $\tau \in \Lambda$ tel que $f_z \in \mathcal{F}_{\tau}^0$ pour tout $z \in Z$ (si $f_z \in \mathcal{F}_{\lambda(z)}$, on peut prendre $\tau = \sum_{z \in Z} \lambda(z)$).

Soit $u \in \Omega$, et soit $z \in Z$ tel que $d(z, u) \leq \delta/2$. Soit $v \in \Omega$ tel que $f_z(v) \geq 0$. On a alors $d(v, z) \leq \delta/2$ donc $d(v, u) \leq \delta$. Par conséquent, (*) est vérifié.

Soit maintenant (X, W) une formule de cubature de force τ . Soit $u \in \Omega$ arbitraire et soit $f_u \in \mathcal{F}_{\tau} \setminus \{0\}$ vérifiant (*). Par le lemme 3.1.1, il existe un $x \in X$ tel que $f_u(x) \geq 0$, et, par conséquent, tel que $d(u, x) \leq \delta$. Cela montre que $\rho(X) \leq \delta$.

(ii) Soit $\tau \in \Lambda$. Montrons d'abord que le δ défini par (**) est strictement positif.

Notons d'abord que, pour tout $f \in \mathcal{F}_{\tau}^0 \setminus \{0\}$, il existe un $u \in \Omega$ tel que $f(u) > 0$. Soit le sous-ensemble compact

$$S = \{f \in \mathcal{F}_{\tau}^0 \mid \|f\| = 1\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne n'importe quelle norme sur \mathcal{F}_{τ}^0 . Posons, pour $f \in S$,

$$r_0(f) = \sup\{\eta > 0 \mid \exists u \in \Omega \text{ tel que } d(u, v) < \eta \implies f(v) > 0\};$$

on a $r_0(f) > 0$. Pour $f \in S$, soit $u_0 \in \Omega$ tel que $d(u_0, v) < r_0(f) \implies f(v) > 0$. Soit $0 < \epsilon < f(u_0)$. On pose

$$\eta = \frac{9}{10} \min\{f(v) \mid v \in \Omega \text{ tel que } d(u_0, v) \leq r_0(f) - \epsilon\} > 0.$$

Pour $g \in S$ tel que $\|f - g\|_{\infty} < \eta$, on a

$$d(u_0, v) \leq r_0(f) - \epsilon \implies g(v) \geq f(v) - \eta \geq \frac{10}{9}\eta - \eta > 0,$$

donc $r_0(g) \geq r_0(f) - \epsilon$. Cela montre que r_0 est semi-continu sur S . Par compacité de S , on a alors

$$\inf_{f \in S} r_0(f) > 0,$$

ce qui montre que le δ défini par (**) est strictement positif, car $\delta \geq \inf_{f \in S} r_0(f)$.

Maintenant, soit X un sous-ensemble compact non vide de Ω tel que $\rho(X) \leq \delta$. Soit $f \in \mathcal{F}_{\tau}$. Par la définition de δ , il existe un $u \in \Omega$ tel que $d(u, v) \leq \delta \implies f(v) \geq 0$. Comme $\rho(X) \leq \delta$, il existe un $x \in X$ tel que $d(u, x) \leq \delta$, donc $f(x) \geq 0$. On achève la démonstration en utilisant le lemme 3.1.1. \square

3.1.3 Proposition Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial et soit $\tau \in \Lambda$.

- (i) Il existe une formule de cubature (X, W) de force τ sur Ω de taille $|X| \leq \dim \mathcal{F}_{\tau}$, ou de taille $|X| \leq \dim \mathcal{F}_{\tau} - 1$ si Ω a au plus $\dim \mathcal{F}_{\tau} - 1$ composantes connexes.
- (ii) Pour toute formule de cubature (X, W) de force τ sur Ω , il existe une formule de cubature (X', W') de force τ de taille $|X'| \leq \dim \mathcal{F}_{\tau}$ avec $X' \subseteq X$.

DÉMONSTRATION On reprend les notations de la démonstration du lemme 3.1.1. Selon la démonstration du lemme 3.1.1, il existe une formule de cubature (X', W) de force τ avec $X' \subseteq X$ si et seulement si

$$0 \in \text{Conv}(\{\epsilon_x\}_{x \in X}) \subseteq (\mathcal{F}_{\tau}^0)^*.$$

- (i) Par la proposition 5.1.6 appliquée à $V = (\mathcal{F}_{\tau}^0)^*$ et $A = \{\epsilon_x\}_{x \in \Omega}$, on a

$$0 \in \text{Conv}(\{\epsilon_x\}_{x \in \Omega})^{\circ} \subseteq \text{Conv}(\{\epsilon_x\}_{x \in \Omega}) \subseteq (\mathcal{F}_{\tau}^0)^*.$$

(Nous ne pouvons pas utiliser la proposition 5.1.7, car nous n'avons pas supposé que Ω est compact.) Selon la proposition 5.1.3, il existe un sous-ensemble X' de Ω de cardinalité $\dim \mathcal{F}_\tau = \dim \mathcal{F}_\tau^0 + 1$, ou de cardinalité $\dim \mathcal{F}_\tau - 1$ si Ω a au plus $\dim \mathcal{F}_\tau - 1$ composantes connexes, tel que

$$0 \in \text{Conv}(\{\epsilon_x\}_{x \in X'}).$$

Par conséquent, il existe un sous-ensemble X'' de X' et une fonction $W : X'' \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tels que (X'', W) est une formule de cubature de force τ , où X'' est le support de W .

(ii) Comme (X, W) est une formule de cubature de force τ , on a

$$0 \in \text{Conv}(\{\epsilon_x\}_{x \in X}) \in (\mathcal{F}_\tau^0)^*,$$

puis on procède comme pour le point (i) en remplaçant Ω par X . \square

3.2 Rayon de couverture d'orbites de groupes finis

Dans cette section, on montre que les orbites de groupes finis opérant par isométries sur les variétés riemanniennes compactes connexes ne peuvent pas avoir un rayon de recouvrement arbitrairement petit, sauf si la variété est un tore. On montre également un résultat analogue dans le cas des groupes compacts opérant par isométries sur une variété riemannienne compacte connexe.

Les résultats de ce paragraphe ont été démontrés dans le cas particulier de la sphère par S. Greenwald [Gree01].

3.2.1 Rayon de couverture et codiamètre On rappelle que le rayon de couverture d'un sous-ensemble compact non vide $X \subseteq \Omega$ est défini par

$$\rho(X) := \sup_{u \in \Omega} d(u, X).$$

Pour un sous-groupe compact Γ de $\text{Isom}(\Omega)$, le groupe des isométries de Ω , on définit son *codiamètre* par

$$\text{codiam}(\Gamma) := \text{diam}(\Gamma \backslash \Omega) = \sup_{u, v \in \Omega} d(\Gamma u, \Gamma v).$$

Comme Γ opère par isométries, on a $d(\Gamma u, \Gamma v) = d(u, \Gamma v)$, donc

$$\text{codiam}(\Gamma) = \sup_{v \in \Omega} \sup_{u \in \Omega} d(u, \Gamma v) = \sup_{v \in \Omega} \rho(\Gamma v).$$

3.2.2 Proposition Soit Γ un groupe compact opérant par isométries sur un espace métrique connexe Ω et soit Δ un sous-groupe de Γ d'indice fini. Pour tout $x \in \Omega$, on a

$$\text{codiam}(\Delta) \leq 2 [\Gamma : \Delta] \rho(\Gamma x).$$

DÉMONSTRATION Soit $x \in \Omega$ et soit $\epsilon = \rho(\Gamma x)$, et soient $y, z \in \Omega$. Pour $u \in \Omega$, on désigne par

$$B(\Delta u, \epsilon)$$

la boule dans $\Delta \backslash X$ de centre Δu et de rayon ϵ . Soit $k = [\Gamma : \Delta]$ et soient $x_1, \dots, x_k \in \Omega$ tels que $\Gamma x = \Delta x_1 \cup \dots \cup \Delta x_k$. Comme $\rho(\Gamma x) \leq \epsilon$, la famille $\{B(\Delta x_i, \epsilon)\}_{i=1}^k$ recouvre $\Delta \backslash \Omega$. Soient $p, q \in \{1, \dots, k\}$ tels que $d(\Delta y, \Delta x_p) \leq \epsilon$ et $d(\Delta z, \Delta x_q) \leq \epsilon$.

Par connexité de Ω , il existe une suite d'indices $p = i(1), i(2), \dots, i(h) = q$ deux à deux distincts (en particulier, $h \leq k$) telle que

$$B(\Delta x_{i(j)}, \epsilon) \cap B(\Delta x_{i(j+1)}, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Pour chaque $j \in \{1, \dots, l-1\}$, soit $u_j \in B(\Delta x_{i(j)}, \epsilon) \cap B(\Delta x_{i(j+1)}, \epsilon)$. On a alors

$$\begin{aligned} d(\Delta y, \Delta z) &\leq d(\Delta y, \Delta x_{i(1)}) + d(\Delta x_{i(1)}, \Delta u_1) + d(\Delta u_1, \Delta x_{i(2)}) + \dots \\ &\quad + d(\Delta x_{i(h-1)}, \Delta u_{h-1}) + d(\Delta u_{h-1}, \Delta x_{i(h)}) + d(\Delta x_{i(h)}, \Delta z) \\ &\leq 2h\epsilon \leq 2k\epsilon. \end{aligned}$$

Comme y et z , sont quelconques, on a $\text{codiam}(\Delta) \leq 2k\epsilon$. \square

Corollaire 1 Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\Gamma \leq \text{Isom}(\Omega)$ compact,

$$\rho(\Gamma x) \leq \text{codiam}(\Gamma) \leq 2\rho(\Gamma x). \quad \square$$

Corollaire 2 Pour tous $\Delta \leq \Gamma \leq \text{Isom}(\Omega)$ compacts,

$$\text{codiam}(\Gamma) \leq \text{codiam}(\Delta) \leq 2[\Gamma : \Delta] \text{codiam}(\Gamma). \quad \square$$

3.2.3 Théorème Soit Ω une variété riemannienne compacte connexe. Alors on a l'alternative

- (a) Ω est un tore;
- (b) il existe un $\epsilon > 0$ tel que, pour tout sous groupe fini $\Gamma \leq \text{Isom}(\Omega)$, et tout $x \in \Omega$, on a $\rho(\Gamma x) \geq \epsilon$; en particulier $\text{diam}(\Gamma \backslash \Omega) \geq \epsilon$.

DÉMONSTRATION On sait que $\text{Isom}(\Omega)$ est un groupe de Lie compact. Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\Omega)$ un sous-groupe fini et $x \in \Omega$. Notons D le codiamètre d'un tore maximal de Γ ; comme tous les tores maximaux sont conjugués entre eux, cette valeur ne dépend pas du tore maximal. Si $D = 0$, alors un tore opère transitivement sur Ω , donc Ω est un tore. On suppose donc que $D > 0$.

Par le théorème 5.4.5, il existe une constante K dépendant uniquement de $\text{Isom}(\Omega)$ et un tore T de $\text{Isom}(\Omega)$ tel que $\Gamma \cap T$ soit d'indice au plus K dans Γ , et on a

$$\text{codiam}(\Gamma \cap T) \geq \text{codiam}(T) \geq D.$$

Par la proposition 3.2.2, on a

$$\rho(\Gamma x) \geq \text{codiam}(\Gamma \cap T) / (2[\Gamma : \Gamma \cap T]) \geq D / (2K),$$

d'où le résultat avec $\epsilon = D / (2K)$. \square

3.2.4 Cas des sous-groupes compacts Le théorème 3.2.3 peut être étendu aux sous-groupes compacts :

Théorème Soit Ω une variété riemannienne compacte connexe. Alors il existe un $\epsilon' > 0$ tel que, pour tout sous-groupe compact $\Gamma \leq \text{Isom}(\Omega)$, on a l'alternative suivante :

- (a) $\Gamma \backslash \Omega$ est un tore;
- (b) pour tout $x \in \Omega$, $\rho(\Gamma x) \geq \epsilon'$; en particulier $\text{diam}(\Gamma \backslash \Omega) \geq \epsilon'$.

DÉMONSTRATION Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\Omega)$ un sous-groupe compact et $x \in \Omega$. Soit $\Gamma'_0 = [\Gamma_0, \Gamma_0]$ la partie semi-simple de la composante connexe l'identité de Γ , qui est distingué dans Γ_0 . Le groupe Γ/Γ'_0 agit sur l'espace métrique $\Gamma_0 \backslash \Omega$. Par un argument semblable à celui du théorème précédent (noter que la composante connexe de l'identité de Γ/Γ'_0 est un tore, de sorte qu'on peut appliquer le théorème 5.4.5), il existe $\epsilon_{\Gamma_0} > 0$, dépendant uniquement de Ω et Γ_0 , tel que, pour tout $x \in \Omega$, on a $\rho((\Gamma/\Gamma'_0)(\Gamma'_0 x)) = \rho(\Gamma x) \geq \epsilon_{\Gamma_0}$.

Par la proposition 5.5.5, il n'y a, a conjugaison près, qu'un nombre fini de sous-groupes compacts connexes semi-simples de $\text{Isom}(\Omega)$. On peut donc prendre ϵ' le minimum des ϵ_H , où H parcourt les sous-groupes compacts connexes semi-simples de $\text{Isom}(\Omega)$. \square

Remarque. Soit pour $m \geq 2$, ϵ_m , respectivement ϵ'_m , la borne optimale dans les théorèmes 3.2.3 et 3.2.4 pour la sphère \mathbb{S}^m de courbure 1. Nous ne savons pas s'il est possible de minorer uniformément les ϵ_m ou les ϵ'_m par une constante strictement positive.

3.3 Force d'orbites de groupes finis

Le but principal de cette section est de démontrer que les orbites de groupes finis opérant par automorphismes sur un espace polynomial compact connexe bien séparé ne fournissent pas des formules de cubature de force arbitrairement élevée, sauf si l'espace polynomial est un tore. La démonstration de ce résultat est tout à fait similaire à celui de la section précédente.

Dans le cas particulier de la sphère, les résultats de cette section sont dus pour l'essentiel à Eiichi Bannai [Bann84], [Bann84b], voir aussi [HarPac04].

3.3.1 Lemme Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial, $\Gamma \leq \text{Aut}(\Omega)$ un sous-groupe fini et $X \subseteq \Omega$ une orbite de Γ . Soit (X', W) une formule de cubature de force τ de Ω telle que $X' \subseteq X$. Alors X est un design de force τ .

DÉMONSTRATION Pour (X', W) une formule de cubature, $\gamma \in \Gamma$ et $f \in \mathcal{F}_\tau$, on a

$$\sum_{x \in X'} W_x f(\gamma x) = \int_{u \in \Omega} f(\gamma u) du = \int_{u \in \Omega} f(u) du.$$

En prenant la moyenne sur tous les $\gamma \in \Gamma$, on obtient, pour le membre de gauche,

$$\sum_{x \in X'} W_x \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x) = \sum_{x \in X'} W_x \frac{1}{|X|} \sum_{y \in X} f(y) = \frac{1}{|X|} \sum_{y \in X} f(y),$$

d'où le résultat. \square

3.3.2 Proposition Soient $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial, Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$, et $x \in \Omega$. Alors Γx est un design de force τ si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $f \in (\mathcal{F}_\tau^0)^\Gamma$.

En particulier, toutes les orbites de Γ sont des designs de force τ si et seulement si $(\mathcal{F}_\tau^0)^\Gamma = \{0\}$.

DÉMONSTRATION C'est une conséquence directe du lemme 1.2.6. \square

Un cas intéressant est celui de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$:

Corollaire Soit $\text{Pol}_\tau(\mathbb{C}^{m+1}) = \{f : \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ polynomial homogène de degré } \tau\}$, et soit $\Gamma \leq \mathcal{U}(m+1)$. Alors toutes les orbites de Γ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ sont des 2τ -designs si et seulement si $\text{Pol}_\tau(\mathbb{C}^{m+1})$ est irréductible pour l'action de Γ . \square

DÉMONSTRATION Selon la proposition, toutes les orbites de Ω sont des 2τ -designs si et seulement si $\mathcal{F}_{2\tau}^\Gamma = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\dim \mathcal{F}_{2\tau}^\Gamma = 1$. Selon le paragraphe 2.3.5, $\mathcal{F}_{2\tau} \simeq \mathcal{L}(\text{Pol}_\tau(\mathbb{C}^m))$ en tant que Γ -module, et, selon le lemme de Schur (proposition 5.2.2), $\dim \mathcal{L}(\text{Pol}_\tau(\mathbb{C}^m))^\Gamma = 1$ si et seulement si $\text{Pol}_\tau(\mathbb{C}^m)$ est irréductible pour l'action de Γ . \square

3.3.3 Corollaire Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial réel compact connexe, et soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$. Si $\dim(\mathcal{F}_\tau^0)^\Gamma \leq 1$, alors il existe $x \in \Omega$ tel que Γx est un design de force τ .

DÉMONSTRATION Soit f un générateur de $(\mathcal{F}_\tau^0)^\Gamma$. Par la proposition 3.3.2, il suffit de montrer qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$.

Or, comme Ω est un espace polynomial réel compact connexe, $f(\Omega)$ est un intervalle compact de \mathbb{R} . Par conséquent, puisque

$$\min_{u \in \Omega} f(u) \leq \int_{\Omega} f(u) d\mu(u) = 0 \leq \max_{u \in \Omega} f(u),$$

il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$.

3.3.4 Proposition Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial connexe, Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$ et Δ un sous-groupe de Γ . S'il existe une orbite X de Γ qui soit un design de force $[\Gamma : \Delta](\tau + \bar{\tau})$, alors toutes les orbites de Δ sont des designs de force τ .

DÉMONSTRATION Soit $k = [\Gamma : \Delta]$. Soit X une orbite de Γ de force $[\Gamma : \Delta](\tau + \bar{\tau})$. Par la proposition 1.2.5, l'application

$$\begin{aligned} r_X : \mathcal{F}_{k\tau} &\rightarrow \mathbb{K}^X \\ \varphi &\mapsto \varphi|_X \end{aligned}$$

(où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est une isométrie, donc est injective. L'application r_X est Δ -équivariante, de sorte qu'on a une injection

$$r_X : \mathcal{F}_{k\tau}^\Delta \rightarrow (\mathbb{K}^X)^\Delta = \mathbb{K}^{\Delta \backslash X},$$

donc $\dim \mathcal{F}_{k\tau}^\Delta \leq |\Delta \backslash X| \leq k$.

Supposons maintenant qu'il existe un $f \in \mathcal{F}_\tau^\Delta$ non constant. Par connexité de Ω et continuité de f , la fonction f prend une infinité de valeurs sur Ω . Par conséquent, les fonctions

$$1, f, f^2, \dots, f^k \in \mathcal{F}_{k\tau}^\Delta$$

sont linéairement indépendantes, donc $\dim(\mathcal{F}_{k\tau}^\Delta) \geq k + 1$. Cela montre qu'un tel f ne peut pas exister et que les éléments de \mathcal{F}_τ^Δ sont tous constants. Par la proposition 3.3.2, toutes les orbites de Δ sont des τ -designs. \square

Corollaire Si une orbite de Γ est de force $\tau + \bar{\tau}$, alors toutes ses orbites sont de force τ .

3.3.5 Théorème Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial compact connexe bien séparé. Alors on a l'alternative

- (a) Ω est un tore;
- (b) il existe un $\tau \in \Lambda$ tel qu'aucune orbite d'aucun sous-groupe fini $\Gamma \leq \text{Aut}(\Omega)$ n'est un design de force τ .

DÉMONSTRATION Selon la proposition 1.3.2, $\text{Aut}(\Omega)$ s'identifie à un groupe de Lie compact. Soit $\Gamma \leq \text{Aut}(\Omega)$ un sous-groupe fini et X une orbite de Γ . Si les tores maximaux de $\text{Aut}(\Omega)$ sont transitifs sur Ω , alors Ω est un tore. Sinon, étant donné un tore maximal T de $\text{Aut}(\Omega)$, il existe un $\lambda \in \Lambda$ tel que \mathcal{F}_λ^T ne soit pas réduit aux constantes. Comme tous les tores maximaux sont conjugués entre eux, ce λ ne dépend pas du tore.

Par le théorème 5.4.5, il existe une constante K dépendant uniquement de $\text{Aut}(\Omega)$ et un tore T de $\text{Aut}(\Omega)$ tel que $\Gamma \cap T$ soit d'indice au plus K dans Γ , et on a

$$\mathcal{F}_\lambda^{\Gamma \cap T} \supseteq \mathcal{F}_\lambda^T,$$

donc $\mathcal{F}_\lambda^{\Gamma \cap T}$ n'est pas réduit aux constantes, ce qui signifie, d'après le lemme 3.3.2, que les orbites de $\Gamma \cap T$ ne sont pas toutes des λ -designs. Alors, par la proposition 3.3.4, aucune orbite de Γ n'est de force $[\Gamma : \Gamma \cap T](\lambda + \bar{\lambda})$, donc *a fortiori* non plus de force $K(\lambda + \bar{\lambda})$. On a ainsi le résultat avec $\tau = K(\lambda + \bar{\lambda})$. \square

3.3.6 Remarque On peut aussi déduire le théorème 3.3.5 des théorèmes 3.1.2 et 3.2.3, en sachant que, d'après le lemme 3.3.1, une orbite X d'un groupe opérant par automorphismes est un design si et seulement si elle admet un poids $W : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que (X, W) soit une formule de cubature de poids τ . Réciproquement, le théorème 3.2.3 se déduit des théorèmes 3.1.2 et 3.3.5

3.3.7 Cas de la sphère Pour $m \geq 2$, désignons par τ_m la force maximale des orbites des sous-groupes finis de $\text{Aut}(\mathbb{S}^m) = \mathcal{O}(m+1)$. Il est conjecturé que τ_m est borné par une constante ; en fait, la meilleure force à laquelle nous parvenons est 19 : elle est atteinte par une orbite du groupe de Coxeter $W(\mathbf{H}_4)$ (voir paragraphe 3.5.1 ci-dessous).

D'autre part, il existe une famille infinie de groupes finis dont *toutes* les orbites sont des 7-designs sphériques, à savoir les groupes d'automorphismes des réseaux de Barnes-Wall [Bach05, Section 5] ; voyez aussi [Side99] ; mais nous ne connaissons que des exemples isolés de groupes — par exemple le groupe de Coxeter $W(\mathbf{H}_4)$ et le groupe des automorphismes du réseau de Leech — dont toutes les orbites sont des designs de forces supérieures ; de plus, pour ces groupes, la force maximale est toujours 11.

3.3.8 Cas des sous-groupes compacts On peut étendre le théorème 3.3.5 au sous-groupes compacts. Pour cela, il faut étendre la notion de force aux orbites de groupes compacts ; cela se fait naturellement par la proposition 3.3.2.

Théorème Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial compact connexe bien séparé. Alors il existe un $\tau' \in \Lambda$ tel que, pour tout sous-groupe compact $\Gamma \leq \text{Aut}(\Omega)$, on a l'alternative suivante :

- (a) $\Gamma \backslash \Omega$ est un tore ;
- (b) pour tout $x \in \Omega$, il existe un $f \in (\mathcal{F}_{\tau'}^0)^\Gamma$ tel que $f(x) \neq 0$ (cf. proposition 3.3.2).

La démonstration est similaire à celle du théorème 3.2.4.

3.4 Critères suffisants pour la force d'orbites de groupes finis

Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial et soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$. Dans ce paragraphe, nous montrons que, lorsque Ω est une variété homogène à deux points de type compact, et lorsque \mathcal{H}_τ est irréductible comme Γ -module, alors les orbites de Γ sont des 2τ -designs (théorème 3.4.3).

Le cas de la sphère a été montré dans [HarPac04, Appendix] ; ce résultat étend un résultat de E. Bannai [Bann79b].

Le lemme 3.4.1 permet de dériver également d'autres critères similaires pour divers espaces polynomiaux.

3.4.1 Si V et W sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(\Omega)$, on note VW le sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega)$ engendré par les produits $\varphi\psi$, avec $\varphi \in V$ et $\psi \in W$.

Lemme Soit $(\Omega, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial homogène et soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$. Pour $\lambda, \mu \in \Lambda$ tels que $\mathcal{H}_\lambda \neq \{0\}$ et $\mathcal{H}_\mu \neq \{0\}$, on définit la condition $C(\lambda, \mu)$ par :

$$\begin{aligned} C(\lambda, \lambda), \lambda = \bar{\lambda} &: \dim(\text{Sym}^2 \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma = 1 ; \\ C(\lambda, \lambda), \lambda \neq \bar{\lambda} &: \dim(\text{Sym}^2 \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma = 0 ; \\ C(\lambda, \bar{\lambda}), \lambda \neq \bar{\lambda} &: \dim(\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_{\bar{\lambda}})^\Gamma = 1 ; \\ C(\lambda, \mu), \lambda \neq \mu, \bar{\mu} &: \dim(\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu)^\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Si (λ, μ) vérifie $C(\lambda, \mu)$, alors on a

$$(\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu)^\Gamma \subseteq \mathcal{H}_0.$$

DÉMONSTRATION On a une application linéaire surjective Γ -équivariante

$$\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu, \quad \varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \psi,$$

qui, lorsque $\lambda = \mu$, se restreint en une application linéaire surjective Γ -équivariante $\text{Sym}^2(\mathcal{H}_\lambda) \rightarrow \mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\lambda$. On en déduit des applications linéaires surjectives

$$(\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu)^\Gamma \rightarrow (\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu)^\Gamma \quad \text{et} \quad (\text{Sym}^2 \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma \rightarrow (\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma.$$

Par conséquent, $\dim(\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu)^\Gamma \leq \dim(\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu)^\Gamma$ et $\dim(\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma \leq \dim(\text{Sym}^2 \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma$.

On a

$$\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu \supseteq \mathcal{H}_0 \iff \mu = \bar{\lambda} \text{ et } \mathcal{H}_\lambda \neq \{0\}.$$

En effet, premièrement, si $\bar{\lambda} \neq \mu$, pour $f \in \mathcal{H}_\lambda$ et $g \in \mathcal{H}_\mu$, on a $\langle fg \rangle = \langle \bar{f} \mid g \rangle = 0$, car $\mathcal{H}_{\bar{\lambda}} = \overline{\mathcal{H}_\lambda}$ est orthogonal à \mathcal{H}_μ ; par conséquent fg est orthogonal à \mathcal{H}_0 . Secondement, si $\mathcal{H}_\lambda \neq \{0\}$, soit $\varphi(x) = H_\lambda(x, x)$, où H_λ est le noyau reproduisant de \mathcal{H}_λ (définition 5.3.3). D'une part, $\varphi \in \mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_{\bar{\lambda}}$, d'autre part φ est constant, car Ω est en espace polynomial homogène. Par la formule 5.3.3(v) et par l'homogénéité de l'espace polynomial Ω , on a $\varphi(x) = \dim \mathcal{H}_\lambda > 0$. Ainsi, $\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_{\bar{\lambda}}$ contient les constantes.

Maintenant, lorsque la condition $C(\lambda, \mu)$ est vérifiée, les inégalités $\dim(\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu)^\Gamma \leq \dim(\mathcal{H}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\mu)^\Gamma$ et $\dim(\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma \leq \dim(\text{Sym}^2 \mathcal{H}_\lambda)^\Gamma$ impliquent

$$(\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu)^\Gamma = \{0\} \text{ si } \bar{\lambda} \neq \mu, \quad \text{et} \quad (\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_{\bar{\lambda}})^\Gamma = \mathcal{H}_0,$$

ce qui termine la démonstration. \square

3.4.2 Lemme Soit Ω un espace homogène à deux points de type compact muni de sa structure d'espace polynomial décrite au paragraphe 2.3.1. Alors on a

$$\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu = \bigoplus_{\nu \in E(\lambda, \mu)} \mathcal{H}_\nu,$$

$$\text{où } E(\lambda, \mu) = \{\nu \in \mathbb{N} \mid |\lambda - \mu| \leq \nu \leq \lambda + \mu \text{ et } \nu \equiv \lambda + \mu \pmod{2}\}.$$

DÉMONSTRATION D'après le paragraphe 2.3.1 et le théorème 5.6.2, on a

$$h_\lambda h_\mu = \sum_{\nu \in E(\lambda, \mu)} c_{\lambda, \mu}^\nu h_\nu \quad \text{avec } c_{\lambda, \mu}^\nu \neq 0 \text{ pour tout } \nu \in E(\lambda, \mu),$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ si $\Omega = \mathbb{S}^m$ et $\lambda, \mu \in 2\mathbb{N}$ dans les autres cas. Par suite, pour $e \in \Omega$ fixé

$$H_\lambda(e, \cdot) H_\mu(e, \cdot) = \sum_{\nu \in E(\lambda, \mu)} c_{\lambda, \mu}^\nu H_\nu(e, \cdot).$$

Par le lemme 5.2.4, appliqué à $G = \text{Aut}(\Omega)$, $v = \sum_{\nu \in E(\lambda, \mu)} c_{\lambda, \mu}^\nu H_\nu(e, \cdot)$ et $V = \mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu$, on a l'inclusion

$$\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu \supseteq \bigoplus_{\nu \in E(\lambda, \mu)} \mathcal{H}_\nu.$$

Pour $\nu \notin E(\lambda, \mu)$, on montre que \mathcal{H}_ν est orthogonal à $\mathcal{H}_\lambda \mathcal{H}_\mu$, ce qui prouve l'autre inclusion : Soit $\varphi \in \mathcal{H}_\lambda$, $\psi \in \mathcal{H}_\mu$ et $\chi \in \mathcal{H}_\nu$, et supposons, sans restreindre la généralité, que $\lambda \geq \mu$. Si $\nu > \lambda + \mu$, on a $\varphi \psi \in \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ et $\chi \in \mathcal{H}_\nu$, donc χ est orthogonal à $\varphi \psi$. Si $\nu < \lambda - \mu$, alors $\lambda > \mu + \nu$, et, par l'argument précédent, φ est orthogonal à $\psi \chi$, c'est-à-dire $\int_\Omega \varphi(u) \psi(u) \chi(u) d\mu(u) = 0$, donc χ est orthogonal à $\varphi \psi$. Enfin, si ν n'est pas de la même parité que $\lambda + \mu$, cas qui ne peut se présenter que pour $\Omega = \mathbb{S}^m$, la fonction $\varphi \psi \chi$ est impaire, donc on a également $\int_\Omega \varphi(u) \psi(u) \chi(u) d\mu(u) = 0$. \square

3.4.3 Théorème Soit Ω un espace homogène à deux points de type compact muni de sa structure d'espace polynomial décrite au paragraphe 2.3.1, à savoir l'un des espaces suivants : \mathbb{S}^m , $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$, $m \geq 2$, et $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$. Si \mathcal{H}_τ est irréductible pour l'action de Γ , alors toute orbite de Γ sur Ω est un 2τ -design.

Remarques.

- Le théorème est faux pour le cercle $\Omega = \mathbb{S}^1$.
- La réciproque de ce théorème est fautive en général. Un contre-exemple pour la sphère \mathbb{S}^3 se trouve dans [Bann84] et [Bann84b].

DÉMONSTRATION Si \mathcal{H}_τ est irréductible pour l'action de Γ , par le lemme de Schur (proposition 5.2.2), $\dim(\text{Sym}^2 \mathcal{H}_\tau)^\Gamma = 1$. Par les lemmes 3.4.1 et 3.4.2, on a

$$(\mathcal{H}_\tau \mathcal{H}_\tau)^\Gamma = \left(\bigoplus_{\lambda=0}^{\tau} \mathcal{H}_{2\lambda} \right)^\Gamma = \mathbb{R}.$$

Si Ω est l'un des espaces $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$ ou $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, on a alors $\mathcal{F}_{2\tau}^\Gamma = \mathbb{R}$, donc, par la proposition 3.3.2, toutes les orbites de Γ sont des 2τ -designs.

Lorsque $\Omega = \mathbb{S}^m$, $m \geq 2$, on remarque qu'aucun sous- Γ -module de $\mathcal{H}_{\tau-1}$ n'est équivalent au Γ -module irréductible \mathcal{H}_τ car $\dim \mathcal{H}_{\tau-1} < \dim \mathcal{H}_\tau$. Il en résulte que

$$(\mathcal{H}_{\tau-1} \otimes \mathcal{H}_\tau)^\Gamma \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tau-1}, \mathcal{H}_\tau)^\Gamma = \{0\}.$$

(Noter qu'on a un isomorphisme de Γ -modules $\mathcal{H}_{\tau-1} \otimes \mathcal{H}_\tau \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tau-1}, \mathcal{H}_\tau)$, défini par $f \otimes g \mapsto \langle f | \cdot \rangle g$.) Par les lemmes 3.4.1 et 3.4.2, on a alors

$$(\mathcal{H}_\tau \mathcal{H}_{\tau-1})^\Gamma = \left(\bigoplus_{\lambda=0}^{\tau-1} \mathcal{H}_{2\lambda+1} \right)^\Gamma = \{0\}.$$

Cela achève de montrer que $\mathcal{F}_{2\tau}^\Gamma = \mathbb{R}$. Par la proposition 3.3.2, toutes les orbites de Γ sont alors des 2τ -designs. \square

3.4.4 On peut utiliser la même méthode pour dériver d'autres critères. Par exemple, si $\Omega = \mathbb{S}^m$, $m \geq 2$, si \mathcal{H}_τ est irréductible comme Γ -module et qu'aucun sous- Γ -module de $\mathcal{H}_{\tau+1}$ n'est équivalent à \mathcal{H}_τ , alors toutes les orbites de Γ sont des $(2\tau + 1)$ -designs.

3.4.5 On peut également énoncer des conditions suffisantes pour qu'au moins une orbite de Γ soit un design de force donnée. Voici un exemple :

Proposition Soit Ω un espace homogène à deux points de type compact. Soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Aut}(\Omega)$. Supposons que \mathcal{H}_τ se décompose en deux sous- Γ -modules irréductibles et inéquivalents. Si $\Omega = \mathbb{S}^m$, supposons de plus qu'aucun sous- Γ -module non-nul de $\mathcal{H}_{\tau-1}$ n'est équivalent à aucun sous- Γ -module non-nul de \mathcal{H}_τ . Alors il existe une orbite de Γ sur Ω qui est un 2τ -design.

La démonstration se fait en utilisant une variante du lemme 3.4.1 pour obtenir $\dim \mathcal{F}_{2\tau}^\Gamma \leq 2$, donc $\dim(\mathcal{F}_{2\tau}^0)^\Gamma \leq 1$, et en appliquant le corollaire 3.3.3.

3.5 Groupes de Coxeter

Nous donnons ici, à titre d'exemple, les forces des orbites des groupes de Coxeter agissant sur la sphère $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$.

3.5.1 Soit Γ un sous-groupe fini irréductible⁶ de $\mathcal{O}(n)$ engendré par des réflexions. On a la formule

$$\sum_{k \geq 0} \dim \text{Pol}_k(\mathbb{R}^n)^\Gamma T^k = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - T^{m_i+1}},$$

où $1 = m_1 < m_2 \leq m_3 \leq \dots \leq m_n$ sont les *exposants de Coxeter* de Γ ; voyez par exemple [Bour68, Chap. V, §§ 5, 6] ou [Hump90, Chap. 3]. En utilisant $\text{Pol}_k(\mathbb{R}^n) \simeq \text{Pol}_{k-2}(\mathbb{R}^n) \oplus \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\sum_{k \geq 0} \dim \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^\Gamma T^k = \prod_{i=2}^n \frac{1}{1 - T^{m_i+1}} = 1 + T^{m_2+1} + T^{2m_2+2} + \dots + T^{m_3+1} + \dots.$$

⁶On montre facilement qu'aucune orbite d'un sous-groupe non-irréductible de $\mathcal{O}(n)$ n'est un 4-design sphérique, et que certaines de ses orbites ne sont pas des 2-designs sphériques.

Par la proposition 3.3.2 et le corollaire 3.3.3, toutes les orbites de Γ sont des designs sphériques de force m_2 et il existe une orbite de force $\min(m_3, 2m_2 + 1)$. Ces valeurs sont données dans le tableau suivant :

groupe	m_2	$\min(m_3, 2m_2 + 1)$
$W(\mathbf{I}_2^p) \approx (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), p \geq 3$	$p - 1$	$2p - 1$
$W(\mathbf{A}_n) \approx \mathfrak{S}_{n+1}, n \geq 3$	2	3
$W(\mathbf{B}_n) \approx (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n, n \geq 3$	3	5
$W(\mathbf{D}_n) \approx (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_n, n \geq 4$	3	$\min(5, n - 1)$
$W(\mathbf{E}_6)$	4	5
$W(\mathbf{E}_7)$	5	7
$W(\mathbf{F}_4)$ (isométries d'un 24-cellule)	5	7
$W(\mathbf{H}_3)$ (isométries d'un dodécaèdre)	5	9
$W(\mathbf{E}_8)$	7	11
$W(\mathbf{H}_4)$ (isométries d'un 120-cellule)	11	19

3.5.2 On peut aussi construire des formules de cubature à l'aide de plusieurs orbites de groupes. Par exemple, on a le lemme suivant :

Lemme Soit Γ un groupe opérant sur un espace polynomial réel Ω et soit $\tau \in \Lambda$ tel que $\dim(\mathcal{F}_\tau^0)^\Gamma = 1$. Soit h un générateur de $(\mathcal{F}_\tau^0)^\Gamma$. Soient $x, y \in \Omega$ tels que $h(x) > 0$ et $h(y) < 0$. Alors on a une formule de cubature (X, W) de force τ , où

$$X = \Gamma x \cup \Gamma y,$$

$$W_u = \begin{cases} \frac{-h(y)}{(h(x) - h(y)) |\Gamma x|} & \text{si } u \in \Gamma x, \\ \frac{h(x)}{(h(x) - h(y)) |\Gamma y|} & \text{si } u \in \Gamma y. \end{cases} \quad \square$$

Par exemple, dans le cas de la sphère, on obtient les formules de cubature suivantes :

- pour $\Gamma = W(\mathbf{H}_3)$ et $\tau = 9$: $X = \text{dodécaèdre} \cup \text{icosaèdre}$;
- pour $\Gamma = W(\mathbf{H}_4)$ et $\tau = 19$: $X = \text{120-cellule} \cup \text{600-cellule}$ [Sali75].

4 Opérateurs de Markov sur les variétés riemanniennes symétriques

Dans ce chapitre, nous étudions les opérateurs de Markov liés à des formules de cubature sur certains espaces polynomiaux. Il s'agit d'une généralisation partielle de [Pach04], qui traite du cas de la sphère.

4.1 Espaces polynomiaux symétriques

4.1.1 Définition Un **espace polynomial symétrique** est un espace polynomial réel métrique compact connexe tel que l'espace métrique sous-jacent Ω est un espace riemannien symétrique, c'est-à-dire une variété riemannienne connexe telle que, pour tout $x \in \Omega$, il existe une unique involution différentiable $s_x \in \text{Aut}(\Omega)$ fixant x et dont la dérivée en x vaut

$$D_x s_x = -\text{id}_{T_x \Omega}.$$

4.1.2 Proposition Le groupe des automorphismes d'un espace polynomial symétrique Ω est *généreusement transitif*, c'est-à-dire que, pour tout $x, y \in \Omega$, il existe $g \in \text{Aut}(\Omega)$ tel que $gx = y$ et $gy = x$.

DÉMONSTRATION Soient $x, y \in \Omega$; soit p un segment géodésique d'extrémités x et y ; soit z le point milieu de p . Alors $s_p \in \text{Aut}(\Omega)$ échange x et y . \square

4.1.3 Définition Un espace polynomial symétrique $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est *régulier* lorsqu'il vérifie la condition suivante :

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, si \mathcal{F}_λ contient un sous- $\text{Aut}(\Omega)_0$ -module irréductible de plus haut poids π , alors il contient tous les sous- $\text{Aut}(\Omega)_0$ -modules irréductibles de $L^2(\Omega)$ de plus haut poids ρ tels que $\rho \leq \pi$.

Ici, $\text{Aut}(\Omega)_0$ est la composante connexe de l'identité de $\text{Aut}(\Omega)$, et l'ordre sur les poids est celui défini au paragraphe 2.1.1.

4.1.4 Exemples

- (i) Les espaces compacts homogènes à deux points (section 2.3) sont des espaces polynomiaux symétriques réguliers.
- (ii) Les grassmanniennes $\mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} (section 2.2), sont des espaces polynomiaux symétriques réguliers. En effet, soit $a \in \mathcal{G}_{p,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n) / (\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(p) \times \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n-p))$ et soit $A \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n)$ un représentant de a . Soient a_1, \dots, a_p les p premières colonnes de A . On a alors

$$s_a = 2 \sum_{i=1}^p a_i a_i^* - I_n \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(n).$$

- (iii) Soit Ω un espace riemannien symétrique, et soit G le groupe engendré par les s_x , $x \in \Omega$. Le groupe G est généreusement transitif par le même argument que dans la démonstration de la proposition 4.1.2.

Soit G_1 le sous-groupe de G d'indice au plus 2 engendré par les $s_x s_y$ pour $x, y \in \Omega$. Alors G_1 est connexe; en effet, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ est un chemin reliant x à y , alors le chemin $t \mapsto s_x s_{\gamma(t)}$ relie l'identité à $s_x s_y$. Ainsi, G a au plus deux composantes connexes.

Supposons que la condition (*) du paragraphe 2.1.4 soit vérifiée. Alors l'espace polynomial réel correspondant construit au paragraphe 2.1.4 est un espace polynomial symétrique régulier.

4.1.5 Définition Soit $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial symétrique; soient (X, W) un code pondéré sur Ω , et $\lambda \in \Lambda$. On définit l'opérateur de Markov $M_{X,W}^{(\lambda)} \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_\lambda)$ par

$$M_{X,W}^{(\lambda)} = \sum_{x \in X} W_x \pi_\lambda(s_x),$$

où π_λ est la représentation de $\text{Aut}(\Omega)$ sur \mathcal{H}_λ définie par $(\pi_\lambda(g)f)(u) = f(g^{-1}u)$. Si X est un code, c'est-à-dire un code pondéré de poids constant $W_x = 1/|X|$, on note $M_X^{(\lambda)}$ l'opérateur de Markov correspondant.

On pose

$$\overline{M}^{(\lambda)} = \int_{\Omega} \pi_\lambda(s_x) dx,$$

c'est-à-dire

$$(\overline{M}^{(\lambda)} f)(u) = \int_{\Omega} f(s_x u) dx, \quad f \in \mathcal{H}_\lambda.$$

4.1.6 Posons, pour $x \in \Omega$,

$$c_\lambda := \text{tr}(\pi_\lambda(s_x)) / \dim \mathcal{H}_\lambda \leq 1.$$

Cette constante est indépendante du choix de $x \in \Omega$, car $s_{gx} = gs_x g^{-1}$ pour $g \in \text{Aut}(\Omega)$, et $\text{Aut}(\Omega)$ est transitif.

Lemme Si \mathcal{H}_λ est irréductible pour l'action de $\text{Aut}(\Omega)$, alors

$$\overline{M}^{(\lambda)} = c_\lambda \text{id}_{\mathcal{H}_\lambda}.$$

DÉMONSTRATION L'opérateur $\overline{M}^{(\lambda)}$ commute avec $\pi_\lambda(g)$ pour tout $g \in \text{Aut}(\Omega)$; par le lemme de Schur (proposition 5.2.2), $\overline{M}^{(\lambda)}$ est donc un multiple de l'identité. Enfin, on remarque que $\text{tr} \overline{M}^{(\lambda)} = \text{tr} \pi_\lambda(s_x)$ pour $x \in \Omega$. \square

4.2 Spectre des opérateurs de Markov associés à une formule de cubature

4.2.1 Soit $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial symétrique. Pour $\lambda \in \Lambda$, on définit une application linéaire

$$\Psi_\lambda : \text{Sym}^2(\mathcal{H}_\lambda) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}), \quad \Psi_\lambda(\varphi, \psi)(x) = \int_{\Omega} \varphi(u) \psi(s_x u) d\mu(u), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}_\lambda.$$

Cette application est $\text{Aut}(\Omega)$ -équivariante, car, pour $g \in \text{Aut}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(\varphi, \psi)(gx) &= \int_{\Omega} \varphi(u) \psi(s_{gx} u) d\mu(u) = \int_{\Omega} \varphi(u) \psi(g s_x g^{-1} u) d\mu(u) \\ &= \int_{\Omega} \varphi(gv) \psi(g s_x v) d\mu(v) = \Psi_\lambda(\varphi \circ g, \psi \circ g)(x). \end{aligned}$$

4.2.2 Lemme Soit $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial symétrique, soit $\lambda \in \Lambda$, et soit Ψ_λ comme au paragraphe 4.2.1. Soit (X, W) un code pondéré sur Ω . Alors $M_{X,W}^{(\lambda)} = \overline{M}^{(\lambda)}$ si et seulement si

$$\sum_{x \in X} W_x h(x) = \int_{\Omega} h(u) d\mu(u), \quad \forall h \in \text{im } \Psi_\lambda.$$

DÉMONSTRATION On a

$$\begin{aligned} M_{X,W}^{(\lambda)} = \overline{M}^{(\lambda)} &\iff \langle \varphi \mid M_{X,W}^{(\lambda)} \psi \rangle = \langle \varphi \mid \overline{M}^{(\lambda)} \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_\lambda \\ &\iff \sum_{x \in X} W_x \Psi_\lambda(\varphi, \psi)(x) = \int_{\Omega} \Psi_\lambda(\varphi, \psi)(u) d\mu(u), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

4.2.3 Lemme Si $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est un espace polynomial symétrique régulier, alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour Ψ_λ comme au paragraphe 4.2.1, on a $\text{im } \Psi_\lambda \subseteq \mathcal{F}_{2\lambda}$.

DÉMONSTRATION Notons $D(V)$ l'ensemble des plus hauts poids d'une représentation V . Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_\lambda$ deux vecteurs propres de plus haut poids π et ρ respectivement, le produit $\varphi \psi \in \mathcal{F}_{2\lambda}$ est un vecteur propre de plus haut poids $\pi + \rho$, de sorte que $D(\mathcal{H}_\lambda) + D(\mathcal{H}_\lambda) \subseteq D(\mathcal{F}_{2\lambda})$.

Pour deux vecteurs propres $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_\lambda$ de poids π et ρ respectivement, on voit facilement que $\Psi_\lambda(\varphi, \psi)$ est un vecteur propre de poids $\pi + \rho$. Par conséquent, tout plus haut poids de $\text{im } \Psi$ est borné par un élément de $D(\mathcal{H}_\lambda) + D(\mathcal{H}_\lambda) \subseteq D(\mathcal{F}_{2\lambda})$. Par la condition de régularité de l'espace polynomial symétrique, $\text{im } \Psi$ est bien contenu dans $\mathcal{F}_{2\lambda}$. \square

4.2.4 Théorème Soit $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial symétrique régulier ; soit (X, W) une formule de cubature de poids 2τ . Alors, pour tout $\lambda \leq \tau$, on a $M_{X,W}^{(\lambda)} = \overline{M}^{(\lambda)}$.

En particulier, si les espaces \mathcal{H}_λ sont irréductibles pour l'action de $\text{Aut}(\Omega)$, alors, pour tout $\lambda \leq \tau$, l'opérateur $M_{X,W}^{(\lambda)}$ est une homothétie de facteur c_λ (le coefficient c_λ est défini au paragraphe 4.1.6).

DÉMONSTRATION Cela est une conséquence des lemmes 4.2.2 et 4.2.3, ainsi que du lemme 4.1.6. \square

4.2.5 Exemple Le cas particulier de $\Omega = \mathbb{S}^m$ a été considéré dans [Pach04]⁷ : Si (X, W) une formule de cubature sur \mathbb{S}^m de poids 2τ , alors, pour tout $\lambda \leq \tau$, on a $M_{X,W}^{(\lambda)} = \frac{(-1)^\lambda (m-1)}{2\lambda+m-1} \text{id}_{\mathcal{H}_\lambda}$. Pour certains 2τ -designs X sur \mathbb{S}^m , on peut calculer le spectre de $M_X^{(\lambda)}$ pour $\lambda = \tau + 1$ ou $\tau + 2$ (voir [Pach04]).

4.3 Force d'une formule de cubature ayant un certain spectre d'opérateurs de Markov

Le but de cette section est d'étudier, dans un cas restreint, la réciproque du théorème 4.2.4.

4.3.1 Soit $(\Omega, d, \mu, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ un espace polynomial symétrique régulier. On suppose en outre que les espaces \mathcal{H}_λ sont irréductibles pour l'action de $\text{Aut}(\Omega)$ ou réduits à $\{0\}$. On reprend les notations de la section 1.4. Comme $\text{Aut}(\Omega)$ est généreusement transitif (proposition 4.1.2), selon le théorème 5.3.5, on a

$$\mathcal{C}_{RF}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^{\text{Aut}(\Omega)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{C}H_\lambda,$$

où $\mathcal{C}_{RF}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\Omega \times \Omega$ engendré par les fonctions du type $(x, y) \mapsto \varphi(x) \psi(y)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit l'application linéaire

$$S : \mathcal{C}_{RF}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^{\text{Aut}(\Omega)} \rightarrow \mathcal{C}_{RF}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^{\text{Aut}(\Omega)}, \quad S(\Phi)(x, y) = \Phi(y, s_x y).$$

⁷Dans [Pach04], nous définissons les opérateurs de Markov avec l'opérateur $r_x = 1 - s_x$ plutôt qu'avec s_x .

Considérons la décomposition

$$S(H_\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda} \sigma_\lambda^\mu H_\mu.$$

Soit $\Sigma(\lambda) = \{\mu \in \Lambda \mid \sigma_\lambda^\mu \neq 0\}$.

Lemme Soit Ψ_λ comme dans le paragraphe 4.2.1. On a

$$\text{im } \Psi_\lambda \supseteq \bigoplus_{\mu \in \Sigma(\lambda)} \mathcal{H}_\mu.$$

DÉMONSTRATION Soit $y \in \Omega$. On a

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(H_\lambda(y, \cdot), H_\lambda(y, \cdot))(x) &= \int_{\Omega} H_\lambda(y, u) H_\lambda(y, s_x u) d\mu(u) \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} H(y, u) H_\lambda(s_x y, u) d\mu(u) \stackrel{(2)}{=} H_\lambda(y, s_x y) = S(H_\lambda)(x, y) = \sum_{\mu \in \Sigma(\lambda)} \sigma_\lambda^\mu H_\mu(x, y). \end{aligned}$$

On a utilisé, en (1), $H_\lambda(\gamma u, \gamma v) = H(u, v)$ pour $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$, et, en (2), $H_\lambda * H_\lambda = H_\lambda$. Par le lemme 5.2.4 appliqué à $v_\mu = \sigma_\lambda^\mu H_\mu(\cdot, y) \in \mathcal{H}_\mu$, on a le résultat. \square

4.3.2 Cas des espaces homogènes à deux points de type compact On considère maintenant Ω un espace homogène à deux points de type compact, muni de sa structure d'espace polynomial décrite à la section 2.3, à savoir l'un des espaces \mathbb{S}^m , $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ ou $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$, avec $m \geq 2$, ou $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. On reprend les notations du paragraphe 2.3.1. Si $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, on a une surjection naturelle $\mathbb{S}^{cm+c-1} \rightarrow \Omega$, où \mathbb{S}^{cm+c-1} est la sphère unité dans \mathbb{K}_c^{m+1} . Dans ce qui suit, les lettres x, y , etc. désignent à la fois les éléments de \mathbb{S}^{cm+c-1} et leurs images dans Ω .

On a

$$s_x y = 2x^* y - y,$$

donc $y^* s_x y = 2y^* x x^* y - y^* y = 2|x^* y|^2 - 1$. En utilisant $\rho(x, y) = x^* y$ si $\Omega = \mathbb{S}^m$ et $\rho(x, y) = |x^* y|$ si $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, on en tire

$$\rho(y, s_x y) = \begin{cases} 2\rho(x, y)^2 - 1 & \text{si } \Omega = \mathbb{S}^m, \\ |2\rho(x, y)^2 - 1| & \text{si } \Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m. \end{cases}$$

Par conséquent, pour $\Phi \in (\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\lambda)^{\text{Aut}(\Omega)}$, si $\Phi = \widehat{\Phi} \circ \rho$, avec $\widehat{\Phi} \in \mathbb{R}[T]$ lorsque $\Omega = \mathbb{S}^m$ et $\widehat{\Phi} \in \mathbb{R}[T^2]$ lorsque $\Omega = \mathbb{K}_c \mathbb{P}^m$, on a

$$\widehat{S(\Phi)}(T) = \widehat{\Phi}(2T^2 - 1).$$

Ainsi, si $h_\mu = \widehat{H}_\mu$, les coefficients σ_λ^μ du paragraphe 4.3.1 sont donnés par la formule

$$h_\lambda(2T^2 - 1) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \sigma_\lambda^\mu h_{2\mu}(T).$$

4.3.3 Lemme Si $\Omega = \mathbb{S}^m$ avec $m \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \sigma_s^0 &= (-1)^s \frac{(m-1)m(m+1) \cdots (m+s-2)}{s!}, \\ \sigma_s^j &= -\frac{4(s-j+1)(2j-1)(s+j+m-2)}{(2s+2j+m-1)(2s-2j+m)(2j+m-2)} \sigma_s^{j-1}, \quad 1 \leq j \leq s, \end{aligned}$$

autrement dit,

$$\begin{aligned} \sigma_s^j &= \frac{(-1)^{s-j} (s + m/2 - 1/2) \Gamma(2j + 1) \Gamma(s + j + m - 1)}{\Gamma(m/2 - 1/2) \Gamma(j + 1)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(j + m/2 - 1/2) \Gamma(s - j + m/2 - 1/2)}{\Gamma(s - j + 1) \Gamma(2j + m - 1) \Gamma(s + j + m/2 + 1/2)}, \quad 0 \leq j \leq s. \end{aligned}$$

En particulier, $\sigma_s^j \neq 0$ pour $0 \leq j \leq s$.

DÉMONSTRATION On reprend les notations du paragraphe 2.3.3. Posons $m = n - 1$, et

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_s^j &:= \frac{(-1)^{s-j} (s + n/2 - 1) \Gamma(2j + 1) \Gamma(s + j + n - 2)}{\Gamma(n/2 - 1) \Gamma(j + 1)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(j + n/2 - 1) \Gamma(s - j + n/2 - 1)}{\Gamma(s - j + 1) \Gamma(2j + n - 2) \Gamma(s + j + n/2)}, \quad 0 \leq j \leq s. \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que, pour $s \geq 0$,

$$h_s(2T^2 - 1) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}} \tilde{\sigma}_s^\mu h_{2\mu}(T).$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} h_s(2T^2 - 1) &= \sum_{i=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} q_i^{(s)} (2T^2 - 1)^{s-2i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} q_i^{(s)} \sum_{h=0}^{s-2i} \binom{s-2i}{h} (-1)^{s-2i-h} 2^h T^{2h} \\ &= (-1)^s \sum_{h=0}^s \left((-2)^h \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{s-h}{2} \rfloor} q_i^{(s)} \binom{s-2i}{h} \right) T^{2h}, \end{aligned}$$

et d'autre part on a (pour l'égalité (*), on pose $j = i + h$) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^s \tilde{\sigma}_s^j h_{2j}(T) &= \sum_{j=0}^s \tilde{\sigma}_s^j \sum_{i=0}^j q_i^{(2j)} T^{2j-2i} \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^s \sum_{h=0}^{s-i} \tilde{\sigma}_s^{i+h} q_i^{(2i+2h)} T^{2h} \\ &= \sum_{h=0}^s \left(\sum_{i=0}^{s-h} q_i^{(2i+2h)} \tilde{\sigma}_s^{i+h} \right) T^{2h}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de vérifier

$$\sum_{i \geq 0} F_h(s, i) = \sum_{i \geq 0} G_h(s, i), \quad 0 \leq h \leq s,$$

où, selon la proposition 2.3.3,

$$\begin{aligned} F_h(s, i) &= (-1)^s (-2)^h q_i^{(s)} \binom{s-2i}{h} \\ &= \frac{(-1)^{s+i+h} 2^{s+h-2i} (s + n/2 - 1) \Gamma(s - i + n/2 - 1)}{\Gamma(n/2) \Gamma(i + 1) \Gamma(h + 1) \Gamma(s - 2i - h + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_h(s, i) &= q_i^{(2i+2h)} \tilde{\sigma}_s^{i+h} \\
&= (-1)^s (-4)^h (s + n/2 - 1) (2i + 2h + n/2 - 1) \\
&\quad \times \frac{\Gamma(2i + 2h + 1) \Gamma(s + i + h + n - 2)}{\Gamma(n/2) \Gamma(n/2 - 1) \Gamma(2h + 1) \Gamma(i + 1) \Gamma(i + h + 1)} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(s - i - h + n/2 - 1) \Gamma(i + h + n/2 - 1) \Gamma(i + 2h + n/2 - 1)}{\Gamma(s - i - h + 1) \Gamma(2h + 2i + n - 2) \Gamma(s + i + h + n/2)}
\end{aligned}$$

(remarquer que $F_h(s, i) = 0$ [respectivement $G_h(s, i) = 0$] si $i > [(s - h)/2]$ [resp. $i > s - h$]). On montre en fait

$$\sum_{i \geq 0} F_h(s, i) = \sum_{i \geq 0} G_h(s, i) = \frac{(-1)^s 2 \Gamma(s + h + n - 2) \Gamma(s + n/2)}{\Gamma(n - 1) \Gamma(s - h + 1) \Gamma(s + n/2 - 1)}, \quad 0 \leq h \leq s,$$

en utilisant l'algorithme WZ (section 5.7). Les certificats pour $\sum_{i \geq 0} F_h(s, i)$ et pour $\sum_{i \geq 0} G_h(s, i)$ sont respectivement :

$$\begin{aligned}
R_F(s, i) &= -\frac{4i(s - i + n/2 - 1)}{(s + h + n - 2)(s - 2i - h + 1)}, \\
R_G(s, i) &= -\frac{i(2i + 2h + n - 3)(s - i - h + n/2 - 1)}{(s - i - h + 1)(2i + 2h + n/2 - 1)(s + h + n - 2)}. \quad \square
\end{aligned}$$

4.3.4 Théorème Soit (X, W) un code pondéré sur la sphère \mathbb{S}^m , $m \geq 2$. Supposons de plus que (X, W) est antipodal, c'est-à-dire tel que $X = -X$ et $W_{-x} = W_x$ pour tout $x \in X$. Si l'opérateur $M_{X,W}^{(\tau)}$ est une homothétie, alors (X, W) est une formule de cubature de poids $2\tau + 1$.

DÉMONSTRATION Remarquons d'abord que, vu que $\text{tr } M_{X,W}^{(\tau)} = \text{tr } s_x = c_\tau \dim \mathcal{H}_\tau$ indépendamment de $x \in \Omega$, si $M_{X,W}^{(\tau)}$ est une homothétie, alors le rapport d'homothétie est c_τ , et $M_{X,W}^{(\tau)} = \overline{M}^{(\tau)} = c_\tau \text{id}_{\mathcal{H}_\tau}$.

Soit Ψ_τ comme au paragraphe 4.2.1. Par les lemmes 4.3.1 et 4.3.3, on a

$$\text{im } \Psi_\tau \supseteq \bigoplus_{\mu=0}^{\tau} \mathcal{H}_{2\mu}.$$

Selon le lemme 4.2.2, comme $M_{X,W}^{(\tau)} = \overline{M}^{(\tau)}$, alors

$$\sum_{x \in X} W_x h(x) = \int_{\Omega} h(u) d\mu(u), \quad \forall h \in \bigoplus_{\mu=0}^{\tau} \mathcal{H}_{2\mu}.$$

D'autre part, comme (X, W) est antipodal, et que tout $h \in \mathcal{H}_{2\mu+1}$ vérifie $h(-u) = -h(u)$ (voir paragraphe 2.3.2), on a aussi

$$\sum_{x \in X} W_x h(x) = \int_{\Omega} h(u) d\mu(u) = 0, \quad \forall h \in \bigoplus_{\mu=0}^{\tau} \mathcal{H}_{2\mu+1}.$$

Par suite, (X, W) est bien une formule de cubature de poids $2\tau + 1$. \square

4.3.5 Cas des autres espaces homogènes à deux points de type compact Soit Ω un espace homogène à deux points de type compact, et soient les coefficients σ_λ^μ définis par

$$h_\lambda(2T^2 - 1) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \sigma_\lambda^\mu h_{2\mu}(T).$$

Pour étendre le théorème 4.3.4 aux espaces homogènes à deux points de type compact différents des sphères, il suffirait de montrer un équivalent du lemme 4.3.3, c'est-à-dire que les coefficients σ_λ^μ ne s'annulent pas. Des expériences numériques suggèrent l'énoncé suivant :

Conjecture Soient λ, μ des entiers tels que $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$ et $0 \leq \mu \leq \lambda$.

- (i) Si $\Omega = \mathbb{R}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ ou $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$ avec $m \geq 3$, ou si $\Omega = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$, alors $\sigma_\lambda^\mu \neq 0$ avec $\text{sign}(\sigma_\lambda^\mu) = (-1)^{\lambda-\mu}$.
- (ii) Si $\Omega = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, alors $\sigma_\lambda^0 = 0$ lorsque $\lambda \equiv 2 \pmod{4}$, et $\sigma_\lambda^\mu \neq 0$ avec $\text{sign}(\sigma_\lambda^\mu) = (-1)^{\lambda-\mu}$ sinon ;
- (iii) Si $\Omega = \mathbb{H}\mathbb{P}^2$, alors $\sigma_{10}^7 = 0$, et $\sigma_\lambda^\mu \neq 0$ si $(\lambda, \mu) \neq (10, 7)$;
- (iv) Si $\Omega = \mathbb{O}\mathbb{P}^2$, alors $\sigma_{16}^{13} = 0$, et $\sigma_\lambda^\mu \neq 0$ si $(\lambda, \mu) \neq (16, 13)$.

La conjecture implique que, si (X, W) est un code sur un espaces homogènes à deux points de type compact Ω et si $M_{X,W}^{(2v)}$ est une homothétie, alors (X, W) est une formule de cubature de poids $4v$, sauf éventuellement dans les cas suivants :

- (i) $\Omega = \mathbb{H}\mathbb{P}^2$, et $2v = 10$. Dans ce cas (X, W) est une formule de cubature de poids 12, et on a aussi

$$\sum_{x \in X} W_x h(x) = 0, \quad h \in \mathcal{H}_\mu, \mu = 16, 18, 20;$$

- (ii) $\Omega = \mathbb{O}\mathbb{P}^2$, et $2v = 16$. Dans ce cas (X, W) est une formule de cubature de poids 24, et on a aussi

$$\sum_{x \in X} W_x h(x) = 0, \quad h \in \mathcal{H}_\mu, \mu = 28, 30, 32.$$

Nous avons vérifié numériquement la conjecture pour $\lambda \leq 100$ dans le cas $\Omega = \mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{H}\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, et pour $\lambda \leq 60$ dans le cas $\Omega = \mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{H}\mathbb{P}^m, 3 \leq m \leq 10$. Le cas $\Omega = \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ découle directement des calculs pour \mathbb{S}^m .

5 Appendices

5.1 Enveloppes convexes

Dans cet appendice, nous donnons la démonstration complète de quelques résultats classiques sur les enveloppes convexes utilisés dans la section 3.1. Les propositions 5.1.6 et 5.1.7 peuvent être déduits du théorème de Hahn-Banach; voir par exemple [Berge78, Section 11.4]. La proposition 5.1.3 est une extension d'un théorème de Carathéodory due à Fenchel; voir par exemple [Eggl58, Chap. 2, Sect. 2, Theorem 18, p. 35].

5.1.1 Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Un ensemble $C \subseteq V$ est *convexe* si, pour tout $x, y \in C$ et $\alpha \in [0, 1]$, on a $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$. L'*enveloppe convexe* d'un ensemble $A \subseteq V$, noté $\text{Conv}(A)$, est le plus petit convexe de V contenant A ; c'est aussi l'ensemble des points $x \in V$ qui s'écrivent sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \quad \text{avec } x_i \in A, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Nous écrirons aussi cette dernière équation sous la forme

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i, 1) \in V \times \mathbb{R}, \quad \text{avec } (x_i, \alpha_i) \in A \times \mathbb{R}_{>0}.$$

5.1.2 Lemme Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \subseteq V$ un sous-ensemble. Soit $x \in \text{Conv}(A)$. Écrivons x sous la forme

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i, 1), \quad (x_i, \alpha_i) \in A \times \mathbb{R}_{>0},$$

avec k minimal. Alors tout sous-ensemble d'au plus k vecteurs parmi les $k + 1$ vecteurs

$$(x_1, 1), \dots, (x_k, 1), (x, 1) \in V \times \mathbb{R}$$

est linéairement indépendant.

DÉMONSTRATION Soit

$$\beta(x, 1) + \sum_{i=1}^k \beta_i (x_i, 1) = 0,$$

une relation linéaire non triviale. Il s'agit de démontrer qu'aucun de ses coefficients n'est nul.

Supposons qu'il existe un indice j tel que $\beta\alpha_j + \beta_j \neq 0$; on peut alors supposer qu'il existe un j tel que $\beta\alpha_j + \beta_j > 0$. Posons

$$\gamma_i = \alpha_i - c(\beta\alpha_i + \beta_i), \quad \text{où } c = \min \left\{ \frac{\alpha_j}{\beta\alpha_j + \beta_j} \mid \beta\alpha_j + \beta_j > 0 \right\}.$$

On a alors

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^k \gamma_i (x_i, 1), \quad \text{avec } (x_i, \gamma_i) \in A \times \mathbb{R}_{\geq 0},$$

et au moins un des γ_i est nul, ce qui contredit la minimalité de k .

Par conséquent, on a $\beta\alpha_i + \beta_i = 0$ pour tous les i , de sorte que si un parmi les $\beta_1, \dots, \beta_k, \beta$ est nul, alors tous les autres le sont. \square

5.1.3 Proposition Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \subseteq V$ un sous-ensemble. Soit $x \in \text{Conv}(A)$. Écrivons x sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \quad \text{avec } x_i \in A, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1,$$

avec k minimal. Alors $k \leq \dim V + 1$. De plus, si A a au plus $\dim V$ composantes connexes, alors $k \leq \dim V$.

DÉMONSTRATION Par le lemme 5.1.2, les vecteurs $(x_1, 1), \dots, (x_k, 1)$ sont linéairement indépendants, donc $k \leq \dim V + 1$.

Supposons maintenant que A a au plus $\dim V$ composantes connexes, et, par l'absurde, que $k = \dim V + 1$. Alors les $(x_1, 1), \dots, (x_k, 1)$ forment une base de $V \times \mathbb{R}$, et, quitte à renuméroter les x_i , on peut supposer que x_{k-1} et x_k sont dans la même composante connexe.

Pour tout $y \in V$, soit $\beta_i(y) \in \mathbb{R}$ tels que $(y, 1) = \sum_{i=1}^k \beta_i(y)(x_i, 1)$; on a en particulier $\beta_i(x_j) = \delta_{ij}$. Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(z) = \min \{ \alpha_i \beta_k(z) - \alpha_k \beta_i(z) \mid 1 \leq i \leq k-1 \}.$$

On a $f(x_k) = \min_{1 \leq i \leq k-1} \alpha_i > 0$ et $f(x_{k-1}) = -\alpha_k < 0$. Par conséquent, comme x_{k-1} et x_k sont dans la même composante connexe de A , il existe $y \in A$ tel que $f(y) = 0$.

Si $\beta_k(y) \leq 0$, par la relation $\sum_{i=1}^k \beta_i(y) = 1$, il existe un indice i_0 entre 1 et $k-1$ tel que $\beta_{i_0}(y) > 0$ et

$$0 = f(y) \leq \alpha_{i_0} \beta_k(y) - \alpha_k \beta_{i_0}(y) < \alpha_{i_0} \beta_k(y),$$

d'où $\beta_k(y) > 0$.

Posons maintenant

$$\gamma_i := \frac{\alpha_i \beta_k(z) - \alpha_k \beta_i(z)}{\beta_k(y)} = \alpha_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k(y)} \beta_i(y) \geq 0, \quad \gamma := \frac{\alpha_k}{\beta_k(y)} > 0;$$

alors un des γ_i est nul. On a

$$(x, 1) = \gamma(y, 1) + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i (x_i, 1),$$

ce qui contredit la minimalité de k . \square

5.1.4 Proposition Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \subseteq V$ un sous-ensemble compact. Alors $\text{Conv}(A)$ est compact.

DÉMONSTRATION Soit $K = \dim V + 1$. Soit $x^{(n)}$ une suite dans $\text{Conv}(A)$. Écrivons, selon le lemme 5.1.2,

$$(x^{(n)}, 1) = \sum_{i=1}^K \alpha_i^{(n)} (x_i^{(n)}, 1), \quad (x_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}) \in A \times [0, 1].$$

Par compacité, la suite $s^{(n)} = (x_1^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, x_K^{(n)}, \alpha_K^{(n)})$ a un point d'accumulation $s = (x_1, \alpha_1, \dots, x_K, \alpha_K)$ dans $(A \times [0, 1])^K$, et

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^K \alpha_i (x_i, 1).$$

Ainsi, $x \in \text{Conv}(A)$ est un point d'accumulation de la suite $x^{(n)}$. \square

5.1.5 Lemme Soit V un espace euclidien de dimension non nulle, et soit $A \subseteq V$. Supposons qu'il existe un $\epsilon \geq 0$ tel que, pour tout $y \in V \setminus \{0\}$, il existe un $x \in A$ avec $\langle y | x \rangle < \epsilon \|y\|$. Alors

- (i) il existe $x_1, \dots, x_K \in A$ tel que, pour tout $y \in V \setminus \{0\}$, il existe un indice i avec $\langle y | x_i \rangle < \epsilon \|y\|$;
- (ii) si $\epsilon > 0$, il existe un $z \in \text{Conv}(A)$ tel que $\|z\| < \epsilon$;
- (iii) si $\epsilon = 0$, alors $0 \in \text{Conv}(A)^\circ$.

DÉMONSTRATION (i) Soit $S = \{u \in V \mid \|u\| = 1\}$. Pour $x \in A$, soit $U_x = \{u \in S \mid \langle u | x \rangle < \epsilon\}$. Par hypothèse, $\{U_x\}_{x \in A}$ recouvre S . Par compacité de S , il existe $x_1, \dots, x_K \in A$ tel que $\{U_{x_i}\}_{i=1}^K$ recouvre S , ce qui montre le point (i).

(ii) Par le point (i), il suffit de vérifier (ii) et (iii) pour $A = \{x_1, \dots, x_K\}$. Comme $V \neq \{0\}$, on a $\{x_1, \dots, x_K\} \neq \emptyset$. Soit donc $z \in \text{Conv}(x_1, \dots, x_K)$ de norme minimale. Écrivons

$$(z, 1) = \sum_{i=1}^K \alpha_i (x_i, 1), \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Si $z = 0$, on a terminé; sinon, il existe un j tel que $\langle z | x_j \rangle < \epsilon \|z\|$. Considérons, pour $h \in [0, 1]$,

$$z(h) = z + h(x_j - z) \in \text{Conv}(x_1, \dots, x_K).$$

Par minimalité de $\|z\|$, on a $(d/dh)|_{h=0} \|z(h)\|^2 \geq 0$. Or,

$$\left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \|z(h)\|^2 = 2\langle z | x_j - z \rangle < 2(\|z\|\epsilon - \|z\|^2).$$

Par conséquent, $\|z\| < \epsilon$.

Cela achève la démonstration du point (ii), et montre en même temps :

$$(*) \quad \text{Si } \epsilon = 0, \text{ alors } 0 \in \text{Conv}(x_1, \dots, x_K).$$

(iii) Par hypothèse et compacité,

$$\eta_u := \max_{1 \leq i \leq K} (-\langle u | x_i \rangle) > 0, \quad \forall u \in S, \quad \eta := \min_{u \in S} \eta_u > 0,$$

Soit δ tel que $0 < \delta < \eta$; alors, pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, il existe un indice i tel que $\langle v | x_i \rangle < -\delta \|v\|$. Soit $z \in V$ tel que $\|z\| < \delta$. Soit $v \in V \setminus \{0\}$ et i tel que $\langle v | x_i \rangle < -\delta \|v\|$. On a

$$\langle v | x_i - z \rangle = \langle v | x_i \rangle - \langle v | z \rangle < -\delta \|v\| + \|z\| \|v\| < 0.$$

Par (*), on a $0 \in \text{Conv}(x_1 - z, \dots, x_K - z)$, c'est-à-dire $z \in \text{Conv}(x_1, \dots, x_K)$. Comme on a choisi z quelconque avec $\|z\| < \delta$, on a bien $0 \in \text{Conv}(x_1, \dots, x_K)^\circ$. \square

5.1.6 Proposition Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \subseteq V$ un sous-ensemble non vide. Alors $0 \in \text{Conv}(A)^\circ$ si et seulement si, pour tout $\xi \in V^* \setminus \{0\}$, il existe un $x \in A$ avec $\xi(x) < 0$.

DÉMONSTRATION \Rightarrow : Supposons $0 \in \text{Conv}(A)^\circ$; alors il existe un voisinage U de 0 inclus dans $\text{Conv}(A)$. Soit $\xi \in V^* \setminus \{0\}$; il existe alors $x \in U$ tel que $\xi(x) < 0$. Comme $x \in \text{Conv}(A)$, on peut écrire

$$(x, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i, 1), \quad \text{avec } (x_i, \alpha_i) \in A \times \mathbb{R}_{>0}.$$

On a alors $\xi(x_i) < 0$ pour au moins un indice i .

\Leftarrow : Si $V = \{0\}$, cela est trivial, car A est non vide. Sinon, cela découle du lemme 5.1.5.iii. \square

5.1.7 Proposition Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \subseteq V$ un sous-ensemble compact. Alors $0 \in \text{Conv}(A)$ si et seulement si, pour tout $\xi \in V^*$, il existe un $x \in A$ avec $\xi(x) \leq 0$.

DÉMONSTRATION \Rightarrow : Supposons $0 \in \text{Conv}(A)$. On écrit

$$(0, 1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x_i, 1), \quad (x_i, \alpha_i) \in V \times \mathbb{R}_{>0}.$$

On a $0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \xi(x_i)$, donc $\xi(x_i) \leq 0$ pour au moins un i .

\Leftarrow : Si $V = \{0\}$, cela est trivial. Sinon, cela découle du lemme 5.1.5.ii appliqué à ϵ arbitrairement petit et de la compacité de $\text{Conv}(A)$ (proposition 5.1.4). \square

5.2 Critères d'irréductibilité de représentations linéaires

Dans cet appendice, nous donnons divers critères liés à l'irréductibilité de représentations linéaires de groupes compacts.

5.2.1 Notations Si G est un groupe opérant sur un espace vectoriel V , on note V^G le sous-espace des éléments de V invariants par G .

Si V un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire, on note $\mathcal{L}(V)$ l'espace des endomorphismes linéaires de V , et $\mathcal{L}^*(V)$ l'espace des endomorphismes linéaires *autoadjoints* de V . Lorsque V est de dimension infinie, on note $\mathcal{L}_{\text{RF}}(V)$, respectivement $\mathcal{L}_{\text{RF}}^*(V)$, l'espace des endomorphismes linéaires, respectivement linéaires autoadjoints, de *rang fini* de V .

Pour un sous-espace W de V , on note p_W la projection orthogonale de V sur W . Enfin, on identifie $\mathcal{L}(W)$ de manière naturelle à une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

Si un groupe G opère sur V , il opère sur $\mathcal{L}(V)$ par conjugaison et $\mathcal{L}(V)^G$ est alors l'espace des endomorphismes G -équivariants de V .

Les sommes directes d'espaces vectoriels ou de G -modules sont toujours des sommes directes algébriques.

5.2.2 Proposition (Lemme de Schur) Soit G un groupe compact et V un G -module réel ou complexe, non trivial.

(i) Si V est complexe, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) V est irréductible pour l'action de G ,
- (b) $\mathcal{L}(V)^G = \mathbb{C} \text{id}_V$.

(ii) Si V est réel, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) V est irréductible pour l'action de G ,
- (b) $\mathcal{L}^*(V)^G = \mathbb{R} \text{id}_V$ pour n'importe quel produit scalaire G -invariant sur V .
- (c) $\dim \text{Sym}^2(V)^G = 1$.

DÉMONSTRATION Munissons V d'un produit scalaire G -invariant.

(i) Si V n'est pas irréductible et si W est un sous- G -module propre de V , alors $p_W \in \mathcal{L}(V)^G$, donc $\mathcal{L}(V)^G \neq \mathbb{C} \text{id}_V$. Inversément, si V est irréductible, soit $A \in \mathcal{L}(V)^G$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Alors $\ker(A - \lambda \text{id}_V) \neq \{0\}$ est un sous- G -module de V , donc égal à V par irréductibilité de V . Par suite, $A = \lambda \text{id}_V$.

(ii) Pour l'équivalence (a \Leftrightarrow b), on procède comme pour (i) en utilisant le fait qu'un opérateur autoadjoint a une valeur propre réelle. Pour (b \Leftrightarrow c), il suffit de remarquer que l'isomorphisme G -équivariant

$$(V \otimes V) \rightarrow \mathcal{L}(V), \quad \varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \langle \psi | \cdot \rangle$$

se restreint à un isomorphisme $\text{Sym}^2(V) \rightarrow \mathcal{L}^*(V)$. \square

5.2.3 Proposition Soit G un groupe compact opérant transitivement sur un ensemble Ω , soit H un sous groupe fermé de G laissant fixe un point $e \in \Omega$, et soit V un sous-espace (réel ou complexe) de dimension finie de fonctions sur Ω , stable par l'action de G .

- Si $\dim V^H = 0$, alors $V = \{0\}$.
- Si $\dim V^H = 1$, alors V est irréductible.

DÉMONSTRATION On munit V d'un produit scalaire G -invariant. Pour un sous- G -module W de V , il existe un unique $\varphi_e^W \in W$ tel que $\langle \varphi_e^W | \varphi \rangle = \varphi(e)$ pour tout $\varphi \in W$. De plus, on a $\varphi_e^W \in W^H$.

(i) Si $\dim V^H = 0$, alors $\varphi_e^V = 0$; donc, pour tout $g \in G$ et tout $\varphi \in V$, $\varphi(ge) = \langle \varphi_e^V | g^{-1} \cdot \varphi \rangle = 0$. Comme G est transitif, on en déduit que $V = \{0\}$.

(ii) Supposons maintenant que $\dim V^H = 1$; en particulier $V \neq \{0\}$. Si $V = V_1 \oplus V_2$, alors $\varphi_e^{V_1}$ et $\varphi_e^{V_2}$ sont des éléments de V^H , donc sont colinéaires. Or on a $\varphi_e^{V_1} \in V_1$ et $\varphi_e^{V_2} \in V_2$, et $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, de sorte que $\varphi_e^{V_1}$ ou $\varphi_e^{V_2}$ est nul. Par le point (i), V_1 ou V_2 est réduit à $\{0\}$. \square

5.2.4 Lemme Soit V une représentation (réelle ou complexe) d'un groupe compact qui se décompose en somme directe $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ de représentations irréductibles non-équivalentes deux à deux. Soit W une sous-représentation de V . Supposons qu'il existe un $v \in W$ qui s'écrive

$$v = \sum_{i=1}^m v_i, \quad v_i \in V_i \quad v_i \neq 0.$$

Alors $W = V$.

DÉMONSTRATION Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation d'un groupe compact G vérifiant les hypothèses du lemme. Pour chaque i , soit χ_i le caractère de V_i . Comme les V_i sont inéquivalentes deux à deux, pour chaque i , la projection G -équivariante $p_i : V \rightarrow V_i$ de noyau $\bigoplus_{j \neq i} V_j$ s'écrit

$$p_i = \int_G \overline{\chi_i(g)} \rho(g) dg.$$

Il en résulte en particulier que $p_i(W) \subseteq W$ si W est une sous-représentation de V . S'il existe $v = \sum_{i=1}^m v_i \in W$ avec $v_i \in V_i$, $v_i \neq 0$ pour tout i , alors $0 \neq v_i = p_i(v) \in W \cap V_i$, et donc $W \cap V_i \neq \emptyset$. Comme les V_i sont irréductibles, il s'ensuit que $V_i \subseteq W$ pour tout i , et, par conséquent, $W = V$. \square

5.3 Noyaux reproduisants et paires de Gelfand

Dans cet appendice, nous établissons quelques faits bien connus liés aux *noyaux reproduisants* et aux *paires de Gelfand*. Les noyaux reproduisants sont notamment utilisés pour définir les espaces polynomiaux multiplicatifs, et les paires de Gelfand fournissent des exemples naturels de tels espaces (sections 1.4 et 2.1). Les résultats de cet appendice sont aussi utilisés sporadiquement en d'autres endroits.

5.3.1 Notations Soit Ω un espace localement compact muni d'une mesure de probabilité μ de support Ω . On désigne par $\mathcal{C}(\Omega)$, respectivement $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur Ω à valeurs complexes, respectivement réelles, muni du produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \int_{\Omega} \overline{f(u)} g(u) d\mu(u).$$

D'autre part, on pose

$$\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega) = \left\{ \Phi \in \mathcal{C}(\Omega \times \Omega) \left| \begin{array}{l} \{\Phi(x, \cdot)\}_{x \in \Omega} \text{ et } \{\Phi(\cdot, y)\}_{y \in \Omega} \\ \text{engendrent des sous-espaces de} \\ \mathcal{C}(\Omega) \text{ de dimension finie} \end{array} \right. \right\}.$$

Cet espace est muni de la convolution

$$\Phi * \Psi(x, z) = \int_{\Omega} \Phi(x, y) \Psi(y, z) d\mu(y)$$

et de l'involution

$$\Phi^*(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}.$$

On définit de manière similaire $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})$. Si un groupe G opère sur Ω en préservant la mesure μ , alors G opère sur $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)$ par l'action $(\gamma \cdot \Phi)(x, y) = \Phi(\gamma^{-1}x, \gamma^{-1}y)$.

Si V est un espace vectoriel, on rappelle que $\mathcal{L}_{\text{RF}}(V)$ désigne l'algèbre des endomorphismes linéaires de rang fini de V . Si un groupe G opère sur V , il opère sur $\mathcal{L}_{\text{RF}}(V)$ par conjugaison.

Pour un sous-espace V de dimension finie de $\mathcal{C}(\Omega)$, et pour tout $x \in \Omega$, comme $x \mapsto \varphi(x)$ est une forme linéaire sur V , il existe un unique $\varphi_x^V \in V$ tel que

$$\langle \varphi_x^V \mid \varphi \rangle = \varphi(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in V.$$

Pour $X \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$, notons $\text{span } X$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega)$ linéairement engendré par X

5.3.2 Théorème Soit Ω un espace localement compact muni d'une mesure de probabilité μ de support Ω . On a un morphisme de \mathbb{C} -algèbres involutives

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega) &\rightarrow \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega)) \\ (\alpha(\Phi)\varphi)(x) &= \int_{\Omega} \Phi(x, y) \varphi(y) d\mu(y), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que α est un morphisme linéaire vérifiant $\alpha(\Phi * \Psi) = \alpha(\Phi)\alpha(\Psi)$ et $\alpha(\Phi^*) = \alpha(\Phi)^*$. De plus, on a les propriétés suivantes :

- (i) α est un isomorphisme;
- (ii) $\text{im } \alpha(\Phi) = \text{span}\{\Phi(\cdot, y) \mid y \in \Omega\}$ pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)$;
- (iii) Pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)$, on a $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n (\alpha(\Phi)e_i)(x) \overline{e_i^*(y)}$, où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base de $\text{im } \alpha(\Phi) + \text{im } \alpha(\Phi)^*$ et $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ est sa base duale;
- (iv) $\text{tr } \alpha(\Phi) = \int_{\Omega} \Phi(x, x) d\mu(x)$ pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)$;
- (v) Pour $\Phi \in \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)$, l'opérateur $\alpha(\Phi)$ est positif, c'est-à-dire $\langle \varphi \mid \alpha(\Phi)\varphi \rangle \geq 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, si et seulement si Φ est de type positif, c'est-à-dire $\sum_{j,k=1}^m \overline{c_j} c_k \Phi(x_j, x_k) \geq 0$ pour tout $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$;
- (vi) si G est un groupe opérant sur Ω en préservant μ , alors α est G -équivariant.

On a également un morphisme de \mathbb{R} -algèbres involutives

$$\alpha_{\mathbb{R}} : \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))$$

défini par la même formule avec les mêmes propriétés.

DÉMONSTRATION Pour $\Phi \in \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)$, soit

$$V_{\Phi} = \text{span}\left(\{\Phi(\cdot, y) \mid y \in \Omega\} \cup \{\overline{\Phi(x, \cdot)} \mid x \in \Omega\}\right),$$

qui est de dimension finie. Alors on a une application linéaire bien définie

$$\alpha(\Phi) \in \mathcal{L}(V_{\Phi}), \quad (\alpha(\Phi)\varphi)(x) = \langle \overline{\Phi(x, \cdot)} \mid \varphi \rangle = \int_{\Omega} \Phi(x, y) \varphi(y) d\mu(y),$$

qui se prolonge, par la même formule, en une application linéaire $\alpha(\Phi) \in \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))$ telle que $\alpha(\Phi)\varphi = 0$ pour φ orthogonal à V_{Φ} . Cela montre que α est une application bien définie.

La linéarité de α est évidente, ainsi que la propriété $\alpha(\Phi * \Psi) = \alpha(\Phi)\alpha(\Psi)$. Pour montrer $\alpha(\Phi^*) = \alpha(\Phi)^*$, on écrit

$$\langle \varphi \mid \alpha(\Phi)\psi \rangle = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \overline{\varphi(x)} \Phi(x, y) \psi(y) d\mu(x) d\mu(y) = \langle \alpha(\Phi^*)\varphi \mid \psi \rangle$$

pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Montrons la propriété (ii). Il est clair que $\text{im } \alpha(\Phi) \subseteq \text{span}\{\Phi(\cdot, y) \mid y \in \Omega\}$. Inversement, soit $U = \text{span}\{\Phi(x, \cdot) \mid x \in \Omega\}$. On a

$$\alpha(\Phi)(\overline{\varphi_y^U(x)}) = \int_{\Omega} \Phi(x, z) \overline{\varphi_y^U(z)} d\mu(z) = \langle \varphi_y^U \mid \Phi(x, \cdot) \rangle = \Phi(x, y),$$

de sorte qu'on a bien $\Phi(\cdot, y) \in \text{im } \alpha(\Phi)$.

Montrons (i). Pour $A \in \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))$, soit

$$V_A = \text{im } A + \text{im } A^*,$$

qui est de dimension finie. Soit l'application

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega)) &\rightarrow \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega), \\ \beta(A)(x, y) &= \int_{\Omega} \overline{\varphi_x^{V_A}(u)} (A\varphi_y^{V_A})(u) d\mu(u) = (A\varphi_y^{V_A})(x) = \overline{(A^*\varphi_x^{V_A})(y)}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (\alpha(\beta(A))\varphi)(x) &= \int_{\Omega} \beta(A)(x, y) \varphi(y) d\mu(y) = \int_{\Omega} \overline{(A^*\varphi_x^{V_A})(y)} \varphi(y) d\mu(y) \\ &= \langle A^*\varphi_x^{V_A} \mid \varphi \rangle = \langle \varphi_x^{V_A} \mid A\varphi \rangle = (A\varphi)(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(\Phi))(x, y) &= (\alpha(\Phi)\varphi_y^{V_{\alpha(\Phi)}})(x) = \int_{\Omega} \Phi(x, z) \varphi_y^{V_{\alpha(\Phi)}}(z) d\mu(z) \\ &= \overline{\langle \varphi_y^{V_{\alpha(\Phi)}} \mid \overline{\Phi(x, \cdot)} \rangle} = \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé $\overline{\Phi(x, \cdot)} = \Phi^*(\cdot, x) \in \text{im } \alpha(\Phi^*) = \text{im } \alpha(\Phi)^* \subseteq V_{\alpha(\Phi)}$. Ainsi, $\beta = \alpha^{-1}$.

Pour (iii), soit

$$\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^n (\alpha(\Phi)e_i)(x) \overline{e_i^*(y)}$$

où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base de $V_{\alpha(\Phi)} = \text{im } \alpha(\Phi) + \text{im } \alpha(\Phi)^*$ et $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ est sa base duale. On vérifie alors que

$$\int_{\Omega} \Psi(x, y) e_i(y) d\mu(y) = e_i(x).$$

De (i) et (ii), on déduit que $\Psi = \Phi$.

La propriété (iv) se déduit de (iii) en posant $y = x$ et en intégrant sur $x \in \Omega$.

Pour (v), en utilisant $\Phi(x_j, x_k) = \langle \varphi_{x_j}^{V_{\alpha(\Phi)}} \mid \alpha(\Phi)\varphi_{x_k}^{V_{\alpha(\Phi)}} \rangle$, on obtient

$$\sum_{j,k=1}^m \overline{c_j} c_k \Phi(x_j, x_k) = \left\langle \sum_{j=1}^m c_j \varphi_{x_j}^{V_{\alpha(\Phi)}} \mid \alpha(\Phi) \left(\sum_{k=1}^m c_k \varphi_{x_k}^{V_{\alpha(\Phi)}} \right) \right\rangle \geq 0,$$

ce qui montre que Φ est de type positif si et seulement si $\langle \varphi \mid \alpha(\Phi)\varphi \rangle \geq 0$ pour tout $\varphi \in \text{span}\{\varphi_x^{V_{\alpha(\Phi)}} \mid x \in \Omega\} = V_{\alpha(\Phi)}$. Or, comme $\alpha(\Phi)\varphi = 0$ pour $\varphi \in V_{\alpha(\Phi)}^{\perp}$, on a bien la propriété (v).

Enfin, la vérification de la propriété (vi) est directe.

Le cas de $\alpha_{\mathbb{R}}$ se traite de la même manière que α . \square

5.3.3 Soit Ω un espace localement compact muni d'une mesure de probabilité μ de support Ω . Soit V un sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ de dimension finie. Soit p_V la projection orthogonale sur V . On définit le **noyau reproduisant** de V par

$$\Phi_V = \alpha^{-1}(p_V),$$

où α est défini comme au paragraphe précédent. Du théorème 5.3.2, on déduit les propriétés suivantes :

- (i) $\text{span}\{\Phi_V(\cdot, y) \mid y \in \Omega\} = V$;
- (ii) $\Phi_{\overline{V}}(x, y) = \overline{\Phi_V(y, x)}$;
- (iii) Φ_V est de type positif ;
- (iv) si $V \perp W$, alors $\Phi_V * \Phi_W = \Phi_W * \Phi_V = 0$ et $\Phi_{V \oplus W} = \Phi_V + \Phi_W$;
- (v) $\dim(V) = \int_{\Omega} \Phi_V(x, x) d\mu(x)$.

5.3.4 Théorème Soit Ω un espace localement compact muni d'une mesure de probabilité μ de support Ω , et soit G un groupe compact opérant sur Ω en préservant la mesure μ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) les sous- G -modules irréductibles de $\mathcal{C}(\Omega)$ sont deux à deux inéquivalents ;
- (b) $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)^G$ est une algèbre commutative pour la convolution ;
- (c) $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)^G$ est linéairement engendré par les noyaux reproduisants des composantes isotypiques du G -module $\mathcal{C}(\Omega)$.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors G est transitif sur Ω .

Remarque. Soit G un groupe compact et H un sous-groupe fermé de G . Si $\Omega = G/H$ vérifie l'une des conditions du théorème ci-dessus, on dit que (G, H) est une *paire de Gelfand*.

DÉMONSTRATION Écrivons

$$\mathcal{C}(\Omega) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_{\lambda}},$$

où les V_{λ} sont les composantes isotypiques de $\mathcal{C}(\Omega)$ en tant que G -module. On a une décomposition orthogonale

$$\mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))^G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}(V_{\lambda})^G.$$

D'autre part, on déduit du théorème 5.3.2 un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres

$$\alpha : \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)^G \rightarrow \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))^G.$$

Montrons (a \Rightarrow c). La condition (a) signifie que les V_{λ} sont irréductibles, donc, par le lemme de Schur (proposition 5.2.2),

$$\mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))^G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{C} p_{V_{\lambda}}.$$

Selon l'isomorphisme α ci-dessus, cela signifie que

$$\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)^G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{C} \Phi_{V_{\lambda}}.$$

Montrons (c \Rightarrow b). Par la condition (c), on a

$$\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)^G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{C} \Phi_{V_{\lambda}},$$

et, comme les V_λ sont deux à deux orthogonaux, on a $\Phi_{V_\lambda} * \Phi_{V_\mu} = 0$ si $\lambda \neq \mu$. Par conséquent, $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)^G$ est commutatif.

Montrons (b \Rightarrow a) par la contraposée. Si (a) n'est pas vérifié, $\mathcal{C}(\Omega)$ possède au moins deux sous- G -modules non-triviaux équivalents W_1 et W_2 ; de plus, on peut les choisir orthogonaux. Soit $A : W_1 \rightarrow W_2$ un morphisme linéaire G -équivariant non-nul, que l'on prolonge en un morphisme $A \in \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))^G$. On a $A p_{W_1} = A \neq 0 = p_{W_1} A$, de sorte que l'algèbre $\mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))^G$ n'est pas commutative, donc l'algèbre involutive $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega)^G$ non plus.

Enfin, comme $\mathcal{C}(\Omega)^G = \mathcal{C}(G \backslash \Omega)$, la condition (c) implique $\dim \mathcal{C}(G \backslash \Omega) = 1$, donc G est transitif sur Ω . \square

5.3.5 Théorème Soit Ω un espace localement compact muni d'une mesure de probabilité μ de support Ω , et soit G un groupe opérant sur Ω en préservant la mesure μ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) les sous- G -modules irréductibles de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ sont absolument irréductibles et deux à deux inéquivalents ;
- (b) pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^G$, on a $\Phi^* = \Phi$;
- (c) $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^G$ est linéairement engendré par les noyaux reproduisants des composantes isotypiques du G -module $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$;
- (d) G est généreusement transitif sur Ω , c'est-à-dire pour tout $x, y \in \Omega$, il existe $\gamma \in G$ tel que $\gamma x = y$ et $\gamma y = x$.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors les conditions du théorème 5.3.4 sont aussi vérifiées.

Remarque. Soit G un groupe compact et H un sous-groupe fermé de G . Si $\Omega = G/H$ vérifie l'une des conditions du théorème ci-dessus, on dit que (G, H) est une *paire de Gelfand symétrique*.

DÉMONSTRATION Comme pour la démonstration du théorème 5.3.4, écrivons

$$\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda},$$

où les V_λ sont les composantes isotypiques de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ en tant que G -module. On a une décomposition orthogonale

$$\mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))^G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}(V_\lambda)^G.$$

D'autre part, on déduit du théorème 5.3.2 un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres

$$\alpha_{\mathbb{R}} : \mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^G \rightarrow \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))^G.$$

La preuve de (a \Rightarrow c) est similaire à celle du théorème 5.3.4.

Montrons (c \Rightarrow b). Si (c) est vérifié, on a

$$\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{R} \Phi_{V_\lambda},$$

et on a $\Phi_{V_\lambda} * \Phi_{V_\mu} = 0$ et $\Phi_{V_\lambda}^* = \Phi_{V_\lambda}$. Par conséquent, les éléments de $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})^G$ sont autoadjoints.

Si la condition (b) est vérifiée, alors la condition (b) — et donc toutes les conditions — du théorème 5.3.4 est aussi vérifiée, car $(\Phi * \Psi)^* = \Psi^* * \Phi^*$.

Montrons (b \Rightarrow a) par la contraposée. D'une part, si les V_λ ne sont pas tous irréductibles, alors la condition (a) du théorème 5.3.4 n'est pas vérifiée, donc (b) n'est pas

vérifiée. D'autre part, si tous les V_λ sont irréductibles mais non pas absolument, il existe un λ_0 tel que $V_{\lambda_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = W \oplus \overline{W}$, où W est un sous- G -module complexe irréductible, et W et \overline{W} sont orthogonaux. Soit l'application linéaire G -invariante

$$A = i(p_W - p_{\overline{W}}) \in \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega))^G.$$

On a

$$V_{\lambda_0} = \{v \in V_{\lambda_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid \overline{v} = v\} = \{w + \overline{w} \mid w \in W\}.$$

Comme $A(w + \overline{w}) = \overline{A(w + \overline{w})} = iw - i\overline{w}$, alors $A(V_{\lambda_0}) = V_{\lambda_0}$. Par suite, A se restreint à un élément $A_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}_{\text{RF}}(\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}))^G$. Comme $A_{\mathbb{R}}^* = -A_{\mathbb{R}} \neq A_{\mathbb{R}}$, on en déduit, via l'isomorphisme $\alpha_{\mathbb{R}}$, que les éléments de $\mathcal{C}_{\text{RF}}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R})$ ne sont pas tous autoadjoints.

Finalement, l'équivalence (d \Leftrightarrow b) est évidente. \square

5.4 Sous-groupes finis d'un groupe de Lie compact

Le but de cet appendice est de démontrer qu'un sous-groupe fini d'un groupe de Lie compact est inclus, à indice borné près, dans un tore (théorème 5.4.5). Ce résultat est un ingrédient essentiel pour la démonstration des théorèmes 3.2.3 et 3.3.5.

L'énoncé et la démonstration proviennent, à quelques détails près, de [BooWan65].

5.4.1 Angles maximaux Notons $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées de dimension n à coefficients complexes. Soit $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire standard sur \mathbb{C}^n (antilinéaire à gauche) et $\| \cdot \|$ la norme standard. On a la norme suivante sur $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\|A\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ \|v\|=1}} \|Av\|.$$

On rappelle qu'une matrice $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ est normale lorsqu'elle commute avec son adjointe; une telle matrice est diagonalisable et ses espaces propres sont orthogonaux entre eux. Si $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ est une matrice normale, alors sa norme $\|A\|$ est égale à son rayon spectral $\varrho(A)$, c'est-à-dire au plus grand module de ses valeurs propres.

L'application surjective

$$\text{Exp} : \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \text{Exp}(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

est injective sur l'espace vectoriel des matrices normales de rayon spectral inférieur à π .

Soit $\mathcal{U}(n) = \{x \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid x^*x = I\}$ le groupe des matrices unitaires; les valeurs propres d'une telle matrice sont de norme 1. On pose

$$\theta(x) = \max\{|\theta| \mid e^{i\theta} \text{ est une valeur propre de } x \text{ avec } \theta \in [-\pi, \pi]\}.$$

On a, pour $x \in \mathcal{U}(n)$,

$$\theta(x) = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ \|v\|=1}} \arccos \Re \langle v \mid xv \rangle.$$

Autrement dit, si S désigne la sphère de \mathbb{C}^n de rayon 1 munie de la distance $d(u, v) = \arccos \Re \langle u \mid v \rangle$, on a $\theta(x) = \sup_{v \in S} d(v, xv)$. On a aussi la formule

$$\|x - I\| = \varrho(x - I) = 2 \sin \frac{\theta(x)}{2}.$$

On a les propriétés suivantes pour $x, y \in \mathcal{U}(n)$:

$$\begin{aligned} \theta(x) = 0 &\iff x = I \\ \theta(x^{-1}) &= \theta(x) \\ \theta(xy) &\leq \theta(x) + \theta(y). \end{aligned}$$

Soit $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-autoadjointe, c'est-à-dire telle que $X + X^* = 0$. Alors les valeurs propres de X sont imaginaires pures, $\text{Exp}(X)$ est unitaire, et, si $\varrho(X) \leq \pi$, on a

$$\theta(\text{Exp}(X)) = \varrho(X).$$

5.4.2 Lemme de Frobenius Soient $A, x \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que A est normal et x est unitaire. Si A et xAx^{-1} commutent et que $\theta(x) < \pi/2$, alors A et x commutent.

DÉMONSTRATION Il s'agit de montrer que $A = xAx^{-1}$. Comme A et xAx^{-1} sont normaux et commutent, ils sont diagonalisables simultanément et les espaces propres de chacun des opérateurs sont orthogonaux entre eux. Il suffit donc de montrer que, si v est simultanément un vecteur propre de A de valeur propre λ et un vecteur propre de xAx^{-1} de valeur propre μ , alors $\lambda = \mu$.

Soit donc v un tel vecteur. Alors v et $x^{-1}v$ sont deux vecteurs propres de A de valeurs propres λ et μ respectivement. Mais comme $\theta(x) < \pi/2$, v et $x^{-1}v$ ne sont pas orthogonaux, donc $\lambda = \mu$. \square

5.4.3 Lemme Soient $A, x \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que A est normal et x est unitaire. Supposons que A et x commutent, et que $x = \text{Exp}(X)$ avec $\varrho(X) < \pi$. Alors A et X commutent.

DÉMONSTRATION Quitte à remplacer A par $A + \lambda I$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ convenable, on peut supposer que A est inversible. Comme A et $x = \text{Exp}(X)$ commutent, on a

$$\text{Exp}(X) = A \text{Exp}(X) A^{-1} = \text{Exp}(AXA^{-1}).$$

Comme $\varrho(X) = \varrho(AXA^{-1}) < \pi$ et que Exp est injective sur l'espace des matrices normales de rayon spectral inférieur à π , on a $X = AXA^{-1}$, donc A et X commutent. \square

5.4.4 Soit G un groupe de Lie compact. On note \mathfrak{g} son algèbre de Lie, $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle, $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe de G , et $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ la représentation dérivée de Ad . On munit \mathfrak{g} d'un produit scalaire invariant par l'action de $\text{Ad}(G)$. Pour tout $g \in G$, on pose

$$\vartheta(g) = \theta(\text{Ad}(g)).$$

On remarque que cette définition est indépendante du produit scalaire choisi sur \mathfrak{g} . Lorsque G est connexe, $\vartheta(g) = 0$ si et seulement si g est dans le centre de G .

Soit $X \in \mathfrak{g}$. Les valeurs propres de $\text{ad } X$ sont imaginaires pures et $i\alpha$ est une valeur propre de $\text{ad } X$ si et seulement si $e^{i\alpha}$ est une valeur propre de $\text{Ad}(\exp(X)) = \text{Exp}(\text{ad}(X))$. On a $\varrho(\text{ad}(X)) \geq \vartheta(\exp(X))$ avec égalité lorsque $\varrho(\text{ad}(X)) \leq \pi$.

5.4.5 Théorème Soit G un groupe de Lie compact connexe. Alors il existe une constante K telle qu'on a la propriété suivante : Pour tout sous-groupe compact $\Gamma \leq G$ dont la composante connexe de l'identité Γ_0 est abélienne⁸, il existe un sous-groupe $T = T_0 Z \leq G$, où T_0 est un tore de G_0 et Z un sous-groupe du centre de G_0 , tel que l'indice de $\Gamma \cap T$ dans Γ soit au plus K et $\Gamma \cap T$ soit distingué dans Γ .

DÉMONSTRATION Premièrement, sans restreindre la généralité, on suppose que le centre de G est trivial (voir l'addendum 5.4.6 ci-après).

On munit \mathfrak{g} d'un produit scalaire invariant par l'action de $\text{Ad}(G)$, ce qui induit sur G une structure de variété riemannienne invariante par translations à gauche et à droite. Pour $\alpha \geq 0$, on pose

$$W_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varrho(\text{ad } X) < \alpha\}, \quad V_\alpha = \exp(W_\alpha), \\ U_\alpha = \{g \in G \mid \vartheta(g) < \alpha\}.$$

⁸On peut prendre par exemple pour Γ un sous-groupe fini

On a les propriétés suivantes :

- V_α est la composante connexe de l'identité de U_α lorsque $\alpha \leq \pi$;
- l'application \exp est injective sur W_α pour tout $\alpha \leq \pi$;
- $gU_\alpha g^{-1} = U_\alpha$ et $gV_\alpha g^{-1} = V_\alpha$ pour tout $g \in G$;
- $U_\alpha U_\beta \subseteq U_{\alpha+\beta}$ et $V_\alpha V_\beta \subseteq V_{\alpha+\beta}$.

Soit $\Gamma \leq G$ un sous-groupe compact tel que Γ_0 soit abélien. Soit

$$E = \{X \in \mathfrak{g} \cap W_{\pi/3} \mid \exp(X) \in \Gamma\},$$

et soit \mathfrak{t} la sous-algèbre de \mathfrak{g} engendrée par E .

Montrons que \mathfrak{t} est une sous-algèbre abélienne. Soient $X, Y \in E$; posons $x := \exp(X)$ et $y := \exp(Y)$. On définit, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_0 &= X, & x_0 &= x, \\ X_n &= \text{Ad}(x_{n-1})Y \in \mathfrak{g}, & n &\geq 1, \\ x_n &= \exp(X_n) = x_{n-1}y x_{n-1}^{-1} \in \Gamma, & n &\geq 1. \end{aligned}$$

On a $X_n \rightarrow Y$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En effet, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|Y - X_n\| &= \|Y - \text{Ad}(x_{n-1})Y\| = \|(Y - X_{n-1}) - \text{Ad}(x_{n-1})(Y - X_{n-1})\| \\ &= \|(I - \text{Ad } x_{n-1})(Y - X_{n-1})\| \leq \|I - \text{Ad}(x_{n-1})\| \|Y - X_{n-1}\| \\ &\leq 2 \sin \frac{\vartheta(x_{n-1})}{2} \|Y - X_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Soit $q = 2 \sin \frac{\vartheta(y)}{2} < 1$. Comme $\vartheta(x_m) = \vartheta(y)$ lorsque $m \geq 1$, on a

$$\|Y - X_n\| \leq q^{n-1} \|Y - X_1\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Comme Γ/Γ_0 est fini et que $x_n \rightarrow y$ quand $n \rightarrow \infty$, il existe un $n \geq 0$ tel que $x_n \in y\Gamma_0$. Soit $z := y^{-1}x_n$. Comme z et zyz^{-1} sont des éléments de Γ_0 , ils commutent. Par le lemme 5.4.2 appliqué à $A = \text{Ad}(z)$ et $x = \text{Ad}(y)$, les éléments $\text{Ad}(z)$ et $\text{Ad}(y)$ commutent, donc $\text{Ad}(x_n)$ et $\text{Ad}(y)$ commutent. Par le lemme 5.4.3 appliqué à $X = \text{ad}(Y)$, les éléments $\text{Ad}(x_n)$ et $\text{ad}(Y)$ commutent.

De l'équation $X_n = \text{Ad}(x_{n-1})Y$, on tire $\text{ad}(X_n) = \text{Ad}(x_{n-1}) \text{ad}(Y) \text{Ad}(x_{n-1})^{-1}$. Par le lemme 5.4.2 appliqué à $A = \text{ad}(Y)$ et $x = \text{Ad}(x_{n-1})$, les éléments $\text{ad}(Y)$ et $\text{Ad}(x_{n-1})$ commutent. En répétant l'argument, on obtient finalement que $\text{ad}(Y)$ et $\text{Ad}(x_0) = \text{Ad}(x)$ commutent. Maintenant, par le lemme 5.4.3, $\text{ad}(Y)$ et $\text{ad}(X)$ commutent. Comme on a supposé que le centre de G est trivial, ad est un isomorphisme, donc Y et X commutent.

Par suite, \mathfrak{t} est bien une sous-algèbre abélienne, et $T := \exp(\mathfrak{t})$ est un tore de G , et on a $\Gamma \cap V_{\pi/3} \subseteq \Gamma \cap T$. De plus, $\Gamma \cap T$ est distingué dans Γ , car $V_{\pi/3}$ est invariant par conjugaison.

On considère maintenant $g_1, g_2, \dots, g_N \in G$ des représentants des classes de Γ modulo $\Gamma \cap T$. Par construction,

$$g_i g_j^{-1} \notin V_{\pi/3} \quad \text{si } i \neq j.$$

Par conséquent, les ouverts $g_i V_{\pi/6}$ sont deux à deux disjoints. Par suite,

$$[\Gamma : \Gamma \cap T] \leq \frac{\text{volume}(G)}{\text{volume}(V_{\pi/6})}.$$

Cette dernière borne dépend uniquement de G . \square

5.4.6 Addendum Pour un groupe de Lie compact G , notons $K(G)$ le plus petit entier K vérifiant l'affirmation du théorème 5.4.5. Alors on a les propriétés évidentes suivantes :

- Si G est connexe, alors $K(G) = K(\text{Ad } G)$;
- si $G = H \times J$, alors $K(G) = K(H) K(J)$.

En particulier, si $G = (G_1 \times \dots \times G_m \times T)/Z$, où G_1, \dots, G_m sont des groupes de Lie compacts connexes simples, T est un tore et Z est un sous-groupe central de G , alors

$$K(G) = K(\text{Ad } G_1) \cdots K(\text{Ad } G_m).$$

5.5 Sous-groupes semi-simples d'un groupe de Lie compact

Dans cet appendice nous montrons que, dans un groupe de Lie compact, il n'y a, à conjugaison près, qu'un nombre fini de sous-groupes semi-simples (proposition 5.5.5). Ce résultat est utilisé dans la démonstration des théorèmes 3.2.4 et 3.3.8.

L'énoncé et la démonstration sont inspirés de [BoWaZi04, Lemma 4.3].

5.5.1 Théorème (Montgomery, Zippin, 1942) Soit G un groupe de Lie et K un sous-groupe de Lie compact de G . Alors il existe un ouvert $U \subseteq G$ contenant K ayant la propriété suivante : Pour tout sous-groupe H de G contenu dans U , il existe un $g \in G$ tel que $gHg^{-1} \subseteq K$.

Voyez [MonZip42] ou [MonZip55, Section 5.3, Theorem, p. 216].

5.5.2 Théorème (Myers, 1941) Soit M une variété riemannienne complète de dimension n , de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)\kappa$ avec $\kappa > 0$. Alors M est compacte et son diamètre est inférieur ou égal à $\pi/\sqrt{\kappa}$.

Voyez [CheEbi75, Ch. 1, §9, Theorem 1.26, p. 27], ou [Myer41] pour l'article original.

5.5.3 Courbure de Ricci d'un groupe de Lie D'après les propriétés élémentaires de la courbure de Ricci, si un groupe de Lie G est muni d'une structure de variété riemannienne bi-invariante, sa courbure de Ricci vaut, en tout point,

$$\text{Ric} = -\frac{1}{4}B_{\mathfrak{g}},$$

où $B_{\mathfrak{g}}$ est la forme de Killing, définie par : $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie de G . Voir par exemple [Carm93, chap. 4, exercice 1, p. 103].

5.5.4 Proposition Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie compacte. Alors il n'existe, à conjugaison près, qu'un nombre fini de sous-algèbres semi-simples de \mathfrak{g} .

DÉMONSTRATION Soit G un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Pour $p \leq \dim \mathfrak{g}$, soit $\mathcal{G}_p(\mathfrak{g})$ l'espace compact des sous-espaces vectoriels de \mathfrak{g} de dimension p . Soit $E_p \subseteq \mathcal{G}_p(\mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres semi-simples de \mathfrak{g} de dimension p . Il s'agit de montrer que les orbites de l'action adjointe de G sur E_p sont en nombre fini.

Clairement, E_p est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{G}_p(\mathfrak{g})$, donc compact. Les orbites de l'action de G sur E_p sont fermées, car G est compact. Par compacité de E_p , il suffit donc de montrer que les orbites sont ouvertes.

Munissons G d'une structure de variété riemannienne bi-invariante ; soit B le produit scalaire correspondant sur \mathfrak{g} et soit $\|X\|^2 = B(X, X)$ pour $X \in \mathfrak{g}$. Sur E_p , on a la distance

$$d(\mathfrak{h}, \mathfrak{j}) = \sup_{\substack{X \in \mathfrak{h} \\ \|X\|=1}} \inf_{\substack{Y \in \mathfrak{j} \\ \|Y\|=1}} \|X - Y\|.$$

Sur l'espace des compacts non-vides de G , on a la distance

$$d(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y) \right).$$

Comme G est compact, il est de courbure sectionnelle positive, par conséquent $d(\exp(X), \exp(Y)) \leq \|X - Y\|$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Sur $\mathfrak{h} \in E_p$, on a la forme de Killing $B_{\mathfrak{h}}(X, Y) = \text{tr}((\text{ad } X \circ \text{ad } Y)|_{\mathfrak{h}})$ qui est définie négative; donc il existe un $C > 0$ tel que $-C B_{\mathfrak{h}} \geq B$. Comme E_p est compact, on peut choisir un C indépendant de $\mathfrak{h} \in E_p$. Selon le paragraphe 5.5.3, la courbure de Ricci de H vaut

$$\text{Ric}^H = -\frac{1}{4}B_{\mathfrak{h}} \geq \frac{p-1}{4C(p-1)}B.$$

Par le théorème 5.5.2, le groupe $H = \exp(\mathfrak{h})$ est donc compact de diamètre au plus $D := \sqrt{4C(p-1)}\pi$.

Fixons maintenant $\mathfrak{k} \in E_p$ et soit $K = \exp(\mathfrak{k})$. Soit U un ouvert de G contenant K et vérifiant la conclusion du théorème 5.5.1 et soit $\epsilon := d(K, G \setminus U)/D > 0$. (Si $U = G$, on peut prendre n'importe quel $\epsilon > 0$.) Soit V la boule ouverte dans E_p de centre \mathfrak{k} et de rayon ϵ . Soit $\mathfrak{h} \in V$ et $H = \exp(\mathfrak{h})$; comme les diamètres de H et de K sont bornés par D , on a

$$d(H, K) \leq D d(\mathfrak{h}, \mathfrak{k}) \leq D\epsilon,$$

donc $H \subseteq U$. Par conséquent, il existe un $g \in G$ tel que $gHg^{-1} \subseteq K$, et donc $\mathfrak{h} = \text{Ad}(g^{-1})\mathfrak{k}$ (on a l'égalité à cause de l'égalité des dimensions). Cela montre bien que les orbites de $\text{Ad}(G)$ sur E_p sont ouvertes. \square

5.5.5 Proposition Soit G un groupe compact. Alors il n'existe, à conjugaison près, qu'un nombre fini de sous-groupes compacts connexes semi-simples de G .

DÉMONSTRATION On a une bijection naturelle entre les sous-groupes compacts connexes semi-simples de G et les sous-algèbres semi-simples de l'algèbre de Lie associée à G , et cette bijection est compatible avec l'action de G par conjugaison. L'énoncé de cette proposition est donc logiquement équivalent à celui de la proposition 5.5.4 ci-dessus. \square

5.6 Linéarisation de produits de polynômes de Jacobi

Cet appendice reprend en abrégé l'article de G. Gasper [Gasp70], avec quelques précisions supplémentaires.

La linéarisation de polynômes de Jacobi est utilisée à la section 3.4.

5.6.1 Soient $\alpha, \beta > -1$. Les *polynômes de Jacobi* $P_k^{(\alpha, \beta)}$, $k \in \mathbb{N}$, sont définis par

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_k^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left((1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{k+\beta}\right);$$

ce sont des polynômes orthogonaux pour la fonctionnelle

$$f \mapsto \int_{-1}^1 f(u) (1-u)^\alpha (1+u)^\beta du.$$

Soient

$$R_k^{(\alpha, \beta)}(x) = P_k^{(\alpha, \beta)}(x) / P_k^{(\alpha, \beta)}(1)$$

les polynômes de Jacobi normalisés par $R_k^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$. On a

$$R_p^{(\alpha, \beta)}(x) R_q^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=|p-q|}^{p+q} g(k, p, q) R_k^{(\alpha, \beta)},$$

où

$$g(k, p, q) = \frac{\int_{-1}^1 R_k^{(\alpha, \beta)}(u) R_p^{(\alpha, \beta)}(u) R_q^{(\alpha, \beta)}(u) (1-u)^\alpha (1+u)^\beta du}{\int_{-1}^1 (R_k^{(\alpha, \beta)}(u))^2 (1-u)^\alpha (1+u)^\beta du}.$$

5.6.2 Théorème Supposons que $\alpha + \beta + 1 > 0$ et soient $k, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $|p - q| \leq k \leq p + q$. Soit $g(k, p, q)$ comme au paragraphe précédent.

- (i) Si $\alpha = \beta$, alors $g(k, p, q) > 0$ lorsque $k \equiv p + q \pmod{2}$, et $g(k, p, q) = 0$ sinon.
- (ii) Si $\alpha > \beta$, alors $g(k, p, q) > 0$.

DÉMONSTRATION Nous ne donnons ici que les grandes lignes de la démonstration ; pour les détails, voyez [Gasp70].

Sans restreindre la généralité, supposons que $p \geq q$. Posons

$$a = \alpha + \beta + 1, \quad b = \alpha - \beta, \quad s = p - q, \quad k = s + j.$$

On a

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad a - b + 1 > 0, \quad p - q \leq k \leq p + q \Leftrightarrow 0 \leq j \leq 2s.$$

Pour $p - q \leq k \leq p + q$, soit d_k défini par

$$g(k, p, q) = \frac{\binom{k + \alpha}{k} \binom{p + \beta}{p} \binom{q + \beta}{q}}{\binom{k + \beta}{k} \binom{p + \alpha}{p} \binom{q + \alpha}{q}} d_k.$$

Alors les d_k vérifient la formule de récurrence [Gasp70, formule (5)]

$$A_j d_{s+j+1} = b(B_j - C_j) d_{s+j} + D_j d_{s+j-1}, \quad (*)$$

où

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{(j+1)(2s+2j+1+a+b)(2p+j+1+a)}{(2s+2j+1+a)} \times \frac{(2q-j-1+a)(2s+j+1)}{(2s+2j+2+a)}, \\ B_j &= \frac{(j+1)(2p+j+2a)(2q-j)(2s+j+1)}{(2s+2j+1+a)}, \\ C_j &= \frac{j(2p+j-1+2a)(2q-j+1)(2s+j)}{(2s+2j-1+a)}, \\ D_j &= \frac{(j-1+a)(2s+2j-1+a-b)(2p+j-1+2a)}{(2s+2j-2+a)} \times \frac{(2q-j+1)(2s+j-1+a)}{(2s+2j-1+a)}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} A_j &> 0 \quad \text{lorsque } 1 \leq j \leq 2q-1, \\ D_j &> 0 \quad \text{lorsque } 1 \leq j \leq 2q-1. \end{aligned}$$

D'autre part, on a des formules explicites pour $d_s = d_{p-q}$ et $d_{s+2j} = d_{p+q}$ dont nous déduisons, en utilisant $a = \alpha + \beta + 1 > 0$,

$$d_s > 0 \quad \text{et} \quad d_{s+2j} > 0.$$

En posant $j = 0$ dans (*) et en utilisant $d_{s-1} = 0$, on obtient

$$d_{s+1} = \frac{4bq(p+a)(2s+2+a)}{(2p+1+a)(2q-1+a)(2s+1+a+b)} d_s,$$

et en posant $j = 2q$ dans (*) et en utilisant $d_{s+2q+1} = 0$, on obtient

$$d_{s+2q-1} = \frac{4bqp(2s+4q-2+a)}{(2p-1+a)(2q-1+a)(2s+4q-1+a-b)},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} d_{s+1} = d_{s+2q-1} = 0 & \quad \text{si } b = 0 \text{ ou } q = 0, \\ d_{s+1}, d_{s+2q-1} > 0 & \quad \text{si } b > 0 \text{ et } q > 0. \end{aligned}$$

En analysant le coefficient $(B_j - C_j)$, on montre qu'il existe un indice $j_0 \geq 1$, dépendant de p, q et a , tel que $B_j - C_j \geq 0$ pour $1 \leq j \leq j_0$ et $B_j - C_j < 0$ pour $j > j_0$. Par applications successives de (*) avec $j = 1, 2, \dots, j_0$ et $j = 2q-1, 2q-2, \dots, j_0+1$, on obtient

$$\left. \begin{aligned} d_{s+j} > 0 & \quad \text{lorsque } j = 0, 1, \dots, 2q & \quad \text{si } b > 0, \\ d_{s+j} > 0 & \quad \text{lorsque } j = 0, 2, 4, \dots, 2q \\ d_{s+j} = 0 & \quad \text{lorsque } j = 1, 3, 5, \dots, 2q-1 \end{aligned} \right\} \quad \text{si } b = 0,$$

ce qui achève la démonstration. \square

5.7 L'algorithme WZ

Dans cet appendice, nous décrivons un algorithme, appelé *algorithme WZ*, permettant de démontrer une identité contenant des termes hypergéométriques. L'algorithme est tiré de [PeWiZe96, p. 25].

Cet algorithme est utilisé dans la démonstration de la proposition 2.3.3 et du lemme 4.3.3.

5.7.1 Vérification d'une identité combinatoire à l'aide de son certificat Pour vérifier une formule de la forme

$$\sum_{k \geq 0} f(n, k) = r(n), \quad n \geq 0$$

à l'aide d'un *certificat* $R(n, k)$ (voir le paragraphe 5.7.2 ci-dessous), on procède ainsi : On vérifie d'abord que $f(n, k)$ s'annule lorsque k est suffisamment grand. Puis on pose

$$F(n, k) := \begin{cases} f(n, k)/r(n) & \text{si } r(n) \neq 0, \\ f(n, k) & \text{si } r(n) = 0, \end{cases} \quad G(n, k) := R(n, k) F(n, k),$$

et on vérifie les équations

$$F(n+1, k) - F(n, k) = G(n, k+1) - G(n, k) \quad \text{et} \quad G(n, 0) = 0, \quad n \geq 0, k \geq 0,$$

de sorte qu'on a

$$\sum_{k \geq 0} F(n+1, k) = \sum_{k \geq 0} F(n, k), \quad n \geq 0.$$

Il suffit alors de vérifier

$$\sum_{k \geq 0} f(0, k) = r(0).$$

5.7.2 Trouver le certificat Le certificat $R(n, k)$ de l'identité $\sum_k f(n, k) = r(n)$ s'obtient ainsi : Soit

$$h_k := F(n + 1, k) - F(n, k)$$

où $F(n, k)$ est comme dans le paragraphe 5.7.1 ci-dessus. On suppose que h_k est un terme hypergéométrique. Alors l'algorithme de Gosper [Gosp78], [PeWiZe96, Chap. 5] permet de trouver un H_k vérifiant

$$h_k = H_{k+1} - H_k,$$

si un tel H_k existe (ce qui n'est pas toujours le cas). On pose alors $R(n, k) := H_k/F(n, k)$.

5.7.3 Pour les calculs, nous utilisons le logiciel *Maple*, ainsi que le module **EKHAD** pour *Maple*, disponible sur le site web de [PeWiZe96].

A Shells of selfdual lattices viewed as spherical designs

Claude PACHE

Internat. J. Algebra Comput., **15** (5–6) (2005) 1085–1127

Abstract

We find out for which t shells of selfdual lattices and of their shadows are spherical t -designs. The method uses theta series of lattices, which are modular forms. We analyse fully cubic and Witt lattices, as well as all selfdual lattices of rank at most 24.

Introduction

A nonempty finite subset of a Euclidean sphere provides approximations for integrals of functions defined on that sphere. In this context, such a subset is called a *spherical design* and its efficiency is measured by an integer $t \geq 0$ called its *strength* [DeGoSe77] (precise definitions are given in Section A.1). We are interested here in computing (or at least estimating) the strengths of shells in some *selfdual lattices*. These problems have natural formulations in terms of vanishing Fourier coefficients of *modular forms* which are appropriate *theta series* of the lattices.

The method used in this article was already used for finding the spherical design strengths of shells of *extremal* (even) lattices. (Do not confuse with “extreme lattice”. The definition of extremal lattices of level 1 is given at the end of Section A.5.) See [Venk84] and [VenMar01, §16] for unimodular case, and [BacVen01] for some other cases.

Let Λ be a lattice in the standard Euclidian space \mathbb{R}^n ; we denote by $\langle x | y \rangle$ the scalar product of two vectors $x, y \in \mathbb{R}^n$. For a positive number m , we denote by

$$\Lambda_m := \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda | \lambda \rangle = m\}$$

the *shell* (or *layer*) of norm m (that is to say of radius \sqrt{m} in the usual sense of Euclidean geometry).

Given a lattice and a positive integer t , we would like to single out the three following questions:

- (1) Is the shell of *minimal norm* a spherical t -design?
- (2) Is *some* shell a spherical t -design?
- (3) Is *every* shell a spherical t -design?

It is quite easy to show that, if any of these question is true for $t = 2$ then the lattice is rational, that is proportional to an integral lattice (see, e.g., [MartV01, Chap. 3, § 1]). It is therefore reasonable to restrict the discussion to *integral* lattices.

Question (1) with $t = 4$ (or $t = 5$ which is equivalent in this case) asks whether a lattice is *strongly perfect*, which is the basic question in [VenMar01]. It is motivated by the classical result of Voronoi characterising extreme lattices as those which are “eutactic and perfect” [Voro08]. (A lattice is extreme if the density of the corresponding sphere packing of \mathbb{R}^n is a local maximum in the space of all lattices.) Strongly perfect lattices in dimensions $n \leq 12$ have been classified (see [VenMar01] for dimensions $n \leq 9$ and $n = 11$, [NebVen00] for $n = 10$, and [NebVen05] for $n = 12$); there are eleven isometry classes, usually denoted by \mathbf{Z} , \mathbf{A}_2 , \mathbf{D}_4 , \mathbf{E}_6 , \mathbf{E}_6^* , \mathbf{E}_7 , \mathbf{E}_7^* , \mathbf{E}_8 , K'_{10} , K'_{10}^* , and K_{12}^* (subscripts indicate dimensions).

Whenever Question (2) has a positive answer, it is an experimental fact that there exists a “rather small” m for which Λ_m is a spherical t -design, but we do not know any general result in this direction.

For the answer to Question (3) to be positive, it is sufficient that the space $\text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)^{\text{Aut}(\Lambda)}$ of $\text{Aut}(\Lambda)$ -invariant harmonic polynomials on \mathbb{R}^n which are homogeneous of degree $2j$ is reduced to $\{0\}$ for every positive integer $2j \leq t$ (see [GoeSei81, Thm. 3.12]).

Questions (1) to (3) make sense for various sets associated to a lattice Λ , and in particular for *shadows* of selfdual lattices. Recall that, if Λ is an odd selfdual lattice with even part $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda \mid \lambda \rangle \equiv 0 \pmod{2}\}$, its shadow $\text{Sh}(\Lambda)$ is the complement of Λ in the dual Λ_0^\sharp of Λ_0 . (Shadows enter naturally the discussion since they provide efficient tools to compute theta series.)

Here is a summary of our main results.

We denote by \mathbf{Z}^n the cubic lattice of rank n . We denote by $\mathbf{\Gamma}_n$ the Witt lattice of rank n , where n is a multiple of 4 (see Section A.10 for the definition); $\mathbf{\Gamma}_8$ is the unique even selfdual lattice of rank 8 (also known as the *Korkine-Zolotareff lattice*). If R is a root system of norm 2, we denote by R^+ a selfdual lattice of minimal norm 2 with $\Lambda_2 = R$; it happens that, up to rank 23, such a lattice is unique (whenever it exists). We denote by $k_1 R_1 + \dots + k_s R_s$ the root system whose irreducible components are R_1, \dots, R_s with multiplicity k_1, \dots, k_s respectively; such a root system is called *strongly eutactic* if all their components have the same Coxeter number. Recall that the Leech lattice is the unique even selfdual lattice of rank 24 with minimal norm 4, and the shorter Leech lattice is the unique selfdual lattice of rank 23 with minimal norm 3. We say that a noncubic selfdual lattice Λ of rank n has a *long shadow* if $\sigma(\Lambda) = n - 8$, where $\sigma(\Lambda)$ is the minimum norm of a characteristic (or parity) vector of Λ . The definitions of spherical t -design and $t^{1/2}$ -design are given in Section A.1.

Please note that, in Theorem A below, Claims (i) to (iii) and some special cases of Claims (iv) and (v) are already known; we mention them for completeness. Claims (i) to (iii) can be obtained by looking at harmonic polynomials that are invariant by the action of the automorphism group of the lattice, as explained above ([GoeSei81, Thm. 3.2]; [GoeSei79, Examples 7.6 and 7.7]).

THEOREM A.

- (i) All shells of the Leech lattice are spherical $11^{1/2}$ -designs.
- (ii) All shells of the shorter Leech lattice and of its shadow are spherical 7-designs.
- (iii) All shells of the Korkine-Zolotareff lattice are spherical $7^{1/2}$ -designs.
- (iv) The following special shells of selfdual lattices of rank at most 24 and of their shadows are spherical 5-designs:

$$\begin{array}{ll}
 (\mathbf{Z}^4)_m & \text{for } m = 2a, \\
 (\mathbf{Z}^7)_m & \text{for } m = 4^a(8b + 3), a, b \geq 0, \\
 (\text{Sh}(\mathbf{Z}^{16}))_m & \text{for } m = 4a + 2, a \geq 1, \\
 (4\mathbf{A}_5)_m^+, (5\mathbf{D}_4)_m^+ & \text{for } m = 4^a, a \geq 0, \\
 (2\mathbf{D}_8)_m^+ & \text{for } m = 4a + 2, a \geq 1.
 \end{array}$$

- (v) All shells of the following lattices and of their shadows are spherical 3-designs: the cubic lattices \mathbf{Z}^n , the Witt lattices $\mathbf{\Gamma}_n$, all selfdual lattices of rank at most 24, of minimum 2, and with strongly eutactic root system (see Definition 20; that includes all selfdual lattices of minimum 2 with long shadow and all even selfdual lattices of rank at most 24). Moreover some other selfdual lattices of rank at most 24 have some shells which are spherical 3-designs.

Numerical computations indicate that no shell of norm at most 1200 of selfdual lattices up to rank 24 or of their shadows is a spherical t -design for greater values of t than those indicated in the theorem.

See Theorems 25, 28, 32, 36, 38, and 43 for more details.

Let

$$\Delta_{24} = q^2 \prod_{m \geq 1} (1 - q^{2m})^{24} = \sum_{m \geq 1} \tau(m) q^{2m}$$

be the generating series of the Ramanujan numbers $\tau(m)$. It is a famous conjecture of Lehmer that $\tau(m)$ is never zero, and it has been verified for $m \leq 10^{15}$ [Serr85, § 3.3]. The following proposition gives a reformulation of that conjecture in terms of spherical design strengths of shells of the Korkine-Zolotareff lattice and of the even selfdual lattices of rank 16. It is Proposition 33 in our article.

PROPOSITION B. *For $m \geq 1$, the following are equivalent:*

- (a) $\tau(m) = 0$;
- (b) the shell of norm $2m$ of the Korkine-Zolotareff lattice is an 8-design (and therefore an 11-design);
- (c) the shell of norm $2m$ of any even selfdual lattice Λ of rank 16, is a 4-design (and therefore a 7-design);

[Note that, for example in Claim (c), the shells of Λ are not only 3-designs, but also $3^{1/2}$ -designs (see Definition 2); therefore, if a shell of Λ is a 4-design, then it is a 7-design.]

Here are other similar equivalences between spherical design strengths of shells of lattices and vanishing Fourier coefficients of modular forms. (The definitions of the series appear in Section A.5.)

PROPOSITION C. *Consider any of the following choice of a selfdual lattice Λ , a positive integer t , and a series $\Theta(z) = \sum_{m \geq 1} a_m q^m$ where $q = e^{i\pi z}$.*

- $\Lambda = \mathbf{Z}^n$ the cubic lattice of rank $n \geq 2$, $t = 3$, $\Theta = \Delta_8 \theta_3^n$ (Section A.9);
- $\Lambda = \mathbf{\Gamma}_n$ the Witt lattice of rank $n \geq 12$, $n \equiv 0 \pmod{4}$, $t = 3$, $\Theta = \theta_2^4 \theta_3^4 \theta_4^4 \times (-\theta_2^{n-4} + \theta_3^{n-4} - \theta_4^{n-4})$ (Section A.10);
- Λ the Korkine-Zolotareff lattice, of rank 8, $t = 7$, $\Theta = \Delta_{24}$ (Section A.11);
- Λ an even selfdual lattice of rank 16, $t = 3$, $\Theta = \Delta_{24}$ (Section A.11);
- Λ one of the 23 Niemeier lattice, of rank 24, $t = 3$, $\Theta = \mathbf{Q} \Delta_{24}$ (Section A.11);
- Λ the Leech lattice, $t = 11$, $\Theta = \Delta_{24}^2$ (Section A.11);
- Λ one of the 12 odd selfdual lattices with long shadow and of minimum 2 (with rank $n = 12$ or $14 \leq n \leq 22$), $t = 3$, $\Theta = \Delta_8^2 \theta_3^{n-8}$ (Section A.12);
- Λ the shorter Leech lattice, of rank 23, $t = 7$, $\Theta = \Delta_8^2 \theta_3^{15}$ (Section A.12).

Then, for each $m \geq 1$, the shell of Λ of norm m is a spherical t -design; moreover it is not a spherical $(t + 1)$ -design if and only if $a_m \neq 0$.

It is therefore interesting to look for vanishing coefficients of the series mentioned above. For example, we ask the following questions:

- (1) Consider the series

$$\Delta_{24}^2 = \sum_{m \geq 2} a_m q^{2m}, \quad a_m = \sum_{i+j=m} \tau(i) \tau(j),$$

where $\tau(i)$ is the i th Ramanujan number. Is it true that $a_m \neq 0$ for every $m \geq 2$?

(2) Consider the series

$$\Delta_8 \theta_3^n = \sum_{m \geq 1} a_m q^m.$$

Is it true that $a_m \neq 0$ for every positive integer m not of the form $4^a(8b+3)$, $a, b \geq 0$?

(There are similar questions for the other forms mentioned in Proposition C.)

We have checked numerically that the answers are positive for $m \leq 1200$.

In Sections A.1 to A.5, we recall standard material on spherical designs, selfdual lattices, theta series, and modular forms. Section A.6 gives the form of the theta series of selfdual lattices; this is the centre of our analysis. Some indices of vanishing Fourier coefficients for modular forms are given in Section A.7. In Section A.8, we analyse the spherical design strengths of root systems of norm 2. Finally, Sections A.9 to A.14 contain the results on the strength of shells of some selfdual lattices, namely the two infinite series of cubic and Witt lattices, and all selfdual lattices of rank at most 24. Finally, an appendix contains an alternative proof not using modular forms of the fact that certain shells of \mathbf{Z}^4 and \mathbf{Z}^7 are spherical 5-designs.

General theory

A.1 Spherical designs

Let $n \geq 2$ be an integer, and let m be a positive real number; we denote by

$$\mathbb{S}_m^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \mid x \rangle = m\}$$

the sphere of square radius m , and by σ the probability measure on \mathbb{S}_m^{n-1} invariant under the action of the orthogonal group $O(n)$. A *spherical design of strength t* , or a *spherical t -design*, is a nonempty finite subset $X \subseteq \mathbb{S}_m^{n-1}$ such that

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} P(x) = \int_{\mathbb{S}_m^{n-1}} P(y) d\sigma(y)$$

for every polynomial form P on \mathbb{R}^n of degree at most t [DeGoSe77].

We denote by $\text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ the space of homogeneous polynomial forms on \mathbb{R}^n of degree j that are harmonic. It is classical that X is a spherical t -design if and only if the condition

$$\sum_{x \in X} P(x) = 0, \quad \forall P \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n) \quad (C_j)$$

holds for every integer j such that $1 \leq j \leq t$. It is indeed an immediate consequence of the decomposition

$$\text{Pol}_t(\mathbb{R}^n) = \text{Harm}_t(\mathbb{R}^n) \oplus \omega \text{Pol}_{t-2}(\mathbb{R}^n),$$

where $\text{Pol}_t(\mathbb{R}^n)$ is the space of homogeneous polynomial forms on \mathbb{R}^n of degree t , and $\omega(x) := \langle x \mid x \rangle$; see [Vil68, §IX.2] and [MartV01, Chap. 1, §§2, 3].

In this article, we study spherical designs which are shells of selfdual lattices or of their shadows. These designs are antipodal sets, that is sets X satisfying $-X = X$; in this case, Condition (C_j) is automatically fulfilled for j odd. Therefore we will use the following reformulation for antipodal sets:

1. DEFINITION. A nonempty finite antipodal subset $X \subseteq \mathbb{S}_m^{n-1}$ is a *spherical $(2s+1)$ -design* (or, equivalently, a spherical $2s$ -design) if the condition

$$\sum_{x \in X} P(x) = 0, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \quad (C_{2j})$$

holds for every even integer $2j$ such that $2 \leq 2j \leq 2s$.

Some antipodal spherical $(2s+1)$ -designs, although not satisfying Condition (C_{2s+2}) , do verify Condition (C_{2s+4}) . Therefore, we define [Venk84]:

2. DEFINITION. A nonempty finite antipodal subset $X \subseteq \mathbb{S}_m^{n-1}$ is a *spherical $(2s+1+\frac{1}{2})$ -design* if it verifies condition (C_{2j}) for $2 \leq 2j \leq 2s$ and $2j = 2s+4$.

A.2 Selfdual lattices and shadows

For a subset $A \subseteq \mathbb{R}^n$ and a positive real number $m > 0$, the *shell* (or *layer*) of norm m of A is

$$A_m := \{x \in A \mid \langle x \mid x \rangle = m\} = A \cap \mathbb{S}_m^{n-1}.$$

A *lattice* of rank n is a discrete \mathbb{Z} -submodule of \mathbb{R}^n which spans \mathbb{R}^n as \mathbb{R} -module. Two lattices are *equivalent* if there exists an orthogonal linear transformation which sends one lattice onto the other; we often consider two equivalent lattices as being the same lattice. We define the *minimum* (or the *minimal norm*) of a lattice Λ as

$$\min(\Lambda) := \min\{m > 0 \mid \Lambda_m \neq \emptyset\}.$$

The *dual* of a lattice Λ is the lattice

$$\Lambda^\sharp := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y \mid x \rangle \in \mathbb{Z} \forall x \in \Lambda\}.$$

The lattice Λ is called *integral* if $\Lambda \subseteq \Lambda^\sharp$, that is if $\langle x \mid y \rangle \in \mathbb{Z}$ for all $x, y \in \Lambda$. An integral lattice Λ is called *even* if $\langle x \mid x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ for all $x \in \Lambda$; it is called *odd* otherwise. An integral lattice is called *selfdual* (or *unimodular*) if $\Lambda^\sharp = \Lambda$.

For $A \subseteq \mathbb{R}^a$ and $B \subseteq \mathbb{R}^b$ we set $A \oplus B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{a+b} \mid x \in A, y \in B\}$. It is easily checked that any integral lattice Λ of rank n is of the form

$$\Lambda \simeq \mathbf{Z}^p \oplus L,$$

where L is an integral lattice of rank $N = n - p$ and of minimum at least 2, and where

$$\mathbf{Z}^p := \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^p$$

is the cubic lattice of rank p . Note that L is selfdual if and only if Λ is selfdual.

The *shadow* $Sh(\Lambda)$ of a selfdual lattice Λ is defined as follows: If Λ is even, we set $Sh(\Lambda) := \Lambda$. Otherwise let

$$\Lambda_0 := \{x \in \Lambda \mid \langle x \mid x \rangle \equiv 0 \pmod{2}\},$$

which is an even sublattice of Λ of index 2; therefore Λ is a sublattice of Λ_0^\sharp of index 2. We set

$$Sh(\Lambda) := \Lambda_0^\sharp \setminus \Lambda.$$

An alternative description of the shadow is $Sh(\Lambda) = \{x/2 \mid x \text{ is a characteristic vector of } \Lambda\}$, where a *characteristic vector* (or *parity vector*) of Λ is a vector $x \in \Lambda$ such that $\langle x \mid y \rangle \equiv \langle y \mid y \rangle \pmod{2}$ for all $y \in \Lambda$.

For a selfdual lattice Λ , we define:

$$\sigma(\Lambda) := 4 \min\{\langle x \mid x \rangle \mid x \in Sh(\Lambda)\},$$

which is a nonnegative integer. (It is the minimal norm of the characteristic vectors of Λ .) We have $\sigma(\Lambda) = 0$ if and only if Λ is even.

It is easily checked that, if Λ' and Λ'' are selfdual lattices, then $\Lambda' \oplus \Lambda''$ is a selfdual lattice, and

$$\begin{aligned} Sh(\Lambda' \oplus \Lambda'') &= Sh(\Lambda') \oplus Sh(\Lambda''), \\ \sigma(\Lambda' \oplus \Lambda'') &= \sigma(\Lambda') + \sigma(\Lambda''). \end{aligned}$$

The following facts are well-known; a proof using modular forms appears at the end of Section A.5:

3. PROPOSITION. *Let $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ be a selfdual lattice. Then*

- (i) *for every $x \in \mathcal{Sh}(\Lambda)$, we have $4\langle x | x \rangle \equiv n \pmod{8}$;*
- (ii) *there exists a nonnegative integer k such that $\sigma(\Lambda) = n - 8k$. In particular, if Λ is even, then $n \equiv 0 \pmod{8}$;*
- (iii) *we have $\sigma(\Lambda) = n$ if and only if $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^n$.*

The characterisation of \mathbf{Z}^n given in Claim (iii) is due to Elkies [Elki95a].

Note that, in the decomposition $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^p \oplus L$, if $\sigma(\Lambda) = n - 8k$, then $\sigma(L) = N - 8k$, where n is the rank of Λ , and N is the rank of L .

The list of selfdual lattices of rank at most 24 can be found in [ConSlo99, Chap. 16 and 17] and [Bacr97].

A.3 Theta series

Let us now introduce the tools for analysing the spherical design strengths of shells of selfdual lattices. Let

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$$

be the Poincaré half-plane. Recall that a holomorphic function $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ is *bounded at infinity* if there exists $r > 0$ such that $\{f(z) \mid \Im z \geq r\}$ is bounded.

4. LEMMA – DEFINITION. *Let A be a nonempty subset of \mathbb{R}^n for which there exists $\delta > 0$ such that $|x - y| \geq \delta$ for all distinct $x, y \in A$. Let P be a polynomial form on \mathbb{R}^n . Then the series*

$$\Theta_{A,P}(z) := \sum_{x \in A} P(x) e^{i\pi z \langle x | x \rangle}, \quad z \in \mathbb{H},$$

converges absolutely to a function on \mathbb{H} that is holomorphic and bounded at infinity. It is the theta series of A weighted by P .

Let us assume moreover that there exists a real number $\alpha > 0$ such that $\alpha \langle x | x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ for every $x \in A$. Then we have

$$\Theta_{A,P}(z + \alpha) = \Theta_{A,P}(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Proof. The condition on the distance of two distinct points of A implies that there exists a constant $C > 0$ such that for every $r \geq 0$ the set

$$\{x \in A \mid r \leq \langle x | x \rangle \leq r + 1\}$$

contains at most $C r^{n-1}$ points; the absolute convergence of $\Theta_{A,P}$ follows. The second claim of the lemma is straightforward. \square

Remarks.

- (i) For a holomorphic function $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ verifying $F(z + \alpha) = F(z)$ for all $z \in \mathbb{H}$ and for some $\alpha > 0$, the condition to be bounded at infinity is equivalent to the condition that there exists a Fourier expansion of the form

$$F(z) = \sum_{m \in 2\alpha^{-1}\mathbb{N}} a_m e^{i\pi z m}$$

which converges for $\Im z$ sufficiently large. (Here, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.) In this case, F is said *holomorphic at infinity*.

(ii) For a real number m and if $z \in \mathbb{H}$ is understood, we write

$$q^m := e^{i\pi zm}, \quad \text{where } z \in \mathbb{H}.$$

Thus the theta series of A weighted by P can be written

$$\Theta_{A,P}(z) = \sum_{x \in A} P(x) q^{\langle x|x \rangle} = \sum_{m \in 2\alpha^{-1}\mathbb{N}} a_m^{(P)} q^m, \quad \text{where } a_m^{(P)} := \sum_{x \in A_m} P(x).$$

(iii) The classical theta series of A is

$$\Theta_A := \Theta_{A,1} = \sum_{m \geq 0} |A_m| q^m.$$

(iv) Let $A \subseteq \mathbb{R}^a$ and $B \subseteq \mathbb{R}^b$, and let P , respectively Q , be polynomial forms on \mathbb{R}^a , respectively \mathbb{R}^b . Then

$$\Theta_{A \oplus B, PQ} = \Theta_{A,P} \Theta_{B,Q}.$$

Now we reformulate the condition of being a spherical design using theta series.

5. LEMMA. *Let A be a nonempty antipodal subset of \mathbb{R}^n such that there exists $\delta > 0$ verifying $|x - y| \geq \delta$ for all distinct $x, y \in A$. Then, for $m > 0$, the shell A_m is a spherical t -design or is empty if and only if*

$$a_m^{(P)} = 0 \text{ for every } P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n), 1 \leq 2j \leq t,$$

where $a_m^{(P)}$ are the Fourier coefficients of the theta series

$$\Theta_{A,P}(z) = \sum_m a_m^{(P)} q^m.$$

Proof. This follows directly from the definitions. Note that the Fourier coefficients $a_m^{(P)}$ are retrieved from $\Theta_{A,P}$ by the formula

$$a_m^{(P)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R e^{-i\pi m(x+iy_0)} \Theta_{A,P}(x+iy_0) dx,$$

valid for any $y_0 > 0$. □

A.4 Modular forms

The interest of theta series of lattices is that they have the following property, which will help to compute them, at least if the lattice is selfdual. This proposition is a direct consequence of the Poisson Summation Formula; see for example [Ebel94, Prop. 3.1, p. 87].

6. PROPOSITION. *Let $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ be a lattice, and let $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ be a harmonic polynomial of degree $2j$. Then*

$$\Theta_{\Lambda^\sharp, P}(z) = (\det \Lambda)^{1/2} (-1)^j (i/z)^{n/2+2j} \Theta_{\Lambda, P}(-1/z).$$

(For the power of i/z , we use the principal branch; observe that $-\pi/2 \leq \arg(i/z) \leq \pi/2$ for $z \in \mathbb{H}$.)

In the case of selfdual lattices, the latter formula gives a relation between $\Theta_{\Lambda, P}(z)$ and $\Theta_{\Lambda, P}(-1/z)$. To be more precise, let us give the following definitions. We use $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

7. DEFINITION.

- (i) Let $\lambda \in \{1, 2\}$, $\omega \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, and $\epsilon \in \{+, -\}$. A *modular form of signature* $(\lambda, \omega, \epsilon)$ is a holomorphic function $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ that is holomorphic at infinity and verifies

$$\begin{aligned} f(z + \lambda) &= f(z), \\ f(-1/z) &= \epsilon(z/i)^\omega f(z), \end{aligned}$$

for all $z \in \mathbb{H}$. The number ω is the *weight* of the form. We denote by $\mathcal{M}_\omega^{\lambda, \epsilon}$ the vector space of modular forms of signature $(\lambda, \omega, \epsilon)$; note that $\mathcal{M}^{1, \epsilon} \subseteq \mathcal{M}^{2, \epsilon}$. We set:

$$\mathcal{M}^{\lambda, \epsilon} := \bigoplus_{\omega \in (1/2)\mathbb{N}} \mathcal{M}_\omega^{\lambda, \epsilon}, \quad \mathcal{M}^\lambda := \mathcal{M}^{\lambda, +} \oplus \mathcal{M}^{\lambda, -}.$$

The algebras \mathcal{M}^λ and $\mathcal{M}^{\lambda, +}$ are graded by the weight.

- (ii) A modular form f is *parabolic* if

$$\lim_{\Im z \rightarrow +\infty} f(z) = 0.$$

Nonzero modular forms of signature $(1, \omega, \epsilon)$ exist only for weights $\omega \in 4\mathbb{N}$ if $\epsilon = +$, and for weights $\omega \in 4\mathbb{N} + 2$ if $\epsilon = -$. Indeed, let $S : z \mapsto -1/z$ and $T : z \mapsto z + 1$. We have $STSTST = \text{id}_{\mathbb{H}}$, therefore $f(STSTSTz) = f(z)$ for every $z \in \mathbb{H}$. On the other hand, it is straightforward to check that, for $f \in \mathcal{M}_\omega^{1, \epsilon}$,

$$f(STSTSTz) = \epsilon i^\omega f(z),$$

where i must be taken with argument $\pi/2$. Thus $\epsilon e^{i\omega\pi/2} = 1$ if $f \neq 0$.

Nonzero modular forms of signature $(2, \omega, \epsilon)$ exist for every weight $\omega \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$; for example, according to Proposition 8 below, $\theta_3^n = \Theta_{\mathbf{Z}^n}$ is a modular form of signature $(2, n/2, +)$.

Modular forms of signature $(1, \omega, \epsilon)$, are the classical modular forms for $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Modular forms of signature $(2, \omega, \epsilon)$ are modular forms for the subgroup of index 3 in $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ whose elements are the matrices that reduce to $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ modulo 2 (sometimes noted $G(2)$ or $\Gamma_V(2)$).

Proposition 6 implies immediately:

- 8. PROPOSITION.** *Let $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ be a selfdual lattice, and let $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$. Then*

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{2, +} && \text{if } 2j \equiv 0 \pmod{4}, \\ \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{2, -} && \text{if } 2j \equiv 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

If moreover Λ is even, then

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{1, +} && \text{if } 2j \equiv 0 \pmod{4}, \\ \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{1, -} && \text{if } 2j \equiv 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Moreover, if $2j > 0$ then $\Theta_{\Lambda, P}$ is parabolic.

Let us now look at theta series of shadows of selfdual lattices.

- 9. DEFINITION.** Let $f \in \mathcal{M}_\omega^{2, \epsilon}$. The *shadow* of f is the function $\text{Sh}f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ defined by

$$\text{Sh}f(z) := (i/z)^\omega f(-1/z + 1).$$

10. PROPOSITION. *Let Λ be a selfdual lattice, and let $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$. Then*

$$\Theta_{\mathcal{Sh}(\Lambda), P} = (-1)^j \mathcal{Sh} \Theta_{\Lambda, P}.$$

Proof. If Λ is even, this follows immediately from $\mathcal{Sh}(\Lambda) = \Lambda$ and from Proposition 8. If Λ is odd, we observe that

$$2\Theta_{\Lambda_0, P}(z) = \Theta_{\Lambda, P}(z) + \Theta_{\Lambda, P}(z+1),$$

where Λ_0 is the even sublattice of Λ , of index 2. Then we apply Proposition 6 to Λ_0 and Λ to obtain, for $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{Sh}(\Lambda), P} &= \Theta_{\Lambda_0^\sharp, P}(z) - \Theta_{\Lambda, P}(z) \\ &= 2(-1)^j (i/z)^{n/2+2j} \Theta_{\Lambda_0, P}(-1/z) - (-1)^j (i/z)^{n/2+2j} \Theta_{\Lambda, P}(-1/z) \\ &= (-1)^j \mathcal{Sh} \Theta_{\Lambda, P}(z). \end{aligned} \quad \square$$

A.5 A theorem of classification for modular forms

In order to use Proposition 8, we need a description of the vector spaces $\mathcal{M}_\omega^{\lambda, \epsilon}$ defined in the previous section. There are very nice results of classification that we will recall in this section.

Before giving examples of modular forms, it is convenient (although not essential) to formulate a definition of the weight which applies to a larger class of functions than modular forms:

11. DEFINITION. Let $\omega \in \mathbb{R}$. Let f and g be two meromorphic functions on \mathbb{H} . Assume that there exist α and $\beta > 0$ such that

$$\begin{aligned} f(z+\alpha) &= f(z), \\ g(z+\beta) &= g(z), \\ f(-1/z) &= (z/i)^\omega g(z), \end{aligned}$$

for all $z \in \mathbb{H}$. (Note that the last condition is symmetric in f and g .) We say that f and g are of *weight* ω .

When f is a modular form of signature $(\lambda, \omega, \epsilon)$ (Definition 7), the assumptions of the definition above are verified for $\alpha = \beta = \lambda$ and $g = \epsilon f$, and so f is of weight ω as expected. However, some functions on \mathbb{H} that are holomorphic and holomorphic at infinity, although not being modular forms, do have a weight in the sense of Definition 11. For example, we have $\theta_4(-1/z) = (z/i)^{1/2} \theta_2(z)$, where θ_4 and θ_2 are the two periodic functions in z defined below. Therefore θ_2 and θ_4 are both of weight $1/2$; but they are not modular forms.

It is easily checked that the algebra of meromorphic functions f on \mathbb{H} satisfying the assumptions of Definition 11 with some meromorphic function g and some *rational* positive numbers α and β is an algebra graded by the weight.

We give here a list of functions that have a weight in the sense of Definition 11. Recall that we write $q^m := e^{i\pi z m}$.

$$\begin{aligned} \theta_2(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z} + 1/2} q^{m^2} = 2q^{1/4} (1 + q^2 + O(q^6)) && \text{of weight } 1/2, \\ \theta_3(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2} = 1 + 2q + 2q^4 + O(q^9) && \text{of weight } 1/2, \\ \theta_4(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-q)^{m^2} = 1 - 2q + 2q^4 + O(q^9) && \text{of weight } 1/2, \\ &\theta_2^4 + \theta_4^4 = \theta_3^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \theta_4^4(z) - \theta_2^4(z) = 1 - 24q + 24q^2 - 96q^3 + O(q^4) && \text{of weight 2,} \\
\Delta_8(z) &= \frac{1}{16}\theta_2^4(z) \theta_4^4(z) = q - 8q^2 + 28q^3 + O(q^4) && \text{of weight 4,} \\
Q(z) &= \theta_3^8(z) - 16\Delta_8(z) = 1 + 240q^2 + 2160q^4 + O(q^6) && \text{of weight 4,} \\
R(z) &= \Phi(z)(\theta_3^8(z) + 8\Delta_8(z)) = 1 - 504q^2 + O(q^4) && \text{of weight 6,} \\
\Delta_{24}(z) &= \theta_3^8(z) \Delta_8^2(z) = q^2 - 24q^4 + 256q^6 + O(q^8) && \text{of weight 12.}
\end{aligned}$$

The coefficients of the latter form

$$\Delta_{24}(z) = \sum_{m \geq 1} \tau(m) q^{2m}$$

are the celebrated Ramanujan numbers. All the functions listed above can be expressed in terms of the Jacobi function

$$\theta_3(\xi | z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2i\xi m + i\pi z m^2}, \quad z \in \mathbb{H};$$

indeed, we have

$$\theta_2(z) = e^{i\pi z/4} \theta_3(\pi z/2 | z), \quad \theta_3(z) = \theta_3(0 | z), \quad \theta_4(z) = \theta_3(\pi/2 | z).$$

Let \mathcal{M} be the algebra generated by θ_2 , θ_3 and θ_4 . It is an algebra graded by the weight, where the weight ranges over the set of nonnegative half-integer. The elements of weight zero are the constants.

The definition of the shadow of a modular form (Definition 9) carries over to functions having a weight in the sense of Definition 11, and provides an endomorphism of the graded algebra \mathcal{M} . We give here shadows of some functions in \mathcal{M} .

$$\begin{aligned}
Sh\theta_2 &= \sqrt{i}\theta_4, & Sh\theta_4 &= \theta_3, & Sh\theta_3 &= \theta_2, \\
Sh\Delta_8(z) &= -\frac{1}{16} + q^2 - 7q^4 + O(q^6), \\
Sh\Phi(z) &= 2 + 48q^2 + 48q^4 + O(q^6), \\
ShQ &= Q, & ShR &= -R, & Sh\Delta_{24} &= \Delta_{24}.
\end{aligned}$$

These formulae (and many other useful identities) can be found in [ConSlo99, Chap. 4, §4.1].

All modular forms of signature $(1, \omega, \pm)$ or $(2, \omega, \pm)$ are elements of \mathcal{M} . More precisely:

12. THEOREM.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{2,+} &= \mathbb{C}[\theta_3, \Delta_8], & \mathcal{M}^{1,+} &= \mathbb{C}[Q, \Delta_{24}], \\
\mathcal{M}^{2,-} &= \mathbb{C}[\theta_3, \Delta_8], & \mathcal{M}^{1,-} &= \mathbb{R}\mathbb{C}[Q, \Delta_{24}].
\end{aligned}$$

For a proof of this deep result, see [Rank77], Section 6.1 for $\mathcal{M}^{1,\pm}$, and Section 7.1 for $\mathcal{M}^{2,\pm}$. The notation of [Rank77] are:

$$\begin{aligned}
&\{\Gamma(1), \omega\} \text{ for } \mathcal{M}_\omega^{1,+} \text{ when } \omega \in 4\mathbb{N}, \text{ and for } \mathcal{M}_\omega^{1,-} \text{ when } \omega \in 4\mathbb{N} + 2; \\
&\{\Gamma_V(2), \omega, v_{2\omega}\} \text{ for } \mathcal{M}_\omega^{2,+}, \omega \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, \text{ and} \\
&\{\Gamma_V(2), \omega, v_{2\omega}^*\} \text{ for } \mathcal{M}_\omega^{2,-}, \omega \in \frac{1}{2}\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Moreover modular forms are called there *integral modular forms*.

Here is a first application of this theorem:

Proof of Proposition 3. For brevity, we write Θ_Λ , Δ_8 , etc. instead of $\Theta_\Lambda(z)$, $\Delta_8(z)$, etc. By Theorem 12 and Proposition 8, for Λ a selfdual lattice, the theta series

$$\Theta_\Lambda = 1 + \sum_{m \geq 1} |\Lambda_m| q^m$$

is a polynomial in θ_3 and Δ_8 and is of weight $n/2$; therefore it is of the form

$$\Theta_\Lambda = \theta_3^n + c_1 \theta_3^{n-8} \Delta_8 + \cdots + c_k \theta_3^{n-8k} \Delta_8^k = 1 + |\Lambda_1| q + |\Lambda_2| q^2 + \cdots,$$

with $c_k \neq 0$. (There is no coefficient in front of θ_3^n , because the series expansion in q begins with $1 + \cdots$.) By Proposition 10, the theta series of the shadow is then

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{Sh}(\Lambda)} &= \sum_m |\mathcal{Sh}(\Lambda)_m| q^m = \mathcal{Sh} \Theta_\Lambda \\ &= \theta_2^n + c_1 \theta_2^{n-8} \mathcal{Sh} \Delta_8 + \cdots + c_k \theta_2^{n-8k} \mathcal{Sh} \Delta_8^k \\ &= d_1 q^{(n-8k)/4} + d_2 q^{(n-8k+8)/4} + \cdots, \end{aligned}$$

where $d_1 = (-1/16)^k 2^{n-8k} c_k \neq 0$. So, $\mathcal{Sh}(\Lambda)_m \neq \emptyset$ implies $4m \equiv n \pmod{8}$, and we have $\sigma(\Lambda) = n - 8k$. In particular, if Λ is even, we have $\sigma(\Lambda) = 0 = n - n$, therefore n is a multiple of 8.

Finally, it follows from the decomposition $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^p \oplus L$, with L a selfdual lattice of minimum at least 2, that $|\Lambda_1| = 2p \leq 2n$ with equality if and only if $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^n$. On the other hand, if $\sigma(\Lambda) = n$ then $\Theta_\Lambda = \theta_3^n = 1 + 2nq + O(q^2)$, and therefore $|\Lambda_1| = 2n$. Thus $\sigma(\Lambda) = n$ implies $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^n$. \square

Remark. Let $\omega > 0$ be a multiple of 4. From Theorem 12, we have $\dim \mathcal{M}_\omega^{2,+} = m + 1$, where $m = \lfloor \omega/12 \rfloor$, and there exists a unique $\Theta_\omega \in \mathcal{M}_\omega^{2,+}$ such that

$$\Theta_\omega(q) = 1 + a_{2m+2} q^{2m+2} + O(q^{2m+4}).$$

Moreover, it is known that $a_{2m+2} > 0$. Such a theta series is called *extremal*, and an even selfdual lattice Λ of rank 2ω with $\Theta_\Lambda = \Theta_\omega$ is called *extremal* (or, more precisely, *extremal of level 1*).

The method used in our paper also apply to extremal lattices: see [Venk84] and [VenMar01, §16]. See also [BacVen01], where is also treated the case of non-selfdual extremal lattices.

See [SchSch99] for more informations on extremal lattices.

A.6 Computing the theta series of a selfdual lattice

We can now give more precisely the general form of the theta series of a selfdual lattice.

13. PROPOSITION. *Let $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ be a selfdual lattice with $\sigma(\Lambda) = n - 8k$. Let us write*

$$\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus L, \quad L \subseteq \mathbb{R}^N,$$

where L is of minimum at least 2. Then there exist $c_i \in \mathbb{Z}$ such that

$$\Theta_\Lambda = \theta_3^n + c_1 \Delta_8 \theta_3^{n-8} + c_2 \Delta_8^2 \theta_3^{n-16} + \cdots + c_k \Delta_8^k \theta_3^{n-8k}.$$

Some values of c_i are:

$$\begin{aligned} c_1 &= -2N, \\ c_2 &= (h - 46 + 2N)N, \quad \text{where } h := |L_2|/N, \\ c_k &= (-1)^k 2^{-n+12k} |\mathcal{Sh}(\Lambda)_{(n-8k)/4}|. \end{aligned}$$

Proof. As in the proof of Proposition 3 given at the end of the previous paragraph, we can write

$$\Theta_\Lambda = \theta_3^n + c_1 \theta_3^{n-8} \Delta_8 + \cdots + c_k \theta_3^{n-8k} \Delta_8^k,$$

with $c_i \in \mathbb{R}$ and $c_k \neq 0$, and k is given by $\sigma(\Lambda) = n - 8k$. The first coefficients of the Fourier expansion in $q = e^{i\pi z}$ are

$$\begin{aligned} \Theta_\Lambda &= (1 + 2q + 2q^4 + \cdots)^n + c_1 (1 + 2q + \cdots)^{n-8} (q - 8q^2 + \cdots) \\ &\quad + c_2 (1 + \cdots)^{n-16} (q + \cdots)^2 + \cdots \\ &= (1 + 2nq + 2n(n-1)q^2 + \cdots) + c_1 (q + (2n-24)q^2 + \cdots) + c_2 q^2 + \cdots \\ &= 1 + (2n + c_1)q + (2n(n-1) + (2n-24)c_1 + c_2)q^2 + \cdots. \end{aligned}$$

In particular, we have $|\Lambda_1| = 2n + c_1$. Since $|\Lambda_1| = 2p = 2(n - N)$, we have $c_1 = -2N$. The second coefficient is then

$$\begin{aligned} |\Lambda_2| &= 2n(n-1) + (2n-24)c_1 + c_2 \\ &= 2(p+N)(p+N-1) - (2p+2N-24)2N + c_2 \\ &= 2p(p-1) + (46-2N)N + c_2. \end{aligned}$$

Since $|\Lambda_2| = 2p(p-1) + |L_2|$, this gives $c_2 = (h - 46 + 2N)N$ where $h = |L_2|/N$.

By induction on i , it is clear that $c_i = f(|\Lambda_1|, \dots, |\Lambda_i|)$, where f is a polynomial with integral coefficients.

Now, the theta series of the shadow is

$$\begin{aligned} \Theta_{Sh(\Lambda)} &= Sh\Theta_\Lambda = c_k \theta_2^{n-8k} Sh\Delta_8^k + \cdots + c_1 \theta_2^{n-8} Sh\Delta_8 + \theta_2^n \\ &= c_k (2q^{1/2} + \cdots)^{n-8k} (-1/16 + \cdots)^k + \cdots \\ &= c_k 2^{n-8k} (-1)^k 2^{-4k} q^{(n-8k)/4} + \cdots \\ &= (-1)^k 2^{n-12k} c_k q^{(n-8k)/4} + \cdots; \end{aligned}$$

this shows that $|Sh(\Lambda)_{(n-8k)/4}| = (-1)^k 2^{n-12k} c_k$. \square

14. PROPOSITION. *Let $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ be a selfdual lattice with $\sigma(\Lambda) = n - 8k$ and of minimum m .*

(i) *For every even positive integer j , there exist linear forms $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ such that*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=m}^{k+j/2} c_i(P) \Delta_8^i \theta_3^{n+4j-8i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

In particular, if $m > k + j/2$, then $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ for every $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *For every odd positive integer j , there exist linear forms $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ such that*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=m}^{k+(j-1)/2} c_i(P) \Phi \Delta_8^i \theta_3^{n+4j-2-8i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

In particular, if $m > k + (j-1)/2$, then $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ for every $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

Proof. We will prove only Claim (i), since the proof of Claim (ii) is similar.

Let j be an even positive integer. By Proposition 8, for each $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$, $\Theta_{\Lambda, P}$ is a parabolic form of weight $n/2 + 2j$. By Theorem 12, it is of the form

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i \geq 1} c_i(P) \Delta_8^i \theta_3^{n+4j-8i}.$$

Since $\Theta_{\Lambda, P}$ is linear in P , the coefficients c_i are also linear in P .

Let us now suppose that $c_i \neq 0$ for some index i , and let a [respectively b] be the smallest [respectively the largest] index i such that $c_i \neq 0$. It remains to prove that $a \geq m$ and $b \leq k + j/2$. We have

$$\begin{aligned}\Theta_{\Lambda, P} &= c_a(P) \theta_3^{n+4j-8a} \Delta_8^a + \dots \\ &= c_a(P) q^a + \dots,\end{aligned}$$

hence $c_a(P) = \sum_{x \in \Lambda_a} P(x)$ is different from zero for some $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$. So, $m \leq a$.

Now, the theta series of the shadow is

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{Sh}(\Lambda), P} &= \text{Sh} \Theta_{\Lambda, P} = c_b(P) \theta_2^{n+4j-8b} \text{Sh} \Delta_8^b + \dots \\ &= 2^{n+4j-8b} (-1/16)^b c_b(P) q^{(n+4j-8b)/4} + \dots,\end{aligned}$$

hence $2^{n+4j-8b} (-1/16)^b c_b(P) = \sum_{x \in \text{Sh}(\Lambda)_{(n+4j-8b)/4}} P(x)$ is different from zero for some $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$. So, $\sigma(\Lambda) = n - 8k \leq n + 4j - 8b$, and therefore $b \leq k + j/2$. \square

We give now similar statements for *even* selfdual lattices. (The two propositions above are naturally true also for these lattices; though less precise.) We do not give the proofs, since the arguments are essentially the same as for the equivalent statements for general selfdual lattices.

15. PROPOSITION. *Let $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ be an even selfdual lattice of rank $n = 8N$. Then there exist $c_i \in \mathbb{Z}$ such that*

$$\Theta_{\Lambda} = \mathbb{Q}^N + c_1 \Delta_{24} \mathbb{Q}^{N-3} + \dots + c_k \Delta_{24}^k \mathbb{Q}^{N-3k}, \quad k = [N/3],$$

with

$$c_1 = n(h - 30), \quad \text{where } h := |\Lambda_2|/n.$$

16. PROPOSITION. *Let $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ be an even selfdual lattice of rank $n = 8N$ and of minimum $m = 2M$.*

(i) *For every even positive integer j , there exist linear forms $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ such that*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=M}^{[(N+j/2)/3]} c_i(P) \Delta_{24}^i \mathbb{Q}^{N+j/2-3i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

In particular, if $3M > N + j/2$, then $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ for every $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *For every odd positive integer j , there exist linear forms $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ such that*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=M}^{[(N+j/2)/3]} c_i(P) \mathbb{R} \Delta_{24}^i \mathbb{Q}^{N+(j-3)/2-3i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

In particular, if $3M > N + (j - 3)/2$, then $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ for every $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

A.7 Vanishing coefficients of modular forms

From Lemma 5, in order to find spherical design strengths of the shells of a lattice, we have to look for vanishing coefficients of $\Theta_{\Lambda, P}$ for P harmonic homogeneous polynomials of different degrees. We give here the results concerning vanishing coefficients of modular forms of the form $\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta$, since we will meet them several times later. Here, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

17. LEMMA. Among the coefficients of the modular forms

$$\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta = \sum_{m \in \alpha + \mathbb{N}} a_m q^m \quad \text{and} \quad \mathcal{Sh}(\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta) = \sum_{m \in \alpha/4 + 2\mathbb{N}} a_m q^m,$$

where $\epsilon \in \{0, 1\}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, the following are equal to zero:

<p>(a) $(\theta_3^4 \Delta_8)^k$: $m - k \equiv 1 \pmod{2}$,</p>	<p>$\mathcal{Sh}(\theta_3^{16} \Delta_8)^k$: $m \equiv 2 \pmod{4}$;</p>
<p>(b) θ_3 : $m \neq a^2$,</p> <p>$\mathcal{Sh}(\theta_3)$: $m \neq a^2/4$,</p> <p>θ_3^2 : $m \neq a^2 + b^2$,</p>	<p>$\mathcal{Sh}(\theta_3^2)$: $m \neq (a^2 + b^2)/4$,</p> <p>θ_3^3 : $m = 4^a(8b + 7)$,</p> <p>$\Phi \theta_3^{12}$: $m = 1$;</p>
<p>(c) $\theta_3 \Delta_8$: $m = 4^a(8b + 5)$,</p> <p>$\theta_3^2 \Delta_8$: $m \neq a^2 + b^2$,</p> <p>$\mathcal{Sh}(\theta_3^2 \Delta_8)$: $m \neq (a^2 + b^2)/4$,</p> <p>$\theta_3^3 \Delta_8$: $m = 4^a(8b + 7)$,</p> <p>$\theta_3^7 \Delta_8$: $m = 4^a(8b + 3)$;</p>	<p>$\Phi \theta_3^3 \Delta_8$: $m = 4^a(8b + 7)$,</p> <p>$\Phi \theta_3^{16} \Delta_8$: $m = 4^{a2}$,</p> <p>$\mathcal{Sh}(\Phi \theta_3^{16} \Delta_8)$: 4^{a2},</p> <p>$\mathcal{Sh}(\Phi \theta_3^{40} \Delta_8)$: $m = 24$,</p>
<p>(d) $\theta_3^5 \Delta_8^2$: $m = 4^a(8b + 1)$,</p> <p>$\theta_3^{12} \Delta_8^2$: $m = 4^a$,</p> <p>$\Phi \theta_3^8 \Delta_8^2$: $m = 4^a$,</p> <p>$\mathcal{Sh}(\Phi \theta_3^8 \Delta_8^2)$: $m = 4^a$;</p>	<p>$\Phi \theta_3^{20} \Delta_8^2$: $m = 3$,</p> <p>$\Phi \theta_3^{33} \Delta_8^2$: $m = 4$,</p> <p>$\mathcal{Sh}(\Phi \theta_3^{33} \Delta_8^2)$: $m = 49/4$,</p>
<p>(e) $\theta_3^4 \Delta_8^3$: $m = 4^{a2}$,</p> <p>$\Phi \theta_3^{24} \Delta_8^3$: $m = 2^a$.</p>	<p>$\mathcal{Sh}(\Phi \theta_3^{24} \Delta_8^3)$: $m = 2^a$,</p>

Remark. We have checked numerically that, for modular forms of the lemma with $\beta \leq 3$ and $\alpha \leq 36$, there is no other vanishing coefficient a_m for $m \leq 1200$.

Sketch of the proof. Let $\Theta(z)$ be one of the series of the lemma.

If $\Theta(z)$ is of the form $\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta$ or of the form $\mathcal{Sh}(\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta)$, we can express $\Theta(z)$ as a polynomial function of $\theta_3(z)$ and $\theta_4(z)$. If $\Theta(z)$ is of the form $\mathcal{Sh}(\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta)$, with α an integer which is not a multiple of 4, we can express $\Theta(4z)$ as a polynomial function of $\theta_3(z)$ and $\theta_4(z)$, by using the formulae of [ConSlo99, Chap. 4, §4.1, p. 104]. In the sequel of the proof, we suppose that we are in the first case; the second case is treated in a similar way, replacing $\Theta(z)$ by $\Theta(4z)$.

Let be $\omega := e^{i\pi/4}$. For c an integer between 0 and 7, we define

$$\begin{aligned} \Theta_c(z) &:= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \omega^{-ck} \Theta\left(\frac{z+k}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \omega^{-ck} \sum_{m \geq 0} a_m e^{i\pi m(z+k)/4} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \omega^{-ck} \sum_{j=0}^7 \omega^{jk} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv j \pmod{8}}} a_m e^{i\pi m z/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^7 \left(\underbrace{\frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \omega^{(j-c)k}}_{\substack{0 \text{ if } j \neq c \\ 1 \text{ if } j = c}} \right) \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv j \pmod{8}}} a_m e^{i\pi m z / 4} \\
&= \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv c \pmod{8}}} a_m e^{i\pi m z / 4}.
\end{aligned}$$

Therefore, whenever $\Theta_c(z) = 0$, we have $a_m = 0$ for $m \equiv c \pmod{8}$. Using the identities given in [ConSlo99, Chap. 4, §4.1, p. 104], we can express

$$\Theta_c(z) = \theta_2(z)^d F(\theta_3(z), \theta_4(z)), \quad 0 \leq d \leq 3, \quad d \equiv c \pmod{8},$$

where F is a polynomial; so we can check whether $\Theta_c(z) = 0$. (A computer software like Maple is highly recommended for performing these calculations.)

We have

$$\begin{aligned}
\Theta_{\text{even}}(z) &:= \frac{1}{2} (\Theta(z) + \Theta(z+1)) = \sum_{m \equiv 0 \pmod{2}} a_m e^{i\pi m z}, \\
\Theta_{\text{odd}}(z) &:= \frac{1}{2} (\Theta(z) - \Theta(z+1)) = \sum_{m \equiv 1 \pmod{2}} a_m e^{i\pi m z}, \\
\Theta_0(z) &= \sum_{m \equiv 0 \pmod{2}} a_{4m} e^{i\pi m z}, \quad \Theta_4(z) = \sum_{m \equiv 1 \pmod{2}} a_{4m} e^{i\pi m z},
\end{aligned}$$

and Θ_{even} , Θ_{odd} , Θ_0 and Θ_4 can be expressed in function of θ_3 and θ_4 . If $\Theta_{\text{even}} = 0$ [respectively $\Theta_{\text{odd}} = 0$], then $a_m = 0$ for m even [resp. odd]. If Θ_{even} [respectively Θ_{odd}] is a multiple of Θ_0 [resp. Θ_4], we have a relation between a_m and a_{4m} for m even [resp. odd], which allows to decide whenever $a_{4^k m} = 0$.

These considerations suffice for most of the theta series mentioned in the lemma. For $\theta_3^2 \Delta_8$ [resp. $\mathcal{Sh}(\theta_3^2 \Delta_8)$], we use Lemma 24 below to show that $a_m = 0$ whenever the shell of \mathbf{Z}^2 [resp. $\mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^2)$] of norm m is empty. \square

The following lemma provides another method to show that certain coefficients of modular forms are nonzero.

18. LEMMA. *Let $\varphi^{(0)}$ and ψ be two formal series in q with integral coefficients such that*

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)} &= a_k^{(0)} q^k + \sum_{j \geq k+1} a_j^{(0)} q^j, \quad a_k^{(0)} \geq 1, \quad a_j^{(0)} \in \mathbb{Z}, \\
\psi &= b_0 + b_1 q + \sum_{j \geq 2} b_j q^j, \quad b_0, b_1 \geq 1, \quad b_j \geq 0,
\end{aligned}$$

and let

$$\varphi^{(n)} := \varphi^{(0)} \psi^n = \sum_{j \geq k} a_j^{(n)} q^j.$$

Then the sequence M_n , $n \geq 0$ defined by

$$M_n := \max\{m \in \mathbb{N} \mid a_j^{(n)} > 0, \quad k \leq j \leq m\}$$

is nondecreasing and unbounded.

Proof. We have $M_0 \geq k$. For every $n \geq 0$, we have $\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} \psi$; thus, for $k \leq j \leq M_n$,

$$a_j^{(n+1)} = a_j^{(n)} b_0 + \sum_{i \geq 1} a_{j-i}^{(n)} b_i \geq a_j^{(n)} b_0 > 0.$$

Consequently, $M_{n+1} \geq M_n$. Moreover, for $M = M_n$, we have

$$a_{M+1}^{(n+1)} = a_{M+1}^{(n)}b_0 + a_M^{(n)}b_1 + \sum_{i \geq 2} a_{M+1-i}^{(n)}b_i \geq a_{M+1}^{(n)}b_0 + a_M^{(n)}b_1 > a_{M+1}^{(n)}.$$

Consequently, $a_{M+1}^{(n+1)} \geq a_{M+1}^{(n)} + 1$, since all coefficients are integers. Similarly,

$$a_{M+1}^{(n+h)} \geq a_{M+1}^{(n+h-1)} + 1 \geq \dots \geq a_{M+1}^{(n)} + h.$$

Therefore, for h large enough, we have $a_{M+1}^{(n+h)} > 0$, and then $M_{n+h} \geq M_n + 1$. That shows that the sequence M_n is unbounded. \square

A.8 Root systems of norm 2

For analysing selfdual lattices of rank at most 24, we need some informations on the first shells of a selfdual lattice Λ . The decomposition $\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus L$ gives us the exact form of the shell Λ_1 ; we will now give the form of Λ_2 .

Let us first recall that a *root system* is a subset $R \subseteq \mathbb{R}^n$ such that

- (i) R is finite and does not contain 0;
- (ii) for every $x, y \in R$, we have $r_y(x) \in R$, where r_y is the reflection of axis $\mathbb{R}y$;
- (iii) for every $x, y \in R$, the number $2\langle x | y \rangle / \langle x | x \rangle$ is an integer.

Warning. In the usual definition, it is required that R span \mathbb{R}^n as a vector space. Here, we leave out this condition in order to simplify the formulations of results; in particular, we consider the empty set in \mathbb{R}^n as a root system.

19. LEMMA – DEFINITION. *Let Λ be an integral lattice. Then Λ_2 is a root system, called the root system of Λ .*

Proof. For x and $y \in \Lambda_2$, we have $r_y(x) = x - \langle x | y \rangle y$. Therefore, since $\langle x | y \rangle$ is an integer, we have $r_y(x) \in \Lambda_2$. Moreover, $2\langle x | y \rangle / \langle x | x \rangle = \langle x | y \rangle$ is clearly an integer. \square

If Λ is a selfdual lattice of minimum at least 2 and of root system R , we will sometimes write $\Lambda = R^+$. (It happens that this notation is unambiguous up to rank 23, that is there is at most one selfdual lattice of minimum at least 2 whose root system is a given root system in \mathbb{R}^n , $n \leq 23$.)

Let us now recall some classical facts on root systems. If $R \subseteq \mathbb{R}^p$ and $S \subseteq \mathbb{R}^q$ are root systems, their *orthogonal union* is the root system in \mathbb{R}^{p+q} defined by

$$R + S := (R \oplus \{0\}) \cup (\{0\} \oplus S) \subseteq \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q.$$

We write kR for $R + \dots + R$, k terms. A root system is called *irreducible* if it is not an orthogonal union of smaller root systems. Clearly, any root system can be written uniquely (up to permutation of the terms) as an orthogonal union of irreducible root systems. Note that a nonempty irreducible root system always spans its ambient space. The only empty irreducible root system is of dimension 1, and is noted \mathbf{O}_1 .

An important number for an irreducible root system R is its *Coxeter number*, which is the integer h satisfying the relation

$$|R| = nh.$$

If R is empty, we have $h = 0$.

The list of irreducible root systems is well known. We give here the list of those of *norm 2*, that is those root systems R that verify $\langle x | x \rangle = 2$ for every $x \in R$ (they are also called *simply laced* root systems by some authors). In the notation, the index indicates the dimension of the space where the root system lies.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{O}_1, & h = 0; \\ \mathbf{A}_n, n \geq 1, & h = n + 1; \\ \mathbf{D}_n, n \geq 4, & h = 2(n - 1); \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \mathbf{E}_6, & h = 12; \\ \mathbf{E}_7, & h = 18; \\ \mathbf{E}_8, & h = 30. \end{array}$$

We denote by $\mathbf{O}_n := n \mathbf{O}_1$ the empty root system in \mathbb{R}^n .

The following definition, justified by the next lemma, is inspired by the corresponding notion for lattices (see [MartV01, pp. 28ff]).

20. DEFINITION. A root system R is called *strongly eutactic* if, in its decomposition in irreducible root systems, all irreducible components have the same Coxeter number. In this case, we define the *Coxeter number* of R as the Coxeter number of any of its irreducible components.

A nonempty strongly eutactic root system spans its ambient space. Note that the equality $|R| = nh$ holds for strongly eutactic root systems.

21. LEMMA. *Let R be a root system of norm 2 that is a spherical 3-design. Then R is strongly eutactic.*

The converse is true also: see Proposition 23.i.

Proof. Let us write a root system $R \subseteq \mathbb{R}^n$ as

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_k,$$

where the R_i 's are irreducible. Let V_i be the subspace of \mathbb{R}^n where R_i lies (thus $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$), and let $n_i = \dim V_i$. Any point $x \in \mathbb{R}^n$, is written uniquely as

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad x_i \in V_i.$$

Let us consider the harmonic polynomials of degree 2 defined by

$$f_{i,j}(x) = \frac{1}{2n_i} \langle x_i | x_i \rangle - \frac{1}{2n_j} \langle x_j | x_j \rangle.$$

We have

$$\sum_{x \in R} f_{i,j}(x) = \frac{2|R_i|}{2n_i} - \frac{2|R_j|}{2n_j} = h_i - h_j.$$

So, if R is a spherical 3-design, we must have $\sum_{x \in R} f_{i,j}(x) = 0$ and therefore $h_i = h_j$; in other words, R is strongly eutactic. \square

We recall now the notion of reproducing kernel, which will help us to analyse strongly eutactic root systems:

Let \mathcal{H} be a complex (or a real) finite-dimensional Hilbert space of functions on a nonempty set Ω . We use the convention that hermitian scalar products are antilinear in the *first* variable. There exists a unique function $\Phi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, called *reproducing kernel*, such that $\Phi(x, \cdot) \in \mathcal{H}$ for all $x \in \Omega$, and

$$f(x) = \langle \Phi(x, \cdot) | f \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \forall x \in \Omega.$$

This kernel verifies $\overline{\Phi(y, x)} = \Phi(x, y)$. It is of *positive type*; that is, for any finitely supported function $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $y \mapsto \lambda_y$,

$$\sum_{x, y \in \Omega} \overline{\lambda_x} \lambda_y \Phi(x, y) \geq 0.$$

Moreover, the set $\{\Phi(x, \cdot) \mid x \in \Omega\}$ generates \mathcal{H} . For all this, see for example [BekHar02]. The positivity of Φ implies the following result:

22. LEMMA. *Let $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $y \mapsto \lambda_y$ be a finitely supported function. Then*

$$\sum_{x, y \in \Omega} \overline{\lambda_x} \lambda_y \Phi(x, y) = 0 \quad \text{if and only if} \quad \sum_{y \in \Omega} \lambda_y f(y) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Proof. Let Ω' be the vector space of finitely supported functions on Ω . We define a hermitian form h on Ω' by:

$$h(\mu, \lambda) = \sum_{x, y \in \Omega} \overline{\mu_x} \lambda_y \Phi(x, y), \quad \mu, \lambda \in \Omega'.$$

For $x \in \Omega$, let $\delta_x \in \Omega'$ denote the function on Ω that takes value 1 at x and value 0 elsewhere. Let Ω'_0 be the set of $\lambda \in \Omega'$ such that $\langle \mu \mid \lambda \rangle = 0$ for every $\mu \in \Omega'$. Then $\lambda \in \Omega'_0$ if and only if $h(\delta_x, \lambda) = 0$ for all $x \in \Omega$, if and only if

$$\sum_{y \in \Omega} \lambda_y \Phi(x, y) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

But since $\{\Phi(x, \cdot) \mid x \in \Omega\}$ generates \mathcal{H} , the last condition is equivalent to

$$\sum_{y \in \Omega} \lambda_y f(y) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Now, the positivity of Φ implies that

$$h(\lambda, \lambda) = 0 \quad \text{if and only if} \quad \lambda \in \Omega'_0.$$

This is exactly what is claimed by the lemma. □

Let us now consider the following special case:

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{S}^{n-1}, & \mathcal{H} &= \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n), \\ \langle f \mid g \rangle &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{f(u)} g(u) d\sigma(u), & f, g &\in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

where σ is the probability measure on \mathbb{S}^{n-1} invariant by rotation. Let $\Phi^{(j)}$ be the corresponding reproducing kernel. It is known that

$$\Phi^{(j)}(x, y) = Q^{(j)}(\langle x \mid y \rangle) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad (*)$$

where $Q^{(j)}(t)$ is an appropriate Gegenbauer polynomials with the normalisation $Q^{(j)}(1) = \dim(\text{Harm}_j(\mathbb{R}^n))$; see [DeGoSe77] and [Vile68, §IX.3]. We have, for example,

$$\begin{aligned} Q^{(0)}(t) &= 1, & Q^{(1)}(t) &= nt, & Q^{(2)}(t) &= \frac{n+2}{2}(nt^2 - 1), \\ Q^{(3)}(t) &= \frac{n(n+4)}{6}((n+2)t^3 - 3t), \\ Q^{(4)}(t) &= \frac{n(n+6)}{24}((n+2)(n+4)t^4 - 6(n+2)t + 3). \end{aligned}$$

We can now prove:

23. PROPOSITION. *Let R be a nonempty strongly eutactic root system of norm 2. Let us consider the conditions*

$$\sum_{x \in R} f(x) = 0, \quad \forall f \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n). \quad (C_{2j})$$

Then:

(i) Condition (C_2) always holds (equivalently, nonempty strongly eutactic root systems are spherical 3-designs);

(ii) Condition (C_4) holds if and only if R is equivalent to one of the following systems:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{D}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8;$$

(iii) Condition (C_6) holds if and only if R is equivalent to one of the following systems:

$$\mathbf{A}_1, 2\mathbf{A}_1, \mathbf{E}_8, 2\mathbf{E}_8, \mathbf{D}_{16};$$

(iv) Condition (C_8) holds if and only if R is equivalent to one of the following systems:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2;$$

(v) Condition (C_{10}) holds if and only if R is equivalent to one of the following systems:

$$\mathbf{A}_1, 2\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{D}_4, \mathbf{E}_8;$$

(vi) Condition (C_{12}) holds if and only if R is equivalent to the system

$$\mathbf{A}_1.$$

Proof. For x and $y \in R$, we have $\langle x | y \rangle \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Let $x \in R$, and let, for $\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$,

$$N_\alpha := |\{y \in R \mid \langle x | y \rangle = \alpha\}|.$$

We have the evident relations $N_{-\alpha} = N_\alpha$, $N_2 = 1$, and $N_0 + 2N_1 + 2N_2 = nh$. Moreover, it is known that N_α is independent of x and that

$$N_1 = 2h - 4$$

(see Bourbaki [Bour68], Chap. VI, § 1.11, prop. 3.2, where it is stated for (nonempty) irreducible root systems; but it immediately extends to nonempty strongly eutactic root systems).

Now, we renormalize R by $\tilde{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}R$, so that $\tilde{R} \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$. By Lemma 22 (applied with $\lambda_x = 1$ if $x \in \tilde{R}$ and $\lambda_x = 0$ otherwise) and equation (*), Condition (C_{2j}) is equivalent to

$$\sum_{x, y \in \tilde{R}} Q^{(2j)}(\langle x | y \rangle) = 0.$$

However, since for every $x \in \tilde{R}$ we have [note that $Q^{(2j)}(-\alpha) = Q^{(2j)}(\alpha)$]:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \tilde{R}} Q^{(2j)}(\langle x | y \rangle) &= \sum_{\alpha} N_\alpha Q^{(2j)}(\alpha/2) \\ &= 2Q^{(2j)}(1) + (4h - 8)Q^{(2j)}(1/2) + (nh - 4h + 6)Q^{(2j)}(0), \end{aligned}$$

Condition (C_{2j}) is equivalent to

$$2Q^{(2j)}(1) + (4h - 8)Q^{(2j)}(1/2) + (nh - 4h + 6)Q^{(2j)}(0) = 0.$$

This condition is linear in h and polynomial in n (since $Q^{(2j)}$ is polynomial in n). It is, for $2j \leq 12$:

$$0 = 0 \tag{C_2}$$

$$n(n+4)(n+6)((n-10)h + 6(n+2)) = 0 \tag{C_4}$$

$$n(n+2)(n+6)(n+10)\left((n^2 - 48n + 272)h + 30(n-4)(n+4)\right) = 0 \tag{C_6}$$

$$n(n+2)(n+4)(n+8)(n+14) \tag{C_8}$$

$$\times \left((n-4)(n-30)(n-50)h + 42(n+6)(3n^2 - 14n + 40)\right) = 0$$

$$(n-2)n(n+2)(n+4)(n+6)(n+10)(n+18) \tag{C_{10}}$$

$$\times \left((n-24)(n-28)(n-76)h + 30(n+8)(17n^2 - 8n + 336)\right) = 0$$

$$n(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)(n+12)(n+22) \tag{C_{12}}$$

$$\times \left((n^5 - 186n^4 + 10852n^3 - 228504n^2 + 1659232n - 967680)h + 66n(n-2)(n+10)(31n^2 + 130n + 1144)\right) = 0$$

We can now make explicit the positive integral solutions of these equations. Let us take for example (C_4) : we have $(n-10)h + 6(n+2) = 0$, hence

$$h = \frac{6(n+2)}{10-n}.$$

Since $h > 0$, we have $n < 10$. Now, if we introduce $n = 1, 2, \dots, 9$ in the last formula, we obtain the integral solutions

$$(n, h) = (1, 2), (2, 3), (4, 6), (6, 12), (7, 18), (8, 30), (9, 16).$$

It is now easy to list all strongly eutactic root systems having one of these parameters. \square

Application to some selfdual lattices

A.9 The cubic lattices

Let

$$\mathbf{Z}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$$

be the *cubic lattice* of rank n . It is an odd selfdual lattice whose shadow is:

$$Sh(\mathbf{Z}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n\}.$$

In particular, $\sigma(\mathbf{Z}^n) = n$.

24. LEMMA. *We have*

$$\Theta_{\mathbf{Z}^n, P} = \begin{cases} \theta_3^n & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n), \\ c_1(P) \Delta_8 \theta_3^n & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n), \\ c_2(P) \Phi \Delta_8 \theta_3^n & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

where c_1 is a nonzero linear form if and only if $n \geq 2$, and c_2 is a nonzero linear form if and only if $n \geq 3$.

Remark. The theta series of $\mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^n)$ are given by Proposition 10.

Proof. The equality $\Theta_{\mathbf{Z}^n} = \theta_3^n$ follows directly from $\Theta_{\mathbf{Z}^n} = (\Theta_{\mathbf{Z}})^n$ and $\Theta_{\mathbf{Z}} = \theta_3$. Proposition 14 gives the form of $\Theta_{\mathbf{Z}^n, P}$ for $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, 3$.

It remains to show that c_1 and c_2 are not identically zero for n large enough, i.e., there exists $P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n)$ (if $n \geq 2$) such that $\Theta_{\mathbf{Z}^n, P} \neq 0$, and there exists $Q \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^n)$ (if $n \geq 3$) such that $\Theta_{\mathbf{Z}^n, Q} \neq 0$. We can choose for example

$$P(x) = x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2x_2^2, \quad \Theta_{\mathbf{Z}^n, P}(z) = 4q + \dots,$$

and

$$Q(x) = (x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) - 15(x_1^4x_2^2 + x_2^4x_3^2 + x_3^4x_1^2) + 90(x_1^2x_2^2x_3^2), \\ \Theta_{\mathbf{Z}^n, Q}(z) = 6q + \dots.$$

Finally, the fact that $c_1 \equiv 0$ [respectively $c_2 \equiv 0$] if $n = 1$ [respectively if $n = 1$ or 2] is an easy exercise. \square

The vanishing coefficients of the Fourier expansion of the series of the last lemma are given in Lemma 17. Therefore, by Lemma 5, we have:

25. THEOREM.

- (i) For $n \geq 2$, all nonempty shells of \mathbf{Z}^n and $\mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^n)$ are spherical 3-designs.
- (ii) The following shells are spherical $3^{1/2}$ -designs:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{Z}^2 \text{ and } \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^2) : & \text{every nonempty shell} \\ (\mathbf{Z}^{16})_m : & m = 4^{a2}, a \geq 0 \\ \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^{16})_m : & m = 4^{a2}, a \geq 1 \\ \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^{40})_m : & m = 24. \end{array}$$

- (iii) The following shells are spherical 5-designs:

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{Z}^4)_m : & m = 2a, a \geq 1 \\ (\mathbf{Z}^7)_m : & m = 4^a(8b + 3), a, b \geq 0 \\ \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^{16})_m : & m = 4a + 2, a \geq 1. \end{array}$$

Note that the vanishing coefficients of series $\Delta_8\theta_3^n$ for $n = 2, 3$, and $\Phi\Delta_8\theta_3^n$ for $n = 3$, that are mentioned in Lemma 17, correspond to empty shells of the lattices \mathbf{Z}^2 and \mathbf{Z}^3 . Vanishing coefficients of $\Delta_8\theta_3^n$ for $n = 1$ and $\Phi\Delta_8\theta_3^n$ for $n = 1, 2$ are irrelevant for our purpose, because they correspond to cases where c_1 and c_2 are zero in Lemma 24. Similar remarks hold for the shadows of these modular forms.

We give in Appendix A.15 an alternative proof that some shells of the cubic lattices of rank 4 and 7 are 5-designs.

26. PROPOSITION.

- (i) For $n \geq 2$ and $1 \leq m \leq 1200$, the nonempty shells of norm m of \mathbf{Z}^n are not spherical 5-designs, except those mentioned in Theorem 25.
- (ii) For $n \geq 2$ and $n/4 \leq m \leq n/4 + 1200$, the nonempty shells of norm m of $\mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^n)$ are not a spherical 5-designs, except those mentioned in Theorem 25.

Proof. (i) We check first numerically that the statement holds for $n < 408$. Then, we apply Lemma 18 with $\varphi^{(0)} = \Delta_8(z) = q + O(q^2)$ and $\psi = \theta_3(z) = 1 + 2q + O(q^4)$. Numerical computations give $M_{408} \geq 1200$, and thus the coefficients $a_j^{(n)}$ of

$$\varphi^{(n)} = \Delta_8(z) \theta_3(z)^n = \sum_{j \geq 1} a_j^{(n)} q^j$$

are positive for $1 \leq j \leq 1200$ and $n \geq 408$. By Lemma 24 and Lemma 5, the corresponding shells $(\mathbf{Z}^n)_j$ are not spherical 5-designs.

(ii) We check first numerically that the statement holds for $n < 426$. Then, we apply Lemma 18 to

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= -16 \operatorname{Sh} \Delta_8(z/2) = 1 - 16q + O(q^2), \\ \psi &= q^{-1/8} \theta_2(z/2) = 2 + 2q + O(q^3). \end{aligned}$$

(The substitution $z \mapsto z/2$ is equivalent to the substitution $q \mapsto q^{1/2}$.) Numerical computations give $M_{426} \geq 600$. It follows that the coefficients $a_j^{(n)}$ of

$$\varphi^{(n)} = -16 q^{n/8} \operatorname{Sh} \Delta_8(z/2) \theta_2(z/2)^n = \sum_{j \geq 0} a_j^{(n)} q^j$$

are positive for $0 \leq j \leq 600$ and $n \geq 426$. In other words, the coefficients $c_j^{(n)}$ of

$$\operatorname{Sh} \Delta_8(z) \theta_2(z)^n = \sum_{j \geq 0} c_j^{(n)} q^{2j+n/4}$$

are negative for $n/4 \leq 2j + n/4 \leq n/4 + 1200$ and $n \geq 426$. The proof is achieved by invoking Lemma 24 together with Proposition 10 and Lemma 5. \square

A.10 The Witt lattices

Let n be a positive multiple of 4. The *Witt lattice* of rank n is the lattice

$$\mathbf{\Gamma}_n := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} 2x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_i - x_1 \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}.$$

It is selfdual, and it is even if $n \equiv 0 \pmod{8}$ and odd otherwise. When $n \equiv 4 \pmod{8}$, the shadow of $\mathbf{\Gamma}_n$ is

$$\operatorname{Sh}(\mathbf{\Gamma}_n) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} 2x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_i - x_1 \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{array} \right. \right\}.$$

The lattice $\mathbf{\Gamma}_4$ is equivalent to the cubic lattice \mathbf{Z}^4 and is thus analysed in the previous section; therefore, we will assume that $n \geq 8$. The lattice $\mathbf{\Gamma}_8$ will be analysed more precisely in the next section.

27. LEMMA. *Let n be a multiple of 4 greater than or equal to 8. Then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\theta_2^n + \theta_3^n + \theta_4^n) & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \operatorname{Harm}_2(\mathbb{R}^n), \\ c_1(P) \theta_2^4 \theta_3^4 \theta_4^4 (-\theta_2^{n-4} + \theta_3^{n-4} - \theta_4^{n-4}) & \text{if } P \in \operatorname{Harm}_4(\mathbb{R}^n), \\ c_2(P) \theta_2^4 \theta_3^4 \theta_4^4 \left((\theta_3^4 + \theta_4^4) \theta_2^{n-4} \right. \\ \quad \left. + (\theta_4^4 - \theta_2^4) \theta_3^{n-4} - (\theta_2^4 + \theta_3^4) \theta_4^{n-4} \right) & \text{if } P \in \operatorname{Harm}_6(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

where c_1 and c_2 are nonzero linear forms on $\operatorname{Harm}_4(\mathbb{R}^n)$ and $\operatorname{Harm}_6(\mathbb{R}^n)$ respectively.

Proof. Let G the subgroup of $\mathcal{O}(n)$ consisting of the transformations of the form

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_n x_n)$$

where $\epsilon_i = \pm 1$ and $\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_n = 1$. It is clear that G leaves Γ_n invariant. We denote by $\text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)^G$ the set of elements of $\text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$ which are invariant under the action of G given by $(\gamma P)(x) = P(\gamma^{-1}x)$. Let

$$\pi : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)^G, \quad \pi(P) = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in G} \gamma P$$

be the projection on the invariant part of $\text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$. Since for all $\gamma \in G$

$$\Theta_{\Gamma_n, \gamma P} = \Theta_{\gamma^{-1}\Gamma_n, P} = \Theta_{\Gamma_n, P},$$

we have $\Theta_{\Gamma_n, P} = \Theta_{\Gamma_n, \pi(P)}$. Therefore, it suffices to prove the lemma for $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)^G$.

Let

$$\Gamma'_n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} 2x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_i - x_1 \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ -x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right. \right\},$$

which is a lattice equivalent to Γ_n . Let $\mathbf{D}_n := \{x \in \mathbf{Z}^n \mid \langle x \mid x \rangle \in 2\mathbb{Z}\}$; we have, by definition, $\mathcal{S}h(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{D}_n^\# \setminus \mathbf{D}_n$. We have the following inclusions of lattices, where labels indicate indices of sublattices:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{D}_n^\# & & \\ & 2 & | & 2 & \\ \Gamma_n & & \mathbf{Z}^n & & \Gamma'_n \\ & 2 & | & 2 & \\ & & \mathbf{D}_n & & \end{array}$$

Expressing $\mathbf{D}_n^\#$ as the union of its classes modulo \mathbf{D}_n , we obtain

$$\mathbf{D}_n^\# = (\Gamma_n \setminus \mathbf{D}_n) \sqcup (\mathbf{Z}^n \setminus \mathbf{D}_n) \sqcup (\Gamma'_n \setminus \mathbf{D}_n) \sqcup \mathbf{D}_n.$$

Hence, since $\mathcal{S}h(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{D}_n^\# \setminus \mathbf{Z}^n$,

$$\mathcal{S}h(\mathbf{Z}^n) = (\Gamma_n \setminus \mathbf{D}_n) \sqcup (\Gamma'_n \setminus \mathbf{D}_n),$$

from which we deduce,

$$\Theta_{\mathcal{S}h(\mathbf{Z}^n), P} = \Theta_{\Gamma_n, P} + \Theta_{\Gamma'_n, P} - 2\Theta_{\mathbf{D}_n, P}.$$

As $2\Theta_{\mathbf{D}_n, P}(z) = \Theta_{\mathbf{Z}^n, P}(z) + \Theta_{\mathbf{Z}^n, P}(z+1)$, we have

$$\Theta_{\Gamma_n, P}(z) + \Theta_{\Gamma'_n, P}(z) = \Theta_{\mathbf{Z}^n, P}(z) + \Theta_{\mathbf{Z}^n, P}(z+1) + \Theta_{\mathcal{S}h(\mathbf{Z}^n), P}(z).$$

Let σ be the orthogonal transformation of \mathbb{R}^n defined by

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n);$$

we have $\sigma\Gamma'_n = \Gamma_n$. Let $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)^G$, where $0 \leq 2j \leq 6$. It is easily checked that, since $2j \leq n$, the polynomial P is *even* in x_1, x_2, \dots, x_n , and therefore P is invariant under the action of σ . Thus, $\Theta_{\Gamma'_n, P} = \Theta_{\Gamma_n, \sigma P} = \Theta_{\Gamma_n, P}$, and

$$\Theta_{\Gamma_n, P}(z) = \frac{1}{2} \left(\Theta_{\mathbf{Z}^n, P}(z) + \Theta_{\mathbf{Z}^n, P}(z+1) + \Theta_{\mathcal{S}h(\mathbf{Z}^n), P}(z) \right).$$

We use Lemma 24 and identities found in [ConSlo99, Chap. 4, §4.1, p. 104] to conclude. \square

Now, using Lemma 5, we have:

28. THEOREM. *Let n be a multiple of 4 greater than or equal to 8.*

- (i) *All nonempty shells of Γ_n and $Sh(\Gamma_n)$ are spherical 3-designs.*
- (ii) *All nonempty shells of Γ_8 are spherical 7-designs.*
- (iii) *All nonempty shells of Γ_{16} are spherical $3^{1/2}$ -designs.*

We do not know if any shell of Γ_n , for $n \geq 12$ is a spherical 5-design; however, as in the case of cubic lattices, we can show:

29. PROPOSITION. *For $n \geq 12$ and $1 \leq m \leq 1200$, the nonempty shells of norm m of Γ_n and of their shadows are not spherical 5-designs.*

Proof. For $m < n/4$, we remark that $(\Gamma_n)_m = (\mathbf{Z}^n)_m$ when m is an even integer and $(\Gamma_n)_m = \emptyset$ otherwise. If moreover $n \equiv 4 \pmod{8}$, then we have $(Sh(\Gamma_n))_m = (\mathbf{Z}^n)_m$ when m is an odd integer and $(Sh(\Gamma_n))_m = \emptyset$ otherwise. Therefore, for $n > 4800$, it suffices to apply Proposition 26. For $n \leq 4800$, we content ourself with a numerical verification. \square

The case of Γ_8 is considered in more details in the next section.

A.11 Even selfdual lattices of rank at most 24

We recall here the classification of these lattices, due to Niemeier. Note that we already know by Proposition 3 that their rank is a multiple of 8.

30. THEOREM.

- (i) *There is exactly one even selfdual lattice of rank 8, that is the Korkine-Zolotareff lattice*

$$\Gamma_8 = \mathbf{E}_8^+.$$

- (ii) *There are exactly two even selfdual lattices of rank 16, that is*

$$\Gamma_8 \oplus \Gamma_8 = (2\mathbf{E}_8)^+ \quad \text{and} \quad \Gamma_{16} = \mathbf{D}_{16}^+.$$

- (iii) *There is a bijection between the even selfdual lattices of rank 24 and the twenty-four strongly eutactic root systems of norm 2 and of rank 24, given by $\Lambda \leftrightarrow \Lambda_2$. These root systems are (in parentheses is the Coxeter number of the system):*

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{O}_{24} (0), & 24 \mathbf{A}_1 (2), & 12 \mathbf{A}_2 (3), & 8 \mathbf{A}_3 (4), \\ 6 \mathbf{A}_4 (5), & 4 \mathbf{A}_5 + \mathbf{D}_4 (6), & 6 \mathbf{D}_4 (6), & 4 \mathbf{A}_6 (7), \\ 2 \mathbf{A}_7 + 2 \mathbf{D}_5 (8), & 3 \mathbf{A}_8 (9), & 9 \mathbf{A}_9 + \mathbf{D}_6 (10), & 4 \mathbf{D}_6 (10), \\ \mathbf{A}_{11} + \mathbf{D}_7 + \mathbf{E}_6 (12), & 4 \mathbf{E}_6 (12), & 2 \mathbf{A}_{12} (13), & 3 \mathbf{D}_8 (14), \\ \mathbf{A}_{15} + \mathbf{D}_9 (16), & \mathbf{D}_{10} + 2 \mathbf{E}_7 (18), & \mathbf{A}_{17} + \mathbf{E}_7 (18), & 2 \mathbf{D}_{12} (22), \\ \mathbf{A}_{24} (25), & \mathbf{D}_{16} + \mathbf{E}_8 (30), & 3 \mathbf{E}_8 (30), & \mathbf{D}_{24} (46). \end{array}$$

Claims (i) and (ii) are consequences of Claim (iii), since $\Lambda = R^+$ is an even unimodular lattice of rank 8 [respectively 16] if and only if $\Lambda \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_8 = (R + 2\mathbf{E}_8)^+$ [resp. $\Lambda \oplus \Gamma_8 = (R + \mathbf{E}_8)^+$] is an even unimodular lattice of rank 24.

The lattice corresponding to \mathbf{O}_{24} is the famous Leech lattice, and those corresponding to nonempty strongly eutactic root systems of rank 24 are the the Niemeier lattices; those corresponding to the three last root systems listed are $\Gamma_{16} \oplus \Gamma_8$, $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8 \oplus \Gamma_8$, and Γ_{24} respectively.

There exist several proofs of Claim (iii); a proof explaining the bijection is found in [Venk78].

31. LEMMA.

(i) Let $\Lambda = \Gamma_8 = \mathbf{E}_8^+$ be the Korkine-Zolotareff lattice. Then

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^8), 2j = 2, 4, 6, 10, \\ c_1(P) \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^8), \\ c_2(P) \mathbb{Q} \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^8), \\ c_3(P) \mathbb{R} \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{14}(\mathbb{R}^8), \\ c_4(P) \mathbb{Q}^2 \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{16}(\mathbb{R}^8), \\ c_5(P) \mathbb{R} \mathbb{Q}^2 \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{18}(\mathbb{R}^8), \end{cases}$$

where $c_1, c_2, c_3, c_4,$ and c_5 are nonzero linear form on $\text{Harm}_8(\mathbb{R}^8), \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^8), \text{Harm}_{14}(\mathbb{R}^8), \text{Harm}_{16}(\mathbb{R}^8),$ and $\text{Harm}_{18}(\mathbb{R}^8)$ respectively.

(ii) Let Λ be one of the two even selfdual lattices of rank 16. Then

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \mathbb{Q}^2 & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^{16}), 2j = 2, 6, \\ c_1(P) \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^{16}), \\ c_2(P) \mathbb{Q} \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^{16}), \\ c_3(P) \mathbb{R} \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{10}(\mathbb{R}^{16}), \\ c_4(P) \mathbb{Q}^2 \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^{16}), \\ c_5(P) \mathbb{R} \mathbb{Q}^2 \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{14}(\mathbb{R}^{16}), \end{cases}$$

where $c_1, c_2, c_3, c_4,$ and c_5 are nonzero linear forms on $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^{16}), \text{Harm}_8(\mathbb{R}^{16}), \text{Harm}_{10}(\mathbb{R}^{16}), \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^{16}),$ and $\text{Harm}_{14}(\mathbb{R}^{16})$ respectively.

(iii) Let Λ be the Leech lattice. Then

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \mathbb{Q}^3 - 720 \Delta_{24} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^{24}), 2j = 2, 4, 6, 8, 10, 14, \\ c_1(P) \Delta_{24}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^{24}), \\ c_2(P) \mathbb{Q} \Delta_{24}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_{16}(\mathbb{R}^{24}), \\ c_3(P) \mathbb{R} \Delta_{24}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_{18}(\mathbb{R}^{24}), \\ c_4(P) \mathbb{Q}^2 \Delta_{24}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_{20}(\mathbb{R}^{24}), \\ c_5(P) \mathbb{R} \mathbb{Q}^2 \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{22}(\mathbb{R}^{24}), \end{cases}$$

where $c_1, c_2, c_3, c_4,$ and c_5 are nonzero linear forms on the corresponding spaces.

(iv) Let Λ be an even selfdual lattice of rank 24 and of minimum 2. Let $h := |\Lambda_2|/24$. Then

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \mathbb{Q}^3 - 24(30 - h) \Delta_{24} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24}), \\ c_1(P) \mathbb{Q} \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24}), \\ c_2(P) \mathbb{R} \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^{24}), \\ c_3(P) \mathbb{Q}^2 \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^{24}), \\ c_4(P) \mathbb{R} \mathbb{Q}^2 \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{10}(\mathbb{R}^{24}), \end{cases}$$

where $c_1, c_2, c_3,$ and c_4 are nonzero linear forms on the corresponding spaces.

Proof. It suffices to apply Propositions 15 and 16. In order to see that the linear forms c_i , $i = 1, 2, \dots$, are nonzero, we apply Lemma 5 and Proposition 23 to Λ_2 if Λ is not the Leech lattice, and to Λ_4 if Λ is the Leech lattice. (Note that, since $\{\langle x | y \rangle \mid x, y \in \Lambda_4\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, the shell Λ_4 is a *tight* 11-design: see [DeGoSe77, Theorems 5.12 and 6.8] or [GoeSei79, Theorems 5.3 and 5.4]. It follows that Λ_4 cannot be a 12-design.) \square

Remark. In fact, Propositions 15 and 16 show that the root system of an even selfdual lattice of rank 8 [respectively 16, 24] is nonempty and a $7^{1/2}$ -design [resp. is nonempty and a $5^{1/2}$ -design, is strongly eutactic]. Theorem 30 says that, for each root system in dimension up to 24 which satisfies the above condition, there exists exactly one even selfdual lattice with such a root system. But in higher dimensions, there can be more than one even selfdual lattice with the same root system.

As in the preceding case, Lemma 5 gives:

32. THEOREM.

- (i) All shells of $\mathbf{\Gamma}_8 = \mathbf{E}_8^+$ are spherical $7^{1/2}$ -designs.
- (ii) All shells of the two even selfdual lattices of rank 16 are spherical $3^{1/2}$ -designs.
- (iii) All shells of the Leech lattice are spherical $11^{1/2}$ -designs.
- (iv) All shells of any even selfdual lattice of rank 24 and of minimum 2 are spherical 3-designs.

Remark. We have checked numerically that the shells of norm at most 1200 of these lattices are not spherical designs of higher strength.

Claims (i) to (iii) of the theorem above are special cases of Theorem 16.4 of [VenMar01] (see also [Venk84]), since the lattices mentioned in these claims are *extremal*. See the remark at the end of Section A.5.

Another consequence of our analysis is a reformulation in terms of spherical design strength of shells of lattices of a famous conjecture of Lehmer, which states that the Ramanujan numbers $\tau(m)$ are never zero for $m \geq 1$. This conjecture has been verified for $m \leq 10^{15}$ [Serr85, § 3.3].

33. PROPOSITION. Let $\tau(m)$, $m \geq 1$, be the Ramanujan numbers defined by

$$\Delta_{24}(z) = \sum_{m \geq 1} \tau(m) q^{2m}.$$

For $m \geq 1$, the following are equivalent:

- (a) $\tau(m) = 0$;
- (b) $(\mathbf{\Gamma}_8)_{2m}$ is an 8-design (and therefore an 11-design);
- (c) for any even selfdual lattice Λ of rank 16, Λ_{2m} is a 4-design (and therefore a 7-design).

Therefore, Lehmer's conjecture is true if and only if no shell of $\mathbf{\Gamma}_8$ is an 8-design, and if and only if no shell of any even selfdual lattice of rank 16 is a 4-design.

Similar conjectures could be stated for other modular forms than Δ_{24} , and have an equivalent formulation in terms of spherical design strength of shells of lattices (see Proposition C in the Introduction).

A.12 Selfdual lattices with long shadow

In this section, we consider selfdual lattices with $\sigma(\Lambda) = n - 8$. We begin with those of minimum at least 2. We recall here their classification [Elki95b].

34. THEOREM. *There is a bijection between the selfdual lattices with $\sigma(\Lambda) = n - 8$ of minimum at least 2 and the fourteen strongly eutactic root systems satisfying $h = 2(23 - n)$, given by $\Lambda \leftrightarrow \Lambda_2$. These root systems are (in parentheses are the corresponding values of n and h):*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_8 (8, 30), & \quad \mathbf{D}_{12} (12, 26), & \quad 2 \mathbf{E}_7 (14, 18), & \quad \mathbf{A}_{15} (15, 16), \\ 2 \mathbf{D}_8 (16, 14), & \quad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{E}_6 (17, 12), & \quad 2 \mathbf{A}_9 (18, 10), \\ 3 \mathbf{D}_6 (18, 10), & \quad 2 \mathbf{A}_7 + \mathbf{D}_5 (19, 8), & \quad 4 \mathbf{A}_5 (20, 6), \\ 5 \mathbf{D}_4 (20, 6), & \quad 7 \mathbf{A}_3 (21, 4), & \quad 22 \mathbf{A}_1 (22, 2), & \quad \mathbf{O}_{23} (23, 0). \end{aligned}$$

Recall that we denote by R^+ the (unique up to dimension 23) selfdual lattice Λ of root system $R = \Lambda_2$. Apart from $\mathbf{F}_8 = \mathbf{E}_8^+$, which is even, all these lattices are odd. They are of minimum 2, except \mathbf{O}_{23}^+ which is of minimum 3 (it is the so-called *shorter Leech lattice*).

The theta series of such lattices are now easy to calculate (we exclude here the theta series of $\mathbf{F}_8 = \mathbf{E}_8^+$, which have been given in Lemma 31).

35. LEMMA. *Let Λ be an odd selfdual lattice with $\sigma(\Lambda) = n - 8$ and of minimum at least 2.*

(i) *If Λ is of minimum 2, then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^n - 2n \theta_3^{n-8} \Delta_8 & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n), \\ c_1(P) \theta_3^{n-8} \Delta_8^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n), \\ c_2(P) \Phi \theta_3^{n-8} \Delta_8^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

where c_1 and c_2 are nonzero linear forms on $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^n)$ and $\text{Harm}_6(\mathbb{R}^n)$ respectively.

(ii) *If $\Lambda = \mathbf{O}_{23}^+$ is the shorter Leech lattice, then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^{23} - 46 \theta_3^{15} \Delta_8 & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^{23}), 2j = 2, 4, 6, \\ c_1(P) \theta_3^{15} \Delta_8^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^{23}), \\ c_2(P) \Phi \theta_3^{15} \Delta_8^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_{10}(\mathbb{R}^{23}), \end{cases}$$

where c_1 and c_2 are nonzero linear forms on $\text{Harm}_8(\mathbb{R}^{23})$ and $\text{Harm}_{10}(\mathbb{R}^{23})$ respectively.

Proof. Propositions 13 and 14 give the forms of the theta series (incidentally, they show that Λ_2 is strongly eutactic and that $h = 2(23 - n)$ as stated in Theorem 34), except the fact that the linear forms c_1 and c_2 are nonzero.

If Λ is of minimum 2, by Lemma 5 applied to the root system of Λ , the linear forms c_1 and c_2 are nonzero.

Consider now the case $\Lambda = \mathbf{O}_{23}^+$. Let $x \in \Lambda_3$, and set $N_\alpha := |\{y \in \Lambda_3 \mid \langle x \mid y \rangle = \alpha\}|$. It is known that

$$N_3 = N_{-3} = 2, \quad N_1 = N_{-1} = 891, \quad N_0 = 2816,$$

and $N_\alpha = 0$ for other α 's. (This follows from the fact that Λ_3 is a *tight* 7-design: see [DeGoSe77, Theorems 5.12 and 6.8] or [GoeSei79, Theorems 5.3 and 5.4].) From this, using Lemma 22 (with $\lambda_x = 1$ if $x \in \Lambda_3$, and $\lambda_x = 0$ otherwise), it is easy to see that c_1 and c_2 are indeed nonzero. \square

The vanishing coefficients of the Fourier series for the modular forms of the lemma are given by Lemma 17. We deduce:

36. THEOREM.

- (i) Every nonempty shell of any selfdual lattice with $\sigma(\Lambda) = n - 8$ of minimum 2, and every nonempty shell of its shadow, is a spherical 3-design.
- (ii) The following shells are spherical $3^{1/2}$ -designs:

$$(2\mathbf{D}_8)_m^+ : \quad m = 4^a, a \geq 1$$

- (iii) The following shells are spherical 5-designs:

$$(4\mathbf{A}_5)_m^+, (5\mathbf{D}_4)_m^+ : m = 4^a, a \geq 1$$

$$(2\mathbf{D}_8)_m^+ : \quad m = 2a + 1, a \geq 1$$

- (iv) All nonempty shells of the shorter Leech lattice \mathbf{O}_{23}^+ and of its shadow are spherical 7-designs.

Remark. We have checked numerically that the shells of norm at most 1200 of these lattices and of their shadows are not spherical designs of higher strength.

Let us now turn to selfdual lattices of minimum 1.

37. LEMMA. Let Λ be a selfdual lattice with $\sigma(\Lambda) = n - 8$ of minimum 1.

- (i) If $\Lambda = \mathbf{Z}^1 \oplus \mathbf{E}_8^+ = \mathbf{Z}^1 \oplus \mathbf{\Gamma}_8$, then

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^9 - 16\theta_3\Delta_8 & \text{if } P = 1, \\ c_1(P)\Phi\theta_3\Delta_8 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^9), \\ c_2(P)(\theta_3^9\Delta_8 + 8\theta_3\Delta_8^2) & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^9), \\ c_4(P)(\Phi\theta_3^9\Delta_8 - \Phi\theta_3\Delta_8^2) & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^9), \end{cases}$$

where c_1 , c_2 and c_4 are nonzero linear forms on $\text{Harm}_2(\mathbb{R}^9)$, $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^9)$ and $\text{Harm}_6(\mathbb{R}^9)$ respectively.

- (ii) If $\Lambda = \mathbf{Z}^1 \oplus \mathbf{O}_{23}^+$, then

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^{24} - 46\theta_3^{16}\Delta_8 & \text{if } P = 1, \\ c_1(P)\Phi\theta_3^{16}\Delta_8 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24}), \\ c_2(P)(\theta_3^{24}\Delta_8 - 40\theta_3^{16}\Delta_8^2) & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24}), \\ c_4(P)(\Phi\theta_3^{24}\Delta_8 - 16\Phi\theta_3^{16}\Delta_8^2) & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^{24}), \end{cases}$$

where c_1 , c_2 and c_4 are nonzero linear forms on $\text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24})$, $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24})$ and $\text{Harm}_6(\mathbb{R}^{24})$ respectively.

(iii) Otherwise, we have

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^n - 2n \theta_3^{n-8} \Delta_8 & \text{if } P = 1, \\ c_1(P) \Phi \theta_3^{n-8} \Delta_8 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n), \\ c_2(P) \theta_3^n \Delta_8 + c_3(P) \theta_3^{n-8} \Delta_8^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n), \\ c_4(P) \Phi \theta_3^n \Delta_8 + c_5(P) \Phi \theta_3^{n-8} \Delta_8^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

where c_1 is a nonzero linear form on $\text{Harm}_2(\mathbb{R}^n)$, c_2 and c_3 are linearly independent linear forms on $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^n)$, and c_4 and c_5 are linearly independent linear forms on $\text{Harm}_6(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Let $\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus L$, where L is a lattice of minimum 2 and of rank N , and let h be the Coxeter number of the strongly eutactic root lattice L_2 . Let V_1 [respectively V_2] be the space generated by \mathbf{Z}^p [resp. L], so that $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$. For $x \in \mathbb{R}^n$, let $x_i \in V_i$ ($i = 1, 2$) such that $x = x_1 + x_2$. Let $\omega_i(x) := \langle x_i \mid x_i \rangle$.

First, Proposition 13 gives the exact form of Θ_Λ .

Now, by Proposition 14, we have $\Theta_{\Lambda, P} = c_1(P) \Phi \theta_3^{n-8} \Delta_8$ for $P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n)$. The polynomial

$$P := \frac{1}{2p} \omega_1 - \frac{1}{2N} \omega_2 \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n)$$

verifies $\Theta_{\Lambda, P}(z) = q + O(q^2) \neq 0$; thus c_1 is not identically equal to zero.

Then, we have $\Theta_{\Lambda, P} = c_2(P) \theta_3^n \Delta_8 + c_3(P) \theta_3^{n-8} \Delta_8^2$ for $P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n)$. Consider the polynomial

$$Q := \frac{1}{2p} \omega_1^2 - \frac{p+2}{pN} \omega_1 \omega_2 + \frac{p+2}{2N(N+2)} \omega_2^2 \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n).$$

We have

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, Q}(z) &= q + 4 \left((p-1) + \frac{h(p+2)}{2(N+2)} \right) q^2 + O(q^3) \\ &= \left(q + (2n-8)q^2 + O(q^3) \right) + \left((2p-2N+4 + \frac{2h(p+2)}{N+2}) q^2 + O(q^3) \right) \\ &= \theta_3^n(z) \Delta_8(z) + \left(2p-2N+4 + \frac{2h(p+2)}{N+2} \right) \theta_3^{n-8}(z) \Delta_8^2(z). \end{aligned}$$

If L is neither \mathbf{O}_{23}^+ nor \mathbf{E}_8^+ , then, by Lemma 35, there exists a $R \in \text{Harm}_4(V_2) \subseteq \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n)$ such that $\Theta_{L, R} \neq 0$. So we have

$$\Theta_{\Lambda, R}(z) = \Theta_{\mathbf{Z}^p, 1}(z) \Theta_{L, R}(z) = c_4(R) q^2 + O(q^3) = c_4(R) \theta_3^{n-8}(z) \Delta_8^2(z),$$

with $c_4(R) \neq 0$; that shows that c_3 and c_4 are linearly independent.

If $\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus \mathbf{E}_8^+$ and if $p \geq 2$, we can find a $S \in \text{Harm}_4(V_1) \subseteq \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n)$ such that $\Theta_{\mathbf{Z}^p, S} = \theta_3^p \Delta_8$. So we have

$$\Theta_{\mathbf{Z}^p \oplus \mathbf{E}_8^+, S} = \Theta_{\mathbf{Z}^p, S} \Theta_{\mathbf{E}_8^+, 1} = \theta_3^p \Delta_8 (\theta_3^8 - 16 \Delta_8) = \theta_3^n \Delta_8 - 16 \theta_3^{n-8} \Delta_8.$$

Therefore, if we compare

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{Z}^p \oplus \mathbf{E}_8^+, Q} &= \theta_3^n(z) \Delta_8(z) + 8p \theta_3^{n-8}(z) \Delta_8^2(z), \\ \Theta_{\mathbf{Z}^p \oplus \mathbf{E}_8^+, S} &= \theta_3^n \Delta_8 - 16 \theta_3^{n-8} \Delta_8, \end{aligned}$$

we find that c_2 and c_3 are linearly independent.

If $\Lambda = \mathbf{Z}^1 \oplus \mathbf{E}_8^+$, it can be shown that c_2 and c_3 are not linearly independent. We will not prove it, since it has no effect on the conclusions of the following theorem.

If $\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus \mathbf{O}_{23}^+$, we proceed as for $\mathbf{Z}^p \oplus \mathbf{E}_8^+$.

A similar method is used for computing $\Theta_{\Lambda, P}$ for $P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^n)$. Note however that in the cases $\mathbf{Z}^2 \oplus \mathbf{E}_8^+$ and $\mathbf{Z}^2 \oplus \mathbf{E}_8^+$, the polynomial corresponding to S is a polynomial of the form

$$S' = (N\omega_1 - (p+8)\omega_2) f \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^n), \quad \text{where } f \in \text{Harm}_4(V_1),$$

and such that $\Theta_{\mathbf{Z}^2, f} \neq 0$, since $\Theta_{\mathbf{Z}^2, P} = 0$ for every $P \in \text{Harm}_6(V_1)$. \square

Again, Lemma 17 describes indices of vanishing coefficients for the series of the previous lemma. Therefore, we have:

38. THEOREM.

- (i) Let Λ be a selfdual lattice of rank 24 with $\sigma(\Lambda) = 24 - 8 = 16$. Then the shells Λ_m and $\text{Sh}(\Lambda)_m$ are spherical 3-designs for $m = 4^a 2$, $a \geq 0$ (except the shells $\text{Sh}(\Lambda)_2$ and $(\mathbf{Z}^1 \oplus \mathbf{O}_{23}^+)_2$, which are empty).
- (ii) Let $\Lambda = \mathbf{Z}^3 \oplus \Gamma_8$. Then the shells Λ_m are spherical 3-designs for $m = 4^a(8b+7)$, $a, b \geq 0$.

Remark. We have checked numerically that the shells of norm at most 1200 of these lattices and of their shadows are not spherical designs of higher strength.

A.13 Odd selfdual lattices of rank 24 and of minimum at least 2

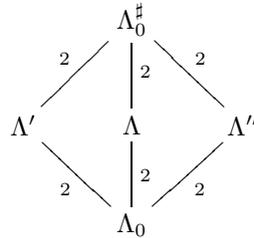
We need to know the precise form of the shell of norm 2 of these lattices and their shadows:

39. PROPOSITION. Let Λ be an odd selfdual lattice of rank 24 and of minimum 2. Then there exist a root system R , and strongly eutactic root systems S and T of Coxeter number h_S and h_T respectively, such that

- $R = S \cap T$,
- $h_S + h_T = 3h_R + 2$ where $h_R := |R|/24$,
- $s \in S \setminus R, t \in T \setminus R \implies \langle s | t \rangle = \pm \frac{1}{2}$,
- $\Lambda_2 = R$, and $\text{Sh}(\Lambda)_2 = (S \setminus R) \cup (T \setminus R)$.

Moreover, $T = R$ or $S = R$ if and only if R is strongly eutactic.

Sketch of the proof. Let Λ be an odd selfdual lattice of rank 24 and of minimum 2. Let Λ_0 be the even sublattice of index 2, and let Λ_0^\sharp be its dual. Then $\Lambda_0^\sharp/\Lambda_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and we have the following diagramm (integers indicate indices of sublattices):



where Λ' and Λ'' are even selfdual lattices. We have $\text{Sh}(\Lambda) = (\Lambda' \setminus \Lambda_0) \cup (\Lambda'' \setminus \Lambda_0)$. The root systems of the proposition are

$$R = \Lambda_2, \quad S = \Lambda'_2, \quad T = \Lambda''_2,$$

and, according to Theorem 30.iii, S and T are strongly eutactic. By Proposition 13, the theta series of Λ is

$$\Theta_\Lambda = \theta_3^n + c_1 \Delta_8 \theta_3^{n-8} + c_2 \Delta_8^2 \theta_3^{n-16},$$

where

$$\begin{aligned} c_2 &= 24(|\Lambda_2|/24 - 2) = 24(h_R - 2) \\ &= |\mathcal{S}h(\Lambda)_2| = 24(h_S + h_T - 2h_R), \end{aligned}$$

hence $h_S + h_T = 3h_R + 2$.

For $x \in \mathbb{R}^{24}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, let $N_\alpha^{x,A} := |\{y \in A \mid \langle x \mid y \rangle = \alpha\}|$. Let $s \in S \setminus R$; it can be shown that (see Lemma 40 below):

$$\begin{aligned} N_1^{s,R} &= N_{-1}^{s,R} = N_1^{s,T} = N_{-1}^{s,T} = 3h_R - h_T = h_S - 2, \\ N_{1/2}^{s,T} &= N_{-1/2}^{s,T} = 12(h_T - h_R), \\ N_0^{s,R} &= N_0^{s,T} = 8h_T + 6h_S - 12. \end{aligned} \quad (*)$$

Let us suppose that R is strongly eutactic and that $S \setminus R \neq \emptyset$. Let $s \in S \setminus R$; since the polynomial function $x \mapsto \langle s \mid x \rangle^2 - 2\langle x \mid x \rangle$ is harmonic, we have the equality

$$\sum_{r \in R} \langle s \mid r \rangle^2 = 4h_R,$$

hence

$$2h_S - 4 = N_1^{s,R} + N_{-1}^{s,R} = \sum_{r \in R} \langle s \mid r \rangle^2 = 4h_R.$$

Using the equality $h_S + h_T = 3h_R + 2$, we deduce that $h_T = h_R$, therefore $T = R$ and $h_S = 2h_R + 2$. Conversely, if $T = R$, then R is strongly eutactic. \square

To complete the proof, we establish formulae (*) above:

40. LEMMA. *In the proof of the preceding lemma, formulae (*) hold.*

Sketch of the proof. Let $s \in S \setminus R$. The scalar product on Λ_0^\sharp reduces to a bilinear form on $\Lambda_0^\sharp/\Lambda_0$ with values in $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$, which is easy to make explicit. In particular, for $t \in T$, we have:

$$\langle s \mid t \rangle = \begin{cases} \pm 1/2 & \text{if } t \in T \setminus R, \\ 0, \pm 1 & \text{if } t \in R. \end{cases}$$

(The values $\pm 3/2$ are excluded in the first case by computing the norm of $s \mp t$.) From this, we deduce $N_{\pm 1/2}^{s,T} = 12(h_T - h_R)$, and $N_\epsilon^{s,R} = N_\epsilon^{s,T}$ for $\epsilon = 0, \pm 1$. Finally, $N_\epsilon^{s,T}$ is deduced from the strongly eutaxy of T . For example, we have

$$-\frac{1}{4}N_{-1/2}^{s,T} + \frac{3}{4}N_{1/2}^{s,T} + 2N_1^{s,T} = \sum_{t \in T} (\langle s \mid t \rangle + 1) \langle s \mid t \rangle = 2h_T.$$

The last equality follows from the fact that T is a spherical 2-design (use Theorem 3.2 and Formula 3.6 in [VenMar01], or Proposition 1.13 in [HarPac05]). Therefore $N_1^{s,T} = 3h_R - h_T$. \square

There are 156 odd selfdual lattices of rank 24, classified in [Borc84] and listed in [BorCS]. We give here the list of those with strongly eutactic root system, because it is the occasion to point out a remarkable bijection between two sets (compare with Theorems 30.iii and 34).

41. THEOREM. *There is a bijection between the set of odd selfdual lattices Λ of rank 24, of minimum 2, and of strongly eutactic root system, and the set of the nine pairs of embedded strongly eutactic root systems $R \subseteq S$ in \mathbb{R}^{24} satisfying $h_S = 2h_R + 2$. The bijection is given by $R = \Lambda_2$ and $S = Sh(\Lambda)_2$. The list of pairs $R \subseteq S$ is given below. (The numbers in brackets refer to Table 17.1 of [BorCS]⁹ and Table III of [Bacr97]. These lattices correspond to bold edges in the neighbourhood graph of Figure 17.1 in [BorCS].)*

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{24} &\subseteq 24 \mathbf{A}_1 [1], & 24 \mathbf{A}_1 &\subseteq 6 \mathbf{D}_4 [6], & 8 \mathbf{A}_3 &\subseteq 4 \mathbf{D}_6 [32], \\ 6 \mathbf{D}_4 &\subseteq 3 \mathbf{D}_8 [74], & 2 \mathbf{A}_7 + 2 \mathbf{D}_5 &\subseteq \mathbf{D}_{10} + 2 \mathbf{E}_7 [105], & 4 \mathbf{D}_6 &\subseteq 2 \mathbf{D}_{12} [130], \\ 3 \mathbf{D}_8 &\subseteq 3 \mathbf{E}_8 [145], & 3 \mathbf{D}_8 &\subseteq \mathbf{D}_{16} + \mathbf{E}_8 [146], & 2 \mathbf{D}_{12} &\subseteq \mathbf{D}_{24} [154]. \end{aligned}$$

We are now ready to give the theta series for selfdual lattices of rank 24:

42. LEMMA. *Let Λ be an odd selfdual lattice of rank 24, and of minimum at least 2.*

(i) *If Λ_2 is not strongly eutactic, and if $h := |\Lambda_2|/24$, then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^{24} - 48 \theta_3^{16} \Delta_8 + 24(h+2) \theta_3^8 \Delta_8^2 & \text{if } P = 1, \\ c_1(P) \Phi \theta_3^8 \Delta_8^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24}), \\ c_2(P) \theta_3^{16} \Delta_8^2 + c_3(P) \theta_3^8 \Delta_8^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24}), \end{cases}$$

where c_1 is a nonzero linear form on $\text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24})$, and c_2 and c_3 are linearly independent linear forms on $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24})$.

(ii) *If Λ_2 is nonempty and strongly eutactic of Coxeter number h , then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^{24} - 48 \theta_3^{16} \Delta_8 + 24(h+2) \theta_3^8 \Delta_8^2 & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24}), \\ c_2(P) \theta_3^{16} \Delta_8^2 + c_3(P) \theta_3^8 \Delta_8^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24}), \\ c_4(P) \Phi \theta_3^{16} \Delta_8^2 + c_5(P) \Phi \theta_3^8 \Delta_8^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^{24}), \end{cases}$$

where c_2 and c_3 are linearly independent linear forms on $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24})$, and c_4 and c_5 are linearly independent linear forms on $\text{Harm}_6(\mathbb{R}^{24})$.

(iii) *If Λ_2 is empty, then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \theta_3^{24} - 48 \theta_3^{16} \Delta_8 + 48 \theta_3^8 \Delta_8^2 & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24}), \\ c_3(P) \theta_3^8 \Delta_8^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24}), \\ c_5(P) \Phi \theta_3^8 \Delta_8^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^{24}), \end{cases}$$

where c_3 and c_5 are nonzero linear forms on $\text{Harm}_4(\mathbb{R}^{24})$ and $\text{Harm}_6(\mathbb{R}^{24})$ respectively.

Idea of the proof. We use Proposition 13 for computing the theta series. The main difficulty is to show that, for example, in case (ii), the coefficients c_2 and c_3 are linearly independent. (Similar cases are treated in the same way.) The main idea is to look at the theta series of the shadow (Proposition 10):

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, P} &= c_2(P) \theta_3^{16} \Delta_8^2 + c_3(P) \theta_3^8 \Delta_8^3 = c_2(P) q^2 + O(q^3), \\ \Theta_{Sh(\Lambda), P} &= c_2(P) \theta_2^{16} Sh \Delta_8^2 + c_3(P) \theta_2^8 Sh \Delta_8^3 = -2^4 c_3(P) q^2 + O(q^4). \end{aligned}$$

⁹There are some errors in that table in the two first editions, which have been corrected in the third edition.

So, we have

$$c_2(P) = \sum_{x \in \Lambda_2} P(x) \quad \text{and} \quad c_3(P) = -2^{-4} \sum_{x \in \mathcal{Sh}(\Lambda)_2} P(x).$$

The shape of Λ_2 and $\mathcal{Sh}(\Lambda)_2$ is given by Proposition 39. Finally, one can find two harmonic homogeneous polynomials of degree 4 which give linearly independent values of $c_2(P)$ and $c_3(P)$. \square

We can now conclude:

43. THEOREM. *Let Λ be an odd selfdual lattice of rank 24 and of minimum 2.*

- (i) *If Λ_2 is strongly eutactic, then all nonempty shells of Λ and $\mathcal{Sh}(\Lambda)$ are 3-designs.*
- (ii) *If Λ_2 is not strongly eutactic, then the shells Λ_m and $\mathcal{Sh}(\Lambda)_m$ are 3-designs for $m = 4^a$, $a \geq 1$.*

Remark. We have checked numerically that the shells of norm at most 1200 of these lattices and of their shadows are not spherical designs of higher strength.

A.14 Other selfdual lattices up to rank 24

According to their classification ([ConSlo99, Chap. 16 and 17] and [Bacr97]), the remaining selfdual lattices of rank at most 24 enter in one of the three cases of the following lemma:

44. LEMMA. *Let $\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus L \subseteq \mathbb{R}^n$ be a selfdual lattice with $\sigma(\Lambda) = n - 16$, where $L \subseteq \mathbb{R}^N$ is of minimum 2.*

- (i) *If $p = 0$ and if L_2 is not strongly eutactic, then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = c(P) \Phi \theta_3^{n-16} \Delta_8^2 \quad \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n),$$

where c is a nonzero linear form on $\text{Harm}_2(\mathbb{R}^n)$.

- (ii) *If $p \geq 1$ and if L_2 is strongly eutactic of Coxeter number h , then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = c(P) (\Phi \theta_3^{n-8} \Delta_8 + (46 - 2N - h) \Phi \theta_3^{n-16} \Delta_8^2) \quad \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n),$$

where c is a nonzero linear form on $\text{Harm}_2(\mathbb{R}^n)$.

- (iii) *If $p \geq 1$ and if L_2 is not strongly eutactic, then*

$$\Theta_{\Lambda, P} = c_1(P) \Phi \theta_3^{n-8} \Delta_8 + c_2(P) \Phi \theta_3^{n-16} \Delta_8^2 \quad \text{if } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n),$$

where c_1 and c_2 are linearly independent linear forms on $\text{Harm}_2(\mathbb{R}^n)$.

We have checked numerically that the shells of norm at most 1200 of these lattices and of their shadows are not spherical 3-designs.

A.15 Appendix: The cubic lattices of rank 4 and 7

The aim of this section is to prove the following result, without the use of modular forms:

45. THEOREM.

- (i) *Let $\mathbf{Z}^4 = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$ be the cubic lattice of rank 4, and let m be an even positive integer. Then the shell $(\mathbf{Z}^4)_m$ is a 5-design.*

(ii) Let $\mathbf{Z}^7 = \{x = (x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7 \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$ be the cubic lattice of rank 7, and let m be a positive integer of the form $m = 4^a(8b + 3)$, $a, b \geq 0$. Then the shell $(\mathbf{Z}^7)_m$ is a 5-design.

We begin with the proof of Claim (i). Let $C \subseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ be the even weight code of length 4, which is defined by

$$c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in C \iff c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

For $y = (y_1, \dots, y_4) \in \mathbf{Z}^4$ we write $\bar{y} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ its class modulo $2\mathbf{Z}^4$. Let Λ be the sublattice of \mathbf{Z}^4 consisting of elements $x \in \mathbf{Z}^4$ such that $\bar{x} \in C$. It is a sublattice of index 2, which is equivalent to the root lattice of \mathbf{D}_4 .

All shells of Λ are 5-designs. This follows from the fact that Λ is invariant under the Weyl group $W(\mathbf{F}_4)$, and there is no nonconstant harmonic polynomial of degree at most 5 that is invariant under the action of $W(\mathbf{F}_4)$ ([GoeSei79, Thm. 6.1], [GoeSei81, Thm. 3.12]; see also [HarPac04, Sect. 4]).

Finally, for m an even positive integer, we have $(\mathbf{Z}^4)_m = \Lambda_m$; therefore $(\mathbf{Z}^4)_m$ is a spherical 5-design. This proves Claim (i) of the theorem.

Let us now show Claim (ii). Let $H \subseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ be the Hamming code of length 7. Recall that it is a linear code of minimal Hamming distance 3, containing

- one codeword $\mathbf{0} := (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ of weight 0;
- seven codewords of weight 3;
- seven codewords of weight 4;
- one codeword $\mathbf{1} := (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ of weight 7.

The set S of codewords of weight 3 forms a Steiner system $S(2, 3, 7)$, and the set of codewords of weight 4 is $S + \mathbf{1}$. See for example [Ebel94, Sect. 1.2, p. 7].

Let Λ be the sublattice of \mathbf{Z}^7 consisting of elements $x \in \mathbf{Z}^7$ such that $\bar{x} \in H$. It is a sublattice of index 8, which is equivalent to $\sqrt{2}\mathbf{E}_7^\sharp$, the rescaled weight lattice of \mathbf{E}_7 .

As in the previous case, all shells of Λ are 5-designs, because Λ is invariant under the Weyl group $W(\mathbf{E}_7)$, and there is no harmonic polynomial of degree at most 5 that is invariant under the action of $W(\mathbf{E}_7)$.

But contrarily to the previous case, no shell of \mathbf{Z}^7 is equal to any shell of Λ . Therefore, we need to look at the effect of the action of some finite subgroup of the orthogonal group of rank 7 on the shells of Λ .

We recall first what is a *weighted* spherical design.

46. DEFINITION. A *weighted spherical t -design* or *spherical cubature formula of strength t* is the data consisting of a nonempty finite subset X of \mathbb{S}_m^{n-1} and a positive function $w : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto w_x$, such that $\sum_{x \in X} w_x = 1$ and such that the condition

$$\sum_{x \in X} w_x P(x) = 0, \quad \forall P \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n) \quad (C_j)$$

holds for every integer j with $1 \leq j \leq t$.

(For more on cubature formulae on spheres, see for example [HarPac05].)

Occasionally, we allow the weight function $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ to take the value zero. A spherical design is a weighted spherical design with constant weight function $w_x = 1/|X|$.

47. LEMMA. Let $X \subseteq \mathbb{S}_m^{n-1}$ be a spherical t -design and let G be a finite subgroup of the orthogonal group $\mathcal{O}(n)$. Then GX is a weighted spherical t -design for the weight function

$$w_y = \frac{|\{\sigma \in G \mid \sigma y \in X\}|}{|G| |X|}, \quad y \in GX.$$

Proof. For $P \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq t$, we have

$$\sum_{y \in GX} w_y P(y) = \frac{1}{|G||X|} \sum_{\substack{x \in X \\ \sigma \in G}} P(\sigma x) = \frac{1}{|G||X|} \sum_{\sigma \in G} \left(\sum_{x \in X} (P \circ \sigma)(x) \right).$$

The last term is zero, because $P \circ \sigma \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ and X is a spherical t -design. \square

We apply the last lemma to the subgroup $G = \text{Aut}(\mathbf{Z}^7) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7 \rtimes \mathfrak{S}_7$ of $\mathcal{O}(7)$, which consists of transformations of the form

$$(x_1, \dots, x_7) \mapsto (\epsilon_1 x_{\pi(1)}, \dots, \epsilon_7 x_{\pi(7)})$$

where $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ and π is a permutation of the set $\{1, 2, \dots, 7\}$.

Let $c \in \{0, 1, \dots, 7\}$, and let m be a positive integer such that $m \equiv c \pmod{8}$. For $y = (y_1, \dots, y_7) \in (\mathbf{Z}^7)_m$, let $W(y)$ be the weight of $\bar{y} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$, that is the number of coordinates i such that y_i is odd. (Caution: the word ‘‘weight’’ has two different meanings in this appendix.) The condition $y_1^2 + \dots + y_7^2 \equiv c \pmod{8}$ implies that $W(y)$ takes the values indicated in the following table:

c	$W(y)$	c	$W(y)$
0	0, 4	4	0, 4
1	1, 5	5	1, 5
2	2, 6	6	2, 6
3	3	7	3, 7

Now, the quantity

$$\lambda(y) := \frac{|\{\sigma \in G \mid \sigma y \in \Lambda_m\}|}{|G|}, \quad \text{for } y \in (\mathbb{Z}^n)_m$$

depends only of $W(y)$; it is given by the following table:

$W(y)$	$\lambda(y)$	$W(y)$	$\lambda(y)$
0	1	4	1/5
1	0	5	0
2	0	6	0
3	1/5	7	1

Applying Lemma 47, we find that

- for $m \equiv 0 \pmod{8}$ and $m \equiv 4 \pmod{8}$, the shell $(\mathbf{Z}^7)_m$ is a weighted spherical 5-design for the weight function

$$w_y = \frac{1}{|\Lambda_m|} \text{ if } W(y) = 0, \text{ and } w_y = \frac{1}{5|\Lambda_m|} \text{ if } W(y) = 4;$$

- for $m \equiv 3 \pmod{8}$, the shell $(\mathbf{Z}^7)_m$ is a spherical 5-design;
- for $m \equiv 7 \pmod{8}$, the shell $(\mathbf{Z}^7)_m$ is a weighted spherical 5-design for the weight function

$$w_y = \frac{1}{|\Lambda_m|} \text{ if } W(y) = 7, \text{ and } w_y = \frac{1}{5|\Lambda_m|} \text{ if } W(y) = 3.$$

In order to achieve the proof of Theorem 45, Claim (ii), it remains to show the following statement:

Let m be a positive integer. If $(\mathbf{Z}^7)_m$ is a 5-design, then $(\mathbf{Z}^7)_{4m}$ is also a 5-design.

The proof is the following. We write $(\mathbf{Z}^7)_{4m}$ as

$$(\mathbf{Z}^7)_{4m} = 2(\mathbf{Z}^7)_m \sqcup Q,$$

where $2(\mathbf{Z}^7)_m$ is the shell of norm m rescaled by a factor 2, and Q contains the elements $y \in (\mathbf{Z}^7)_{4m}$ such that $W(y) = 4$. We have shown that $(\mathbf{Z}^7)_{4m}$ is a weighted 5-design for the weight function

$$w_y = \frac{1}{|\Lambda_m|} \text{ if } y \in 2(\mathbf{Z}^7)_m, \text{ and } w_y = \frac{1}{5|\Lambda_m|} \text{ if } y \in Q.$$

But since $(\mathbf{Z}^7)_m$ is a 5-design by hypothesis, then $(\mathbf{Z}^7)_{4m}$ is a weighted 5-design for the weight function

$$\tilde{w}_y = \frac{1}{|(\mathbf{Z}^7)_m|} \text{ if } y \in 2(\mathbf{Z}^7)_m = 0, \text{ and } \tilde{w}_y = 0 \text{ if } y \in Q.$$

It is evident that, if X is a weighted t -design for two weight functions w and \tilde{w} , then it is a weighted t -design for every convex linear combination of w and \tilde{w} . In particular, since, in our case, there is a suitable convex linear combination of w and \tilde{w} which is constant on $(\mathbf{Z}^7)_{4m}$, the shell $(\mathbf{Z}^7)_{4m}$ is indeed a 5-design.

Remark that our proof also shows that the shells of \mathbf{Z}^7 of norm $m \equiv 7 \pmod{8}$ and those of norm $m \equiv 0 \pmod{4}$ are weighted spherical 5-designs, although they are not spherical 5-designs in general.

Acknowledgements. The author thanks Boris B. VENKOV, who was at the origin of this work, and who introduced the author to the use of modular forms in connection with lattices. Pierre DE LA HARPE also contributed to this work.

The author acknowledges support from the *Swiss National Science Foundation*.

B Construction of spherical cubature formulas using lattices

Pierre DE LA HARPE, Claude PACHE, Boris VENKOV*
Algebra i Analiz **18** (2006), to appear

Abstract

We construct cubature formulas on spheres supported by homothetic images of shells in some Euclidian lattices. Our analysis of these cubature formulas uses results from the theory of modular forms. Examples are worked out on \mathbb{S}^{n-1} for $n = 4, 8, 12, 14, 16, 20, 23$, and 24 , and the sizes of the cubature formulas we obtain are compared with the lower bounds given by Linear Programming.

B.1 Introduction

For a dimension $n \geq 2$ and a positive number r , let \mathbb{S}_r^{n-1} denote the sphere of equation $\langle x | x \rangle = r$ in the Euclidean space \mathbb{R}^n given with the canonical scalar product $\langle \cdot | \cdot \rangle$, and let σ denote the rotation-invariant measure on such a sphere, normalised by $\sigma(\mathbb{S}_r^{n-1}) = 1$; we write \mathbb{S}^{n-1} for \mathbb{S}_1^{n-1} . For an integer $t \geq 0$, a *cubature formula of strength t on \mathbb{S}_r^{n-1}* is a pair (X, W) , where X is a finite subset of \mathbb{S}_r^{n-1} and where $W : \mathbb{S}_r^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ is a positive-valued function such that

$$\sum_{x \in X} W(x) f(x) = \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} f(x) d\sigma(x) \quad (\text{CF})$$

for every polynomial function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ of degree at most t . The set X is the *support* of the cubature formula (X, W) , the points in X are its *nodes*, the values $W(x)$ are its *weights*, and the cardinality $|X|$ of X is its *size*. A *spherical t -design* on \mathbb{S}_r^{n-1} is a finite subset X of \mathbb{S}_r^{n-1} which, together with the constant weight (by necessity of value $|X|^{-1}$), is a cubature formula of strength t .

There are existence results according to which, for any dimension n and strength t , there exist cubature formulas, and indeed spherical designs, of strength t on \mathbb{S}^{n-1} . For cubature formulas, there are elementary arguments using general methods of convexity, which give some upper bounds on sizes (see Section B.2); the existence of spherical designs is a particular case of results of [SeyZas84], which do not provide meaningful size bounds. There are no known straightforward constructions, except for $n = 2$, in which case, for any $t \geq 0$, the $(t + 1)$ st roots of unity in \mathbb{C} provide a spherical t -design on the circle; and in larger dimensions for low values of t (antipodal pairs, regular simplices, and regular hyperoctahedra are respectively spherical 1-, 2-, and 3-designs, of the lowest possible sizes).

It is therefore a natural question to ask for more explicit constructions. Some have been given in terms of orbits of finite groups on the sphere (see [HarPac04]), and by other various methods (see [Bajn91] and later papers by Bajnok, [Kupe-a], [Kupe-b], and [HadSlo96] for \mathbb{S}^2).

The object of the present paper is to describe constructions involving *shells (or layers) of integral lattices* in \mathbb{R}^n . They are elaborations of constructions which can also be found in [MartV01], [Pach05], and [HarPac05].

Let E be a discrete subset of \mathbb{R}^n . For any $m > 0$, denote by E_m the *shell* $E \cap \mathbb{S}_m^{n-1}$. If m_1, \dots, m_r are pairwise distinct positive numbers such that each shell E_{m_j} is non-empty, the union of the sets $\frac{1}{\sqrt{m_j}} E_{m_j}$ is a finite subset (possibly with multiplicities) of the unit sphere in \mathbb{R}^n . Spherical designs and cubature formulas which appear below have supports of this kind, where E is either an integral lattice in \mathbb{R}^n or a union of lattices; observe that they are all *antipodal*, namely that $X = -X$ and $W(x) = W(-x)$ for all $x \in X$.

*The authors acknowledge support from the *Swiss National Science Foundation*.

Results on \mathbb{S}^3 Let us describe some examples provided by this method when $n = 4$, and compare them to known lower bounds for sizes and to other known examples. For $n \geq 4$, the *root lattice of type \mathbf{D}_n* is the integral lattice

$$D_n = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + \cdots + x_n \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

(We denote *root systems* as \mathbf{D}_n by bold letters and *lattices* as D_n by thin letters.) It is important for our computations that D_4 is a 2-modular lattice (the definition is recalled in Section B.4 below).

For $n \geq 5$, $n \neq 7$, it is known that each shell $(D_n)_{2m}$ is a spherical 3-design which is in general not of strength 4; for $n = 4$, each shell $(D_4)_{2m}$ is a spherical 5-design which is in general not of strength 6 (it has been checked in [Pach05]—see Section A.10, Proposition 29—that it is never of strength 6 for $2m \leq 1200$). The sizes of the shells of the root lattice of type \mathbf{D}_4 are given by the coefficients of the theta series

$$\begin{aligned} \Theta_{D_4} &= \sum_{m \geq 0} |(D_4)_{2m}| q^{2m} = \sum_{m \geq 0} r_4(2m) q^{2m} \\ &= 1 + 24q^2 + 24q^4 + 96q^6 + 24q^8 + 144q^{10} + 96q^{12} + 192q^{14} + \cdots \end{aligned}$$

where $r_4(2m)$ denotes the number of ways of writing $2m$ as a sum of four squares.

The dual $D_4^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y \mid D_4 \rangle \subset \mathbb{Z}\}$ is similar to D_4 and the renormalized dual $D'_4 = \sqrt{2}D_4^*$ is isometric to D_4 ; moreover the intersection $D_4 \cap D'_4$ is reduced to $\{0\}$, since the non-zero coordinates of the vertices in D'_4 are never in \mathbb{Z} . For our analysis, we use some invariant theory of the finite group $\text{Aut}(D_4 \cup D'_4)$.

THEOREM D_4 . *Set $E = D_4 \cup D'_4$*

- (i) *For any even integer $2m \geq 2$, the shell E_{2m} is a spherical 7-design; in particular, E_2 is a spherical 7-design of size 48 in \mathbb{S}_2^3 .*
- (ii) *The two shells E_2, E_6 provide the support $X = \frac{1}{\sqrt{2}}E_2 \cup \frac{1}{\sqrt{6}}E_6$ of a cubature formula of strength 11 and size 240.*
- (iii) *Similarly, $\frac{1}{\sqrt{2}}E_2 \cup \frac{1}{\sqrt{6}}E_6 \cup \frac{1}{\sqrt{10}}E_{10}$ is the support of a cubature formula of strength 15 and size 528.*

Claim (i) for E_2 appears already in Section 6 of [GoeSei81], where the authors observe that E_2 is an orbit of the Weyl group of type \mathbf{F}_4 . Claim (i) of Theorem E_8 below and the analogous result involving the two shortest shells of a Leech lattice appear also in [GoeSei81].

For comparison, here are some known results concerning the 3-sphere.

Dickson reports on a formula due to Liouville (1859) which essentially shows that the system of roots $(D_4)_2$ of type \mathbf{D}_4 is a spherical 5-design, a formula due to Kempner (1912) which essentially show that $(D_4 \cup D'_4)_2$ is a spherical design of strength 7, and a formula due to Schur (1909) related to a cubature formula of strength 11 and size 144. See [Dick19, pp. 717–724].

There is a formula of strength 7 and size 46 described in [HadSlo94].

There is an exceptional regular polytope in dimension four known as the 600-cell. It has 120 vertices which constitute a spherical 11-design; it is an orbit of a Coxeter group of type \mathbf{H}_4 . Any orbit of this group is a spherical design of strength 11, but there is a special orbit of size 1440 which is of strength 19; see [GoeSei81, Section 5]. Another cubature formula of the same strength, 19, and of size 720 appears in [Sali75]: its support is the union of the 120 vertices and of the 600 centers of faces of the 600-cell.

The best lower bounds known to us for the size of cubature formulas in \mathbb{S}^3 are listed in Tables 6 and 7 of Section B.7.

Results on \mathbb{S}^7 Let Γ_8 be a Korkine-Zolotareff lattice, namely an even unimodular lattice of dimension 8 (uniquely defined up to isometry by these properties). Such a lattice is generated by a root system of type \mathbf{E}_8 . The sizes of its shells are given by the coefficients of the theta series

$$\begin{aligned}\Theta_{\Gamma_8} &= \sum_{m \geq 0} |(\Gamma_8)_{2m}| q^{2m} = 240 \sum_{m \geq 0} \sigma_3(m) q^{2m} \\ &= 1 + 240 q^2 + 2160 q^4 + 6720 q^6 + 17520 q^8 + \dots\end{aligned}$$

where $\sigma_3(m) = \sum_{d|m} d^3$.

It is known that each shell $(\Gamma_8)_{2m}$ is a spherical 7-design which is in general not of strength 8. Indeed, the shell $(\Gamma_8)_{2m}$ would be a design of strength 8 if and only if the Ramanujan function τ would vanish at m ; it is a conjecture of Lehmer [Lehm47] that $\tau(m) \neq 0$ for all $m \geq 1$, and this has been checked for $m \leq 10^{15}$ [Serr85]; more on this in [Pach05] and in Item 1.16 of [HarPac05].

THEOREM E_8 . Set $E = \Gamma_8$.

- (i) The two shells E_2, E_4 provide the support $X = \frac{1}{\sqrt{2}}E_2 \cup \frac{1}{2}E_4$ of a cubature formula of strength 11 and size 2400.
- (ii) Similarly, $\frac{1}{\sqrt{2}}E_2 \cup \frac{1}{\sqrt{6}}E_6 \cup \frac{1}{2\sqrt{2}}E_8$ is the support of a cubature formula of strength 13 and size 24240.
- (iii) Similarly, $\frac{1}{\sqrt{2}}E_2 \cup \frac{1}{2}E_4 \cup \frac{1}{\sqrt{6}}E_6 \cup \frac{1}{2\sqrt{2}}E_8$ is the support of a cubature formula of strength 15 and size 26400.

The largest known lower bounds for the sizes of cubature formulas on \mathbb{S}^7 are given in Table 8 of Section B.7.

Dimensions 12, 14, 16, 20, 23, and 24 There are similar constructions on \mathbb{S}^{23} in terms of a Leech lattice, an even unimodular lattice Λ of dimension 24 with empty shell Λ_2 (uniquely defined up to isometry by these properties). We also describe constructions with shells of

- the 3-modular Coxeter-Todd lattice K_{12} ,
- the 3-modular Quebbemann lattice Q_{14} ,
- the 2-modular Barnes-Wall lattice BW_{16} ,
- the 2-modular Nebe lattices N_{20} (three of them),
- the 3-modular Nebe lattice N_{24} , and
- the shorter Leech lattice O_{23} (which is up to isometry the unique unimodular integral lattice Λ in \mathbb{R}^{23} with $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \emptyset$).

Constructions with one shell of these lattices are already described in [BacVen01]. Our results appear in Tables 9 to 14 of Section B.7.

B.2 Bounds on the size of cubature formulas

For fixed values of n and t , we are interested in constructing cubature formulas on \mathbb{S}_r^{n-1} of strength t of small size; it is therefore useful to estimate the minimal size that such a cubature formula can have. We recall in this paragraph some general results on this subject.

Let $b(n, t)$ be the minimal size of a spherical cubature formula on \mathbb{S}_r^{n-1} of strength t .

Linear Programming bound [DeGoSe77, Theorem 5.10], see also [Yudi97]
Let $Q^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, be the orthogonal polynomials for the scalar product

$$\langle f | g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) g(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt$$

normalized to $\langle Q^{(k)} | Q^{(k)} \rangle = Q^{(k)}(1)$. For a continuous function $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, we define the numbers $F_k \in \mathbb{R}$ by

$$F_k = \frac{\langle F | Q^{(k)} \rangle}{Q^{(k)}(1)},$$

so that $F = \sum_{k \geq 0} F_k Q^{(k)}$. Set

$$M(n, t) := \left\{ F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuous} \left| \begin{array}{l} F(u) \geq 0 \text{ for } u \in [-1, 1], \\ F \neq 0, \text{ and } F_k \leq 0 \text{ for } k > t \end{array} \right. \right\};$$

then $b(n, t) \geq F(1)/F_0$ for every $F \in M(n, t)$. In other words

$$b_{\text{LP}}(n, t) := \sup_{F \in M(n, t)} \frac{F(1)}{F_0}$$

is a lower bound for $b(n, t)$. Moreover, it is a consequence of [NikNik02, Theorems I and 2.7] that there exists a *polynomial* function $F \in M(n, t)$ for which $b_{\text{LP}}(n, t) = F(1)/F_0$.

When t is odd, we show:

1. PROPOSITION. *Let $t = 2s + 1$, and let*

$$\widehat{M}(n, t) := \{F \in M(n, t) \mid F(-u) = F(u)\}.$$

Then

$$b_{\text{LP}}(n, t) = \sup_{F \in \widehat{M}(n, t)} \frac{2F(1)}{F_0}.$$

Proof. Let $F \in M(n, t)$; set $\widehat{F}(u) = (F(u) + F(-u))/2$; we have $\widehat{F} \in \widehat{M}(n, t)$. Set $F^*(u) = (1+u)\widehat{F}(u)$. One checks that

$$F^* \in M(n, t).$$

Yet $2\widehat{F}(1) = F(1) + F(-1) \geq F(1)$ and $F_0 = \widehat{F}_0 = F_0^*$, therefore

$$\frac{F(1)}{F_0} \leq \frac{2\widehat{F}(1)}{\widehat{F}_0} = \frac{F^*(1)}{F_0^*}.$$

The result follows. □

In general, the exact value of $b_{\text{LP}}(n, t)$ is not known. The following bounds are obtained by choosing a particular F in $M(n, t)$:

Delsarte (or Fisher-type) bound [DeGoSe77, Theorems 5.11 and 5.12] Choose $F(u) := (\sum_{k=0}^s Q^{(k)}(u))^2$ if $t = 2s$, and $F(u) := (1+u)(\sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} Q^{(s-2j)}(u))^2$ if $t = 2s+1$. We obtain the bounds

$$b_{\text{D}}(n, 2s) = \binom{n+s-1}{n-1} + \binom{n+s-2}{n-1},$$

$$b_{\text{D}}(n, 2s+1) = 2 \binom{n+s-1}{n-1}.$$

Moreover, it is known that, if $n \geq 3$, the equality $b(n, t) = b_{\text{D}}(n, t)$ is possible only for some values of (n, t) : see [BanDam79], [BanDam80], and [BaMuVe02]. There also exists a criterion to decide when $b_{\text{D}}(n, t) = b_{\text{LP}}(n, t)$: see [NikNik02, Theorem I].

Yudin bound [Yudi97] Another choice of F gives the bound

$$b_Y(n, t) = \frac{\int_{-1}^1 (1 - u^2)^{(n-3)/2} du}{\int_{\gamma}^1 (1 - u^2)^{(n-3)/2} du},$$

where γ is the largest root of the polynomial $(Q^{(t+1)})'$.

Special cases For some values of (n, t) , it is possible to compute the exact value of $b(n, t)$. For example, it is shown in [Andr00] that $b(4, 11) = b_{\text{LP}}(4, 11) = 120$.

Numerical estimate of the Linear Programming bound For fixed values of (n, t) , $t = 2s + 1$, the following procedure gives an estimate of the Linear Programming bound $b_{\text{LP}}(n, t)$. (There is a similar procedure when t is even.)

- Choose a degree $d \geq s$, and a finite subset $A \subseteq [0, 1]$ of well-distributed points, for example $A = \{i/N \mid i = 0, 1, \dots, N\}$ with N large.
- By linear programming, find, among all polynomial F satisfying

$$F = 1 + \sum_{i=1}^d F_i Q^{(2i)}, \quad F(u) \geq 0 \text{ for } u \in A, \quad F_k \leq 0 \text{ for } k > t,$$

the polynomial minimizing $F(1)$; denote it by G .

- Set $\epsilon := -\inf_{x \in [0, 1]} G(x) \geq 0$. The polynomial $\tilde{G} := G + \epsilon$ is in the set $\widehat{M}(n, t)$, and we have the estimate

$$\frac{2\tilde{G}(1)}{\tilde{G}_0} = \frac{2(G(1) + \epsilon)}{1 + \epsilon} \leq b_{\text{LP}}(n, t).$$

Note that we have also $b_{\text{LP}}^{(d)}(n, t) \leq 2G(1)$, where

$$b_{\text{LP}}^{(d)}(n, t) := \sup_{\substack{F \in \mathcal{M}(n, t) \\ \deg f \leq d}} \frac{F(1)}{F_0}.$$

Yet, if d is sufficiently large and A sufficiently dense, $2\tilde{G}(1)/\tilde{G}_0$ is a good approximation of $b_{\text{LP}}(n, t)$. In practice, we first apply the procedure with a relatively large d and a relatively small set A ; we observe that $G_k = 0$ for $k > d_0$. Then we apply the procedure with $d = d_0$ and with a larger set A .

The procedure just described imitates the one used in [ConSlo99, Chap. 13] to compute bounds for kissing numbers.

We end this section with another kind of bound. Set

$$B(n, t) := \binom{n+t-1}{n-1} + \binom{n+t-2}{n-1}.$$

Note that $B(n, t) = b_{\text{D}}(n, 2t)$. This number is the dimension of the space of the restrictions to the sphere of the polynomial functions of degree at most t .

2. PROPOSITION. *For every n and t , there exist cubature formulas with at most $\max\{1, B(n, t) - 1\}$ nodes.*

3. PROPOSITION. *Let (X, W) be a cubature formula on \mathbb{S}_r^{n-1} of strength t . Then there exist a subset $X' \subseteq X$ and a weight function $W' : X' \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ such that $|X'| \leq B(n, t)$ and (X', W') is a cubature formula of degree t .*

See [HarPac05, Proposition 2.6]. The second proposition is a consequence of the proof of the first one and provides an algorithm for computing (X', W') from (X, W) .

Note however that these propositions do not hold for spherical designs (case of constant weights).

B.3 Harmonic polynomials

It is sufficient to check condition (CF) in the definition of cubature formulas for harmonic polynomials only. Recall that a smooth function f on \mathbb{R}^n is *harmonic* if $\Delta f = 0$, where $\Delta = \sum_{i=1}^n (\partial/\partial x_i)^2$ is the usual Laplacian. We denote by $\text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$ the space of harmonic polynomial functions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ that are homogenous of degree k . It is a classical fact that the space of restrictions to \mathbb{S}^{n-1} of homogenous polynomials of degree at most t coincides with the space of restrictions of the direct sum $\bigoplus_{k=0}^t \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$. This implies the following well-known criterion; see for example [VenMar01, Theorem 3.2] (details are written there for spherical designs, but the proof carries over to cubature formulas).

4. PROPOSITION. *Let X be a finite subset of some sphere \mathbb{S}_m^{n-1} in \mathbb{R}^n , let $W : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ be a weight function, and let $t \geq 0$ be an integer. Then (X, W) is a cubature formula of strength t on \mathbb{S}_m^{n-1} if and only if $\sum_{x \in X} W(x) = 1$ and*

$$\sum_{x \in X} W(x) P(x) = 0 \quad \text{for all } P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n), 1 \leq k \leq t.$$

Let $\mathcal{O}(n)$ be the orthogonal group of the Euclidean space \mathbb{R}^n ; this group acts by isometries on the sphere \mathbb{S}_r^{n-1} . Moreover, $\mathcal{O}(n)$ acts naturally on $\text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$ by $g \cdot f = f \circ g^{-1}$.

Whenever a group G acts on a space V , we denote by V^G the subspace of all elements of V fixed by G .

Proposition 4 above can be refined in the case the cubature formula is invariant by a finite subgroup of G . Namely, we have the following result, known as *Sobolev's theorem* ([Sobo62], see also [SobVas96, Chap. 2, § 2, Theorem 2.3]):

5. PROPOSITION. *Let X be a finite subset of \mathbb{S}_r^{n-1} and $W : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ be a weight function. Let G be a finite subgroup of $\mathcal{O}(n)$ leaving (X, W) invariant, that is*

$$gx \in X \text{ and } W(gx) = W(x) \quad \forall x \in X, \forall g \in G.$$

Then (X, W) is a cubature formula of strength t if and only if $\sum_{x \in X} W(x) = 1$ and

$$\sum_{x \in X} W(x) P(x) = 0 \quad \forall P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G, 1 \leq k \leq t.$$

Proof. For $P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$, let $P^G := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g \cdot f$. On the one hand, the G -invariance of (X, W) implies

$$\sum_{x \in X} W(x) P^G(x) = \sum_{x \in X} W(x) P(x),$$

and, on the other hand, the G -invariance of the Lebesgue measure implies

$$\int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} P^G(x) d\sigma(x) = \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} P(x) d\sigma(x).$$

The result follows from Proposition 4. □

B.4 Modular forms

This section is a reminder from [BacVen01]. Consider a lattice Λ in \mathbb{R}^n and a homogeneous harmonic polynomial $P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$ of degree k . The *theta series* of Λ with harmonic coefficient P is the formal power series $\Theta_{\Lambda, P}$ defined by

$$\Theta_{\Lambda, P} := \sum_{x \in \Lambda} P(x) q^{\langle x | x \rangle} = P(0) + \sum_{m > 0} \left(\sum_{x \in \Lambda_m} P(x) \right) q^m.$$

In case $P = 1$, we write simply Θ_Λ . Set

$$q := e^{i\pi z}, \quad z \in \mathbb{H},$$

with $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ the Poincaré half-plane; the theta series $\Theta_{\Lambda, P}$ converges uniformly on every compact subset of \mathbb{H} and defines consequently a holomorphic function on \mathbb{H} . When the lattice Λ satisfies appropriate conditions, this function is a *modular form* of *weight* ω , and we can use results on modular forms for the computation of the theta series.

Let us first describe the class of lattices which plays the most important role below. A lattice Λ in \mathbb{R}^n is *even* if $\langle x | x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ for all $x \in \Lambda$; such a lattice is contained in its dual $\Lambda^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \Lambda | y \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$, and there are integers $\ell \geq 1$ such that $\sqrt{\ell} \Lambda^*$ is again even (ℓ is not unique since, if $\sqrt{\ell} \Lambda^*$ is even, so is $\sqrt{k^2 \ell} \Lambda^*$ for $k \geq 1$). For given integers n and ℓ , denote by

$$\mathcal{L}at_n(\ell)$$

the class of even lattices Λ such that $\Lambda' := \sqrt{\ell} \Lambda^*$ is even and $\det(\Lambda') = \det(\Lambda)$; the latter condition implies that $\det(\Lambda) = \ell^{n/2}$. Clearly, if $\Lambda \in \mathcal{L}at_n(\ell)$, then $\Lambda' \in \mathcal{L}at_n(\ell)$. A lattice $\Lambda \in \mathcal{L}at_n(\ell)$ is ℓ -*modular* if Λ' is equivalent to Λ .

Now, we describe the modular forms associated to these lattices. For ω a nonnegative integer and $\epsilon \in \{+, -\}$, we define

$$\widehat{\mathcal{M}}_\omega^\epsilon(\ell)$$

as the space of holomorphic function $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ that verify

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f\left(-\frac{1}{\ell z}\right) &= \epsilon \left(\frac{i}{\sqrt{\ell} z}\right)^\omega f(z) \end{aligned} \quad (*)$$

for all $z \in \mathbb{H}$, and that are holomorphic at infinity, i.e., bounded on $\{z \in \mathbb{H} \mid \Im z > y_0\}$ for $y_0 > 0$. This means that f can be written as

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} a_m q^{2m}, \quad q = e^{i\pi z}.$$

Let $f(\infty) := \lim_{\Im z \rightarrow \infty} f(z) = a_0$. We define

$${}^0\widehat{\mathcal{M}}_\omega^\epsilon(\ell) = \{f \in \widehat{\mathcal{M}}_\omega^\epsilon(\ell) \mid f(\infty) = 0\}.$$

We give here the classical terminology: A *modular form* of weight $\omega \geq 0$ for a discrete group $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{R})$ and a character $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ is a holomorphic function $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ that is holomorphic at infinity and that satisfies

$$\frac{\chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)}{(cz+d)^\omega} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

A *parabolic form* is a modular form f that is zero at infinity, namely such that $f(\infty) = 0$.

For ℓ a positive integer, let $\Gamma_*(\ell)$ be the subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ generated by

$$\Gamma_0(\ell) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{\ell} \right\} \quad \text{and} \quad t_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\ell} \\ -\sqrt{\ell} & 0 \end{pmatrix}.$$

For any integer s , let χ_s be the multiplicative character of $\Gamma_*(\ell)$ defined by

$$\chi_s \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{(-\ell)^s}{d} \right) \quad \text{for} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\ell),$$

$$\chi_s(t_\ell) = i^s,$$

where $(-)$ denotes the Kronecker symbol. Note that χ_s depends only of the class of s modulo 4. Denote by $\mathcal{M}_\omega^+(\ell)$ the space of modular forms of weight ω for the group $\Gamma_*(\ell)$ and the character χ_ω , and by $\mathcal{M}_\omega^-(\ell)$ the space of modular forms of weight ω for the same group and the character $\chi_{\omega+2}$; denote by ${}^0\mathcal{M}_\omega^\pm(\ell)$ the space of corresponding parabolic forms.

Note that Equations (*) say that $\widehat{\mathcal{M}}_\omega^+(\ell)$, respectively $\widehat{\mathcal{M}}_\omega^-(\ell)$, is the space of modular forms of weight ω for the subgroup generated by

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad S_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{\ell} \\ -\sqrt{\ell} & 0 \end{pmatrix},$$

and for the character χ_ω , respectively $\chi_{\omega+2}$.

6. LEMMA. *For $\ell \in \{1, 2, 3\}$, the group $\Gamma_*(\ell)$ is generated by T and S_ℓ . In particular, for these values of ℓ , we have*

$$\widehat{\mathcal{M}}_\omega^\epsilon(\ell) = \mathcal{M}_\omega^\epsilon(\ell) \quad \text{and} \quad {}^0\widehat{\mathcal{M}}_\omega^\epsilon(\ell) = {}^0\mathcal{M}_\omega^\epsilon(\ell).$$

Proof. Let $\ell \in \{1, 2, 3\}$ and $\gamma \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_*(\ell)$. We show, by induction on $c^2 \in \mathbb{N}$, that $\gamma \in \langle T, S_\ell \rangle$, where $\langle T, S_\ell \rangle$ denotes the group generated by T and S_ℓ . Observe that $S_\ell^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

If $c = 0$, then $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^m$ for an integer m ; thus $\gamma \in \langle T, S_\ell \rangle$.

If $c \neq 0$, let $k \in \mathbb{Z}$ such that $|d + kc| \leq |c/2|$. We have

$$\gamma T^k S_\ell = \begin{pmatrix} -(b + ka)\sqrt{\ell} & a/\sqrt{\ell} \\ -(d + kc)\sqrt{\ell} & c/\sqrt{\ell} \end{pmatrix},$$

and $(-(d + kc)\sqrt{\ell})^2 \leq c^2(\ell/4) < c^2$. By induction, $\gamma T^k S_\ell \in \langle T, S_\ell \rangle$, therefore $\gamma \in \langle T, S_\ell \rangle$. \square

7. PROPOSITION. *Let $\Lambda \in \mathcal{L}at_n(\ell)$, where ℓ is a positive integer. Then*

$$\Theta_\Lambda + \Theta_{\Lambda'} \in \mathcal{M}_{n/2}^+(\ell),$$

$$\Theta_\Lambda - \Theta_{\Lambda'} \in {}^0\mathcal{M}_{n/2}^-(\ell).$$

Let moreover $P \in \mathrm{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^n)$, $h \geq 1$. Then, if $2h \equiv 0 \pmod{4}$,

$$\Theta_{\Lambda, P} + \Theta_{\Lambda', P} \in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^+(\ell),$$

$$\Theta_{\Lambda, P} - \Theta_{\Lambda', P} \in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^-(\ell),$$

and, if $2h \equiv 2 \pmod{4}$,

$$\Theta_{\Lambda, P} + \Theta_{\Lambda', P} \in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^-(\ell),$$

$$\Theta_{\Lambda, P} - \Theta_{\Lambda', P} \in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^+(\ell).$$

Partial proof. We give the proof only for $\ell \in \{1, 2, 3\}$. The general case is more complicated: see [Ebel94, §3.1] together with [VenMar01, Chapter 2].¹⁰

It is straightforward that the theta series involved are holomorphic in \mathbb{H} and holomorphic at infinity. Now, by Lemma 6, it is sufficient to check that the theta series satisfy Equations (*).

As Λ and Λ' are even, we have clearly $\Theta_{L,P}(z+1) = \Theta_{L,P}(z)$ for $L = \Lambda$ or Λ' . Now, as a direct consequence of the Poisson Summation Formula—see for example [Ebel94, Prop. 3.1, p. 87]—we have, for any lattice L of rank n and any $P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^n)$,

$$\Theta_{L^*,P}(z) = (\det L)^{1/2} (-1)^h (i/z)^{n/2+2h} \Theta_{L,P}(-1/z).$$

From this formula, we deduce, for $L = \Lambda$ or Λ' ,

$$\Theta_{L',P}(z) = (-1)^h (i/\sqrt{\ell}z)^{n/2+2h} \Theta_{L,P}(-1/\ell z).$$

The result follows. □

Let

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+(\ell) &:= \bigoplus_{\omega \geq 0} \mathcal{M}_\omega^+(\ell), \\ {}^0\mathcal{M}^+(\ell) &:= \bigoplus_{\omega > 0} {}^0\mathcal{M}_\omega^+(\ell), \quad {}^0\mathcal{M}^-(\ell) := \bigoplus_{\omega > 0} {}^0\mathcal{M}_\omega^-(\ell). \end{aligned}$$

These are $\mathcal{M}^+(\ell)$ -modules graded by the weight. For some values of ℓ , the structure of these algebras is known:

Remark. In general, the numerical subscript of modular forms given below indicates the *double* of its weight; for example $\Delta_{24} \in {}^0\mathcal{M}_{12}(1)$ is of weight 12, and $\Theta_{\mathbf{E}_8} \in \mathcal{M}_4(1)$ is of weight 4. We have made an exception for the Eisenstein series $E_{(k)}$, for which we have retained the traditional notation.

8. THEOREM. *Let ℓ be 1 or a prime number such that $\ell + 1$ divides 24. Let k_0, k_1 and k_2 given by*

$$k_0 = \begin{cases} 4 & \text{if } \ell = 1, \\ 2 & \text{if } \ell \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{4}, \text{ and } \ell \neq 1, \\ 1 & \text{if } \ell \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{24}{\ell + 1}, \quad k_2 = k_0 + k_1 + 2.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+(\ell) &= \mathbb{C}[\theta_{2k_0}, \Delta_{2k_1}], \\ {}^0\mathcal{M}^+(\ell) &= \Delta_{2k_1} \mathbb{C}[\theta_{2k_0}, \Delta_{2k_1}], \\ {}^0\mathcal{M}^-(\ell) &= \Phi_{2k_2} \mathbb{C}[\theta_{2k_0}, \Delta_{2k_1}], \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \theta_{2k_0} &= \Theta_{L_0} \in \mathcal{M}_{k_0}^+(\ell), \text{ with } L_0 \in \mathcal{L}at_{2k_0}(\ell), \\ \Delta_{2k_1} &= (\eta(z)\eta(\ell z))^{k_1} \in {}^0\mathcal{M}_{k_1}^+(\ell), \\ \Phi_{2k_2} &\in {}^0\mathcal{M}_{k_2}^-(\ell), \end{aligned}$$

and where L_0 is given in Table 1.

¹⁰Note however that our examples of constructions of cubature formulas in Section B.6 involve lattices in $\mathcal{L}at_n(\ell)$ for $\ell \in \{1, 2, 3\}$ only.

For a proof, see [BacVen01, Section 2] and [Queb95, Section 3]. Recall that

$$\eta(z) = q^{1/12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m}) = q^{1/12} (1 - q^2 - q^4 + O(q^{10})), \quad q = e^{i\pi z}.$$

For $\ell = 1$, the modular forms of the theorem are $\Delta_{24} = \eta(z)^{24}$, whose Fourier coefficients are the Ramanujan numbers,

$$\Theta_{\mathbf{E}_8} = E_{(4)}, \quad \text{and} \quad \Phi_{36} = \Delta_{24} E_{(6)},$$

where $E_{(k)}$ is the Eisenstein series of weight k .

Tables 1 to 3 give the theta series θ_{2k_0} , Δ_{2k_1} and Φ_{2k_2} for all possible values of ℓ . In the third column of Table 1, the lattice L_0 is designated either by a root system that generates it (e.g., \mathbf{E}_8), or by a quadratic form (e.g., $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$). In Table 3, P_k is a suitable element of $\text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$, the lattice L_4 is the unique (up to isometry) 4-dimensional lattice of minimum 4 and determinant 11^2 , and the lattices $L_0^{(1)}$ and $L_0^{(2)}$ are the two lattices given in the column L_0 of Table 1. We normalize Φ_{2k_2} by $\Phi_{2k_2} = q^2 + O(q^4)$.

ℓ	k_0	L_0	$\theta_{2k_0} = \Theta_{L_0}$
1	4	\mathbf{E}_8	$1 + 240q^2 + 2160q^4 + 6720q^6 + O(q^8)$
2	2	\mathbf{D}_4	$1 + 24q^2 + 24q^4 + 96q^6 + O(q^8)$
3	1	$\mathbf{A}_2 \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$1 + 6q^2 + 6q^6 + O(q^8)$
5	2	\mathbf{A}_4	$1 + 20q^2 + 30q^4 + 60q^6 + O(q^8)$
7	1	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$1 + 2q^2 + 4q^4 + O(q^8)$
11	1	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$1 + 2q^2 + 4q^6 + O(q^8)$
23	1	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$	$1 + 2q^2 + O(q^8)$ or $1 + 2q^4 + 2q^6 + O(q^8)$

Table 1: Modular forms $\theta_{2k_0} = \Theta_{L_0}$ of weight k_0

ℓ	k_1	$\Delta_{2k_1} = (\eta(z)\eta(\ell z))^{k_1}$
1	12	$q^2 - 24q^4 + 252q^6 - 1472q^8 + O(q^{10})$
2	8	$q^2 - 8q^4 + 12q^6 + 64q^8 + O(q^{10})$
3	6	$q^2 - 6q^4 + 9q^6 + 4q^8 + O(q^{10})$
5	4	$q^2 - 4q^4 + 2q^6 + 8q^8 + O(q^{10})$
7	3	$q^2 - 3q^4 + 5q^6 - 7q^8 + O(q^{10})$
11	2	$q^2 - 2q^4 - q^6 + 2q^8 + O(q^{10})$
23	1	$q^2 - q^4 - q^6 + O(q^{10})$

Table 2: Modular forms $\Delta_{2k_1} = (\eta(z)\eta(\ell z))^{k_1}$ of weight k_1

ℓ	k_2	Φ_{2k_2} (definition)	Φ_{2k_2} (expansion)
1	18	$\Theta_{\mathbf{E}_8, P_{14}}$	$q^2 - 528q^4 - 4284q^6 + 147712q^8 + O(q^{10})$
2	12	$\Theta_{\mathbf{D}_4^2, P_8} - \Theta_{(\mathbf{D}_4^2)', P_8}$	$q^2 - 88q^4 + 252q^6 + 64q^8 + O(q^{10})$
3	9	$\Theta_{\mathbf{A}_2^3, P_6} + \Theta_{(\mathbf{A}_2^3)', P_6}$	$q^2 - 14q^4 + 48q^6 + 68q^8 + O(q^{10})$
5	8	$\Theta_{L_0, P_6} + \Theta_{L_0', P_6}$	$q^2 - 14q^4 - 48q^6 + 68q^8 + O(q^{10})$
7	7	$\Theta_{L_0^2, P_4} - \Theta_{(L_0^2)', P_4}$	$q^2 - 10q^4 - 14q^6 + 68q^8 + O(q^{10})$
11	5	$\Theta_{L_0 \perp L_4, P_2} + \Theta_{(L_0 \perp L_4)', P_2}$	$q^2 - 6q^4 - 3q^6 - 14q^8 + O(q^{10})$
23	4	$\Theta_{L_0^{(1)} \perp L_0^{(2)}, P_2} + \Theta_{(L_0^{(1)} \perp L_0^{(2)})', P_2}$	$q^2 - 2q^4 - 5q^6 - 4q^8 + O(q^{10})$

Table 3: Modular forms Φ_{2k_2} of weight k_2

B.5 Construction of cubature formulas using shells of lattices

Let G be a finite subgroup of $\mathcal{O}(n)$, and let X_1, X_2, \dots, X_r be nonempty finite subsets of \mathbb{S}^{n-1} such that $G X_j = X_j$. Consider the set

$$X := \bigcup_{j=1}^r X_j \subseteq \mathbb{S}^{n-1}.$$

The aim is to find numbers $W_1, W_2, \dots, W_r \in \mathbb{R}_{>0}$ such that (X, W) is a cubature formula of high strength, where W is the weight function given by

$$W(x) = \sum_{j: x \in X_j} W_j.$$

By Proposition 5, (X, W) is of strength t if and only if the following conditions on W_1, \dots, W_r are satisfied:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r W_j |X_j| &= 1, \\ \sum_{j=1}^r W_j P(X_j) &= 0, \quad \forall P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G, \quad 1 \leq k \leq t, \end{aligned}$$

where

$$P(X_j) := \sum_{x \in X_j} P(x).$$

The following statement is fundamental for our analysis.

9. LEMMA. *Let G be a finite subgroup of $\mathcal{O}(n)$, and let $E \subseteq \mathbb{R}^n$ be a discrete set that is invariant by G . Let m_1, m_2, \dots, m_r be pairwise distinct positive numbers, let*

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{m_j}} E_{m_j} \subseteq \mathbb{S}^{n-1}, \quad j = 1, \dots, r,$$

where $E_m = \{x \in E \mid \langle x \mid x \rangle = m\}$. Let $X = \bigcup_{j=1}^r X_j$ and $W_1, \dots, W_r > 0$, and let k be a positive integer.

Assume that there exist formal series

$$\Theta_i = \sum_{m>0} a_i(m) q^m, \quad i = 1, \dots, N$$

such that, for every $P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G$, the theta series $\Theta_{E,P}$ is of the form

$$\Theta_{E,P} = c_1(P) \Theta_1 + c_2(P) \Theta_2 + \dots + c_N(P) \Theta_N$$

for some $c_i(P) \in \mathbb{C}$.

Then, for the condition

$$\sum_{j=1}^r W_j P(X_j) = 0 \quad \forall P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G$$

to hold, it suffices that

$$\sum_{j=1}^r \frac{a_i(m_j)}{m_j^{k/2}} W_j = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\#)$$

Proof. Assume that Equation (#) holds, and let $P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G$. By hypothesis, there exist $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ such that

$$\sum_{m>0} P(E_m) q^m = \Theta_{E,P} = \sum_{i=1}^N c_i \Theta_i = \sum_{m>0} \left(\sum_{i=1}^N c_i a_i(m) \right) q^m.$$

Since P is homogeneous of degree k , we have $P((1/\sqrt{m}) E_m) = m^{-k/2} P(E_m)$. Therefore,

$$P(X_j) = m_j^{-k/2} P(E_{m_j}) = \sum_{i=1}^N c_i \frac{a_i(m_j)}{m_j^{k/2}},$$

hence

$$\sum_{j=1}^r W_j P(X_j) = \sum_{i=1}^N c_i \sum_{j=1}^r \frac{a_i(m_j)}{m_j^{k/2}} W_j = 0. \quad \square$$

B.6 Applications

If not otherwise specified, Lemma 9 is applied with the trivial group $G = \{\text{id}\}$. In this section, we do not give the details for all lattices we have considered, but we have made a selection which reflects most situations that may occur. All cubature formulas we have obtained are listed in Section B.7 below.

B.6.1 The Leech lattice Let Λ be the Leech lattice, namely the unique (up to isometry) even unimodular lattice of dimension 24 and of minimum 4. Let $P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^{24})$. From Proposition 7 and Theorem 8, we deduce (using $\Lambda' = \Lambda$):

$$\Theta_{\Lambda,P} = \begin{cases} \Theta_{\mathbf{E}_8}^3 - 720 \Delta_{24} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^{24}), 2h = 2, 4, 6, 8, 10, 14, \\ c_1(P) \Delta_{24}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^{24}), \\ c_2(P) \Theta_{\mathbf{E}_8} \Delta_{24}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_{16}(\mathbb{R}^{24}), \end{cases}$$

where c_1 and c_2 are linear forms on $\text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^{24})$ and $\text{Harm}_{16}(\mathbb{R}^{24})$ respectively. The first coefficients of these theta series are

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{E}_8}^3 - 720 \Delta_{24} &= 1 + 196\,560 q^4 + 16\,752\,960 q^6 + O(q^8), \\ \Delta_{24}^2 &= q^4 - 48q^6 + O(q^8), \\ \Theta_{\mathbf{E}_8} \Delta_{24}^2 &= q^4 + 192q^6 + O(q^8). \end{aligned}$$

Since $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ for $P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^{24})$, $2 \leq 2h \leq 10$, it follows from Proposition 4 that every shell of the Leech lattice is a spherical 11-design.

Now, we want to find cubature formulas of higher strengths using the construction of Section B.5. Consider the set

$$X = X_1 \cup X_2, \quad \text{where } X_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}\Lambda_4, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda_6.$$

The two sets X_1 and X_2 are disjoint. Indeed, if we had $x \in X_1 \cap X_2$, we would have $\sqrt{4}x \in \Lambda_4$ and $\sqrt{6}x \in \Lambda_6$; but $\langle \sqrt{4}x \mid \sqrt{6}x \rangle = 2\sqrt{6}\langle x \mid x \rangle = 2\sqrt{6}$, which is impossible since Λ is integral.

We want to find out the numbers W_1 and W_2 such that (X, W) is a cubature of strength 15 (same notation as in Section B.5). For this, we have to fulfill the conditions

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} W(x) &= 1, \\ \sum_{x \in X} W(x) P(x) &= 0 \text{ for } P = \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

The first condition is equivalent to $|X_1|W_1 + |X_2|W_2 = 1$, that is

$$196\,560\,W_1 + 16\,752\,960\,W_2 = 1.$$

By Lemma 9 the second condition is equivalent to

$$\frac{1}{4^6}W_1 - \frac{48}{6^6}W_2 = 0,$$

or $W_2 = (3/4)^5 W_1$. The solution of this set of two linear equations is

$$W_1 \approx 2.394 \times 10^{-7}, \quad W_2 \approx 0.568 \times 10^{-7}.$$

So we get a cubature formula of size $196\,560 + 16\,752\,960 = 16\,949\,520$.

We can obtain in the same way a cubature formula of strength 17 by using the shells of norm 4, 6, and 8, and a cubature formula of strength 19 by using the shells of norm 4, 6, 8, and 10 of the Leech lattice.

B.6.2 The Korkine-Zolotareff lattice Let Λ be the Korkine-Zolotareff lattice, namely the unique (up to isometry) even unimodular lattice of dimension 8. It is the lattice generated by the root system of type \mathbf{E}_8 . From Proposition 7 and Theorem 8, we deduce (using $\Lambda' = \Lambda$):

$$\Theta_{\Lambda, P} = \begin{cases} \Theta_{\mathbf{E}_8} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^8), \quad 2h = 2, 4, 6, 10, \\ c_1(P) \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^8), \\ c_2(P) \Theta_{\mathbf{E}_8} \Delta_{24} & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^8), \\ c_3(P) \Phi_{36} & \text{if } P \in \text{Harm}_{14}(\mathbb{R}^8). \end{cases}$$

So, by Proposition 4, any shell of the Korkine-Zolotareff lattice is a spherical 7-design, and we can obtain a cubature formula of strength 11 by combining the shells of norms 2 and 4.

But if we try to obtain a cubature formula of strength 13 of nodes

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3, \quad \text{where } X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_2, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}\Lambda_4, \quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda_6,$$

we obtain the weights

$$W_1 \approx -0.744 \times 10^{-4}, \quad W_2 \approx 1.587 \times 10^{-4}, \quad W_3 \approx 1.005 \times 10^{-4},$$

with W_1 negative. A similar problem occurs if we try to use the shells of norm 2, 4 and 8. Therefore, in order to get a true cubature formula with positive weights, we have to use

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3, \quad X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_2, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda_6, \quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}\Lambda_8.$$

We obtain the weights

$$W_1 \approx 0.792 \times 10^{-4}, \quad W_2 \approx 0.457 \times 10^{-4}, \quad W_3 \approx 0.385 \times 10^{-4}.$$

Here, we have $X_1 \subseteq X_3$, since $2x \in \Lambda_8$ if $x \in \Lambda_2$. Therefore, we obtain a cubature formula of strength 13 of size

$$|X| = |X_2| + |X_3| = 6\,720 + 17\,520 = 24\,240$$

and of weights

$$W(x) = \begin{cases} W_2 \approx 0.457 \times 10^{-4} & \text{if } x \in X_2, \\ W_3 \approx 0.385 \times 10^{-4} & \text{if } x \in X_3 \setminus X_1, \\ W_1 + W_3 \approx 1.177 \times 10^{-4} & \text{if } x \in X_1. \end{cases}$$

B.6.3 The Barnes-Wall lattice of dimension 16 Let Λ be the Barnes-Wall lattice of dimension 16. It is a 2-modular lattice, that is $\Lambda' := \sqrt{2}\Lambda$ is equivalent to Λ , and it is of minimum 4. From Proposition 7 and Theorem 8, we have:

$$\Theta_{\Lambda,P} + \Theta_{\Lambda',P} = \begin{cases} 2\Theta_{\mathbf{D}_4}^4 - 192\Delta_{16} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^{16}), \, 2h = 2, 4, 6, 10, \\ c_1(P)\Delta_{16}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^{16}), \\ c_2(P)\Delta_{16}^2\Theta_{\mathbf{D}_4} & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^{16}), \\ c_3(P)\Phi_{24}\Delta_{16}\Theta_{\mathbf{D}_4} & \text{if } P \in \text{Harm}_{14}(\mathbb{R}^{16}), \end{cases}$$

$$\Theta_{\Lambda,P} - \Theta_{\Lambda',P} = \begin{cases} 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^{16}), \, 2h = 0, 2, 4, 6, 8, \\ c_4(P)\Delta_{16}^2\Theta_{\mathbf{D}_4} & \text{if } P \in \text{Harm}_{10}(\mathbb{R}^{16}), \\ c_5(P)\Phi_{24}\Delta_{16} & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^{16}), \end{cases}$$

and therefore

$$\Theta_{\Lambda,P} = \begin{cases} \Theta_{\mathbf{D}_4}^4 - 96\Delta_{16} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^{16}), \, 2h = 2, 4, 6, \\ c_6(P)\Delta_{16}^2 & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^{16}), \\ c_7(P)\Delta_{16}^2\Theta_{\mathbf{D}_4} & \text{if } P \in \text{Harm}_{10}(\mathbb{R}^{16}). \end{cases}$$

Every shell of Λ is a spherical 7-design, and we obtain a cubature formula of strength 9 by combining two different shells of Λ , for example Λ_4 and Λ_6 . We also obtain a cubature formulas of strength 11 of support $\frac{1}{\sqrt{4}}(\Lambda \cup \Lambda')_4 \cup \frac{1}{\sqrt{6}}(\Lambda \cup \Lambda')_6$, and a cubature formulas of strength 13 of support $\frac{1}{\sqrt{4}}(\Lambda \cup \Lambda')_4 \cup \frac{1}{\sqrt{6}}(\Lambda \cup \Lambda')_6 \cup \frac{1}{\sqrt{10}}(\Lambda \cup \Lambda')_{10}$.

B.6.4 The \mathbf{D}_4 root lattice Let Λ be the lattice generated by the root system \mathbf{D}_4 . It is a 2-modular lattice. Here, we will apply Lemma 9 with

$$G = \text{Aut}(\Lambda \cup \Lambda').$$

We now describe Λ , Λ' and G . We have

$$\Lambda = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{Z}, \, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \in 2\mathbb{Z}\},$$

$$\Lambda' = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}, \, x_i - x_j \in \sqrt{2}\mathbb{Z}\}.$$

The group $\text{Aut}(\Lambda)$ contains (actually, is) a reflection group, denoted by $W(\mathbf{F}_4)$, which is generated by the 24 reflections $x \mapsto x - 2\frac{\langle x|\alpha \rangle}{\langle \alpha|\alpha \rangle}\alpha$, where α is one of the following vectors:

$$(\pm 1, 0, 0, 0), \quad (\pm 1, \pm 1, 0, 0), \quad (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

(all choices of signs and all permutations of coordinates). The invariant polynomials of this group are known [Smit95, §7.4, pp. 217–218]; they form a polynomial \mathbb{C} -algebra of basis $\{h_2, h_6, h_8, h_{12}\}$, where

$$\begin{aligned} h_2 &= \text{sym}(x_1^2), & h_6 &= \text{sym}(x_1^4 x_2^2) - 3 \text{sym}(x_1^2 x_2^2 x_3^2), \\ h_8 &= \text{sym}(x_1^8) + 14 \text{sym}(x_1^4 x_2^4) + 168 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2, \\ h_{12} &= \text{sym}(x_1^{12}) + 22 \text{sym}(x_1^6 x_2^6) + 165 \text{sym}(x_1^4 x_2^4 x_3^4) \\ &\quad + 330 \text{sym}(x_1^6 x_2^2 x_3^2 x_4^2) + 330 \text{sym}(x_1^4 x_2^4 x_3^2 x_4^2), \end{aligned}$$

and where

$$\text{sym}(p) = \frac{1}{|(\mathfrak{S}_4)_p|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \sigma \cdot p, \quad (\mathfrak{S}_4)_p := \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma \cdot p = p\},$$

where the symmetric group \mathfrak{S}_4 acts by permuting the coordinates. For our purpose, it is better to choose the basis

$$\begin{aligned} H_2 &:= h_2, & H_6 &:= 8h_6 - h_2^3, & H_8 &:= 10h_8 - 7h_2^4, \\ H_{12} &:= 64h_{12} - 55h_8 h_2^2 - 176h_6^2 + 220h_6 h_2^3 - 11h_2^6. \end{aligned}$$

The orthonormal transformation

$$T := \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

exchanges Λ and Λ' . So, $G = \text{Aut}(\Lambda \cup \Lambda')$ is generated by $\text{Aut}(\Lambda)$ and T . The action of T on the polynomials H_k is:

$$TH_2 = H_2, \quad TH_6 = -H_6, \quad TH_8 = H_8, \quad TH_{12} = -H_{12}.$$

Therefore, the polynomials that are invariant by G are linearly generated by the polynomials

$$H_2^\alpha H_6^\beta H_8^\gamma H_{12}^\delta, \quad \beta + \delta \equiv 0 \pmod{2}.$$

Let $\text{Pol}_k(\mathbb{R}^4)$ be the space of homogeneous polynomial functions on \mathbb{R}^4 of degree k . Since $\text{Harm}_k(\mathbb{R}^4)$ is the kernel of the surjective G -equivariant Laplacian $\Delta : \text{Pol}_k(\mathbb{R}^4) \rightarrow \text{Pol}_{k-2}(\mathbb{R}^4)$, we have

$$d_k^G := \dim \text{Harm}_k(\mathbb{R}^4)^G = \dim \text{Pol}_k(\mathbb{R}^4)^G - \dim \text{Pol}_{k-2}(\mathbb{R}^4)^G.$$

We can compute

$$\sum_{k \geq 0} d_k^G X^k = \frac{1 + X^{18}}{(1 - X^8)(1 - X^{12})(1 - X^{24})} = 1 + X^8 + X^{12} + X^{16} + O(X^{18}).$$

So, we have by Proposition 7,

$$\Theta_{\Lambda, P} + \Theta_{\Lambda', P} = \begin{cases} 2 \Theta_{\mathbf{D}_4} & \text{if } P = 1, \\ 0 & \text{if } P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^8)^G = \{0\}, \quad 2h = 2, 4, 6, 10, 14, \\ c_1(P) \Delta_{16} \Theta_{\mathbf{D}_4} & \text{if } P \in \text{Harm}_8(\mathbb{R}^8)^G, \\ c_2(P) \Delta_{16}^2 \Theta_{\mathbf{D}_4}^3 & \text{if } P \in \text{Harm}_{12}(\mathbb{R}^8)^G. \end{cases}$$

Thus, using Lemma 9 together with Proposition 5, we obtain cubature formulas of strengths 11 and 15 by combining two or three shells of $\Lambda \cup \Lambda'$. Note however that certain combinations of shells, such as $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda \cup \Lambda')_2 \cup \frac{1}{\sqrt{4}}(\Lambda \cup \Lambda')_4$ are not possible, because Lemma 9 can provide a degenerate linear equations system. (In the present example, we have indeed $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda \cup \Lambda')_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}(\Lambda \cup \Lambda')_4$.)

B.6.5 The shorter Leech lattice Let Λ be the unique (up to isometry) odd unimodular integral lattice of dimension 23 and of minimum 3; it is the *shorter Leech lattice*. As for even ones, the theta series of odd unimodular lattices can be computed: see [Pach05]. So, we can apply our method to construct cubature formulas from the shells of Λ .

B.7 Cubature formulas obtained by our construction

The cubature formulas we obtain by our method are summarized in Tables 6 to 14. These tables involved the lattices listed in Tables 4 and 5.

In Tables 6 to 14, the column “bound” indicates the lower bound of the size of cubature formulas of strength t on \mathbb{S}^{n-1} obtained by Linear Programming. The indication in parentheses has the following meaning:

- (LP d) refers to the estimate of the Linear Programming bound obtained by the procedure described in Section B.2, paragraph “Numerical estimate of the Linear Programming bound”, where $2d$ is the degree of the polynomial used for the estimate. The calculations have been performed with “Maple” software, using the “Optimization” package. Because of limitations in time and memory of our computer, we have not always chosen an optimal d , in which case we write (LP $\geq d$); similarly, when the bound we have found can almost certainly be improved, we put the sign \geq before it.
- (T) refers to the Delsarte or (Fisher-type) bound; it is the same as (LP d) when $2d + 1 = t$ (the strength).
- When it is known that tight spherical designs with the corresponding parameters (n, t) do not exist, we note (D) to indicate the Delsarte bound increased by 1

The columns “set” and “shells” indicate respectively the set E and the shells m_j used in the construction of Section B.5, according to the notation of Lemma 9. The column “size” gives the size of the cubature formula so constructed.

In the case $n = 4$, we have also listed in Table 7 the cubature formulas of smallest known sizes for fixed values of t ;

Most spherical designs with $n \leq 24$ described in [BacVen01, Table 3, p. 108] appear also in our tables.

n	ℓ	notation	name
4	2	D_4	\mathbf{D}_4 root lattice
8	1	Γ_8	Korkine-Zolotareff
12	3	K_{12}	Coxeter-Todd
14	3	Q_{14}	Quebbemann
16	2	BW_{16}	Barnes-Wall
20	2	$N_{20}^{(1)}, N_{20}^{(2)}, N_{20}^{(3)}$	Nebe
24	3	N_{24}	Nebe
24	1	Λ_{24}	Leech

Table 4: Even ℓ -modular lattices involved in Tables 6 to 14

n	notation	name
23	O_{23}	shorter Leech lattice

Table 5: Odd unimodular lattice involved in Table 13

strength	set	shells	size	bound
5	D_4	2	24	21 (D)
7	$D_4 \cup D'_4$	2	48	42 (LP5)
11	$D_4 \cup D'_4$	2, 6	240	120 (LP11)
15	$D_4 \cup D'_4$	2, 6, 10	528	267 (LP22)

Table 6: Cubature formulas for $n = 4$ —see also Table7

strength	best known cubature formula	size	bound
3	root system \mathbf{A}_1^4	8	8 (T)
5	root system \mathbf{D}_4	24	21 (D)
7	[HadSlo94]	46	42 (LP5)
9	announced in [HadSlo94]	86	74 (LP7)
11	vertices of the 600-cell	120	120 (LP11)
19	vertices of the 600-cell and of its dual, the 120-cell [Sali75]	720	500 (LP \geq 18)

Table 7: Best known cubature formulas for $n = 4$

strength	set	shells	size	bound
7	Γ_8	2	240	240 (T)
11	Γ_8	2, 4	2 400	1 856 (LP8)
13	Γ_8	2, 6, 8	24 240	4 361 (LP12)
15	Γ_8	2, 4, 6, 8	26 400	9 190 (LP16)

Table 8: Cubature formulas for $n = 8$

strength	set	shells	size	bound
5	K_{12}	4	756	157 (D)
7	$K_{12} \cup K'_{12}$	4	1 512	729 (D)
9	$K_{12} \cup K'_{12}$	6	8 064	2 940 (LP6)
11	$K_{12} \cup K'_{12}$	4, 6, 8	50 400	10 604 (LP7)

Table 9: Cubature formulas for $n = 12$

strength	set	shells	size	bound
5	Q_{14}	4	756	211 (D)
7	$Q_{14} \cup Q'_{14}$	4	1 512	1 121 (D)
9	$Q_{14} \cup Q'_{14}$	4, 8	89 964	4 902 (LP6)
11	$Q_{14} \cup Q'_{14}$	4, 6, 8	107 436	20 817 (LP7)

Table 10: Cubature formulas for $n = 14$

strength	set	shells	size	bound
7	BW_{16}	4	4 320	1 633 (D)
9	BW_{16}	4, 6	65 560	7 753 (D)
11	$BW_{16} \cup BW'_{16}$	4, 6	131 520	37 166 (LP7)
13	$BW_{16} \cup BW'_{16}$	4, 6, 10	4 555 200	$\geq 146 153$ (LP8)

Table 11: Cubature formulas for $n = 16$

strength	set	shells	size	bound
5	N_{20}	4	3 960	421 (D)
7	$N_{20} \cup N'_{20}$	4	7 920	3 081 (D)
9	$N_{20} \cup N'_{20}$	4, 6	345 840	17 711 (D)
11	$N_{20} \cup N'_{20}$	4, 6, 8	4 527 600	95 309 (LP7)

In this table, N_{20} denotes any of the three lattices $N_{20}^{(1)}$, $N_{20}^{(2)}$, and $N_{20}^{(3)}$.

Table 12: Cubature formulas for $n = 20$

strength	set	shells	size	bound
7	O_{23}	3	4 600	4 600 (T)
9	O_{23}	3, 5	958 458	29 901 (D)
11	O_{23}	3, 4, 6	6 574 550	166 808 (LP7)

Table 13: Cubature formulas for $n = 23$

strength	set	shells	size	bound
5	N_{24}	6	26 208	601 (D)
7	$N_{24} \cup N'_{24}$	6	52 416	5 201 (D)
11	Λ_{24}	4	196 560	196 560 (T)
15	Λ_{24}	4, 6	16 969 680	$\geq 6 179 991$ (LP9)
17	Λ_{24}	4, 6, 8	415 003 680	$\geq 27 131 261$ (LP13)
19	Λ_{24}	4, 6, 8, 10	5 044 384 800	$\geq 116 303 274$ (LP15)

Table 14: Cubature formulas for $n = 24$

Résumé français des chapitres A et B

A Couches de réseaux autoduaux vues comme designs sphériques

Introduction Si A est un sous-ensemble discret de \mathbb{R}^n , on définit sa *couche* A_m de norme $m > 0$ par $A_m = \{x \in A \mid \langle x \mid x \rangle = m\}$. On se pose les questions suivantes pour A un réseau euclidien ou un ensemble construit à partir d'un réseau euclidien :

- (1) Est-ce que la couche de *norme minimale* de A est un t -design sphérique ?
- (2) Est-ce qu'au moins *une* couche de A est un t -design sphérique ?
- (3) Est-ce que *toutes* les couches de A sont des t -designs sphériques ?

Dans ce chapitre, nous étudions ces questions dans le cas particulier des réseaux autoduaux de dimension au plus 24 et de leurs ombres.

Nous énonçons ensuite le résultat principal, qui résume les théorèmes 25, 28, 32, 36, 38 et 43 ci-dessous.

Théorie générale

A.1 Designs sphériques Soit, pour un entier $n \geq 2$ et un réel $m > 0$,

$$\mathbb{S}_m^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \mid x \rangle = m\}$$

la sphère de dimension $n - 1$ et de norme m ; soit σ l'unique mesure de probabilité sur \mathbb{S}_m^{n-1} invariante sous l'action du groupe orthogonal. Notons $\text{Harm}_t(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes polynomiales harmoniques homogènes de degré t sur \mathbb{R}^n .

Il existe plusieurs définitions équivalentes de designs sphériques. Dans ce chapitre, nous utilisons la suivante, qui est valable pour les sous-ensembles antipodaux X de \mathbb{S}_m^{n-1} , c'est-à-dire ceux qui vérifient $X = -X$.

1. DÉFINITION. Un sous-ensemble antipodal fini non-vide $X \subseteq \mathbb{S}_m^{n-1}$ est un $(2s + 1)$ -*design sphérique* (ou de façon équivalente un $2s$ -design sphérique) lorsqu'il vérifie la condition

$$\sum_{x \in X} P(x) = 0, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \quad (C_{2j})$$

pour tout entier pair $2j$ tel que $2 \leq 2j \leq 2s$.

2. DÉFINITION. Un sous-ensemble antipodal fini non-vide $X \subseteq \mathbb{S}_m^{n-1}$ est un $(2s + 1 + \frac{1}{2})$ -*design sphérique* lorsqu'il vérifie la condition (C_{2j}) pour $2 \leq 2j \leq 2s$ et $2j = 2s + 4$.

A.2 Réseaux autoduaux et ombres Pour un sous-ensemble discret A de \mathbb{R}^n , sa *couche* de norme m est $A_m := \{x \in A \mid \langle x \mid x \rangle = m\} = A \cap \mathbb{S}_m^{n-1}$. Le *minimum* ou la *norme minimale* d'un réseau euclidien Λ est $\min(\Lambda) := \min\{m > 0 \mid \Lambda_m \neq \emptyset\}$, et le *dual* de Λ est le réseau $\Lambda^\sharp := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y \mid x \rangle \in \mathbb{Z} \forall x \in \Lambda\}$. Un réseau est *entier* lorsque $\Lambda \subseteq \Lambda^\sharp$; il est *pair* lorsque $\langle x \mid x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $x \in \Lambda$; il est *autodual* ou *unimodulaire* lorsque $\Lambda^\sharp = \Lambda$.

Tout réseau entier Λ de rang n est de la forme $\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus L$, où L est un réseau entier de rang $n - p$ et de minimum au moins 2, et où $\mathbf{Z}^p := \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^p$.

On définit l'*ombre* $\mathcal{Sh}(\Lambda)$ d'un réseau autodual Λ de la manière suivante : Si Λ est pair, on pose $\mathcal{Sh}(\Lambda) := \Lambda$; sinon, soit

$$\Lambda_0 := \{x \in \Lambda \mid \langle x \mid x \rangle \equiv 0 \pmod{2}\},$$

qui est un sous-réseau pair d'indice 2. On pose $\mathcal{Sh}(\Lambda) := \Lambda_0^\sharp \setminus \Lambda$. Pour un réseau autodual Λ , on pose

$$\sigma(\Lambda) := 4 \min\{\langle x \mid x \rangle \mid x \in \mathcal{Sh}(\Lambda)\};$$

ce nombre est un entier positif. On a $\sigma(\Lambda) = 0$ si et seulement si Λ est pair.

Les faits suivants sont bien connus :

3. PROPOSITION. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau autodual. Alors

- (i) pour tout $x \in \mathcal{Sh}(\Lambda)$, on a $4\langle x | x \rangle \equiv n \pmod{8}$;
- (ii) il existe un entier positif k tel que $\sigma(\Lambda) = n - 8k$. En particulier, si Λ est pair, alors $n \equiv 0 \pmod{8}$;
- (iii) on a $\sigma(\Lambda) = n$ si et seulement si $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^n$.

A.3 Séries thêta Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On rappelle qu'une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est *bornée à l'infini* lorsqu'il existe un $r > 0$ tel que $\{f(z) \mid \Im z \geq r\}$ est borné. La démonstration du lemme suivant est directe.

4. LEMME – DÉFINITION. Soit A un sous-ensemble fini non-vide de \mathbb{R}^n pour lequel il existe un $\delta > 0$ tel que $|x - y| \geq \delta$ pour tous $x, y \in A$ distincts. Soit P une forme polynomiale sur \mathbb{R}^n . Alors la série

$$\Theta_{A,P}(z) := \sum_{x \in A} P(x) e^{i\pi z \langle x | x \rangle}, \quad z \in \mathbb{H},$$

converge absolument vers une fonction sur \mathbb{H} holomorphe et bornée à l'infini. C'est la série thêta de A pondérée par P .

Supposons de plus qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\alpha \langle x | x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $x \in A$. Alors on a

$$\Theta_{A,P}(z + \alpha) = \Theta_{A,P}(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Pour un nombre réel m , et $z \in \mathbb{H}$ étant sous-entendu, on écrit

$$q^m := e^{i\pi z m}.$$

Ainsi, la série thêta de A pondérée par P s'écrit

$$\Theta_{A,P}(z) = \sum_{x \in A} P(x) q^{\langle x | x \rangle} = \sum_{m \in 2\alpha^{-1}\mathbb{N}} a_m^{(P)} q^m, \quad \text{où } a_m^{(P)} := \sum_{x \in A_m} P(x).$$

La série thêta classique de A est

$$\Theta_A := \Theta_{A,1} = \sum_{m \geq 0} |A_m| q^m.$$

La condition pour des couches d'un sous-ensemble discret de \mathbb{R}^n d'être un design se reformule ainsi :

5. LEMME. Soit A un sous-ensemble fini non-vide de \mathbb{R}^n pour lequel il existe un $\delta > 0$ tel que $|x - y| \geq \delta$ pour tous $x, y \in A$ distincts. Alors, pour $m > 0$, la couche A_m est un t -design sphérique ou est vide si et seulement si

$$a_m^{(P)} = 0 \text{ pour tout } P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n), 1 \leq 2j \leq t,$$

où $a_m^{(P)}$ sont les coefficients de Fourier de la série

$$\Theta_{A,P}(z) = \sum_m a_m^{(P)} q^m.$$

A.4 Formes modulaires La proposition ci-dessous, qui est une conséquence directe de la formule de sommation de Poisson, met en relation la série thêta d'un réseau et celle de son dual.

6. PROPOSITION. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau, et soit $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme polynomiale harmonique de degré $2j$. Alors

$$\Theta_{\Lambda^\#, P}(z) = (\det \Lambda)^{1/2} (-1)^j (i/z)^{n/2+2j} \Theta_{\Lambda, P}(-1/z).$$

(Pour la puissance de i/z , nous utilisons la branche principale; notez que $-\pi/2 \leq \arg(i/z) \leq \pi/2$ pour $z \in \mathbb{H}$.)

Cette propriété inspire la définition suivante :

7. DÉFINITION.

- (i) Soit $\lambda \in \{1, 2\}$, $\omega \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, et $\epsilon \in \{+, -\}$. Une *forme modulaire de signature* $(\lambda, \omega, \epsilon)$ est une fonction $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et bornée à l'infini qui satisfait à

$$\begin{aligned} f(z + \lambda) &= f(z), \\ f(-1/z) &= \epsilon(z/i)^\omega f(z), \end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$. Le nombre ω est le *poids* de la forme. On note $\mathcal{M}_\omega^{\lambda, \epsilon}$ l'espace vectoriel des formes modulaires de signature $(\lambda, \omega, \epsilon)$; on a $\mathcal{M}_\omega^{1, \epsilon} \subseteq \mathcal{M}_\omega^{2, \epsilon}$. On pose :

$$\mathcal{M}^{\lambda, \epsilon} := \bigoplus_{\omega \in (1/2)\mathbb{N}} \mathcal{M}_\omega^{\lambda, \epsilon}, \quad \mathcal{M}^\lambda := \mathcal{M}^{\lambda, +} \oplus \mathcal{M}^{\lambda, -}.$$

Les algèbres \mathcal{M}^λ et $\mathcal{M}^{\lambda, +}$ sont graduées par le poids.

- (ii) Une forme modulaire f est *parabolique* lorsque

$$\lim_{\Im z \rightarrow +\infty} f(z) = 0.$$

Les formes modulaires de signature $(1, \omega, \epsilon)$ sont les formes modulaires classiques pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. La proposition 6 implique immédiatement

8. PROPOSITION. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau autodual, et soit $P \in \mathrm{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{2, +} && \text{si } 2j \equiv 0 \pmod{4}, \\ \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{2, -} && \text{si } 2j \equiv 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Si de plus Λ est pair, alors

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{1, +} && \text{si } 2j \equiv 0 \pmod{4}, \\ \Theta_{\Lambda, P} &\in \mathcal{M}_{n/2+2j}^{1, -} && \text{si } 2j \equiv 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

De plus, si $2j > 0$ alors $\Theta_{\Lambda, P}$ est parabolique.

Considérons maintenant les séries thêta des ombres de réseaux autoduaux.

9. DÉFINITION. Soit $f \in \mathcal{M}_\omega^{2, \epsilon}$. L'*ombre* de f est la fonction $\mathcal{S}h f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{S}h f(z) := (i/z)^\omega f(-1/z + 1).$$

10. PROPOSITION. Soit Λ un réseau autodual, et soit $P \in \mathrm{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\Theta_{\mathcal{S}h(\Lambda), P} = (-1)^j \mathcal{S}h \Theta_{\Lambda, P}.$$

A.5 Un théorème de classification pour les formes modulaires Dans cette section, nous rappelons des résultats de classification de formes modulaires.

Afin de mieux décrire les résultats, nous donnons une définition de poids qui s'applique à une classe de fonctions plus large que les formes modulaires de la définition 7.

11. DÉFINITION. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions méromorphes sur \mathbb{H} . Supposons qu'il existe α et $\beta > 0$ tels que

$$f(z + \alpha) = f(z), \quad g(z + \beta) = g(z), \quad f(-1/z) = (z/i)^\omega g(z),$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$. (Notez que la dernière condition est symétrique en f et g .) On dit alors que f et g sont de poids ω .

Pour une fonction ayant un poids dans le sens de la définition ci-dessus, la notion d'ombre de la définition 9 s'applique. Voici une liste de fonctions ayant un poids; on rappelle que $q^m := e^{i\pi z m}$.

$$\begin{aligned} \theta_2(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}+1/2} q^{m^2}, & \theta_3(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2}, & \theta_4(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-q)^{m^2}, & \text{de poids } 1/2, \\ \Phi(z) &= \theta_4^4(z) - \theta_2^4(z) & \text{de poids } 2, \\ \Delta_8(z) &= \frac{1}{16} \theta_2^4(z) \theta_4^4(z), & Q(z) &= \theta_3^8(z) - 16\Delta_8(z), & \text{de poids } 4, \\ R(z) &= \Phi(z)(\theta_3^8(z) + 8\Delta_8(z)) & \text{de poids } 6, & \Delta_{24}(z) &= \theta_3^8(z) \Delta_8^2(z) & \text{de poids } 12. \end{aligned}$$

Notez aussi que $\theta_2^4 + \theta_4^4 = \theta_3^4$. Les ombres de ces fonctions sont

$$\begin{aligned} Sh\theta_2 &= \sqrt{i}\theta_4, & Sh\theta_4 &= \theta_3, & Sh\theta_3 &= \theta_2, \\ ShQ &= Q, & ShR &= -R, & Sh\Delta_{24} &= \Delta_{24}. \end{aligned}$$

On a le théorème de classification suivant (que nous citons sans démonstration) :

12. THÉORÈME.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{2,+} &= \mathbb{C}[\theta_3, \Delta_8], & \mathcal{M}^{1,+} &= \mathbb{C}[Q, \Delta_{24}], \\ \mathcal{M}^{2,-} &= \Phi \mathbb{C}[\theta_3, \Delta_8], & \mathcal{M}^{1,-} &= R \mathbb{C}[Q, \Delta_{24}]. \end{aligned}$$

A.6 Calculer les séries thêta d'un réseau autodual Les discussions des sections précédentes permettent de montrer :

13. PROPOSITION. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau autodual avec $\sigma(\Lambda) = n - 8k$. Écrivons

$$\Lambda = \mathbf{Z}^p \oplus L, \quad L \subseteq \mathbb{R}^N,$$

où L est de minimum au moins 2. Alors il existe des nombres $c_i \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\Theta_\Lambda = \theta_3^n + c_1 \Delta_8 \theta_3^{n-8} + c_2 \Delta_8^2 \theta_3^{n-16} + \dots + c_k \Delta_8^k \theta_3^{n-8k}.$$

Voici quelques valeurs de c_i :

$$\begin{aligned} c_1 &= -2N, \\ c_2 &= (h - 46 + 2N)N, \quad \text{où } h := |L_2|/N, \\ c_k &= (-1)^k 2^{-n+12k} |\mathcal{S}h(\Lambda)_{(n-8k)/4}|. \end{aligned}$$

14. PROPOSITION. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau autodual avec $\sigma(\Lambda) = n - 8k$ et de minimum m .

(i) Pour tout entier positif pair j , il existe des formes linéaires $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=m}^{k+j/2} c_i(P) \Delta_8^i \theta_3^{n+4j-8i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, si $m > k + j/2$, alors $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ pour tout $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Pour tout entier positif impair j , il existe des formes linéaires $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=m}^{k+(j-1)/2} c_i(P) \Phi \Delta_8^i \theta_3^{n+4j-2-8i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, si $m > k + (j-1)/2$, alors $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ pour tout $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

Et de même pour les réseaux autoduaux pairs :

15. PROPOSITION. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau unimodulaire pair de rang $n = 8N$. Alors il existe $c_i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Theta_{\Lambda} = Q^N + c_1 \Delta_{24} Q^{N-3} + \cdots + c_k \Delta_{24}^k Q^{N-3k}, \quad k = [N/3],$$

avec

$$c_1 = n(h-30), \quad \text{où } h := |\Lambda_2|/n.$$

16. PROPOSITION. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ un réseau unimodulaire pair de rang $n = 8N$ et de minimum $m = 2M$.

(i) Pour tout entier positif pair j , il existe des formes linéaires $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=M}^{[(N+j/2)/3]} c_i(P) \Delta_{24}^i Q^{N+j/2-3i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, si $3M > N + j/2$, alors $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ pour tout $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Pour tout entier positif impair j , il existe des formes linéaires $c_i : \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\Theta_{\Lambda, P} = \sum_{i=M}^{[(N+j/2)/3]} c_i(P) R \Delta_{24}^i Q^{N+(j-3)/2-3i}, \quad \forall P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, si $3M > N + (j-3)/2$, alors $\Theta_{\Lambda, P} = 0$ pour tout $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$.

A.7 Coefficients nuls de formes modulaires Dans cette section, nous démontrons principalement le lemme 17, qui liste les coefficients non-nuls des formes modulaires

$$\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta = \sum_{m \in \alpha + \mathbb{N}} a_m q^m \quad \text{et} \quad Sh(\Phi^\epsilon \theta_3^\alpha \Delta_8^\beta) = \sum_{m \in \alpha/4 + 2\mathbb{N}} a_m q^m,$$

où $\epsilon \in \{0, 1\}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

A.8 Systèmes de racines de norme 2 Nous donnons ici quelques données sur les systèmes de racines de norme 2. Rappelons qu'un *système de racine* est un sous-ensemble $R \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que (i) R est fini et ne contient pas 0; (ii) pour tout $x, y \in R$, on a $r_y(x) \in R$, où r_y est la réflexion d'axe $\mathbb{R}y$; (iii) pour tout $x, y \in R$, le nombre $2\langle x | y \rangle / \langle x | x \rangle$ est un entier. On a :

19. LEMME – DÉFINITION. *Soit Λ un réseau entier. Alors Λ_2 est un système de racines, appelé le système de racines Λ .*

Si Λ est un réseau autodual de rang au plus 23, de minimum au moins 2 et de système de racine R , nous écrivons $\Lambda = R^+$.

Tout système de racine s'écrit de manière unique comme somme de systèmes de racines irréductibles. Les systèmes de racines irréductibles de norme 2 sont (l'indice indique le rang) :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{O}_1, & h = 0; \\ \mathbf{A}_n, n \geq 1, & h = n + 1; \\ \mathbf{D}_n, n \geq 4, & h = 2(n - 1); \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{E}_6, & h = 12; \\ \mathbf{E}_7, & h = 18; \\ \mathbf{E}_8, & h = 30. \end{array}$$

Nous notons $\mathbf{O}_n := n \mathbf{O}_1$ le système de racine vide dans \mathbb{R}^n .

Pour un système de racines irréductible R , son nombre de Coxeter h est donné par $|R| = nh$.

20. DÉFINITION. Un système de racines R est *fortement eutactique* lorsque, dans sa décomposition en systèmes de racines irréductibles, toutes les composantes irréductibles ont le même nombre de Coxeter. Dans ce cas, le *nombre de Coxeter* de R est le nombre de Coxeter commun de ses composantes irréductibles.

Nous démontrons ensuite qu'un système de racines de norme 2 est un 3-design sphérique si et seulement s'il est fortement parfait, et nous listons les systèmes de racines qui sont des t -designs pour $t > 3$ (lemme 19 et proposition 21).

Application à certains réseaux autoduaux

A.9 Les réseaux cubiques Soit

$$\mathbf{Z}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$$

le *réseau cubique* de rang n . C'est un réseau autodual impair dont l'ombre est

$$\mathcal{S}h(\mathbf{Z}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n\}.$$

En particulier, $\sigma(\mathbf{Z}^n) = n$. À l'aide des résultats des premières sections, on montre :

24. LEMME. *On a*

$$\Theta_{\mathbf{Z}^n, P} = \begin{cases} \theta_3^n & \text{si } P = 1, \\ 0 & \text{si } P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^n), \\ c_1(P) \Delta_8 \theta_3^n & \text{si } P \in \text{Harm}_4(\mathbb{R}^n), \\ c_2(P) \Phi \Delta_8 \theta_3^n & \text{si } P \in \text{Harm}_6(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

où c_1 est une forme linéaire non-nulle si et seulement si $n \geq 2$, et c_2 est une forme linéaire non-nulle si et seulement si $n \geq 3$.

On en déduit, en utilisant les lemmes 17 et 5 :

25. THÉORÈME.

- (i) Pour $n \geq 2$, toutes les couches non-vides de \mathbf{Z}^n et $\mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^n)$ sont des 3-designs sphériques.
- (ii) Les couches suivantes sont des $3^{1/2}$ -designs sphériques :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{Z}^2 \text{ et } \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^2) : & \text{toute couche non-vide} \\ (\mathbf{Z}^{16})_m : & m = 4^a 2, a \geq 0 \\ \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^{16})_m : & m = 4^a 2, a \geq 1 \\ \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^{40})_m : & m = 24. \end{array}$$

- (iii) Les couches suivantes sont des 5-designs sphériques :

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{Z}^4)_m : & m = 2a, a \geq 1 \\ (\mathbf{Z}^7)_m : & m = 4^a(8b+3), a, b \geq 0 \\ \mathcal{Sh}(\mathbf{Z}^{16})_m : & m = 4a+2, a \geq 1. \end{array}$$

De plus, nous montrons que les couches de norme au plus 1200 de ces réseaux ne sont pas des designs de force plus grande.

A.10 Les réseaux de Witt Soit n un multiple de 4 strictement positif. Le réseau de Witt de rang n est

$$\mathbf{\Gamma}_n := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} 2x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_i - x_1 \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}.$$

Ce réseau est autodual, et il est pair si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{8}$. Lorsque $n \equiv 4 \pmod{8}$, l'ombre de $\mathbf{\Gamma}_n$ est

$$\mathcal{Sh}(\mathbf{\Gamma}_n) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} 2x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_i - x_1 \in \mathbb{Z} \quad \forall i, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Comme pour les réseaux cubiques, on peut calculer les premières séries thêta des réseaux de Witt, d'où l'on déduit

28. THÉORÈME. Soit n un multiple de 4 plus grand ou égal à 8.

- (i) Toutes les couches non-vides de $\mathbf{\Gamma}_n$ et $\mathcal{Sh}(\mathbf{\Gamma}_n)$ sont des 3-designs sphériques.
- (ii) Toutes les couches non-vides de $\mathbf{\Gamma}_8$ sont des 7-designs sphériques.
- (iii) Toutes les couches non-vides de $\mathbf{\Gamma}_{16}$ sont des $3^{1/2}$ -designs sphériques.

De plus, nous montrons que, quand $n \geq 12$, les couches de norme au plus 1200 de ces réseaux ne sont pas des designs de force plus grande.

A.11 Les réseaux autoduaux pairs de rang au plus 24 Après avoir rappelé leur classification, nous calculons les forces de leurs couches comme pour les cas précédents, et nous obtenons :

32. THÉORÈME.

- (i) Toutes les couches de $\mathbf{\Gamma}_8 = \mathbf{E}_8^+$ sont des $7^{1/2}$ -designs sphériques.
- (ii) Toutes les couches des deux réseaux autoduaux pairs de rang 16 sont des $3^{1/2}$ -designs sphériques.
- (iii) Toutes les couches du réseau de Leech sont des $11^{1/2}$ -designs sphériques.

- (iv) Toutes les couches de tous les réseaux autoduaux de rang 24 et de minimum 2 sont des 3-designs sphériques.

De plus, nous avons vérifié qu'aucune couche de norme au plus 1200 de ces réseaux n'est un design de force plus élevée.

A.12 Les réseaux autoduaux à longue ombre Il s'agit de réseaux Λ tels que $\sigma(\Lambda) = n - 8$, où n est le rang de Λ . Nous rappelons leur classification et nous montrons :

36. THÉORÈME.

- (i) Toute couche non-vide de tout réseau autodual avec $\sigma(\Lambda) = n - 8$ de minimum 2, ainsi que toute couche non-vide de son ombre, est un 3-design sphérique.
(ii) Les couches suivantes sont des $3^{1/2}$ -designs sphériques :

$$(2\mathbf{D}_8)_m^+ : \quad m = 4^a, a \geq 1$$

- (iii) Les couches suivantes sont des 5-designs sphériques :

$$(4\mathbf{A}_5)_m^+, (5\mathbf{D}_4)_m^+ : m = 4^a, a \geq 1$$

$$(2\mathbf{D}_8)_m^+ : \quad m = 2a + 1, a \geq 1$$

- (iv) Toutes les couches non-vides du réseau de Leech court \mathbf{O}_{23}^+ et de son ombre sont des 7-designs sphériques.

38. THÉORÈME.

- (i) Soit Λ un réseau autodual de rang 24 avec $\sigma(\Lambda) = 24 - 8 = 16$. Alors les couches Λ_m et $\mathcal{Sh}(\Lambda)_m$ sont des 3-designs sphériques pour $m = 4^a 2$, $a \geq 0$ (sauf les couches $\mathcal{Sh}(\Lambda)_2$ et $(\mathbf{Z}^1 \oplus \mathbf{O}_{23}^+)_2$, qui sont vides).
(ii) Soit $\Lambda = \mathbf{Z}^3 \oplus \mathbf{\Gamma}_8$. Alors les couches Λ_m sont des 3-designs sphériques pour $m = 4^a(8b + 7)$, $a, b \geq 0$.

De plus, aucune couche de norme au plus 1200 de ces réseaux n'est un design de force plus élevée.

A.13 Les réseaux autoduaux impairs de rang 24 et de minimum au moins 2 Pour ces réseaux, nous montrons :

43. THÉORÈME. Soit Λ réseau autodual impair de rang 24 et de minimum 2.

- (i) Si Λ_2 est fortement parfait, alors toutes les couches non-vides de Λ et $\mathcal{Sh}(\Lambda)$ sont des 3-designs sphériques.
(ii) Si Λ_2 n'est pas fortement parfait, alors les couches Λ_m et $\mathcal{Sh}(\Lambda)_m$ sont des 3-designs sphériques pour $m = 4^a$, $a \geq 1$.

De plus, aucune couche de norme au plus 1200 de ces réseaux n'est un design de force plus élevée.

A.14 Les autres réseaux autoduaux de rang au plus 24 Pour les réseaux restants, nous montrons qu'aucune couche de norme au plus 1200 de ces réseaux n'est un 3-design.

A.15 Appendice : Les réseaux cubiques de rang 4 et 7 Cet appendice est consacré à la démonstration du résultat suivant sans utiliser les formes modulaires :

45. THÉORÈME.

- (i) Soit $\mathbf{Z}^4 = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$ le réseau cubique de rang 4, et soit m un entier pair strictement positif. Alors la couche $(\mathbf{Z}^4)_m$ est un 5-design sphérique.

- (ii) Soit $\mathbf{Z}^7 = \{x = (x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7 \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$ le réseau cubique de rang 7, et soit m un entier strictement positif de la forme $m = 4^a(8b + 3)$, $a, b \geq 0$. Alors la couche $(\mathbf{Z}^7)_m$ est un 5-design sphérique.

B Construction de formules de cubature sphériques à partir de réseaux

B.1 Introduction Nous rappelons qu'une *formule de cubature de force t* sur la sphère \mathbb{S}_r^{n-1} de rayon \sqrt{r} est un paire (X, W) , où X est un sous-ensemble fini de \mathbb{S}_r^{n-1} et où $W : \mathbb{S}_r^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ est une fonction à valeurs strictement positives, telle que

$$\sum_{x \in X} W(x) f(x) = \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} f(x) d\sigma(x) \quad (\text{CF})$$

pour toute fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de degré au plus t . Puis nous donnons des exemples de formules de cubature que nous obtenons dans notre article.

B.2 Bornes sur la taille des formules de cubature Dans cette section, nous rappelons la borne dite de programmation linéaire pour estimer le cardinal minimal d'un design de force donnée, et nous donnons un algorithme pour estimer numériquement cette borne.

B.3 Polynômes harmoniques Nous notons $\text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions polynomiales harmoniques sur \mathbb{R}^n à valeurs complexes qui sont homogènes de degré k . Si un groupe G agit sur un espace vectoriel V , nous notons V^G le sous-espace de V des éléments invariants par G . Nous démontrons :

5. PROPOSITION. Soit X un sous-ensemble fini de \mathbb{S}_r^{n-1} et $W : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ une fonction de poids. Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(n)$ laissant (X, W) invariant, c'est-à-dire

$$gx \in X \text{ et } W(gx) = W(x) \quad \forall x \in X, \forall g \in G.$$

Alors (X, W) est une formule de cubature de force t si et seulement si $\sum_{x \in X} W(x) = 1$ et

$$\sum_{x \in X} W(x) P(x) = 0 \quad \forall P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G, 1 \leq k \leq t.$$

B.4 Formes modulaires Pour un réseau $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ et une fonction $P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$, nous rappelons que la *série thêta* de Λ avec coefficient harmonique P est la série formelle $\Theta_{\Lambda, P}$ définie par

$$\Theta_{\Lambda, P} := \sum_{x \in \Lambda} P(x) q^{\langle x|x \rangle} = P(0) + \sum_{m>0} \left(\sum_{x \in \Lambda_m} P(x) \right) q^m.$$

Si $P = 1$, nous écrivons Θ_{Λ} . Nous posons

$$q := e^{i\pi z}, \quad z \in \mathbb{H},$$

où \mathbb{H} est le demi-plan de Poincaré; la série thêta converge alors uniformément sur chaque compact de \mathbb{H} vers une fonction holomorphe.

Nous décrivons ensuite les réseaux qui joueront un rôle essentiel et les formes modulaires y associées : Pour des entiers n et ℓ fixés, nous notons

$$\mathcal{L}at_n(\ell)$$

la classe des réseaux pairs Λ dont le dual renormalisé $\Lambda' := \sqrt{\ell}\Lambda^*$ est pair et de même déterminant.

Pour ω un entier positif et $\epsilon \in \{+, -\}$, nous définissons

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\omega}^{\epsilon}(\ell)$$

comme l'espace des fonctions holomorphes $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f\left(-\frac{1}{\ell z}\right) &= \epsilon \left(\frac{i}{\sqrt{\ell} z}\right)^{\omega} f(z) \end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$, et qui sont holomorphes à l'infini, c'est-à-dire bornées sur $\{z \in \mathbb{H} \mid \Im z > y_0\}$. Lorsque $\ell \in \{1, 2, 3\}$, nous montrons que $\widehat{\mathcal{M}}_{\omega}^{\epsilon}(\ell)$ s'identifie à un autre espace de formes modulaires $\mathcal{M}_{\omega}^{\epsilon}(\ell)$. Nous posons

$${}^0\mathcal{M}_{\omega}^{\epsilon}(\ell) = \{f \in \mathcal{M}_{\omega}^{\epsilon}(\ell) \mid \lim_{\text{im } z \rightarrow \infty} f(z) = 0\}.$$

Nous montrons alors la proposition suivante pour $\ell \in \{1, 2, 3\}$.

7. PROPOSITION. *Soit $\Lambda \in \mathcal{L}at_n(\ell)$, où ℓ est un entier strictement positif. Alors*

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda} + \Theta_{\Lambda'} &\in \mathcal{M}_{n/2}^{+}(\ell), \\ \Theta_{\Lambda} - \Theta_{\Lambda'} &\in {}^0\mathcal{M}_{n/2}^{-}(\ell). \end{aligned}$$

Soit en outre $P \in \text{Harm}_{2h}(\mathbb{R}^n)$, $h \geq 1$. Alors, si $2h \equiv 0 \pmod{4}$,

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, P} + \Theta_{\Lambda', P} &\in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^{+}(\ell), \\ \Theta_{\Lambda, P} - \Theta_{\Lambda', P} &\in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^{-}(\ell), \end{aligned}$$

et, si $2h \equiv 2 \pmod{4}$,

$$\begin{aligned} \Theta_{\Lambda, P} + \Theta_{\Lambda', P} &\in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^{-}(\ell), \\ \Theta_{\Lambda, P} - \Theta_{\Lambda', P} &\in {}^0\mathcal{M}_{n/2+2h}^{+}(\ell). \end{aligned}$$

Ensuite, nous rappelons (sans démonstration) la classification de $\mathcal{M}_{\omega}^{\epsilon}(\ell)$: Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{+}(\ell) &:= \bigoplus_{\omega \geq 0} \mathcal{M}_{\omega}^{+}(\ell), \\ {}^0\mathcal{M}^{+}(\ell) &:= \bigoplus_{\omega > 0} {}^0\mathcal{M}_{\omega}^{+}(\ell), \quad {}^0\mathcal{M}^{-}(\ell) := \bigoplus_{\omega > 0} {}^0\mathcal{M}_{\omega}^{-}(\ell). \end{aligned}$$

8. THÉORÈME. *Soit ℓ égal à 1 ou un nombre premier tel que $\ell + 1$ divise 24. Soient k_0 , k_1 et k_2 donnés par*

$$\begin{aligned} k_0 &= \begin{cases} 4 & \text{si } \ell = 1, \\ 2 & \text{si } \ell \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod{4}, \text{ et } \ell \neq 1, \\ 1 & \text{si } \ell \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \\ k_1 &= \frac{24}{\ell + 1}, \quad k_2 = k_0 + k_1 + 2. \end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{+}(\ell) &= \mathbb{C}[\theta_{2k_0}, \Delta_{2k_1}], \\ {}^0\mathcal{M}^{+}(\ell) &= \Delta_{2k_1} \mathbb{C}[\theta_{2k_0}, \Delta_{2k_1}], \\ {}^0\mathcal{M}^{-}(\ell) &= \Phi_{2k_2} \mathbb{C}[\theta_{2k_0}, \Delta_{2k_1}], \end{aligned}$$

où

$$\theta_{2k_0} \in \mathcal{M}_{k_0}^{+}(\ell), \quad \Delta_{2k_1} \in {}^0\mathcal{M}_{k_1}^{+}(\ell), \quad \Phi_{2k_2} \in {}^0\mathcal{M}_{k_2}^{-}(\ell),$$

sont certaines formes modulaires bien définies.

B.5 Construction de formules de cubature à partir de couches de réseaux

Nous démontrons le lemme suivant, qui est fondamental dans notre analyse :

9. LEMME. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(n)$, et soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble discret invariant par l'action de G . Soient m_1, m_2, \dots, m_r des nombres strictement positifs deux à deux distincts, soit*

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{m_j}} E_{m_j} \subseteq \mathbb{S}^{n-1}, \quad j = 1, \dots, r,$$

où $E_m = \{x \in E \mid \langle x \mid x \rangle = m\}$. Soit $X = \bigcup_{j=1}^r X_j$ et $W_1, \dots, W_r > 0$, et soit k un entier strictement positif.

Supposons qu'il existe des séries formelles

$$\Theta_i = \sum_{m>0} a_i(m) q^m, \quad i = 1, \dots, N$$

telles que, pour tout $P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G$, la série thêta $\Theta_{E,P}$ est de la forme

$$\Theta_{E,P} = c_1(P) \Theta_1 + c_2(P) \Theta_2 + \dots + c_N(P) \Theta_N$$

pour certains $c_i(P) \in \mathbb{C}$.

Alors, pour que la condition

$$\sum_{j=1}^r W_j P(X_j) = 0 \quad \forall P \in \text{Harm}_k(\mathbb{R}^n)^G$$

soit vérifiée, il suffit que

$$\sum_{j=1}^r \frac{a_i(m_j)}{m_j^{k/2}} W_j = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\#)$$

B.6 Applications Nous utilisons les discussions des sections précédentes pour construire des formules de cubature à partir de couches de réseaux Λ , où $\Lambda \in \mathcal{L}at_n(\ell)$. Par exemple, si Λ est le réseau de Leech, nous obtenons une formule de cubature (X, W) de force 15 et de taille 16 949 520, où

$$X = X_1 \cup X_2, \quad \text{avec} \quad X_1 = \frac{1}{\sqrt{4}} \Lambda_4, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda_6,$$

et où $W(x) = W_i$ lorsque $x \in X_i$, $i = 1, 2$, avec

$$W_1 \approx 2,394 \times 10^{-7}, \quad W_2 \approx 0,568 \times 10^{-7},$$

ces nombres étant obtenus en résolvant le système d'équations linéaires (#) du lemme 9.

B.7 Formules de cubature obtenues par notre construction Dans cette section, nous résumons, sous forme de tableaux (pp. 119–121), les formules de cubature obtenues par notre construction, et nous comparons leurs tailles aux bornes inférieures données par la méthode de programmation linéaire.

Bibliographie

- [Andr00] N.N. Andreev, *A minimal design of order 11 on the 3-sphere*, Mat. Zametki **67** (4) (2000) 489–497 (russe) = Math. Notes **67** (4) (2000) 417–424.
- [Bacr97] R. Bacher, *Tables de réseaux entiers construits comme k -voisins de \mathbb{Z}^n* , J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (2) (1997) 479–497.
- [Bach05] Ch. Bachoc, *Designs, groups and lattices*, J. Théor. Nombres Bordeaux **17** (1) (2005) 25–44.
- [BcBnCo04] Ch. Bachoc, E. Bannai, R. Coulangeon, *Codes and designs in Grassmannian spaces*, Discrete Math. **277** (1–3) (2004) 15–28.
- [BcCoNe02] Ch. Bachoc, R. Coulangeon, G. Nebe, *Designs in Grassmannian spaces and lattices*, Journal of Algebraic Combinatorics **16** (2002) 5–19.
- [BacVen01] Ch. Bachoc, B.B. Venkov, *Modular forms, lattices and spherical designs*, chap. 2 de [MartV01].
- [Bajn91] B. Bajnok, *Chebyshev-type quadrature formulas on the sphere*, Congr. Numer. **85** (1991) 214–218.
- [Bann79] E. Bannai, *On tight spherical designs*, J. Combinatorial Theory, Series A **26** (1979) 38–47.
- [Bann79b] E. Bannai, *On some spherical t -designs*, J. Combinatorial Theory, Series A **26** (1979) 157–161.
- [Bann84] E. Bannai, *Spherical t -designs which are orbits of finite groups*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 341–354.
- [Bann84b] E. Bannai, *Spherical designs and group representations*, in: Combinatorics and algebra, C. Greene, Contemporary Mathematics **34** (1984) 95–107.
- [BanDam79] E. Bannai, R. Damerell, *Tight spherical designs, I*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979) 199–207.
- [BanDam80] E. Bannai, R. Damerell, *Tight spherical designs, II*, J. London Math. Soc. (2) **21** (1980) 13–30.
- [BaMuVe02] E. Bannai, A. Munemasa, B. Venkov, appendix by Y-F.S. Pétermann, *The nonexistence of certain tight spherical design*, Algebra i Analiz **16** (4) (2004) 1–23.
- [BekHar02] B. Bekka, P. de la Harpe, appendix with R. Grigorchuk, *Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels Hilbert spaces*, Expo. Math. **21** (2) (2003) 115–149.
- [Berge78] M. Berger, *Géométrie, volume 3*, Cedic / Nathan (Paris) 1978.
- [BoWaZi04] C. Böhm, M. Wang, W. Ziller, *A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds*, Geom. Funct. Anal. **14** (4) (2004) 681–733.
- [BooWan65] W.M. Boothby, H.C. Wang, *On the finite subgroups of connected Lie groups*, Comment. Math. Helv. **39** (1965) 281–294.

- [Borc84] R.E. Borcherds, *The Leech lattice and other lattices*, Ph.D. dissertation, Univ. of Cambridge 1984.
- [BorCS] R.E. Borcherds, *The 24-dimensional odd unimodular lattices*, Chap. 17 de [ConSlo99].
- [Bour68] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann (Paris) 1968.
- [Bour81] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitre 9*, Masson (Paris) 1981.
- [Carm93] M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser (Boston) 1992 (traduit du portugais).
- [CheEbi75] J. Cheeger, D.G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland Publishing (Amsterdam, Oxford), Elsevier (New York) 1975.
- [ConSlo99] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, 3e édition, Springer (New York) 1999.
- [DeGoSe77] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J.J. Seidel, *Spherical codes and designs*, *Geometriae Dedicata* **6** (1977) 363–388.
- [Dick19] L.E. Dickson, *History of the theory of numbers, Vol. II*, Carnegie Institution of Washington 1919, reprinted by Chelsea 1966.
- [Ebel94] W. Ebeling, *Lattices and codes, a course partially based on lectures by F. Hirzenbruch*, Vieweg (Braunschweig) 1994. 2e édition revue, 2002.
- [Eggl58] H.G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge University Press 1958.
- [Elki95a] N.D. Elkies, *A characterization of the \mathbf{Z}^n -lattice*, *Math. Res. Lett.* **2** (3) (1995) 321–326.
- [Elki95b] N.D. Elkies, *Lattices and codes with long shadows*, *Math. Res. Lett.* **2** (5) (1995) 643–645.
- [FulHar91] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer (New-York, Berlin, etc.) 1991.
- [Gasp70] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials, I*, *Canad. J. Math.* **22** (1970) 171–175.
- [Gods89] C.D. Godsil, *Polynomial spaces*, *Discrete Math.* **73** (1–2) (1989) 71–88.
- [Gods93] C.D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall (New York, London) 1993.
- [GoeSei79] J.-M. Goethals, J.J. Seidel, *Spherical Designs*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, XXXIV, 255–272, Amer. Math. Soc. (Providence R.I.) 1979.
- [GoeSei81] J.-M. Goethals, J.J. Seidel, *Cubature formulas, polytopes, and spherical designs*, in: *The geometric vein, the Coxeter Festschrift*, Springer (1981) 203–218.
- [GooWal98] R. Goodman, N.R. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 68, Cambridge University Press (Cambridge) 1998.

- [Gosp78] R.W. Gosper Jr., *Decision procedure for indefinite hypergeometric summation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **75** (1) (1978) 40–42.
- [Gree01] S.J. Greenwald, *Diameters of spherical Alexandrov spaces and curvature one orbifolds*, Indiana Univ. Math. J. **49** (4) (2000) 1449–1479.
- [HadSlo94] R.H. Hardin, N.J.A. Sloane, *Expressing $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3$ as a sum of 23 sixth powers*, J. Combin. Theory, Series A, **68** (1994) 481–485.
- [HadSlo92] R.H. Hardin, N.J.A. Sloane, *New spherical 4-designs*, Discrete Math. **106/107** (1992) 255–264.
- [HadSlo96] R.H. Hardin, N.J.A. Sloane, *McLaren’s improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions*, Discrete Comput. Geom. **15** (1996) 429–441.
- [HarPac04] P. de la Harpe, C. Pache, *Spherical designs and finite group representations (some results of E. Bannai)*, European J. Combin. **25** (2) (2004) 213–227.
- [HarPac05] P. de la Harpe, C. Pache, *Cubature formulas, geometrical designs, reproducing kernels, and Markov operators*, in: *Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects*, Progr. Math. **248** Birkhäuser (2005) 219–268.
- [HaPaVe06] P. de la Harpe, C. Pache, B. Venkov, *Construction of spherical cubature formulas using lattices*, Algebra i Analiz **18** (2006), à paraître \simeq chapitre B de cette thèse.
- [HarVen01] P. de la Harpe, B. Venkov, *Sur les spectres de l’opérateur de Markov de quelques designs sphériques remarquables*, Genève, 2001.
<http://www.unige.ch/math/biblio/preprint/2001/venkov.ps>
- [HarVen01b] P. de la Harpe, B. Venkov, *Groupes engendrés par des réflexions, designs sphériques et réseau de Leech*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001) 745–750.
- [Helg00] S. Helgason, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, corrected reprint of the 1984 original, Mathematical Surveys and Monographs 83, Amer. Math. Soc. (Providence, RI) 2000.
- [Hump90] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press 1990.
- [Kupe-a] G. Kuperberg, *Numerical cubature using error-correcting codes*, arXiv:math.NA/0402047.
- [Kupe-b] G. Kuperberg, *Numerical cubature from Archimedes’ hat-box theorem*, arXiv:math.NA/0405366.
- [Lehm47] D.H. Lehmer, *The vanishing of Ramanujan’s function $\tau(n)$* , Duke Math. J. **14** (1947) 429–433.
- [Leven92] V.I. Levenshtein, *Designs as maximum codes in polynomial metric spaces*, Acta Appl. Math. **29** (1–2) (1992) 1–82.
- [Leven98] V.I. Levenshtein, *Universal bounds for codes and designs*, in: Handbook of coding theory, Vol. I, 499–648, Amsterdam (1998) 499–648.

- [MartV01] J. Martinet ed., *Réseaux Euclidiens, designs sphériques et formes modulaires, Autour des travaux de B. Venkov*, L'Enseignement Mathématique, monographie n° 37 (Genève) 2001.
- [MonZip42] D. Montgomery, L. Zippin, *A theorem on Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942) 448-452.
- [MonZip55] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological Transformation Groups*, Interscience Publishers (New York, London) 1955, reprint: Krieger (Huntington NY) 1974.
- [Myer41] S.B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941) 401-404.
- [NebVen00] G. Nebe, B. Venkov, *The strongly perfect lattices of dimension 10*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2) (2000) 503-518.
- [NebVen05] G. Nebe, B. Venkov, *Low-dimensional strongly perfect lattices. I. The 12-dimensional case*, Enseign. Math. (2) **51** (1-2) (2005) 129-163.
- [NikNik02] S. Nikova, V. Nikov, *Improvement of the Delsarte bound for τ -designs when it is not the best bound possible*, Des. Codes Cryptogr. **28** (2) (2003) 201-222.
- [Pach04] C. Pache, *Sur le spectre des opérateurs de Markov de designs sphériques*, European J. Combin. **25** (4) (2004) 591-620.
- [Pach05] C. Pache, *Shells of selfdual lattices viewed as spherical designs*, Internat. J. Algebra Comput., **15** (5-6) (2005) 1085-1127 \simeq chapitre A de cette thèse.
- [PeWiZe96] M. Petrovšek, H.S. Wilf, D. Zeilberger, *A = B*, A.K. Peters, 1996. Website: <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html>
- [Queb95] H.-G. Quebbemann, *Modular lattices in Euclidean spaces*, J. Number Theory **54** (2) (1995) 190-202.
- [Rank77] R.A. Rankin, *Modular forms and functions*, Cambridge University Press, 1977.
- [RayWil75] D.K. Ray-Chaudhuri, R.M. Wilson, *On t -designs*, Osaka J. Math. **12** (3) (1975) 737-744.
- [Sali75] G.N. Salihov, *Cubature formulas for a hypersphere that are invariant with respect to the group of the regular 600-face*, Dokl. Adad. Nauk. SSSR **16** (1975) 1046-1049 (russe) = Soviet Math. Dokl. **16** (4) (1975) 1046-1050.
- [SchSch99] R. Scharlau, R. Schulze-Pillot, *Extremal lattices*, in: *Algorithmic algebra and number theory (Heidelberg, 1997)*, Springer (Berlin) (1999) 139-170.
- [Serr85] J.-P. Serre, *Sur la lacunarité des puissances de η* , Glasgow Math. J. **27** (1985) 203-221 = Œuvres, Volume IV, 66-84, see also 640.
- [SeyZas84] P.D. Seymour, T. Zaslavsky, *Averaging sets: a generalization of mean values and spherical designs*, Adv. in Math. **152** (1984) 213-240.
- [Side99] V.M. Sidelnikov, *Spherical 7-designs in 2^n -dimensional Euclidean space*, J. Algebraic Combin. **10** (3) (1999) 279-288.
- [Smit95] L. Smith, *Polynomial invariants of finite groups*, A.K. Peters (Wellesley) 1995.

- [Sobo62] S.L. Sobolev, *Cubature formulas on the sphere which are invariant under transformations of finite rotation groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **146** (1962), 310–313 (russe).
- [SobVas96] S.L. Sobolev, V.L. Vaskevich, *Курбатурные формулы*, edited and with a contribution by M.D. Ramazanov, Izdatel'stvo Rossiiskoi Akademii Nauk, Sibirskoe Otdelenie, Institut Matematiki im. S.L. Soboleva (Novosibirsk) 1996.
The theory of cubature formulas, translated from the 1996 Russian original and with a foreword by S.S. Kutateladze, Kluwer Academic Publishers Group (Dordrecht) 1997.
- [Venk78] B.B. Venkov *The classification of integral even unimodular 24-dimensional quadratic forms*, Trudy Mat. Inst. Steklova **148** (1978) 65–76 = Proc. Steklov Inst. Math. n°4 (1980) 63–74
 \simeq *Even Unimodular 24-Dimensional Lattices*, Chap. 18 of [ConSlo99].
- [Venk79] B.B. Venkov, *Odd unimodular lattices*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) **86** (1979) 40–48.
- [Venk84] B.B. Venkov, *Even unimodular extremal lattices*, Tr. Mat. Inst. Steklova **165** (1984) 43–48 (russe) = Proc. Steklov Inst. Math. **165** (3) (1985) 47–52.
- [VenMar01] B.B. Venkov (notes par J. Martinet), *Réseaux et designs sphériques*, Chap. 1 of [MartV01].
- [Vile68] N.Ya. Vilenkin, *Специальные функции и теория представлений групп*, second edition, Nauka (Moscow) 1991.
Special functions and the theory of group representations, Transl. Math. Monographs 22, Amer. Math. Soc. (Providence R.I.) 1968.
Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod (Paris) 1969.
- [Voro08] G. Voronoi, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques : 1. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites*, J. reine angew. Math. **133** (1908) 97–178.
- [Wagn91] G. Wagner, *On averaging sets*, Monatsh. Math. **111** (1) (1991) 69–78.
- [Wang56] H.-C. Wang, *Two-point homogeneous spaces*, Ann. Math. **55** (2) (1952) 177–191.
- [Yudi97] V.A. Yudin, *Lower bounds for spherical designs*, Investiya Math. **61** (3) (1997) 213–223.