



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

Archive ouverte UNIGE

<https://archive-ouverte.unige.ch>

Thèse

2017

Open Access

This version of the publication is provided by the author(s) and made available in accordance with the copyright holder(s).

Une généralisation non-commutative des équations de recollement de Thurston

Morvan, Xavier

How to cite

MORVAN, Xavier. Une généralisation non-commutative des équations de recollement de Thurston. Doctoral Thesis, 2017. doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:98330

This publication URL: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:98330>

Publication DOI: [10.13097/archive-ouverte/unige:98330](https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:98330)

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Section de Mathématiques

FACULTÉ DES SCIENCES

Professeur Rinat Kashaev

Une généralisation non-commutative des équations de recollement de Thurston

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences, mention Mathématiques

par

Xavier MORVAN

de

Béziers (France)

Thèse N°5130

GENÈVE

Atelier d'impression ReproMail

2017



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

FACULTÉ DES SCIENCES

DOCTORAT ÈS SCIENCES, MENTION MATHÉMATIQUES

Thèse de Monsieur Xavier Alexandre William MORVAN

intitulée :

«Une généralisation non-commutative des équations de recollement de Thurston»

La Faculté des sciences, sur le préavis de Monsieur R. KASHAEV, professeur associé et directeur de thèse (Section de mathématiques), Madame M. KARLSSON BUCHER, docteure (Section de mathématiques), Monsieur C. BLANCHET, professeur (Institut de mathématiques de Jussieu, Université Paris Diderot, Paris, France), Monsieur L. FUNAR, docteur (Institut Fourier, Laboratoire de mathématiques, Université de Grenoble, France), autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 9 octobre 2017

Thèse - 5130 -

Le Doyen

Remerciements

Une thèse de doctorat en mathématiques, par l'ampleur de l'effort qu'elle exige et les différents stades émotionnels qu'elle suscite, ne saurait être correctement aboutie sans le soutien ou la compagnie de diverses personnes ; soutien et compagnie qui peuvent être d'ordre mathématique ou amical, quotidien ou ponctuel... À ce titre, vous avez été nombreux à contribuer indirectement à ce travail de thèse. Cette traditionnelle page de remerciements vous est dédiée.

Le plus gros des mercis est sans conteste destiné à Rinat, mon directeur de thèse, pour m'avoir initié à la recherche mathématique, pour sa disponibilité, pour la clarté de ses explications, pour m'avoir ordonné de m'inscrire à la course de l'escalade, pour nos nombreuses discussions sportives, pour avoir construit, quelque temps avant le début de ma thèse, un anneau non-commutatif pas comme les autres, pour toutes les relectures attentives de ce manuscrit, pour ses remarques, pour ...

Je remercie aussi Christian Blanchet, Michelle Bucher et Louis Funar pour avoir accepté d'être membres du jury. Je suis par ailleurs reconnaissant envers Christian de m'avoir présenté Rinat, de m'avoir invité à Paris pour présenter mon travail au séminaire de topologie et pour son amicalité ; et envers Michelle, que j'ai pris beaucoup de plaisir à assister en géométrie hyperbolique.

La section de mathématiques de l'université de Genève mérite toute ma gratitude ; ses murs, son sol, ses lumières, son rouleau d'essuie-mains, son savon, ses toilettes, sa cabine de douche : rien n'a jamais failli !

Son z-bar, son très accueillant bureau 607 !

Ses membres, présents et passés, et l'ensemble de leur œuvre : Yacine, Maxime, Jérémy, Anthony, Adélie, Solenn, Teresa, Caroline, Lauren, Corina, Joselle, qui résoud tous les problèmes avant qu'ils n'apparaissent, les Deuxièmes, qui hantent le z-bar, the hair and the shoes of Florian : always perfect, Felix et Gilles, qui ont su apprécier à sa juste valeur la compagnie de mes chaussettes mouillées, le repas Halloween de Fathi et Marie, les spectacles de danse de Lida, les vendredi soir chez Sacha, Élise et sa passion des pantalons baggy et pulls grosse maille, les blagues de Marie, Mounir et ses dégustations de jus de fruits, Mister Professeur Anders, Matteo qu'on ne se lasse pas de regarder, Mucyo mon prof de ski, Jhih-Huang assistant jardinier... malheureusement, j'en oublie forcément...

Je souhaite aux petits frères Eiichi et Alan une réussite exemplaire.

Je remercie chaleureusement les membres de conf, pour leur calme, leur sérieux et les nuits paisibles : Marco, Renaud, Maylis, Guillem, Ben, Delphine, etc.

Genève est un gros village au bord d'un lac, et le monde est vaste. Alors, même le

plus assidu des doctorants, présent jours et nuits au bureau, y travaillant, y mangeant, y dormant, ou autre, est un jour tenté de poser un pied hors de la rue du Lièvre. J'en ai bien peur, cela m'est arrivé... Et je dois le reconnaître, dans ces lieux dépeuplés de plongement de S^1 dans S^3 , dépeuplés de tétraèdres, dans ces lieux sans feuille de brouillon à portée de main, sans tableau noir, sans craie, sans livre jaune, sans mention d'**errors**, de **warning** ni de **badboxes**, j'étais malgré tout très bien entouré. Je n'aurais pu être plus chanceux ; maths, rencontres heureuses et souvenirs indélébiles : cela résume mes six dernières années. En plus des personnes précédemment citées, j'ai une pensée pleine d'affection pour les suivantes :

Jeanne et heu... Alici... hum... Elisa ;

{Caterina, Máté, Soheil, Hester} ;

Anne-Sophie, bibliothécaire de profession, qui ne prolonge pas seulement les prêts à distance, mais offre aussi des tisanes, des muffins et vide l'esprit ;

Blandine, qui prend soin de Jonny ;

Paul-Henry et Valentine, que j'ai vus courir quasiment à poil en plein hiver, parce que j'étais derrière, ou devant... enfin, vite ! plouf !

Linda, she is cheeky ;

Alexey et son bidon d'eau claire ;

Zdenička, un traducteur en ligne me dit d'elle : trochu šléný ;

Tona-jamais en France-tiuh ;

Pierre-Alain et Shaula qui bavardent, qui n'ont pas le temps mais qui bavardent... et, surtout, qui vulgarisent, et qui ont besoin d'un peu d'aide pour vulgariser : le début de la suite... ;

Sandie, elle n'a pas d'accent mais elle a tout ;

Arnaud, qui m'a majestueusement secouru lorsque j'étais en rade au milieu de l'Atlantique ;

Jonny !

La propriétaire de cette maison en pierres, à l'intersection du Tarn, de l'Hérault et de l'Aveyron (celle qui est au bord d'une rivière), qui m'a permis d'y rédiger de nombreuses lignes des pages qui suivent ;

Monsieur Basket, Monsieur Bicyclette et Monsieur Maths, pour l'ensemble de leur carrière.

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	1
1 Préliminaires	5
1.1 Géométrie hyperbolique	5
1.1.1 Modèle de l'hyperboloïde	6
1.1.2 Le modèle de la boule de Poincaré	6
1.1.3 Modèle du demi-espace supérieur	6
1.1.4 Isométries	7
1.1.5 Dimension 3	7
1.1.6 Le bord de \mathbb{H}^3	9
1.1.7 Classification des isométries préservant l'orientation	9
1.1.8 Horosphères	9
1.1.9 Simplexes idéaux	9
1.2 Variétés	10
1.2.1 Espaces métriques	10
1.2.2 Groupes discrets	11
1.2.3 (X, G) -variétés	12
1.2.4 Développante et holonomie	15
1.2.5 Complétude	17
2 Triangulations	23
2.1 Triangulations	23
2.2 Algorithme de triangulation, exemple du nœud de huit	27
2.3 Exemple du nœud de trèfle	30
2.4 Structure hyperbolique	30
2.4.1 Équations de recollement	30
2.4.2 Structure hyperbolique complète	35
2.4.3 Équation de complétude	38
2.4.4 Exemple du nœud de huit	39
2.4.5 H-triangulations et équations de recollement	41
3 Une généralisation non commutative	45
3.1 Introduction	45
3.2 Preliminaries	46
3.2.1 Triangulations	46
3.2.2 Definition of R_H	47
3.3 A ring homomorphism from R_I to R_H	48
3.4 Proof of the main theorem	50

3.5	Examples	54
3.5.1	Figure-eight knot	54
3.5.2	A knot in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$	55
3.5.3	Knot in $L(3, 1)$	55
	Bibliographie	59

Introduction

Cette thèse traite principalement des triangulations idéales des variétés topologiques de dimension 3 et des informations sur la possibilité d'associer à une telle variété une structure hyperbolique. Triangler une variété de dimension 3 consiste en la décomposer en union de tétraèdres et encoder le recollement des faces et arêtes. La procédure inverse est aussi pratiquée : obtenir une variété topologique de dimension 3 à partir d'accolement de tétraèdres. Dans les deux cas, l'idée est d'étudier ou d'obtenir un objet « compliqué » à partir des objets de dimension 3 les plus simples qui soient, les tétraèdres. Dans cette thèse nous abordons principalement le cas des variétés de dimension 3, mais une procédure analogue existe en toute dimension, où les tétraèdres sont remplacés par des simplexes de bonne dimension. En pratique, plusieurs définitions plus ou moins fortes peuvent porter le terme générique de triangulation, mais cela sera caché dans le cadre de cette simple introduction. La figure 1 montre deux exemples de dimension 2 qu'il est intuitivement aisé de comprendre : la sphère et le tore (bouée ou donut). Voici quelques temps historiques clés de la progression dans ce domaine de recherche.

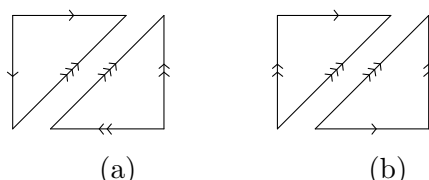


FIGURE 1 – En (a), une triangulation de la sphère ; en (b), une triangulation du tore

L'histoire commence en 1895, avec Poincaré qui pose dans *Analysis Situs* les fondements de la topologie algébrique, et en 1899 dans *Complément à l'Analysis Situs* (le premier des cinq compléments), il se pose notamment la question, en formulation moderne : toute variété lisse admet-elle une triangulation ? C'est par ailleurs aussi dans *Analysis Situs* et ses cinq compléments, que sont définies les notions de groupe fondamental et d'homologie simpliciale, et que l'auteur se pose une question rendue célèbre par la suite *via* sa reformulation en conjecture, dite conjecture de Poincaré. Dans ce contexte, la motivation des triangulations prend tout son sens. En 1908, Steinitz et Tietze formulent la conjecture suivante, appelée *l'Hauptvermutung* (conjecture principale en allemand) : deux triangulations d'un espace triangulable ont une subdivision commune (qui est une triangulation de l'espace de départ). En 1912, Gieseking [9] propose un exemple de variété hyperbolique complète de dimension 3 en accolant des faces de tétraèdres. Cette variété est non-orientable et son revêtement double est homéomorphe au complémentaire du nœud de huit. En 1924, Kneser généralise aux variétés topologiques la question de Poincaré relative aux triangulations et en 1925, Radó répond partiellement à ces deux questions : Si M est une variété topologique de dimension 2, M est triangulable de manière unique

à subdivision près [29]. En 1931, Löbell construit le premier exemple de variété hyperbolique fermée de dimension 3 en accolant huit copies d'un polyèdre hyperbolique à 14 faces et à angles droits. Seifert et Weber en 1933, [40], construisent une variété hyperbolique en accolant des faces d'un dodécaèdre. En 1952, Moïse démontre que toute variété topologique de dimension 3 admet une unique structure de variété lisse et la classification à homéomorphisme ou difféomorphisme près coïncident. De plus, toute variété de dimension 3 est triangulable de manière unique à subdivision près [23]. En 1969, Kirby et Siebenmann, [14], proposent des conditions nécessaires pour l'existence et l'unicité des triangulations de variétés topologiques de dimension supérieure ou égale à 5. Ils en déduisent que pour des variétés de dimension supérieure à 6, une même variété peut avoir plusieurs triangulations non-équivalentes. En 1961, Milnor démontre grâce à la torsion de Reidmeister que *l'Hauptvermutung* est fausse si l'on n'exige pas que l'espace en question soit une variété [21]. En 1968, Mostow [25], démontre le théorème dit de rigidité, dont voici une reformulation équivalente :

Théorème 0.0.1 *Si M et N sont deux variétés Riemanniennes compactes de courbure négative constante et de dimension supérieure ou égale à 3, et si $\phi : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, alors ϕ est isotope à une isométrie.*

Il est équivalent de dire que s'il existe un isomorphisme entre le groupe fondamental de M et celui de N , alors il est induit par une unique isométrie entre M et N . Un travail de Prasad (1973, [28]) et de Marden (1974, [18]) permet d'étendre ce résultat aux variétés hyperboliques de volume fini. En 1971, Best propose d'autres exemples de variétés hyperboliques obtenues en accolant des polyèdres, [5], et Maskit énonce des conditions nécessaires et suffisantes pour que le recollement d'un polyèdre induise une structure hyperbolique sur la variété, [19]. En 1975, Seifert énonce des conditions nécessaires et suffisantes pour que, plus généralement, le recollement de plusieurs polyèdres induise une variété hyperbolique [35]. En 1975, Riley démontre que le complémentaire du nœud de huit admet une structure hyperbolique complète [31] et en 1979, il montre que les complémentaires des entrelacs de Whitehead et des anneaux Borroméens ont une structure hyperbolique complète [32]. En 1976, l'étude des variétés de dimension 3 prend un tournant avec la conjecture de géométrisation de Thurston, affirmant que l'intérieur de toute variété compacte de dimension 3 peut être décomposé, de manière canonique, en morceaux que l'on peut munir d'une géométrie connue parmi une liste de huit ; l'une d'entre elles étant la géométrie hyperbolique. La décomposition en question se fait premièrement le long de sphères, puis le long de tores. En 1978, Thurston donne un cours à Princeton dont sont issues les fameuses *Princeton notes*, [36], le cœur théorique de ce travail de thèse. Il y propose notamment la première triangulation du complémentaire du nœud de huit et définit les équations de recollement et de complétudes décrites et étudiées dans cette thèse. En 1982 [37], Thurston publie les grandes lignes de la démonstration d'un cas particulier de cette conjecture, le théorème dit d'hyperbolisation, sans jamais en publier une preuve complète (il en explique les raisons ainsi qu'un point de vue intéressant sur la communication entre mathématiciens dans [38]) :

Théorème 0.0.2 *Soit M une variété compacte de Haken de dimension 3. L'intérieur de M admet une structure de variété hyperbolique complète si et seulement si M est atoroidale. De plus, le volume de M est fini si et seulement si le bord de M est une union (éventuellement vide) de tores.*

Notons qu'une variété M est *atoroidale* si tout tore incompressible est homotope à une composante de bord de M , ce qui est le cas si M est le complémentaire dans \mathbb{S}^3 d'un nœud

ni torique, ni satellite ; une variété de Haken est une variété compacte incluant une surface incompressible. Le théorème de rigidité, le théorème d'hyperbolisation et la conjecture de géométrisation munissent la géométrie hyperbolique d'une importance capitale dans l'étude des variétés de dimension 3. De surcroît, si la conjecture de géométrisation est vraie, alors la conjecture de Poincaré l'est aussi. Gucul en 1979, Monlnár en 1989, Aitchison et Rubinstein en 1990-1992, puis Everitt en 2004, construisent d'autres exemples de variétés hyperboliques complètes [24, 1, 2, 7]. À la fin des années 80, Weeks publie le code source de SnaPea, logiciel d'étude des variétés de dimension 3 qui inclut un algorithme de triangulation idéale de complémentaire de nœuds. Depuis leur publication, les équations de recollement ont été intensivement étudiées, par exemple [15, 16, 26, 27, 33, 34]. En 1982, Freedman construit une variété de dimension 4, la variété E8, qui n'est pas triangulable [8]. Puis, les travaux de Donaldson de 1983, [6], impliquent qu'il existe des variétés topologiques de dimension 4 qui ont une infinité de triangulations différentes. En 2003, Perelman met en ligne trois articles qui démontrent la conjecture de géométrisation de Thurston. En 2013, Manolescu démontre qu'il existe des variétés compactes de dimension supérieure ou égale à 5 qui ne sont pas triangulables [17].

Dans le chapitre 1, nous rappelons dans une première section, les notions de base de la géométrie hyperbolique. Ces notions sont bien connues et abondamment présentes dans la littérature mathématique. Nous les présentons de manière concise, en nous restreignant aux informations utiles par la suite et en omettant les preuves lorsqu'elles n'éclairent pas la compréhension globale. Nous commençons donc par décrire les différents modèles de la géométrie hyperbolique : modèle de l'hyperboloïde, modèle de la boule de Poincaré, modèle du demi-espace supérieur. Sont ensuite définies et classifiées les isométries préservant l'orientation de l'espace hyperbolique de dimension 3, \mathbb{H}^3 , en passant par une description précise du bord de \mathbb{H}^3 . Nous terminons cette section par la définition d'horosphère et de simplexe idéal, notions utilisées à de nombreuses reprises par la suite. Dans la deuxième section de ce même chapitre, nous abordons la théorie des variétés géométriques. À partir du rappel de la définition d'objets propres aux espaces métriques tels que les géodésiques, nous définissons les espaces géométriques, dont l'exemple le plus connu est l'espace euclidien. Nous consacrons ensuite une section aux groupes discrets et à leurs propriétés, sans démonstration ; avant de définir la notion clé de (X, G) -variété, où X est un espace géométrique simplement connexe et G est un groupe de similitudes de X , et d'en étudier, en les démontrant, les propriétés utiles dans le cadre de ce manuscrit. S'en suivent les définitions et propriétés d'application développante et d'holonomie, nécessaires à l'étude de la géométrie et de la complétude des (X, G) -variétés géodésiquement connexes, thème par lequel nous terminons ce chapitre, toujours en démontrant la plupart des résultats.

Le chapitre 2 porte sur les triangulations de 2-variétés et 3-variétés. Nous commençons, dans la première section, par définir les différentes triangulations utilisées dans ce travail de doctorat : triangulations de 2-variétés, et deux types intrinsèquement liés de triangulations de 3-variétés : H-triangulations et triangulations idéales. Nous énonçons ensuite, sans le démontrer, un théorème liant les triangulations de variétés et les structures de (X, G) -variétés. Dans la section qui suit, nous présentons un algorithme permettant d'obtenir des triangulations à partir d'un nœud, K , dans la sphère de dimension 3, S^3 : soit une H-triangulation du couple (S^3, K) , soit une triangulation idéale du complémentaire de K dans S^3 ; et nous appliquons cet algorithme au nœud de huit et au nœud de trèfle (troisième section). Dans la quatrième section de ce chapitre, nous présentons les équations de recollement de Thurston : équations polynômiales permettant de décrire l'ensemble des structures hyperboliques dont peut être munie un complémentaire de nœud, et obtenues à partir d'une triangulation idéale. Nous traitons aussi, en démontrant l'ensemble des

résultats, d'une équation polynômiale supplémentaire qui permet de déterminer laquelle des solutions aux équations de recollement de Thurston correspond à une structure hyperbolique complète, si elle existe. Enfin, nous démontrons la proposition 2.4.10 qui permet de retrouver toutes les équations polynômiales précédemment mentionnées à partir d'une H-triangulation ; il s'agit du premier résultat original de cette thèse.

Enfin, dans le chapitre 3, nous reprenons très sommairement l'ensemble des notions utiles, afin de rendre le chapitre autocontenu, puis nous abordons la construction du principal résultat de cette thèse. Il s'agit dans un premier temps de se référer à un travail précédemment publié de Rinat Kashaev, à savoir la construction d'un anneau, \tilde{R}_H , à partir d'une H-triangulation d'un couple (M, K) ; construction purement algébrique et motivée par la possibilité de définir des représentations du groupe du nœud dans $GL(2, R_H)$. L'anneau \tilde{R}_H n'est par construction, pas nécessairement commutatif. Il ne l'est par exemple pas pour le nœud de huit. Ensuite, nous démontrons que l'abélianisé de cet anneau est isomorphe à l'anneau des fonctions rationnelles sur l'ensemble des solutions des équations de recollement de Thurston, si la variété M est une sphère d'homologie entière. Nous terminons avec des exemples de couple (M, K) où M n'est pas une sphère d'homologie entière, et pour lesquelles ce théorème est faux. Ce dernier chapitre constitue à peu de modifications près, un article soumis à une revue à comité de lecture.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Géométrie hyperbolique

Dans cette thèse, nous allons beaucoup parler de structure géométrique dont peut être munie une variété. Il en existe plusieurs, la plus connue étant bien entendu la géométrie Euclidienne, mais il existe deux autres grandes géométries : la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique. Cette dernière sera celle qui va le plus nous intéresser. Ces géométries sont définies sur des variétés Riemanniennes de courbure 0 pour la géométrie Euclidienne ; 1 pour la géométrie sphérique ; -1 pour la géométrie hyperbolique.

La dimension 3 sera la plus longuement abordée : l'espace hyperbolique de dimension 3 est l'unique variété Riemannienne connexe et simplement connexe, complète et de courbure constante égale à -1.

La surface de révolution immergée dans \mathbb{R}^3 , de courbure -1, la plus pratique afin de comprendre *localement* la géométrie hyperbolique est la *pseudosphère* : la surface de révolution engendrée par une *tractrice*, à savoir une courbe plane définie par la propriété que la distance entre un point de la courbe et l'intersection de la tangente en ce point avec l'axe des abscisses est constante. Cette surface n'est pas complète, c'est à dire qu'une géodésique entre deux points ne peut pas être prolongée à l'infini. Cela dit,

Théorème 1.1.1 *Hilbert, 1901* *Aucune surface \mathcal{C}^2 complète, de courbure -1 ne peut être plongée dans \mathbb{R}^3 .*

Ainsi, chacun des modèles de géométrie hyperbolique planaire dans \mathbb{R}^3 consiste à distordre l'espace (de manière analogue, différentes cartes représentent la Terre en conservant les angles, ou les aires, etc.). Nous allons donc décrire certains modèles isométriques d'espaces de dimension n en supposant toujours $n \geq 2$.

Définition 1.1.2 *L'espace hyperbolique de dimension 3, noté \mathbb{H}^3 , est l'unique variété Riemannienne de dimension 3 qui vérifie les trois conditions suivantes :*

1. \mathbb{H}^3 est connexe et simplement connexe ;
2. \mathbb{H}^3 est complète ;
3. \mathbb{H}^3 est de courbure sectionnelle constante et égale à -1.

La section sur l'espace hyperbolique est classique, de nombreuses informations détaillées peuvent être trouvées dans de précieux ouvrages. J'ai essentiellement suivi [4]. La section sur les variétés suit [30]. Ces notions sont traitées de manière plus ou moins détaillée, mais tout aussi intéressantes dans [4, 36, 39].

1.1.1 Modèle de l'hyperboloïde

Soit \mathbb{R}^{n+1} muni de la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x|y \rangle_{(n,1)} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$$

et considérons l'ensemble

$$I_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x|x \rangle_{(n,1)} = -1, x_{n+1} > 0\},$$

et son espace tangent :

$$T_x I_n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x|y \rangle_{(n,1)} = 0\} = \{x\}^\perp.$$

Un calcul simple permet de montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle_{(n,1)}$ se restreint à un produit scalaire sur $\{x\}^\perp$, dont la métrique associée est différentiable; et munit donc I_n d'une structure de variété Riemannienne. Nous noterons \mathbb{I}^n , l'ensemble I_n muni de cette structure. Et la distance hyperbolique, d_I , entre deux points x et y de \mathbb{I}^n s'écrit

$$\cosh d_I(x, y) = -\langle x|y \rangle_{(n,1)}.$$

Soit $O(n, 1)$ le groupe d'isomorphismes linéaires de \mathbb{R}^{n+1} qui préservent $\langle \cdot | \cdot \rangle_{(n,1)}$. Le groupe d'isométries de \mathbb{I}^n est le sous-groupe de $O(n, 1)$ qui laisse \mathbb{I}^n invariant.

Une géodésique dans \mathbb{I}^n est une intersection non vide entre un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et I_n .

1.1.2 Le modèle de la boule de Poincaré

Soit π la restriction à I_n de la projection stéréographique selon le point $(0, \dots, 0, -1)$, de \mathbb{R}^{n+1} , sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ (nous omettons en fait la dernière coordonnée) :

$$\pi(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_{n+1}}.$$

π est alors un difféomorphisme de I_n vers la boule euclidienne ouverte $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < 1\}$. Cette boule munie de la métrique induite par π^{-1} sera notée \mathbb{D}^n . La distance d_P dans ce modèle s'écrit

$$\cosh d_P(x, y) = \frac{1 + 2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

Dans ce modèle, les géodésiques sont les droites et les arcs de cercles orthogonaux au bord.

1.1.3 Modèle du demi-espace supérieur

Soit i l'inversion par rapport à la sphère de centre $-e_n$ et de rayon $\sqrt{2}$:

$$i : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto 2 \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - e_n$$

où $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

Cette inversion est un difféomorphisme de D^n vers $\Pi^{n,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Nous noterons $\mathbf{\Pi}^{n,+}$ ce demi-espace supérieur muni de la métrique induite par i^{-1} , à savoir

$$\cosh d_{\Pi}(x, y) = 1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

Dans ce modèle, les géodésiques sont les parties de demi-cercles orthogonaux au bord et les droites verticales.

1.1.4 Isométries

Le groupe d'isométries d'une variété Riemannienne M sera noté $\mathcal{I}(M)$, et $\mathcal{I}^+(M)$ représentera le groupe d'isométries préservant l'orientation. Le groupe d'isométries d'une variété Riemannienne est par définition l'ensemble suivant muni de la loi de composition :

$\{f : M \rightarrow M \mid f \text{ est bijective et}$

$$\forall x \in M, \forall v, w \in T_x M, \langle d_x f(v) \mid d_x f(w) \rangle_{f(x)} = \langle v \mid w \rangle_x\},$$

où $T_x M$ est l'espace tangent à M en x , $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ est le produit scalaire défini sur $T_x M$ et $d_x f$ est la différentielle de f en x . Ou, de manière équivalente :

$\{f : M \rightarrow M \mid f \text{ est bijective et}$

$$\forall x, y \in M, d(f(x), f(y)) = d(x, y)\}.$$

1.1.5 Dimension 3

Les variétés de dimension 3 sont celles qui vont le plus nous intéresser par la suite, nous allons donc nous attarder un peu sur ce cas ; notamment en étudiant les isométries de \mathbb{H}^3 . Plaçons-nous dans le modèle du demi-espace supérieur. Les isométries de $\mathbf{\Pi}^{3,+}$ sont des difféomorphismes conformes qui préservent \mathbb{R}^3 , soit des applications de la forme

$$\xi \mapsto \lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r(\xi) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A \in O(2, \mathbb{R})$, $\lambda > 0$, $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et r est soit l'identité, soit une inversion par rapport à une sphère orthogonale à $\partial\Pi^{3,+}$.

$\Pi^{3,+}$ peut être vu comme sous-ensemble des quaternions, \mathcal{H} , et cela est utile afin de déterminer $\mathcal{I}^+(\mathbf{\Pi}^{3,+})$:

$$\Pi^{3,+} = \{x + \mathbf{i}y + \mathbf{j}t + \mathbf{k}s \in \mathcal{H} \mid s = 0, t > 0\}.$$

Avec cette notation, les isométries qui préservent l'orientation s'écrivent de la même manière que précédemment, avec $A \in SO(2, \mathbb{R})$ et r est soit l'identité, soit la composition d'une inversion par rapport à une sphère orthogonale à $\partial\Pi^{3,+}$ et la réflexion $z + \mathbf{j}t \mapsto \bar{z} + \mathbf{j}t$. Rappelons que par définition, $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm \text{Id}\}$.

Théorème 1.1.3 Soit l'application $\Phi : PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{I}^+(\mathbf{\Pi}^{3,+})$:

$$\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \xi \mapsto (a\xi + b)(c\xi + d)^{-1}$$

où le produit et l'inverse sont ceux de \mathcal{H} . Alors Φ est un isomorphisme de groupes.

Preuve Premièrement, un calcul direct en utilisant les règles de \mathcal{H} permet de montrer que $\Phi(AB) = \Phi(A) \cdot \Phi(B)$.

Pour montrer que l'image de Φ est bien incluse dans $\mathcal{I}^+(\Pi^{3,+})$, nous allons utiliser la propriété de tout élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $PSL(2, \mathbb{C})$, où $c \neq 0$, de se décomposer en

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

et il suffit de montrer que chacune de ces deux matrices de droite a une image par Φ qui est un difféomorphisme conforme qui préserve $\Pi^{3,+}$ et préserve l'orientation.

Soit $\xi \in \Pi^{3,+}$, alors

$$\Phi \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\xi) = \alpha - \xi^{-1}$$

est bien conforme, préserve l'orientation et préserve $\Pi^{3,+}$, car $-\xi^{-1} \in \Pi^{3,+}$.

Écrivons $\xi = z + \mathbf{j}t$, alors

$$\Phi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} (\xi) = |\alpha|^2 \left(\frac{\alpha^2}{|\alpha|^2} z + \mathbf{j}t \right) + \beta$$

qui est bien conforme, préserve l'orientation et préserve $\Pi^{3,+}$.

Montrons maintenant que Φ est injective :

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C})$ telle que $\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Id} \in PSL(2, \mathbb{C})$. Autrement dit, pour tout $\xi \in \Pi^{3,+}$

$$(a\xi + b)(c\xi + d)^{-1} = \xi.$$

Notons $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Si $\xi = \mathbf{j}t$ où $t \in \mathbb{R}^+$, on a $c = 0$. Il s'ensuit, grâce à l'égalité $ad - bc = 1$, que $b = 0$, $a^2 = 1$ et $d^{-1} = a$. Donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

toutes deux dans la classe d'équivalence de l'identité dans $PSL(2, \mathbb{C})$.

Enfin, Φ est surjective : Reprenons l'écriture suivante pour un élément de $\mathcal{I}^+(\Pi^{3,+})$:

$$\xi \mapsto \lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r(\xi) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $A \in SO(2, \mathbb{R})$ et r est soit l'identité, soit la composition d'une inversion par rapport à une sphère orthogonale à $\partial\Pi^{3,+}$ et la réflexion $z + \mathbf{j}t \mapsto \bar{z} + \mathbf{j}t$. Nous en déduisons que cet élément de $\mathcal{I}^+(\Pi^{3,+})$ peut s'écrire sous la forme

$$\xi \mapsto \Phi(B)(r(\xi))$$

où $B \in PSL(2, \mathbb{C})$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$. Il suffit donc de s'assurer que $r(\xi)$ se trouve dans l'image de Φ . Il est clair que l'application identité est dans l'image de Φ . Sans perte de généralité, au prix d'une conjugaison par un élément de l'image de Φ , on peut supposer que r est la composition de la réflexion $z + \mathbf{j}t \mapsto \bar{z} + \mathbf{j}t$ avec l'inversion par rapport à la sphère de centre 0 et rayon 1. Une telle inversion est donnée par $\xi \mapsto \frac{\xi}{|\xi|^2}$, donc r est l'application

$$\xi = z + \mathbf{j}t \mapsto \frac{\bar{z} + \mathbf{j}t}{|z|^2 + |t|^2} = \phi \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} (\xi).$$

Cela conclut la preuve. \square

1.1.6 Le bord de \mathbb{H}^3

Les modèles de la boule de Poincaré et du demi-espace supérieur ont topologiquement un bord. Géométriquement, c'est en quelque sorte un bord « à l'infini » qui a un sens, et nous appellerons des points de $\partial\mathbb{H}^3$, des points à *l'infini*. Soit S l'ensemble des arcs géodésiques de \mathbb{H}^3 paramétrisés sur $[0, \infty[$, et \sim la relation d'équivalence sur S suivante :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \sup_{t \geq 0} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < \infty$$

Alors, $\partial\mathbb{H}^3 = S / \sim$. Si un point est à l'infini dans \mathbb{H}^3 , alors on dira que c'est un point final d'une géodésique appartenant à la classe d'équivalence de ce point. Toute géodésique a exactement deux points finaux ; et deux points donnés de $\partial\mathbb{H}^3$, distincts, définissent une unique géodésique finissant en ces deux points.

Dans le modèle de la boule de Poincaré, le bord de \mathbb{H}^3 est difféomorphe à la sphère de dimension 2 ; dans le modèle du demi-espace supérieur, $\partial\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \infty$.

Rappelons qu'une action d'un groupe G sur un ensemble X est dite *n-transitive* si quel que soit un n-uplet (x_1, \dots, x_n) et quel que soit un n-uplet (y_1, \dots, y_n) , il existe un élément $g \in G$ tel que pour tout i entre 1 et n , $x_i = g.y_i$. L'action est dite *strictement transitive* si de plus un tel g est unique.

Notons $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$, alors les isométries de \mathbb{H}^3 ont la propriété suivante intéressante :

Proposition 1.1.4 *Toute isométrie de \mathbb{H}^3 s'étend en un difféomorphisme de $\overline{\mathbb{H}^3}$ et est caractérisée par sa restriction au bord. De plus, l'action de $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^3)$ sur le bord est strictement 3-transitive.*

1.1.7 Classification des isométries préservant l'orientation

Les isométries hyperboliques qui préservent l'orientation se classifient en fonction du nombre de leurs points fixes :

- si ϕ a un point fixe dans \mathbb{H}^3 , alors ϕ est *elliptique* ;
- si ϕ n'a aucun point fixe dans \mathbb{H}^3 , mais en a un unique sur le bord, alors ϕ est *parabolique* ;
- si ϕ n'a aucun point fixe dans \mathbb{H}^3 , mais en a deux sur le bord, alors ϕ est *hyperbolique*.

Et c'est une propriété classique des isométries de \mathbb{H}^3 préservant l'orientation de vérifier l'un de ces trois points.

1.1.8 Horosphères

Soit p un point à l'infini de \mathbb{H}^3 . Une surface connexe orthogonale à toutes les géodésiques se terminant en p sera appelée *horosphère* centrée en p . Dans le modèle de la boule de Poincaré, une horosphère centrée en p est une sphère euclidienne tangente à $\partial\mathbb{H}^3$ en p . Dans le modèle du demi-espace supérieur, une horosphère centrée en $p \in \mathbb{C} \subset \partial\Pi^{3,+}$ est une sphère euclidienne tangente en p à $\partial\Pi^{3,+}$; une horosphère centrée en ∞ est un plan euclidien horizontal. L'intérieur de la boule délimitée par une horosphère est une *horoboule*. La restriction de la métrique hyperbolique de \mathbb{H}^3 à une horosphère induit une métrique euclidienne sur l'horosphère. De plus, la restriction à une horosphère d'une isométrie parabolique fixant le centre de cette horosphère agit comme une isométrie euclidienne sur cette horosphère.

1.1.9 Simplexes idéaux

L'enveloppe convexe de 4 points dans $\overline{\mathbb{H}^3}$ est un tétraèdre hyperbolique. Si les quatre sommets sont sur le bord de \mathbb{H}^3 , à l'infini, on dit que le tétraèdre est *idéale*. Dans ce cas,

le birapport des coordonnées de ses sommets le caractérise à isométrie près. De manière équivalente, la classe d'équivalence isométrique d'un tétraèdre idéal est déterminée par ses angles diédraux. La somme des trois angles diédraux autour d'un sommet est de π et cela implique facilement que deux angles diédraux associés à deux arêtes opposées sont égaux. Trois angles diédraux dont la somme vaut π suffisent donc à caractériser un tétraèdre idéal, notons les α, β, γ . Le volume d'un tétraèdre idéal Δ est alors donné par la formule de Milnor [22].

$$\text{vol}(\Delta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

où $\Lambda(x) = -\int_0^x \log |2 \sin t| dt$ est la fonction de Lobachevsky. Le volume maximal pour un tétraèdre est obtenu quand $\alpha = \beta = \gamma$; un tel tétraèdre est dit *régulier*. Si au moins deux sommets du tétraèdre sont confondus, le tétraèdre est *dégénéré*, son volume est nul.

1.2 Variétés

1.2.1 Espaces métriques

L'ensemble des structures hyperboliques dont peut être munie une variété se détermine notamment grâce aux notions d'holonomie et d'application développante. L'objet de cette section est de parvenir à la compréhension de ces notions.

Commençons par se doter d'outils utiles. Soit X un espace métrique. Soit $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ une application préservant localement la distance, alors on dira que l'application λ est une *droite géodésique* et que son image est une *géodésique*. Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ ($a < b$), une application qui préserve les distances, alors on dira que l'application α est un *arc géodésique*, et que son image est un *segment géodésique*. X est dit *espace géométrique* s'il satisfait les conditions suivantes :

- (i) Toute paire de points distincts de X peut être reliée par un segment géodésique dans X ; on dit que X est *géodésiquement connexe*.
- (ii) Tout arc géodésique $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ s'étend en une unique droite géodésique $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$; on dit que X est *géodésiquement complet*.
- (iii) Notons \mathbb{E}^n l'espace euclidien de dimension n et la boule $B(0, k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < k\}$. Il existe une fonction continue $\epsilon : \mathbb{E}^n \rightarrow X$ et un réel $k > 0$ tel que ϵ envoie homéomorphiquement $B(0, k)$ sur $B(\epsilon(0), k)$; de plus, pour chaque $u \in S^{n-1}$, l'application $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ définie par $\epsilon(tu)$ est une droite géodésique qui se restreint en un arc géodésique sur $[-k, k]$.
- (iv) Pour toute paire de points $x, y \in X$, il existe une isométrie ϕ telle que $\phi(x) = y$; on dit que X est *homogène*.

Ces quatre propriétés des espaces géométriques ne sont pas sans rappeler les quatre premiers postulats de la géométrie euclidienne...

Les espaces euclidiens, sphériques ou hyperboliques sont des espaces géométriques.

Un *changement d'échelle* ϕ d'un espace métrique X vers un espace métrique Y est une application telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in X$,

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) = kd_X(x, y).$$

k est alors appelé *facteur d'échelle*. Si de plus ϕ est bijectif, on dira qu'il s'agit d'une *similitude*.

1.2.2 Groupes discrets

Soit X un espace métrique. Dans ce qui suit, nous munirons le groupe $\mathcal{I}(X)$ de la *topologie compacte ouverte* définie par la prébase constituée des ensembles suivants : Pour tout compact K et tout ouvert U ,

$$V_{K,U} = \{g \in \mathcal{I}(X) \mid g(K) \subset U\}$$

La base d'ouverts de la topologie compacte ouverte est donc constituée de toute intersection finie de ces ensembles.

On dit qu'un groupe topologique Γ agit *discontinument* sur un espace topologique X , si l'action de Γ est telle que pour tout sous-ensemble compact K de X , $K \cap gK \neq \emptyset$ seulement pour un nombre fini d'éléments $g \in \Gamma$. Dans le cadre d'un sous-groupe de similitudes d'un espace métrique X , on dira que Γ est *discontinu* s'il agit discontinument.

Un groupe topologique Γ est dit *discret* quand tous ses points sont des ouverts. Ce qui est équivalent au fait que $\{1\}$ est un ouvert de Γ .

Soit Γ un sous-groupe de $\mathcal{I}(X)$, notons Γx l'orbite du point $x \in X$ par l'action de Γ , et X/Γ l'ensemble des orbites de l'action de Γ sur X .

Théorème 1.2.1 *Si Γ est discret, l'application suivante définit une distance sur X/Γ :*

$$\begin{aligned} d_\Gamma : X/\Gamma \times X/\Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\Gamma x, \Gamma y) &\mapsto \inf_{\gamma, \delta \in \Gamma} d(\gamma x, \delta y) \end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 (i) *Si Γ agit discontinument sur un espace métrique X , alors chaque orbite est un sous-ensemble discret de X .*

(ii) *Si Γ est un groupe de similitudes d'un espace métrique X , alors Γ est discontinu si et seulement si d'une part chaque stabilisateur de X est fini, et d'autre part chaque orbite est un sous-ensemble discret fermé de X .*

On dit qu'un groupe Γ agit *librement* sur un ensemble X si le groupe stabilisateur $\Gamma_x = \{g \in \Gamma \mid gx = x\}$ est trivial pour tout $x \in X$.

Une *isométrie locale* $\xi : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques, est une application telle que pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que ξ envoie isométriquement une boule ouverte de centre x et de rayon r sur une boule ouverte de centre $\xi(x)$ et de rayon r .

Théorème 1.2.3 *Soit X un espace métrique et Γ un sous-groupe de $\mathcal{I}(X)$ agissant librement et discontinument sur X . Alors l'application quotient*

$$\pi : X \rightarrow X/\Gamma$$

est une isométrie locale et un revêtement. De plus, si X est connexe Γ est le groupe d'automorphismes du revêtement π .

Théorème 1.2.4 *Si X est un espace géométrique simplement connexe, et Γ un groupe discret d'isométries agissant librement sur X , alors il existe un isomorphisme $\pi_1(X/\Gamma) \rightarrow \Gamma$.*

Théorème 1.2.5 *Soit X un espace géométrique simplement connexe et Γ_1, Γ_2 deux sous-groupes discrets de $\mathcal{I}(X)$ agissant librement, alors X/Γ_1 et X/Γ_2 sont isométriques si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont conjugués dans $\mathcal{I}(X)$.*

1.2.3 (X, G) -variétés

Soit X un espace géométrique simplement connexe et G un sous-groupe du groupe des similitudes sur X . Soit M une variété topologique. On dit alors qu'un (X, G) -atlas de M est une famille Φ , de cartes ϕ_i :

$$\Phi = \{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_i$$

telle que

- (i) chaque U_i est un ouvert connexe de M ; on dira qu'il s'agit d'un *voisinage de coordonnées* ;
- (ii) l'ensemble des $\{U_i\}_i$ est un recouvrement de M ;
- (iii) chaque carte est un homéomorphisme d'un ouvert de M vers un ouvert de X ;
- (iv) si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors l'application

$$\phi_{ji} = \phi_i \phi_j^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est égale à la restriction d'un élément de G sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$. Une telle application ϕ_{ji} est appelée *changement de coordonnées*.

Proposition 1.2.6 *Soit X un espace métrique connexe et géodésiquement complet. Si g et h sont des similitudes de X qui coïncident sur un sous-ensemble W ouvert, non vide, de X , alors $g = h$.*

Preuve Soit $\phi = gh^{-1}$. Montrons que $\phi = \text{Id}$. Remarquons que ϕ fixe tous les points de W , donc le facteur d'échelle de ϕ est 1. Soit $x \in X$ et $w \in W$, tels que $x \neq w$. Soit $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ une géodésique passant par x et w , alors $\phi\lambda$ est aussi une géodésique, et elle coïncide avec λ sur $\lambda^{-1}(W)$. Comme chaque arc géodésique s'étend en une unique droite géodésique, $\phi\lambda = \lambda$, donc $\phi(x) = x$. Donc $\phi = \text{Id}$. \square

Proposition 1.2.7 *Les changements de coordonnées ont la propriété de coïncider avec un élément de G sur chaque composante connexe de leur domaine de définition.*

Preuve Soit $\phi_j \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ un changement de coordonnées, soit C une composante connexe de $\phi_i(U_i \cap U_j)$, et $w, x \in C$. Alors il existe des ouverts W_1, \dots, W_m de C , tels que $w \in W_1$, $x \in W_m$, et pour tout $k = 1, \dots, m-1$, $W_k \cap W_{k+1} \neq \emptyset$ et $\phi_j \phi_i^{-1}$ coïncident avec un élément $g_k \in G$ sur W_k . Comme g_k et g_{k+1} coïncident sur $W_k \cap W_{k+1}$, $g_k = g_{k+1}$ pour tout $k = 1, \dots, m-1$ d'après la proposition 1.2.6. \square

Soit $u \in M$, nous dirons qu'une carte pour le couple (M, u) est une carte $\phi : U \rightarrow M$, telle que $u \in U$.

À partir d'un (X, G) -atlas Φ , on construit naturellement un atlas maximal $\bar{\Phi}$ qui le contient, et celui-ci est unique : $\bar{\Phi}$ est l'ensemble des fonctions $\phi : U \rightarrow X$ telles que U est un ouvert connexe de M , ϕ envoie homéomorphiquement U sur son image, et pour chaque ϕ_i de Φ , $\phi \phi_i^{-1}$ coïncide avec un élément de G sur un voisinage de chaque point de $U_i \cap U$.

Une (X, G) -structure sur une variété M est un atlas maximal de M ; une (X, G) -variété M est la donnée d'une variété M et d'une (X, G) -structure sur M .

Exemple (1) Voici deux exemples de (X, G) -variétés qui nous intéresseront par la suite : les variétés euclidiennes : $X = \mathbb{E}^n$ et $G = \mathcal{I}(\mathbb{E}^n)$, l'ensemble des isométries de \mathbb{E}^n ; et les variétés hyperboliques $X = \mathbb{H}^n$ et $G = \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, l'ensemble des isométries de \mathbb{H}^n .

- (2) Soit Γ un groupe discret d'isométries agissant librement sur un espace métrique de dimension n , X . Alors l'application quotient $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ est une isométrie locale, et X/Γ est une variété; c'est même une (X, Γ) -variété.

Une (X, G) -variété est dite *métrique* si G est un sous-groupe de $\mathcal{I}(X)$. Ainsi définie, une variété métrique est naturellement un espace métrique :

Tout d'abord, si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ est un arc sur M , soit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

une partition de $[a, b]$, soit U_1, \dots, U_m un ensemble de voisinages de coordonnées de M tels que chaque $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ est dans U_i , et $\phi_i : U_i \rightarrow M$ les cartes associées, alors la X -longueur de γ est définie ainsi :

$$\|\gamma\| = \sum_{i=1}^m |\phi_i \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]},$$

et ne dépend pas du choix de la partition de $[a, b]$, ni des ϕ_i .

La *métrique induite* sur M est alors définie par la fonction $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(u, v) = \inf_{\gamma} \|\gamma\|$$

où γ parcourt l'ensemble des courbes de u à v .

Une (X, G) -application $\xi : M \rightarrow N$ entre deux (X, G) -variétés est une application continue qui vérifie : pour toutes cartes $\phi : U \rightarrow X$ de M , $\psi : V \rightarrow X$ de N telles que $U \cap \xi^{-1}(V) \neq \emptyset$,

$$\psi \xi \phi^{-1} : \phi(U \cap \xi^{-1}(V)) \rightarrow \psi(\xi(U) \cap V)$$

coïncide sur un voisinage de chaque point avec un élément de G .

La (X, G) -structure d'une variété permet de définir un chemin dans X à partir d'un chemin dans M , ce qui constitue un outil indispensable pour l'étude à venir de la géométrie de M :

Soit $\phi : U \rightarrow X$ une carte et $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un chemin démarrant dans U . Soit une partition

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

et un ensemble $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i=1}^m$ de cartes de M telles que $\phi_1 = \phi$ et U_i contient $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Notons g_i l'élément de G qui coïncide avec $\phi_{i+1, i}$ sur la composante connexe de $\phi_i(U_i \cap U_{i+1})$ qui contient $\phi_{i+1}(\gamma(t_i))$; et notons $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Alors $\phi_i \gamma_i$ et $g_i \phi_{i+1} \gamma_{i+1}$ sont des courbes sur X , et le point de départ de la deuxième correspond à l'arrivée de la première :

$$g_i \phi_{i+1} \gamma(t_i) = \phi_i \gamma(t_i).$$

Ainsi, récursivement, le chemin γ définit un chemin $\hat{\gamma}$ sur X qui ne dépend ni du choix de la partition de $[a, b]$, ni du choix des cartes selon cette partition. $\hat{\gamma}$ est appelé le *prolongement* de $\phi \gamma_1$ le long de γ .

De plus, si deux chemins α et β sont homotopes relativement à leur bord, alors leur prolongement l'est aussi.

Théorème 1.2.8 Soit $\phi : U \rightarrow X$ une carte d'une (X, G) -variété M qui est simplement connexe. Alors il existe une unique (X, G) -application $\hat{\phi} : M \rightarrow X$ qui prolonge ϕ .

Preuve Soit $u \in U$, v un point de M et $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ un chemin de u vers v . Soit $\hat{\alpha} : [a, b] \rightarrow X$ le prolongement de $\phi\alpha_1$ le long de α . Définissons alors l'application $\hat{\phi} : M \rightarrow X$ tel que $\hat{\phi}(v) = \hat{\alpha}(b)$. Alors l'application $\hat{\phi}(v)$ ne dépend pas du choix de α , car tout autre chemin de u vers v définit un chemin homotope à $\hat{\alpha}$ relativement au bord, grâce à la simple connexité de M et la propriété des prolongements énoncée plus haut.

Montrons qu'il s'agit d'une (X, G) -application :

Soit $\psi : V \rightarrow X$ une carte pour le couple (M, v) telle que $\psi = \phi$ si $v \in U$. Alors il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ et un ensemble de cartes $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i=1}^m$ de M tels que $\phi_1 = \phi$ et U_i contient $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ pour chaque $i = 1, \dots, m$, et $\phi_m = \psi$. Soit $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ et soit g_i l'élément de G qui correspond à $\phi_{i+1, i}$ sur la composante connexe de $\phi_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$ qui contient $\phi_{i+1}\alpha(t_i)$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\hat{\alpha} = (\phi_1\alpha_1) \cdot (g_1\phi_2\alpha_2) \cdots (g_1 \dots g_{m-1}\phi_m\alpha_m).$$

Soit $\beta : [b, c] \rightarrow V$ un chemin de v à w et soit $g = g_1 \dots g_{m-1}$. Alors $\widehat{\alpha\beta} = \hat{\alpha}g\psi\beta$. Donc $\hat{\phi}(w) = \widehat{\alpha\beta}(c) = g\psi(w)$. Par conséquent, $\hat{\phi}(w) = g\psi(w)$ pour tout $w \in V$. Donc $\hat{\phi}$ envoie V homéomorphiquement sur l'ouvert $g\psi(V)$ de X et $\psi\hat{\phi}^{-1} : \hat{\phi}(V) \rightarrow X$ est la restriction de g^{-1} . Donc finalement, d'après le lemme 1.2.9, $\hat{\phi}$ est une (X, G) -application et $\hat{\phi}$ prolonge ϕ .

Lemme 1.2.9 Soit $\xi : M \rightarrow N$ une application entre deux (X, G) -variétés. Si pour tout $u \in M$ il existe une carte $\phi : U \rightarrow X$ pour (M, u) telle que ξ envoie homéomorphiquement U sur un ouvert de N et $\phi\xi^{-1} : \xi(U) \rightarrow X$ est une carte pour N , alors ξ est une (X, G) -application.

Montrons maintenant que ce prolongement est unique.

Soit $\xi : M \rightarrow X$ une (X, G) -application prolongeant ϕ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité que l'ensemble de cartes $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}_{i=1}^m$ de M vérifie la propriété suivante :

$$\phi_i\xi^{-1} : \xi(U_i) \rightarrow X$$

est aussi une carte sur X . Alors $\phi_i\xi^{-1}$ se prolonge en un élément h_i^{-1} de G . Par conséquent, $\xi(w) = h_i\phi_i(w)$ pour tout $w \in U_i$. Comme $\xi(w) = \phi(w)$, pour tout $w \in U$, on a $h_1\phi = \phi$ et donc $h_1 = \text{Id}$. Ainsi, par récurrence, si $h_{i-1} = g_1 \cdots g_{i-2}$, alors on a l'égalité suivante pour chaque $w \in U_{i-1}$:

$$\begin{aligned} \xi(w) &= h_{i-1}\phi_{i-1}(w) \\ &= g_1 \cdots g_{i-2}\phi_{i-1}(w) \\ &= \hat{\phi}(w) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $w \in U_{i-1} \cap U_i$.

$$\begin{aligned} h_i\phi_i(w) &= \xi(w) \\ &= \hat{\phi}(w) \\ &= g_1 \cdots g_{i-1}\phi_i(w) \end{aligned}$$

Il en résulte que $h_i = g_1 \cdots g_{i-1}$. Donc, par récurrence, on a

$$\xi(v) = h_m\phi_m(v) = g\phi_m(v) = \hat{\phi}(v).$$

Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme 1.2.9 pour terminer la preuve. \square

Preuve du lemme 1.2.9 Soit $\chi : W \rightarrow X$ et $\psi : V \rightarrow X$ des cartes pour M et N respectivement, telles que W et ξ^{-1} sont d'intersection non vide, et soit u un point arbitraire de l'ensemble $W \cap \xi^{-1}(V)$. Alors il existe une carte $\phi : U \rightarrow X$ pour (M, u) telle que ξ envoie U homéomorphiquement sur un ouvert de N et $\phi\xi^{-1} : \xi(U) \rightarrow X$ est une carte pour N . Observons que dans un voisinage de $\chi(u)$, l'application

$$\psi\xi\chi^{-1} : \chi(W \cap \xi^{-1}(V)) \rightarrow \psi(\xi(W) \cap V)$$

concorde avec $(\psi\xi\phi^{-1})(\phi\chi^{-1})$. Comme $\phi\chi^{-1}$ et $\psi\xi\phi^{-1}$ sont des changements de coordonnées pour M et N respectivement, $\psi\xi\chi^{-1}$ concorde sur un voisinage de $\chi(u)$ avec un élément de G . Donc ξ est une (X, G) -application. \square

Théorème 1.2.10 Soit M une (X, G) -variété simplement connexe. Si ξ_1 et $\xi_2 : M \rightarrow X$ sont des (X, G) -applications, alors il existe un unique $g \in G$ tel que $\xi_2 = g\xi_1$.

Preuve Soit $\phi : U \rightarrow X$ une carte de M telle que $\phi\xi_i^{-1} : \xi_i(U) \rightarrow X$ est une carte pour X pour chaque $i = 1, 2$. Alors la proposition 1.2.7 implique qu'il existe un élément g_i de G prolongeant $\phi\xi_i^{-1} : \xi_i(U) \rightarrow X$. Par unicité de $\hat{\phi}$ et comme chaque $g_i\xi_i$ est une (X, G) -application prolongeant ϕ pour $i = 1, 2$, on a que $g_1\xi_1 = g_2\xi_2$. Soit $g = g_2^{-1}g_1$. Alors $\xi_2 = g\xi_1$. Si h est un élément de G tel que $\xi_2 = h\xi_1$, alors $g\xi_1 = h\xi_1$, d'où $g = h$ d'après la proposition 1.2.6. Donc g est unique. \square

Ce dernier théorème apporte aux applications développantes, dont nous allons tout de suite parler, une propriété de quasi-unicité intéressante.

1.2.4 Développante et holonomie

Soit M une (X, G) -variété et $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ son revêtement universel. Soit $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}$ un (X, G) -atlas de M tel que tous les U_i sont simplement connexes. Notons $\{U_{ij}\}_j$ l'ensemble des feuilletts sur un ouvert U_i , $\kappa_{ij} = \kappa|_{U_{ij}}$, et $\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow X$ l'application $\phi_i\kappa_{ij}$. Alors ϕ_{ij} est un homéomorphisme de U_{ij} vers $\phi_i(U_i) \in X$. Remarquons que si U_{ij} et U_{kl} s'intersectent, alors U_i et U_k aussi, et pour tout $x \in \phi_{kl}(U_{ij} \cap U_{kl})$, $\phi_{ij}\phi_{kl}^{-1}(x) = \phi_i\phi_k^{-1}(x)$ qui coïncide avec un élément de G sur un voisinage de chaque point de son domaine de définition. Par conséquent, l'ensemble $\{\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow X\}$ constitue un (X, G) -atlas qui permet de munir \tilde{M} d'une (X, G) -structure. De plus, κ est une (X, G) -application d'après le lemme 1.2.9, puisque κ envoie les U_{ij} homéomorphiquement sur U_i , et $\phi_{ij}\kappa^{-1}$ correspond à la carte $\phi_i : U_i \rightarrow X$ de M .

Soit $\tau : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ un morphisme de revêtement, et $\tilde{u} \in \tilde{M}$. Soit U_i tel que $\kappa(\tilde{u}) \in U_i$, U_{ij} tel que $\tilde{u} \in U_{ij}$ et $U_{ik} = \tau(U_{ij})$. Alors $\phi_{ij}\tau^{-1} : \tau(U_{ij}) \rightarrow X$ correspond à la carte $\phi_{ik} : U_{ik} \rightarrow X$ et τ est une (X, G) -application.

Soit $\phi : U \rightarrow X$ une carte de \tilde{M} . Alors, d'après le théorème 1.2.8, ϕ se prolonge en une unique (X, G) -application $\delta : \tilde{M} \rightarrow X$ appelée la *développante* de M , unique à composition près par un élément de G d'après le théorème 1.2.10.

La développante permet de définir l'holonomie, qui est un point essentiel de l'étude des géométries hyperboliques des complémentaires de noeuds.

Soit u un point base de M et \tilde{u} un point base de \tilde{M} tel que $u = \kappa(\tilde{u})$. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ un lacet basé en u . Alors α se relève en un unique chemin $\tilde{\alpha}$ dans \tilde{M} partant de \tilde{u} . Notons \tilde{v} le point terminal de $\tilde{\alpha}$, et τ_α l'unique morphisme de revêtement tel que $\tau_\alpha(\tilde{u}) = \tilde{v}$. Alors $\delta\tau_\alpha : \tilde{M} \rightarrow X$ est une (X, G) -application, et il existe donc un unique $g_\alpha \in G$ tel que $\delta\tau_\alpha = g_\alpha\delta$. Définissons

$$\begin{aligned} \eta : \pi_1(M, u) &\rightarrow G \\ [\alpha] &\mapsto g_\alpha \end{aligned}$$

η est un morphisme de groupe appelé *holonomie* de M . L'holonomie dépend du choix de la développante à conjugaison par un élément de G près : si δ et δ' sont deux développantes telles que $\delta' = g\delta$ pour un certain $g \in G$, alors

$$\delta'\tau_\alpha = g\delta\tau_\alpha = gg_\alpha\delta = gg_\alpha g^{-1}\delta'.$$

Le théorème suivant est une propriété cruciale de l'holonomie :

Théorème 1.2.11 *Soit M une (X, G) -variété connexe et H un sous-groupe de G . Alors la (X, G) -structure de M contient une (X, H) -structure de M si et seulement si H contient l'image d'une holonomie $\eta : \pi_1(M) \rightarrow G$.*

Preuve Commençons par montrer le cas facile de gauche à droite. Supposons que la (X, G) -structure de M contient une (X, H) -structure. Alors H contient l'image de toute holonomie de M définie en fonction de la (X, H) -structure de M .

Montrons maintenant le cas de droite à gauche. Si H contient l'image d'une holonomie $\eta : \pi_1(M) \rightarrow G$ de M . Soit $\delta : \tilde{M} \rightarrow X$ la développante définissant η et $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}$ un (X, G) -atlas de M . Notons U_{ij} les préimages des U_i par κ , et κ_{ij} chacune des restrictions de κ à U_{ij} ; et $\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow X$, $\phi_{ij} = \phi_i \kappa_{ij}$. Alors l'ensemble $\{\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow X\}$ constitue un (X, G) -atlas de \tilde{M} . Donc δ envoie U_{ij} homéomorphiquement sur un ouvert de X pour chaque i et chaque j .

Pour tout i , choisissons arbitrairement un U_{ij} et définissons $\psi_i : U_i \rightarrow X$ tel que $\psi_i = \delta \kappa_{ij}^{-1}$. Alors chaque ψ_i envoie U_i homéomorphiquement sur un ouvert de X . Supposons que U_i et U_k sont d'intersection disjointe et considérons la fonction

$$\psi_k \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_k) \rightarrow \psi_k(U_i \cap U_k).$$

Alors pour tout j et l , on a

$$\psi_k \psi_i^{-1}(x) = \delta \kappa_{kl}^{-1} \kappa_{ij} \delta^{-1}(x)$$

pour chaque x dans $\psi_i(U_i \cap U_k)$. Donc il existe un morphisme de revêtement τ tel que $\psi_k \psi_i^{-1}$ correspond à $\delta \tau \delta^{-1}$ sur un voisinage de chaque point de son domaine de définition. Et $\delta \tau \delta^{-1}$ correspond lui-même à un élément de H par hypothèse. Donc, $\{\psi_i : U_i \rightarrow X\}$ est un (X, H) -atlas pour M .

Comme $\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow X$ est une carte pour \tilde{M} , on a que l'application

$$\phi_{ij} \delta^{-1} : \delta(U_{ij}) \rightarrow X$$

est la restriction d'un élément de G . De plus, $\phi_i \psi_i^{-1}$ est aussi la restriction d'un élément de G , car

$$\phi_i \psi_i^{-1} = \phi_i \kappa_{ij} \delta^{-1} = \phi_{ij} \delta^{-1}.$$

Donc l'ensemble $\{\psi_i\}_i$ est contenu dans une (X, G) -structure de M . Par conséquent, la (X, H) -structure de M définie par $\{\psi_i\}_i$ est contenue dans la (X, H) -structure de M . On a donc bien montré que la (X, G) -structure de M contient une (X, H) -structure. \square

Définition 1.2.12 *Une (X, G) -variété est dite orientable si sa (X, G) -structure contient une (X, H) -structure, où H est un groupe d'éléments de G préservant l'orientation.*

Remarque 1.2.13 Nous verrons par la suite que dans le cas où M est un complémentaire de nœud dans S^3 , alors M peut être vu comme une (X, G) -variété où $X = \mathbb{H}^3$ et $G = \mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$, et dans ce cas, l'holonomie définit une représentation du groupe du nœud dans $PSL(2, \mathbb{C})$.

1.2.5 Complétude

Il s'agit maintenant, grâce à ces outils, de comprendre la complétude d'une (X, G) -variété, que nous allons dorénavant supposer géodésiquement connexe.

Notons $\{U_i\}_i$ la collection des ouverts connexes de \tilde{M} tels qu'une développante δ envoie homéomorphiquement U_i sur un ouvert de X et notons $\phi_i = \delta|_{U_i}$. Alors les ϕ_i font partie de la (X, G) -structure de \tilde{M} , puisque δ est une (X, G) -application. Par ailleurs, $\{\phi_i\}_i$ constitue une $(X, \{1\})$ -structure pour \tilde{M} que nous pouvons donc voir comme une $(X, \{1\})$ -variété. L'application δ est alors aussi une développante pour \tilde{M} munie de cette structure, puisque δ est l'unique $(X, \{1\})$ -application qui prolonge ϕ_i . Cette $(X, \{1\})$ -structure induit une unique métrique sur \tilde{M} à multiplication près par un facteur d'échelle d'un élément de G .

Commençons par les définitions :

Définition 1.2.14 Une (X, G) -variété est complète si le revêtement universel de chacune de ses composantes connexes est un espace métrique complet.

Avant de se plonger dans l'étude de la complétude des (X, G) -variétés, énonçons trois lemmes qui nous seront utiles :

Lemme 1.2.15 Soit X un espace métrique. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B}(x, \epsilon)$ (boule fermée centrée en x et de rayon ϵ) est compacte pour tout $x \in X$. Alors X est un espace métrique complet.

Preuve Soit (x_i) une suite de Cauchy de X . Alors il existe un entier k positif tel que $d(x_i, x_j) < \epsilon$ pour tout $i, j \geq k$. Donc $B(x_k, \epsilon)$ contient tous les x_i pour $i \geq k$. Comme $\overline{B}(x_k, \epsilon)$ est compacte, la suite (x_i) admet un point limite dans $\overline{B}(x_k, \epsilon)$, donc elle converge. Donc X est un espace métrique complet. \square

Lemme 1.2.16 Soit Γ un groupe d'isométries d'un espace métrique X agissant tel que chaque orbite est un sous-ensemble discret et fermé de X . Alors si X/Γ est complet, X est complet.

Preuve Soit $(x_i)_i$ une suite de Cauchy dans X . Alors $(\Gamma x_i)_i$ est une suite de Cauchy dans X/Γ . En effet, par définition de d_Γ ,

$$d_\Gamma(\Gamma x_i, \Gamma x_j) \leq d(x_i, x_j).$$

Par conséquent, la suite (Γx_i) converge vers une orbite Γy . Posons

$$s = \frac{1}{2} \text{dist}(y, \Gamma y \setminus \{y\}).$$

Alors $s > 0$, par la propriété que Γy est un sous-ensemble discret et fermé de X . Et pour tout $g \in \Gamma$, on a

$$s = \frac{1}{2} \text{dist}(gy, \Gamma y \setminus \{gy\}).$$

Comme (x_i) est une suite de Cauchy, $d(x_i, x_j) < \frac{s}{2}$ pour tout i, j à partir d'un certain rang. Soit ϵ tel que $0 < \epsilon < \frac{s}{2}$, alors il existe un entier $l \geq k$ et un $g_i \in \Gamma$ tel que $d(x_i, g_i y) < \epsilon$ pour tout $i \geq l$. Soit donc $i \geq l$, on a les inégalités suivantes :

$$d(x_k, g_i y) \leq d(x_k, x_i) + d(x_i, g_i y) < s.$$

Comme de plus, $B(x_k, s)$ contient au plus un point de Γy , il existe un $g \in \Gamma$ tel que $g_i y = gy$ pour tout $i \geq l$ et donc $d(x_i, gy) < \epsilon$ pour $i \geq l$. On a donc bien que $x_i \rightarrow gy$, donc X est complet. \square

Lemme 1.2.17 Soit X un espace métrique complet et soit $\xi : X \rightarrow X$ une similitude qui n'est pas une isométrie. Alors ξ admet un unique point fixe.

Preuve Supposons sans perte de généralité que le facteur d'échelle de ξ est inférieur à 1 (il suffit éventuellement, de remplacer ξ par ξ^{-1}). Soit x un point de X . Soit une suite $(x_m)_{m=1}^\infty$ d'éléments de X tels que $x_m = \xi^m(x)$. Alors, pour $m < n$, on a

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(\xi^m(x), \xi^n(x)) \\ &\leq \sum_{l=m}^{n-1} d(\xi^l(x), \xi^{l+1}(x)) \\ &= (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1})d(x, \xi(x)) \\ &= \left(\frac{k^m - k^n}{1 - k} \right) d(x, \xi(x)) \\ &< k^m \left(\frac{d(x, \xi(x))}{1 - k} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que la suite (x_m) est une suite de Cauchy de X , donc qu'elle converge vers un élément $y \in X$. Comme ξ est continue, la suite $(\xi(x_m))_m$ converge vers un certain $\xi(y)$. Mais par construction, les suites (x_m) et $(\xi(x_m))$ convergent vers le même point, donc $\xi(y) = y$. C'est d'ailleurs l'unique point fixe de ξ , en effet : soit z un point fixe de ξ , alors,

$$d(y, z) = d(\xi(y), \xi(z)) = kd(y, z).$$

Donc $d(y, z) = 0$, donc $y = z$. □

Théorème 1.2.18 Soit M une (X, G) -variété métrique et $\xi : M \rightarrow X$ une isométrie locale. Alors M est géodésiquement complète si et seulement si ξ est un revêtement.

Preuve Commençons par supposer que ξ est un revêtement.

Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ un arc géodésique dans M . Comme ξ est une isométrie locale, $\xi\alpha : [a, b] \rightarrow X$ est une courbe géodésique. Par conséquent, $\xi\alpha$ se prolonge en une unique ligne géodésique $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$. Comme ξ est un revêtement, λ admet un relèvement en une ligne géodésique $\mu : \mathbb{R} \rightarrow M$ telle que $\mu(a) = \alpha(a)$; μ est donc un prolongement de α , par unicité du relèvement des chemins. Soit maintenant $\mu' : \mathbb{R} \rightarrow M$ une autre géodésique prolongeant α , alors $\xi\mu' : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une géodésique prolongeant $\xi\alpha$, donc $\xi\mu' = \lambda$. Par unicité de relèvement, $\mu' = \mu$. Donc, finalement, μ est l'unique ligne géodésique de M étendant α . Donc M est bien géodésiquement complète.

Supposons maintenant que M est géodésiquement complète.

Montrons pour commencer qu'un arc géodésique de X peut être relevé par ξ . Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ un arc géodésique et soit u un point de M tel que $\xi(u) = \alpha(a)$. Comme ξ est une isométrie locale, il existe un arc géodésique $\beta : [a, c] \rightarrow M$ tel que $\beta(a) = u$, $c < b$ et $\xi\beta$ est la restriction de α à $[a, c]$, que nous noterons aussi $\alpha_{a,c}$. Comme M est géodésiquement complète, β s'étend en une unique ligne géodésique $\mu : \mathbb{R} \rightarrow M$. Puisque ξ est une isométrie locale, $\xi\mu : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une ligne géodésique prolongeant $\alpha_{a,c}$. Donc $\xi\mu : \mathbb{R} \rightarrow X$ est l'unique ligne géodésique étendant α . Soit $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow M$ la restriction de μ . Alors $\tilde{\alpha}(a) = u$ et $\xi\tilde{\alpha} = \alpha$. Donc les arcs géodésiques peuvent être relevés par ξ .

Montrons ensuite que ξ est surjective. Soit $y \in X$. Soit x un point de l'image de ξ et un arc géodésique $\alpha : [0, l] \rightarrow X$ de x à y (qui existe par géodésique connexité de X). Comme x est dans l'image de ξ , α peut être relevé en un arc $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow M$, de sorte que

$$\xi\tilde{\alpha}(l) = \alpha(l) = y.$$

Donc y est dans l'image de ξ qui est par conséquent bien surjective.

Soit maintenant une boule ouverte $B(x, r)$ de X , montrons que

$$\xi^{-1}(B(x, r)) = \bigcup_{u \in \xi^{-1}(x)} B(u, r).$$

Comme ξ est une isométrie locale, on a l'inclusion :

$$\xi(B(u, r)) \subset B(x, r)$$

pour tout $u \in \xi^{-1}(x)$. Par conséquent,

$$\bigcup_{u \in \xi^{-1}(x)} B(u, r) \subset \xi^{-1}(B(x, r)).$$

Soit maintenant $v \in \xi^{-1}(B(x, r))$. Alors $\xi(v)$ est dans $B(x, r)$. Soit $\alpha : [0, l] \rightarrow X$ un arc géodésique de $\xi(v)$ à x , et soit $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow M$ un relèvement de α tel que $\tilde{\alpha}(0) = v$. Alors,

$$\xi \tilde{\alpha}(l) = \alpha(l) = x.$$

Donc $\tilde{\alpha}(l) \in \xi^{-1}(x)$. De surcroît,

$$\|\tilde{\alpha}\| = |\alpha| = d(x, \xi(v)) < r.$$

Donc $v \in B(\tilde{\alpha}(l), r)$ et donc

$$\xi^{-1}(B(x, r)) \subset \bigcup_{u \in \xi^{-1}(x)} B(u, r).$$

Ce qui permet finalement de conclure que

$$\xi^{-1}(B(x, r)) = \bigcup_{u \in \xi^{-1}(x)} B(u, r).$$

Montrons maintenant que pour tout $u \in \xi^{-1}(x)$, ξ envoie $B(u, r)$ surjectivement sur $B(x, r)$. Soit $y \in B(x, r)$, $y \neq x$, $\alpha : [0, l] \rightarrow X$ un arc géodésique de x à y , et $\tilde{\alpha}$ un relèvement de α tel que $\tilde{\alpha}(0) = u$. Alors $\xi \tilde{\alpha}(l) = \alpha(l) = y$ et

$$\|\tilde{\alpha}\| = |\alpha| = d(x, y) < r.$$

Donc on a bien $\tilde{\alpha}(l) \in B(u, r)$.

Montrons maintenant qu'il existe un $k > 0$ tel que pour tout $u \in \xi^{-1}(x)$, ξ envoie bijectivement $B(u, k)$ sur $B(x, k)$. D'après les axiomes définissant les espaces géométriques, il existe un $k > 0$ tel que si $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une géodésique, alors λ se restreint en un arc géodésique sur $[-k, k]$. Soient maintenant v et w deux points distincts de $B(u, k)$ tels que $\xi(v) = \xi(w)$ et $\alpha : [-b, b] \rightarrow M$ un arc géodésique de v à w . Alors on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 2b &= d(v, w) \\ &\leq d(v, u) + d(u, w) \\ &< 2k \end{aligned}$$

Donc $0 < b < k$. Comme M est géodésiquement complète, α se prolonge en une droite géodésique $\mu : \mathbb{R} \rightarrow M$. Et $\xi\mu : \mathbb{R} \rightarrow X$ se retirent en un arc géodésique sur $[-k, k]$ d'après le choix de k . Donc $\xi\alpha : [-b, b] \rightarrow X$ est un arc géodésique de $\xi(v)$ à $\xi(w)$, ce qui est une contradiction. Donc ξ envoie bijectivement $B(u, k)$ sur $B(x, k)$.

D'après l'inégalité triangulaire, les ensembles $\{B(u, k/2) : u \in \xi^{-1}(x)\}$ sont deux à deux disjoints. De plus, ξ envoie $B(u, k/2)$ homéomorphiquement sur $B(x, k/2)$ pour tout $u \in \xi^{-1}(x)$, et on a l'égalité suivante :

$$\xi^{-1}(B(x, k/2)) = \bigcup_{u \in \xi^{-1}(x)} B(u, k/2).$$

Donc finalement, ξ est un revêtement. □

Théorème 1.2.19 *Soit M une (X, G) -variété. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. M est complète ;
2. M est géodésiquement complète ;
3. M est un espace métrique complet.

Preuve 1 \Rightarrow 2

Supposons que M est complète, donc par définition que \tilde{M} est un espace métrique complet, et montrons pour commencer que \tilde{M} est géodésiquement complet. Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow \tilde{M}$ un arc géodésique et $\delta : \tilde{M} \rightarrow X$, une développante pour M . Alors $\delta\alpha : [a, b] \rightarrow X$ est une courbe géodésique et il existe une droite géodésique $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ qui prolonge $\delta\alpha$, puisque X est géodésiquement complet. Soit I le plus grand intervalle de \mathbb{R} contenant $[a, b]$ et tel qu'il existe une application $\mu : I \rightarrow \tilde{M}$ telle que $\delta\mu = \lambda|_I$. L'application δ étant un homéomorphisme local, I est ouvert ; δ étant localement une isométrie, μ est localement un arc géodésique. Montrons que I ne peut être que \mathbb{R} tout entier. Soit $(t_i)_i$ une suite d'éléments de I convergeant vers $c \in I$, alors μ étant localement géodésique, elle n'accroît pas les distances, donc la suite $(\mu(t_i))_i$ est de Cauchy dans \tilde{M} et converge donc dans \tilde{M} . Notons \tilde{u} sa limite, qui ne dépend pas du choix de la suite (t_i) , ce qui permet de prolonger μ en une fonction continue, $\bar{\mu} : I \cup \{c\} \rightarrow \tilde{M}$ telle que $\bar{\mu}(c) = \tilde{u}$. Par continuité de δ , on a

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mu}(c) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \delta\mu(t_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(t_i) \\ &= \lambda(c) \end{aligned}$$

Donc on a aussi $\delta\bar{\mu} = \lambda|_{I \cup \{c\}}$, donc $I = \mathbb{R}$ par maximalité de I et μ est une géodésique prolongeant α . Montrons qu'elle est unique : soit $\mu' : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ une autre géodésique prolongeant α . Comme δ est une isométrie locale, $\delta\mu' : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une géodésique prolongeant $\delta\alpha$. Nous avons donc

$$\delta\mu' = \lambda = \delta\mu.$$

Par conséquent, $\mu' = \mu$. Donc \tilde{M} est géodésiquement complète et comme la projection $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ est une isométrie locale, M est complète.

2 \Rightarrow 3

Si M est géodésiquement complète, alors \tilde{M} l'est aussi, puisque le revêtement universel $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ est une isométrie locale. Par conséquent, $\delta : \tilde{M} \rightarrow X$ est un revêtement, d'après le théorème 1.2.18. La preuve du théorème 1.2.18 indique de surcroît, qu'il existe un $r > 0$ tel que l'image réciproque par δ de $B(x, 2r)$ est une union disjointe d'ouverts, pour

tout $x \in X$. Soit \tilde{u} un point de \tilde{M} , alors δ envoie $B(\tilde{u}, r)$ surjectivement sur $B(\delta(\tilde{u}), r)$, toujours d'après la preuve de 1.2.18. Comme δ est continue, on a

$$\delta(\bar{B}(\tilde{u}, r)) \subset \bar{B}(\delta(\tilde{u}), r).$$

Cette inclusion est une égalité par relèvement des chemins géodésiques et donc δ envoie homéomorphiquement $\bar{B}(\tilde{u}, r)$ sur $\bar{B}(\delta(\tilde{u}), r)$. Donc on a que $\bar{B}(\tilde{u}, r)$ est compacte pour chaque $u \in M$. De même avec κ , $\bar{B}(u, r)$ est compacte pour chaque $u \in M$. Donc M est un espace métrique complet, d'après le lemme 1.2.15.

3 \Rightarrow 1

Supposons maintenant que M est un espace métrique complet. Soit Γ le groupe d'automorphismes du revêtement universel $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$. Alors Γ est un groupe d'isométries de \tilde{M} dont les orbites sont les fibres pour κ , et par conséquent, κ induit un homéomorphisme

$$\bar{\kappa} : \tilde{M}/\Gamma \rightarrow M.$$

De surcroît, $\bar{\kappa}$ est une isométrie locale, puisque κ et l'application quotient $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ sont des isométries locales. De plus, l'homéomorphisme $\bar{\kappa}$ induit une (X, G) -structure sur \tilde{M}/Γ . Montrons maintenant que la métrique d_Γ sur \tilde{M}/Γ est identique à la métrique induite sur \tilde{M}/Γ par sa structure de (X, G) -variété, que l'on note $d : d_\Gamma$ et d coïncident localement, puisque $\bar{\kappa}$ est une isométrie locale ; $d_\Gamma \leq d$, puisque la longueur d'un arc selon d_Γ est la même qu'avec la X -longueur ; enfin, $d_\Gamma = d$, puisque π préserve la X -longueur. Donc $\bar{\kappa}$ est une isométrie et \tilde{M}/Γ est un espace métrique complet. Il en résulte que \tilde{M} est un espace métrique complet d'après le lemme 1.2.16. \square

Définition 1.2.20 *On dit qu'une (X, G) -structure Φ sur une variété M est complète si M , muni de la (X, G) -structure Φ , est une (X, G) -variété complète.*

Théorème 1.2.21 *Soit M une (X, G) -variété et soit G_1 un sous-groupe d'isométries de G . Alors la variété M est complète si et seulement si la (X, G) -structure de M contient une (X, G_1) -structure complète pour M .*

Preuve Supposons sans perte de généralité, que M est connexe. Supposons que M est complète. Soit $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel, alors \tilde{M} est un espace métrique complet. Soit $\tau : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ un morphisme de revêtement non trivial, alors τ est une (X, G) -application, donc une similitude locale. Comme \tilde{M} est connexe, chaque facteur d'échelle local prend la même valeur, notée k . Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \tilde{M}$ un chemin d'un point u à un point v , alors $\|\tau\gamma\| = k\|\gamma\|$. Nous avons donc les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} d(\tau(u), \tau(v)) &\leq kd(u, v), \\ d(\tau^{-1}(u), \tau^{-1}(v)) &\leq k^{-1}d(u, v) \end{aligned}$$

desquelles il en découle :

$$kd(u, v) = kd(\tau^{-1}(\tau(u)), \tau^{-1}(\tau(v))) \leq d(\tau(u), \tau(v)).$$

Et donc que $d(\tau(u), \tau(v)) = kd(u, v)$.

Donc τ est une similitude, qui par ailleurs n'a pas de point fixe ; c'est donc une isométrie d'après le lemme 1.2.17.

Soit $\eta : \pi_1(M) \rightarrow G$ une holonomie définie par une développante $\delta : \tilde{M} \rightarrow X$, à savoir : $\eta([\alpha]) = g_\alpha$ où $\delta\tau_\alpha = g_\alpha\delta$, pour τ_α un morphisme de revêtement. Comme δ et τ_α sont

des isométries locales, g_α est une isométrie de X . Donc, l'image de η est contenue dans un sous-groupe G_1 de G . D'après le théorème 1.2.11, la (X, G) -structure Φ de M contient une (X, G_1) -structure Φ_1 de M . Cette (X, G) -structure est complète, puisque \tilde{M} est un espace métrique complet.

Le cas de droite à gauche résulte directement de la définition de (X, G) -structure complète. \square

Définition 1.2.22 Une application $\xi : M \rightarrow N$ entre deux (X, G) -variétés est une (X, G) -équivalence si ξ est une (X, G) -application bijective. Les variétés M et N sont alors dites (X, G) -équivalentes.

Remarque 1.2.23 L'inverse d'une (X, G) -équivalence est aussi une (X, G) -équivalence; une (X, G) -équivalence entre deux (X, G) -variétés métriques est une isométrie.

Théorème 1.2.24 Soit G un groupe de similitudes d'un espace géométrique X simplement connexe et M une (X, G) -variété complète et connexe. Soit $\delta : \tilde{M} \rightarrow X$ une développante de M et $\eta : \pi_1(M) \rightarrow G$ l'holonomie définie par δ . Alors δ est une $(X, \{1\})$ -équivalence, η envoie $\pi_1(M)$ isomorphiquement sur un groupe discret d'isométries de X , Γ , agissant librement, et δ induit une (X, G) -équivalence entre M et X/Γ .

Preuve D'après le théorème 1.2.19, \tilde{M} est géodésiquement complet, donc $\delta : \tilde{M} \rightarrow X$ est un revêtement d'après le théorème 1.2.18. Comme X est simplement connexe, δ est un homéomorphisme, donc une $(X, \{1\})$ -équivalence, donc une isométrie.

Quant à lui, le groupe $\pi_1(M)$ correspond à un groupe d'automorphismes du revêtement universel $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$, lui-même correspondant à l'image de η . Donc η envoie $\pi_1(M)$ isométriquement sur un groupe discret d'isométries de X , Γ , agissant librement. De plus, δ induit un homéomorphisme $\bar{\delta}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\delta} & X \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\bar{\delta}} & X/\Gamma \end{array}$$

où π est l'application quotient. Étant donné que κ , δ et π sont des (X, G) -applications, $\bar{\delta}$ est aussi une (X, G) -application, donc c'est aussi une (X, G) -équivalence. \square

Ce théorème constitue l'aboutissement de ce chapitre. Il indique que si l'holonomie ne définit pas forcément une (X, G) -structure, dans le cas où X est simplement connexe (ce qui est évidemment le cas pour $X = \mathbb{H}^3$ et $X = \mathbb{E}^2$, les exemples intéressants dans le cadre de cette thèse), alors toute (X, G) -variété peut être reconstruite à partir de l'image $\Gamma = \eta(\pi_1(M))$ de l'holonomie en tant que quotient X/Γ .

Chapitre 2

Triangulations

Nous allons dans ce chapitre, aborder le principe de triangulation des 3-variétés. L'idée va dans deux sens : soit décomposer une 3-variété en sous-ensembles (des tétraèdres dans le cadre de cette thèse, mais des polyèdres en général), ce qui en facilite l'étude ; soit construire une 3-variété à partir de polyèdres. Dans les deux cas, il s'agit d'accoler ces polyèdres le long de faces, à l'aide d'applications bien choisies. Quand les polyèdres sont tous des tétraèdres, on appelle ça une *triangulation* de la 3-variété. Mais selon les sources et le cas précis étudié, le terme « triangulation » n'est pas utilisé, ou utilisé selon une de ses déclinaisons (pseudo-triangulation, quasi-triangulation, triangulation singulière), et la définition sous-jacente n'est pas partout précisément la même.

Les triangulations et leurs propriétés sont souvent appréhendées *via* leurs duaux, les dits *standard spines*. Nous n'allons pas en parler ici, mais je renvoie le lecteur intéressé au livre [20] qui constitue une référence. Concernant les triangulations, et notamment les H-triangulations, elles sont traitées de manière approfondie dans [3]. Les résultats de la section sur les triangulations idéales de complémentaires de nœuds et les structures hyperboliques et hyperboliques complètes dont ils peuvent être munis peuvent être retrouvés dans [4, 30, 39]. À ma connaissance, la proposition 2.4.10 ne se trouve pas dans la littérature.

Dans ce chapitre, X peut désigner \mathbb{E}^2 , \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 , d'une part, ou \mathbb{E}^3 , \mathbb{S}^3 ou \mathbb{H}^3 , d'autre part. Le contexte indique sans ambiguïté la dimension de l'espace métrique en question. En pratique, dans cette thèse, nous n'utilisons que \mathbb{E}^2 et \mathbb{H}^3 . Nous considérerons dorénavant toutes les variétés orientables.

2.1 Triangulations

Définition 2.1.1 Soit \mathcal{P} une union finie et disjointe de polyèdres dans X et G un groupe d'isométries de X . Un G -appareillage de faces pour \mathcal{P} est un sous-ensemble de G :

$$\Phi = \{g_f : f \in \mathcal{F}\},$$

indexé par l'ensemble des faces \mathcal{F} de l'union des polyèdres, tel que pour chaque $f \in \mathcal{F}$,

1. il existe $f' \in \mathcal{F}$ tel que $g_f(f') = f$;
2. les isométries g_f et $g_{f'}$ vérifient la relation $g_f = g_{f'}^{-1}$;
3. si f est une face d'un polyèdre P de \mathcal{P} et f' est une face d'un polyèdre P' de \mathcal{P} , alors $P \cap g_f(P') = f$.

Φ induit une classe d'équivalence sur \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou il existe un ensemble de points} \\ \{x_1, \dots, x_n\} \text{ et des faces } \{f_1, \dots, f_{n-1}\} \\ \text{tels que } x = x_1, y = x_n, x_i \in f_i \text{ et } g_{f_i}(x_{i+1}) = x_i. \end{aligned}$$

Si tous les polyèdres de \mathcal{P} sont des tétraèdres, la donnée de (\mathcal{P}, Φ) est appelée triangulation de l'espace topologique \mathcal{P}/\sim .

Les polyèdres de \mathcal{P} peuvent être considérés comme des polyèdres orientés abstraits, dont les faces et arêtes ont une orientation induite.

Nous allons aussi, par la suite, avoir besoin de la définition de triangulation en dimension 2, donnons-la d'ores et déjà, afin de convenir des notations, et notons que nous affaiblissons la condition de recollement des côtés aux similitudes :

Définition 2.1.2 Soit \mathcal{P} une union finie et disjointe de polygones dans X et G un groupe de similitudes de X . Un G -appareillage de côtés pour \mathcal{P} est un sous-ensemble de G :

$$\Phi = \{g_c : c \in \mathcal{C}\},$$

indexé par l'ensemble des côtés \mathcal{C} de l'union des polygones tel que pour chaque $c \in \mathcal{C}$,

1. il existe $c' \in \mathcal{C}$ tel que $g_c(c') = c$;
2. les similitudes g_c et $g_{c'}$ vérifient la relation $g_c = g_{c'}^{-1}$;
3. si c est un côté d'un polygone P de \mathcal{P} et c' est un côté d'un polygone P' de \mathcal{P} , alors $P \cap g_c(P') = c$

Φ induit une relation d'équivalence sur \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou il existe un ensemble de points} \\ \{x_1, \dots, x_n\} \text{ et des côtés } \{c_1, \dots, c_{n-1}\} \\ \text{tels que } x = x_1, y = x_n, x_i \in c_i \text{ et } g_{c_i}(x_{i+1}) = x_i. \end{aligned}$$

Si tous les polygones de \mathcal{P} sont des triangles, la donnée de (\mathcal{P}, Φ) est appelée triangulation de l'espace topologique \mathcal{P}/\sim .

Dans le cas où il s'agit de trianguler une variété topologique compacte, S^3 typiquement, l'espace topologique à trianguler est précisément cette variété. Par contre, si l'on souhaite obtenir une triangulation idéale du complémentaire d'un nœud ou d'un entrelacs dans S^3 , ou plus généralement d'une variété non compacte, l'espace topologique à trianguler est différent. Pour cela, introduisons la notion de *variété à cusp* : c'est, par définition, une variété homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord. Notons M une telle variété et \bar{M} la variété telle que $M = \text{Int}(\bar{M})$. Notons \hat{M} l'ensemble topologique obtenu en contractant chaque composante connexe de $\partial\bar{M}$ en un point singulier. Dans ce cas, une triangulation idéale de M est une triangulation de \hat{M} telle que chaque sommet (après identification) est un point singulier de \hat{M} , triangulation de laquelle on a oté ces sommets. De tels sommets sont dits *sommets idéaux*. On maintient donc le terme triangulation par abus de langage, mais il n'y a pas de 0-cellule. Cela est souvent appelé *pseudo-triangulation*.

Le cas d'un entrelacs plongé dans une variété de dimension 3 amène la définition de *H-triangulation*, que nous allons utiliser par la suite : Une *H-triangulation* d'une paire (M, L) , où M est une 3-variété et L un entrelacs plongé dans M , est une paire (T, H) telle que T est une triangulation de M , et H est un sous-complexe hamiltonien du 1-squelette

de T qui correspond à L . Par sous-complexe hamiltonien, on entend qu'il contient tous les sommets de T .

Dans la suite, nous allons parler d'un certain type seulement de H-triangulations, à savoir des triangulations à un seul sommet de couple (M, K) où K est un nœud, telles que H , étant une seule arête, est inclus seulement dans deux faces d'un seul tétraèdre, dit *distingué*; ces deux faces se recollant l'une à l'autre de sorte que le tétraèdre se ferme comme un livre, comme l'illustre la figure 2.1. L'arête H représentant le nœud est appelée *arête distinguée*, elle est en pointillés, sur le bord de la face A seulement; les deux faces A sont identifiées l'une à l'autre comme l'indiquent les flèches sur les arêtes qui les bordent, elles seront appelées *faces distinguées*.

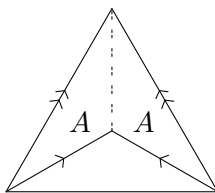


FIGURE 2.1 – Tétraèdre distingué, l'arête distinguée est en pointillés

À partir d'une telle H-triangulation d'un couple (M, K) qui contient au moins deux tétraèdres, il est possible d'obtenir une triangulation idéale du complémentaire de K dans M en rétractant par déformation le tétraèdre distingué en une face, le long de H qui, lui, est contracté en un sommet – voir figure 2.2 –, puis en ôtant ce sommet de la triangulation. Les deux faces contenant l'arête distinguée sont contractées en une arête, les arêtes labellisées simple et double flèche sont identifiées. On traitera ainsi deux types de triangulations : des H-triangulations particulières et des triangulations idéales correspondant à une H-triangulation particulière.

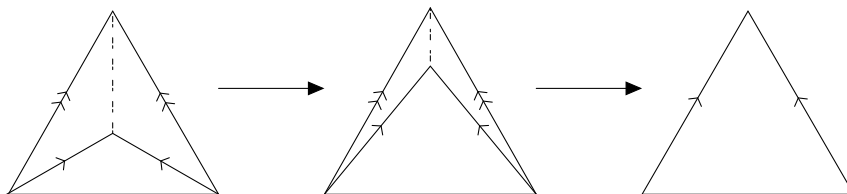


FIGURE 2.2 – Le tétraèdre distingué est contracté en une face, les arêtes labellisées d'une simple et double flèche de la H-triangulation sont identifiées dans la triangulation idéale correspondante

Pour une variété donnée, il existe une infinité de triangulations différentes, mais elles sont toutes reliées par une suite finie de trois mouvements (parfois appelés *mouvements de Pachner*) :

Mouvement $2 \rightarrow 3$ Deux tétraèdres collés le long d'une face sont remplacés par trois tétraèdres. Ceux-ci partagent une arête autour de laquelle ils sont collés deux à deux le long de trois faces en tout (voir figure 2.3). Ce mouvement peut aussi être effectué dans le sens $3 \rightarrow 2$.

Mouvement bulle Une face de la triangulation est remplacée par deux tétraèdres collés le long de trois faces (voir figure 2.4).

Mouvement $0 \rightarrow 2$ Deux faces adjacentes sont remplacées par deux tétraèdres collés le long de deux faces (voir figure 2.5).

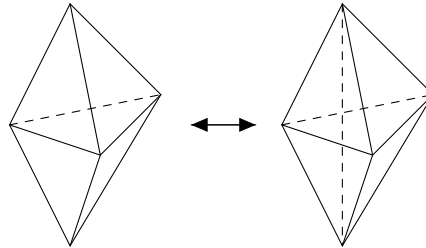


FIGURE 2.3 – Mouvement $2 \rightarrow 3$

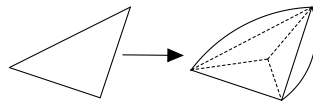


FIGURE 2.4 – Mouvement bulle

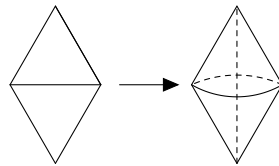


FIGURE 2.5 – Mouvement $0 \rightarrow 2$

Cela se démontre habituellement à l'aide des duaux des triangulations : les *standard spines*, dont je ne parlerai pas dans cette thèse. Voir [3] pour plus de précisions sur cela.

Définition 2.1.3 On dit qu'un G -appareillage de côtés est propre si pour chaque classe d'équivalence de point $x \in \mathcal{P}$, la somme des angles autour de x sur chaque triangle contenant x est 2π .

Le théorème suivant est démontré au chapitre 9 de [30].

Théorème 2.1.4 Soit G un groupe de similitudes de X , \mathcal{P} une famille finie disjointe de polygones de X , et M un espace obtenu en accolant les polygones de \mathcal{P} avec un appareillage propre. Alors, M est une 2-variété munie d'une (X, G) -structure telle que l'injection naturelle de l'intérieur d'un polygone dans M est une (X, G) -application pour tout polygone de \mathcal{P} .

Définition 2.1.5 Soit G un groupe d'isométries de X et soit $\Phi = \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ un G -appareillage de faces d'une famille finie \mathcal{P} de polyèdres disjoints de X . Alors nous dirons que Φ est propre si

1. tout point d'un polyèdre $P \in \mathcal{P}$ a une classe d'équivalence finie ;
2. les isométries g_f ne fixent aucun point de f' pour chaque $f \in \mathcal{F}$;

3. chaque classe d'équivalence d'arête a un angle diédral de 2π .

On termine cette section avec le théorème suivant, démontré au chapitre 10 de [30].

Théorème 2.1.6 *Soit G un groupe d'isométries de X , \mathcal{P} une famille finie disjointe de polyèdres de X , et M un espace obtenu en accolant les polyèdres de \mathcal{P} avec un appareillage propre. Alors, M est une 3-variété munie d'une (X, G) -structure telle que l'injection naturelle de l'intérieur d'un polyèdre dans M est une (X, G) -application pour tout polyèdre de \mathcal{P} .*

2.2 Algorithme de triangulation, exemple du nœud de huit

Les triangulations de complémentaires d'entrelacs et les algorithmes permettant de les déterminer, sont souvent présentés dans la littérature par l'intermédiaire de leurs duaux, les *standard spines*. Nous allons brièvement et sans démonstration (voir [3, 4, 12, 20] pour plus d'informations) voir un algorithme permettant de H-trianguler à la main des couples (S^3, K) , où K est un nœud plongé dans la sphère de dimension 3 ; et un algorithme permettant de déterminer une triangulation idéale du complémentaire d'un nœud dans S^3 (en fait, c'est le même algorithme). Algorithme maintes fois utilisé durant mon travail de thèse... Un algorithme de triangulation des complémentaires d'entrelacs est implémenté dans le logiciel SnaPea, logiciel qui comporte de plus une mine d'informations sur les nœuds, les entrelacs et les 3-variétés.

Considérons S^3 comme la compactification de \mathbb{R}^3 avec un point à l'infini et soit S^2 un plan équatorial de S^3 , c'est-à-dire la compactification de \mathbb{R}^2 avec le point à l'infini. La sphère S^3 est donc partagée en deux boules $B^{3,+}$ et $B^{3,-}$, séparées par la sphère équatoriale. Considérons le nœud plongé dans $\mathbb{R}^2 \times [-\epsilon, \epsilon] \subset \mathbb{R}^3$; c'est-à-dire qu'il est plongé dans \mathbb{R}^2 sauf proche des croisements, où une partie *sud* est incluse dans $\mathbb{R}^2 \times [-\epsilon, 0]$ et une partie *nord* est incluse dans $\mathbb{R}^2 \times [0, \epsilon]$.

L'idée, pour H-trianguler le couple (S^3, K) , c'est de partir d'une certaine décomposition cellulaire de S^3 , qui permet, après une certaine isotopie que nous allons préciser, d'obtenir une décomposition cellulaire de l'espace topologique quotient S^3 / \sim défini comme suit : on choisit arbitrairement un segment E de $K \cap \mathbb{R}^2$ et on quotiente S^3 par la relation d'équivalence \sim :

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in K \setminus E.$$

À partir de cette dernière décomposition cellulaire, on obtiendra une H-triangulation du couple (S^3, K) , où une arête distinguée représentera K .

Partons donc d'une décomposition cellulaire de S^3 où les deux brins d'un croisement du nœud constituent deux arêtes opposées d'un tétraèdre inclus dans $\mathbb{R}^2 \times [-\epsilon, \epsilon]$, comme illustré par la figure 2.6, où les tétraèdres sont coloriés ; ces tétraèdres constituent des 3-cellules de la décomposition, auxquelles sont collées une 3-cellule nord et une 3-cellule sud de part et d'autre de la sphère équatoriale.

Il s'agit maintenant de contracter $K \setminus E$ en un point grâce à une isotopie qui contracte chaque tétraèdre inclus dans $\mathbb{R}^2 \times [-\epsilon, \epsilon]$ comme l'illustre la figure 2.7. L'isotopie implique que des arêtes du tétraèdre soient identifiées entre elles, c'est cette information que codent les flèches sur les arêtes.

La figure 2.8 illustre par l'exemple du nœud de huit, toutes les étapes décrites jusque là. Les tétraèdres coloriés sont inclus dans $\mathbb{R}^2 \times [-\epsilon, \epsilon]$, les deux 3-cellules nord et sud sont collées l'une à l'autre le long de leurs faces A , B , C et D incluses dans la sphère équatoriale.

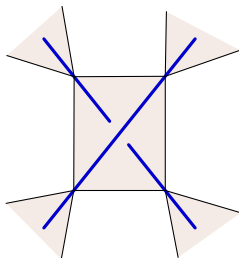


FIGURE 2.6 – Les deux brins d’un nœud constituent deux arêtes opposées d’un tétraèdre de S^3

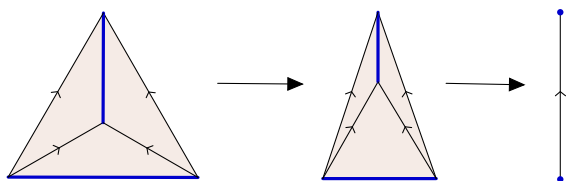


FIGURE 2.7 – Isotopie qui contracte un tétraèdre

Les dernières étapes de la triangulation consistent à décomposer chacune des deux 3-cellules nord et sud en tétraèdres, en identifiant les faces et arêtes le long desquelles ces 3-cellules se recollent, comme illustré dans le cas du nœud de huit sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11. Le recollement des arêtes bordant les faces se fait en suivant les brins du nœud correspondant à la cellule, nord ou sud. Par exemple, dans le cas du nœud de huit, sur le bord de la 3-cellule sud, la face C est accolée à la face B le long de l’arête double flèche ; sur le bord de la cellule nord, la face C est accolée à la face A le long de l’arête double flèche. La figure 2.12 est une H-triangulation du couple $(S^3, 4_1)$ ainsi obtenue.

Nous avons précisé que nous allons travailler avec des H-triangulations dites *particulières*, puisque l’arête E , dite *arête distinguée*, est incluse dans un seul tétraèdre, dit *tétraèdre distingué* recollé sur lui-même comme un livre.

Proposition 2.2.1 *Une telle H-triangulation particulière existe pour tout couple (S^3, K) où K est un nœud.*

Preuve Le 2-squelette des 3-cellules nord et sud est constitué de deux faces ayant l’arête distinguée sur leur bord ; notons les F et F' (voir figure 2.13 (a)). Collons ces deux 3-cellules le long de F' (voir figure 2.13 (b)). Il est alors possible d’extraire de la 3-cellule ainsi constituée, puis triangulée si nécessaire, un tétraèdre dont deux faces sont précisément F_2 , comme l’illustre la figure 2.13 (c). Notons que les arêtes rouges peuvent déjà faire partie du 1-squelette de cette 3-cellule, ou être identifiées à une arête labélisée simple ou double flèche (si F est triangulaire, $F = F_1 = F_2$). \square

Cet algorithme permet modulo une légère modification d’obtenir directement une triangulation idéale, sans passer par une H-triangulation correspondante : il suffit de choisir E comme un point.

Notons que d’une triangulation donnée, s’obtient une triangulation du lien de ses sommets en tronquant les tétraèdres. Donc, topologiquement, il s’agit soit d’ôter une boule

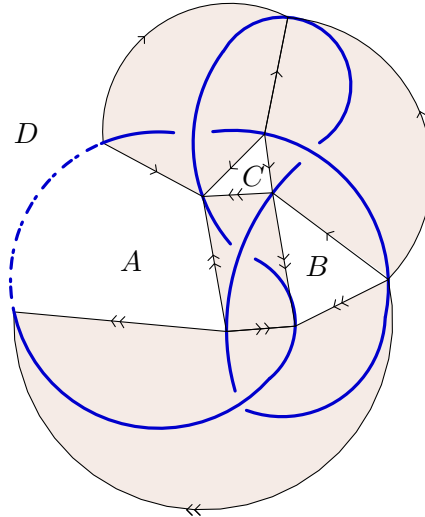


FIGURE 2.8 – Décomposition de S^3 en complexe cellulaire permettant d'extraire une triangulation de $(S^3, 4_1)$

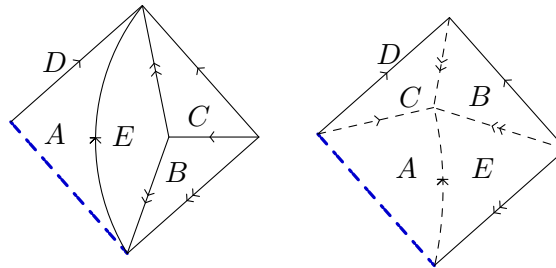


FIGURE 2.9 – Les cellules nord et sud ; le quadrilatère précédent A a été triangulé en A et E

autour du sommet dans le cas d'une H-triangulation d'un couple (S^3, K) , soit d'ôter un cône autour du sommet idéal dans le cas d'une triangulation idéale du complémentaire d'un nœud. Dans le premier cas, le lien du sommet est une sphère, dans le deuxième cas, c'est un tore.

Remarque 2.2.2 1. Pour une triangulation idéale à un seul sommet du complémentaire d'un nœud, la définition de la caractéristique d'Euler indique qu'il y a autant de classes d'équivalence d'arêtes que de tétraèdres.

2. Le nombre minimal de tétraèdres que peut avoir une triangulation d'une variété donnée est un invariant de la variété appelé *complexité*. Cet invariant n'est pas connu en général, mais le logiciel de triangulation SnaPea est connu pour avoir toujours trouvé une triangulation minimale d'un complémentaire de nœud.

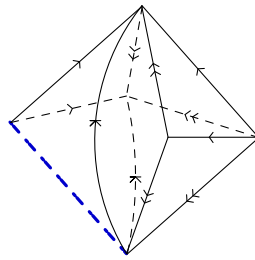
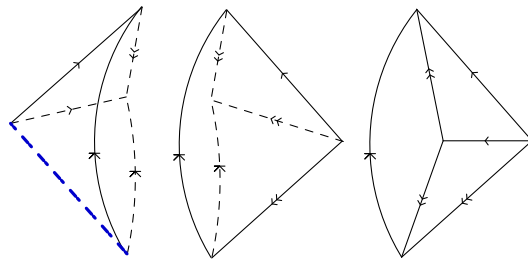
FIGURE 2.10 – Les cellules nord et sud sont collées le long de la face D 

FIGURE 2.11 – Tétraèdres extraits des cellules nord et sud

2.3 Exemple du nœud de trèfle

Voici à la figure 2.15, un exemple d'application de cet algorithme de H-triangulation du couple $(S^3, 3_1)$. Le résultat est donc une triangulation de S^3 à un seul tétraèdre, où une arête est nouée comme le nœud de trèfle.

Cependant, il n'y a pas de triangulation idéale correspondant à cette triangulation. Il est possible d'en obtenir une autre en accolant les boules nord et sud le long de la face A , plutôt que C . La figure 2.16 représente cela ; la face C y a été en plus triangulée en C_1 et C_2 .

De cette 3-cellule, on peut extraire le tétraèdre distingué, et il reste une 3-cellule bordée par les faces C_2 apparaissant deux fois, B et une quatrième face à coller au tétraèdre distingué, voir figure 2.17.

Il ne reste plus qu'à trianguler cette dernière 3-cellule, comme sur la figure 2.18.

2.4 Structure hyperbolique

2.4.1 Équations de recollement

Par souci de simplicité, nous allons dorénavant nous restreindre aux triangulations à un seul sommet. La plupart des propositions et théorèmes du chapitre 2 sont cependant toujours vraies dans le cas des triangulations à plusieurs sommets, mais le théorème principal de cette thèse, 3.3.2, ne l'est pas forcément.

Soit M une variété hyperbolique à *cusp* de dimension 3, obtenue en appareillant proprement les faces d'une union disjointe et finie de tétraèdres de \mathbb{H}^3 avec un seul sommet. Notons Φ l'appareillage. Nous allons voir des conditions combinatoires sur la géométrie des tétraèdres, qui déterminent la structure hyperbolique de M .

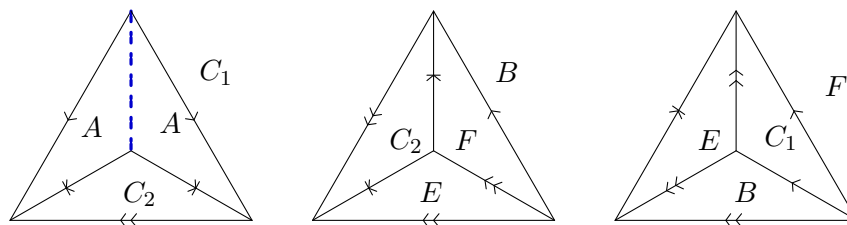
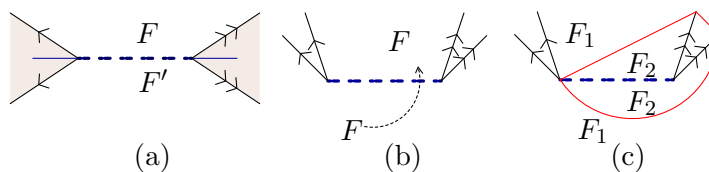
FIGURE 2.12 – H-triangulation de $(S^3, 4_1)$ 

FIGURE 2.13 – Étapes de l'algorithme au voisinage de l'arête distinguée.

Rappelons que l'appareillage des faces induit une classe d'équivalence sur le sommet idéal. Soit V un sommet idéal d'un tétraèdre T_V . Soit Σ_V une horosphère basée en V , qui ne croise que des arêtes issues de V . Alors le *lien* de V , $L(V)$, est défini comme $L(V) = T_V \cap \Sigma_V$. Le triangle $L(V)$ est Euclidien avec la métrique induite par Σ_V , et ne dépend pas du choix de Σ_V , à similitude près.

Plaçons-nous dans le modèle du demi-espace supérieur. Considérons un tétraèdre idéal non dégénéré (c'est-à-dire dont les quatre sommets sont distincts) avec un sommet à l'infini. Son intersection avec une horosphère centrée en l'infini est un triangle euclidien horizontal. Ce triangle-là est similaire au triangle formé des trois autres points sur le bord \mathbb{C} de \mathbb{H}^3 . Notons u, v et w ces trois sommets, dans le sens trigonométrique (voir figure 2.21) et associons à chacun de ces sommets les rapports suivants :

$$z(u) = \frac{w - u}{v - u}, z(v) = \frac{u - v}{w - v}, z(w) = \frac{v - w}{u - w}.$$

Ces rapports sont des birrapports de quatre sommets, dans le cas particulier où l'un d'entre eux est à l'infini. Ce sont des invariants des sommets qui caractérisent le tétraèdre à isométrie qui préserve l'orientation près. On les appelle les *paramètres de formes* associés à chacune de ces arêtes partant du sommet en question vers l'infini.

Considérons maintenant, sans perte de généralité, ces invariants en se ramenant au cas d'un tel tétraèdre où $u = 0, v = 1, w = z \in \mathbb{C}$ et avec le dernier sommet à l'infini. Alors $\Im(z) > 0$, $z(u) = z$, et il est alors facile de constater que $\arg(z)$ est l'angle diédral de l'arête correspondant au sommet u . De plus, d'après la définition des invariants de sommets, découlent les égalités suivantes :

$$z(v) = \frac{1}{1 - z}$$

$$z(w) = \frac{z - 1}{z}.$$

Cela se résume avec le théorème suivant.

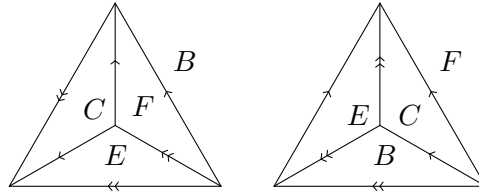


FIGURE 2.14 – Triangulation idéale à un seul sommet du complémentaire du nœud de huit dans S^3

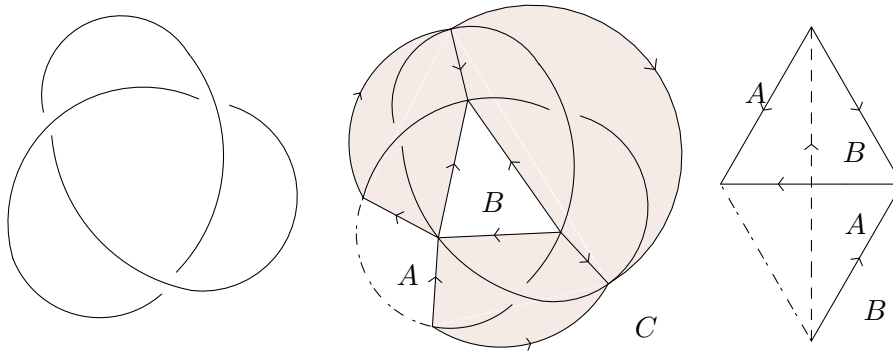


FIGURE 2.15 – Triangulation du couple $(S^3, 3_1)$

Théorème 2.4.1 Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes à partie imaginaire strictement positive, qui vérifient les équations

- (1) $z_1 z_2 z_3 = -1$ et
- (2) $1 - z_2 + z_1 z_2 = 0$.

Alors, il existe un tétraèdre idéal $T \in \mathbb{H}^3$, unique à isométrie préservant l'orientation près, dont les invariants d'arêtes, dans l'ordre de la main droite (sens trigonométrique en regardant par-dessus le tétraèdre), sont précisément z_1, z_2 et z_3 .

Ces paramètres sont en fait au cœur des résultats de cette thèse, avec les équations de recollement définies tout de suite.

Théorème 2.4.2 Soit Φ un $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^3)$ -appareillage de faces pour une union finie disjointe de k tétraèdres. Alors Φ est propre si et seulement s'il y a k classes d'équivalences d'arêtes telles que pour chacune d'elles les invariants d'arête satisfont l'équation de recollement suivante :

$$z(E_1)z(E_2) \cdots z(E_m) = 1$$

où $\{E_1, \dots, E_m\}$ est une classe d'équivalence.

Rappelons la définition d'appareillage propre de faces :

Définition 2.4.3 Soit G un groupe d'isométries de X et soit $\Phi = \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ un G -appareillage de faces d'une famille finie \mathcal{P} de polyèdres disjoints de X . Alors nous dirons que Φ est propre si

1. tout point d'un polyèdre $P \in \mathcal{P}$ a une classe d'équivalence finie ;

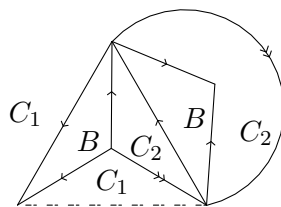
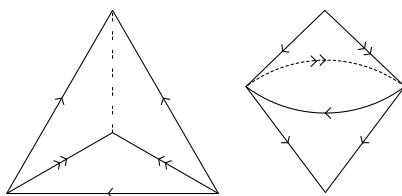
FIGURE 2.16 – Boules nord et sud collées le long de A 

FIGURE 2.17 – On peut extraire le tétraèdre distingué et une 3-cellule de la 3-cellule précédente

2. les isométries g_f ne fixent aucun point de f' pour chaque $f \in \mathcal{F}$;
3. chaque classe d'équivalence d'arête a un angle diédral de 2π .

Preuve L'idée derrière cette équation de recollement, c'est qu'autour d'une arête, les tétraèdres collés topologiquement le sont aussi géométriquement. Donc la somme des angles diédraux doit être 2π et le produit des modules égal à 1, voir figure 2.22.

Plus précisément :

Notons \mathcal{T} l'union disjointe des tétraèdres. Soit E_i une arête sur une face f_i d'un tétraèdre T_i de \mathcal{T} . Supposons, sans perte de généralité, que $g_{f_i}(E_{i+1}) = E_i$ pour $i = 1, \dots, m-1$ et $g_{f_m}(E_1) = E_m$. Définissons $g_1 = 1$ et $g_i = g_{f_1} \cdots g_{f_{i-1}}$ pour $i = 2, \dots, m+1$. Alors $g_{m+1}(E_1) = E_1$. Orientons chaque tétraèdre T_i positivement ; cela induit une orientation sur les faces f_i . Comme la restriction $g_{f_i} : f'_i \rightarrow f_i$ renverse l'orientation, l'intersection entre f'_i et f_{i+1} , à savoir E_{i+1} , est orientée négativement par rapport à f'_i . Par conséquent, la restriction $g_{f_i} : E_{i+1} \rightarrow E_i$ préserve l'orientation pour $i = 1, \dots, m-1$. De même pour $g_{f_m} : E_1 \rightarrow E_m$, et donc g_{m+1} . Il en résulte que g_{m+1} agit soit comme l'identité sur E_1 , soit comme une translation non triviale. Le deuxième cas implique que la classe d'équivalence de E_1 est infinie. On a donc l'équivalence que g_{m+1} est l'identité si et seulement si la classe d'équivalence de E_1 est finie.

Les tétraèdres T_i et $g_{f_i}(T_{i+1})$ sont face-à-face vis-à-vis de leur face commune f_i , donc il en est de même pour les tétraèdres $g_i T_i$ et $g_{i+1} T_{i+1}$ vis-à-vis de $g_i f_i$ pour tout $i = 1, \dots, m-1$. De plus, comme f_i et f'_{i-1} sont deux faces de T_i s'intersectant en E_i , $g_i f_i$ et $g_i f'_{i-1} = g_{i-1} f_{i-1}$ sont deux faces de $g_i T_i$ s'intersectant le long de E_1 , pour $i = 2, \dots, m$. Par conséquent, les tétraèdres $g_i T_i$, pour $i = 1, \dots, m$, se recollent successivement autour de E_1 , en commençant par f'_m de T_1 et en terminant par $g_m f_m = g_{m+1} f'_m$ de $g_m T_m$. Remarquons que les tétraèdres $g_i T_i$ se recollent tous géométriquement autour de E_1 si et seulement si la somme des angles diédraux des arêtes E_1, \dots, E_m vaut 2π et $g_{m+1} = 1$. Donc Φ est propre si et seulement si $\{g_i T_i\}$ forme un cycle de tétraèdres autour de E_1 pour chaque classe d'équivalence d'arêtes $\{E_1, \dots, E_m\}$.

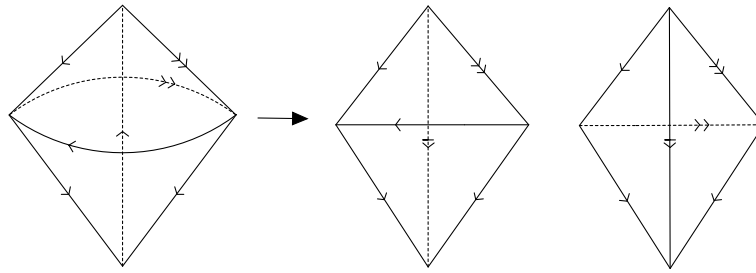
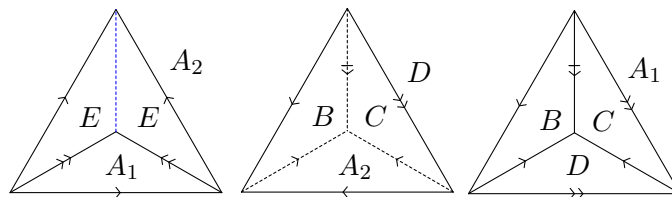


FIGURE 2.18 – Triangulation de la dernière 3-cellule en ajoutant une arête

FIGURE 2.19 – H-triangulation de $(S^3, 3_1)$

Supposons sans perte de généralité que ces tétraèdres sont plongés dans le modèle du demi-espace supérieur de sorte que E_1 est vertical, et intersectons ces tétraèdres avec une horosphère centrée en l'infini. Il est alors clair que la condition précédente se réécrit à l'aide des paramètres de forme des tétraèdres.

Remarquons premièrement que l'argument du paramètre de forme associé à une arête correspond à l'angle diédral de cette arête, donc à l'angle au sommet du triangle euclidien correspondant à l'intersection de l'horosphère avec l'arête en question ; le module du paramètre de forme d'une arête donnée correspond au ratio des longueurs des côtés du triangle euclidien, partant du sommet issu de l'intersection de l'horosphère avec l'arête en question.

Nous savons donc, par définition de propriété de Φ et grâce à cette discussion précédente, qu'il y a autant de classes d'équivalence d'arêtes que de tétraèdres, et pour chacune d'entre elles, si Φ est propre, alors l'équation suivante est vérifiée :

$$z(E_1)z(E_2) \cdots z(E_m) = 1.$$

Il s'agit des *équations de recollement de Thurston*.

Pour s'assurer que la contraposée est vraie, il reste à montrer que si une équation de recollement est vérifiée, alors la somme des arguments des $z(E_i)$ pour $i = 1, \dots, m$ est précisément 2π et pas un multiple non trivial de 2π . Il y a k tétraèdres, et la somme des angles diédraux sur les six arêtes d'un tétraèdre est 2π , donc la somme des angles diédraux sur toutes les arêtes est $2k\pi$. Il y a aussi k classes d'équivalences d'arêtes autour de chacune desquelles la somme des angles diédraux est par hypothèse un multiple de 2π , c'est donc bien 2π . \square

Nous noterons Sol_H l'ensemble des solutions des équations de recollement ; s'il y a n tétraèdres dans la triangulation, $Sol_H \subset (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n$. À chaque point de Sol_H , correspond une représentation discrète du groupe du nœud dans $PSL(2, \mathbb{C})$.

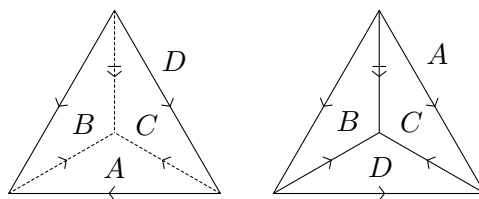
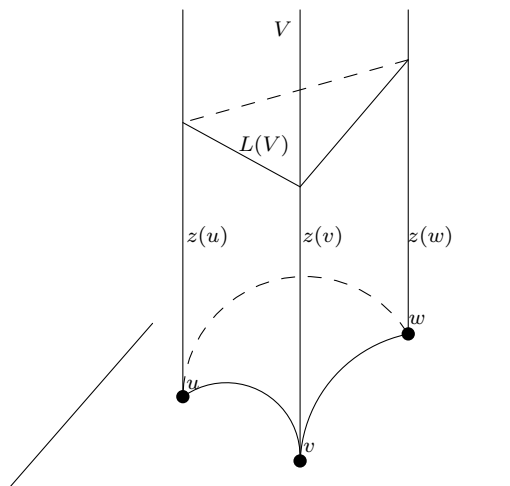
FIGURE 2.20 – Triangulation idéale du complémentaire du nœud de trèfle dans S^3 

FIGURE 2.21 – Tétraèdre idéal hyperbolique avec un sommet à l'infini

2.4.2 Structure hyperbolique complète

Commençons par définir et rappeler des notations. Soit v un sommet d'un tétraèdre, notons $[v]$ la classe d'équivalence de v selon l'appareillage de faces Φ . Le point $[v]$ est le sommet idéal de la triangulation, on dit que c'est un point *cusp* de la variété. Soit f et f' deux faces telles qu'il existe g_f , un élément de Φ , tel que $g_f(f') = f$; et u, u' des sommets de f, f' tels que $g_f(u') = u$. Rappelons que $L(u)$ (resp. $L(u')$) désigne un triangle euclidien, intersection de l'horosphère Σ_u (resp. $\Sigma_{u'}$) avec le tétraèdre T_u , (resp. $T_{u'}$). Alors $\Sigma_u \cap f$ (resp. $\Sigma_{u'} \cap f'$) est un côté de $L(u)$ (resp. $L(u')$). Notons

$$\bar{g}_f : \Sigma_{u'} \rightarrow g_f(\Sigma_{u'})$$

la restriction de g_f . L'application \bar{g}_f est une isométrie euclidienne. Les segments $g_f(\Sigma_{u'}) \cap f$ et $\Sigma_u \cap f$ sont parallèles, car $g_f(\Sigma_{u'})$ et Σ_u sont concentriques (voir schéma 2.23).

Soit

$$p_f : g_f(\Sigma_{u'}) \rightarrow \Sigma_u$$

la projection radiale. L'application p_f est alors un changement d'échelle. Soit $h_f = p_f \bar{g}_f$, alors h_f est une similitude qui envoie le côté $\Sigma_{u'} \cap f'$ de $L(u')$ sur le côté $\Sigma_u \cap f$ de $L(u)$. Donc, $\{h_f\}_{f \in \mathcal{F}}$ constitue un $S(\mathbb{E}^2)$ -recollement propre des triangles $L(u)$ (\mathcal{F} est l'ensemble des faces, et $S(\mathbb{E}^2)$ est le groupe des similitudes de \mathbb{E}^2).

On suppose les horosphères Σ_u choisies de telle manière que $p_f = \text{Id}$ pour le plus grand nombre possible de faces f .

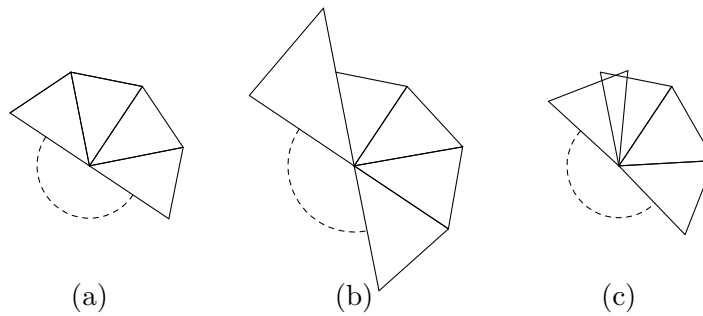


FIGURE 2.22 – Trois intersections de tétraèdres avec une horosphère : (a) le produit des paramètres de forme associés à l'arête centrale vaut 1 ; (b) le produit des modules est supérieur à 1 ; (c) la somme des arguments est supérieure à 2π .

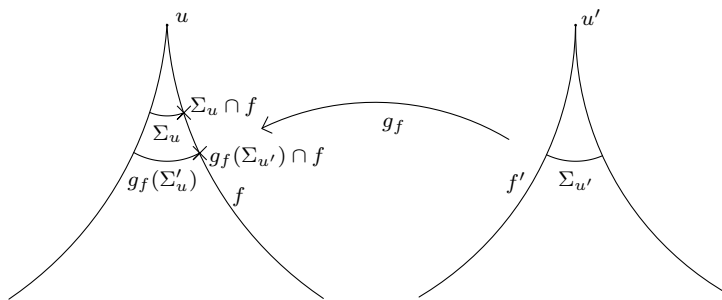


FIGURE 2.23 – Schéma explicitant les notations de cette sous-section

Notons $L[v]$ l'espace euclidien obtenu en collant les triangles $L(u)$ selon les similitudes h_f . La surface $L[v]$ est appelée le lien du sommet idéal $[v]$; si les éléments de Φ préservent l'orientation, cette surface est topologiquement un tore.

Lemme 2.4.4 *S'il est possible de choisir l'ensemble des triangles $\{L(u)\}$ de telle manière que Φ se restreint en un appareillage de côtés pour $\{L(u)\}$, alors $L[v]$ est complet.*

Preuve Si Φ se restreint en un appareillage de côtés pour $\{L(u)\}$, alors le changement d'échelle p_f est trivial pour tout f , donc $h_f = \bar{g}_F$ et $\{h_f\}$ constitue donc un $\mathcal{I}(\mathbb{E}^2)$ -appareillage de côtés pour $\{L(u)\}$. De plus $L[v]$ est compact, donc la $(\mathbb{E}^2, \mathcal{I}(\mathbb{E}^2))$ -structure de $L[v]$ ainsi déterminée est complète d'après le théorème 1.2.19. Le théorème 1.2.21 permet de conclure que $L[v]$ est une $(\mathbb{E}^2, \mathcal{S}(\mathbb{E}^2))$ -surface. \square

Définissons un nombre réel $d(v)$ associé à un sommet v à partir d'un recollement propre de tétraèdres définissant une variété hyperbolique. Soit $[v]$ un sommet idéal, Σ_v une horosphère centrée en v , T_v un tétraèdre ayant v pour sommet idéal, et $L(v) = \Sigma_v \cap T_v$ qui est un triangle euclidien. Prolongeons $L(v)$ autour de v en un polygone P triangulé, grâce aux isométries de Φ , de sorte que pour chaque $u \in [v]$, $L(u)$ est un triangle de P . Autrement dit, P croise successivement chacun des tétraèdres T_u orthogonalement et proche de u , jusqu'à entrer de nouveau vers le tétraèdre T_v comme une nouvelle horosphère Σ'_v centrée en v , donc concentrique avec Σ_v . Notons $d(v)$ la distance entre Σ_v et Σ'_v et considérons que $d(v)$ est positif si l'horoboule bornée par Σ'_v contient Σ_v . Notons que $d(v)$ est un invariant de $[v]$.

La figure 2.24 explicite schématiquement cette construction de $d(v)$. À gauche, l'horosphère centrée en v , $L(v)$ est prolongée après x_1 , orthogonalement vers x_2 , puis vers x_3 , etc. jusqu'à x_5 où l'horosphère Σ'_v est concentrique à Σ_v , et distante de $d(v)$. La figure de droite explicite cela après identification des sommets de $[v]$: les « segments » x_i et x'_i sont collés (des points sur le schéma, des segments dans le cas étudié) et le « triangle » $L(v)$ est prolongé en un « polygone » P (un arc sur le schéma, mais un triangle et un polygone dans le cas étudié).

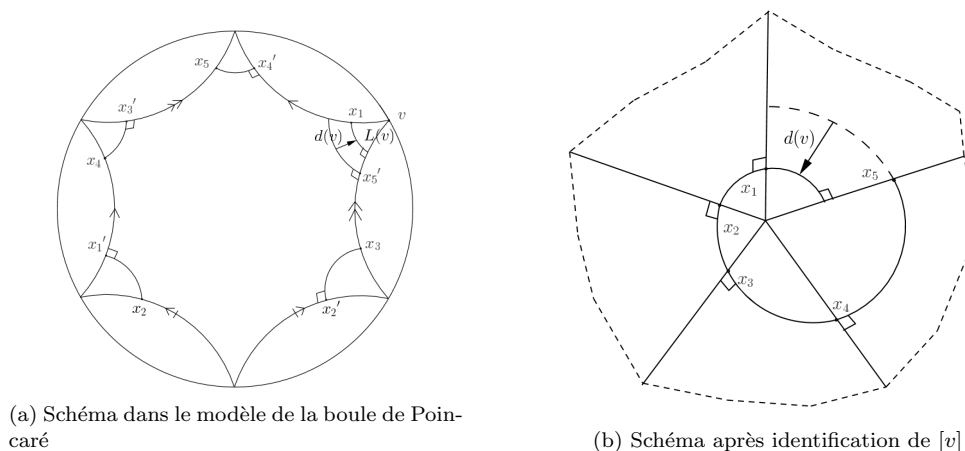


FIGURE 2.24 – Le triangle $L(v)$ est étendu en un polygone P autour des éléments de $[v]$

Lemme 2.4.5 M est complète si et seulement si pour son sommet idéal $[v]$, $d(v) = 0$.

Preuve Supposons dans un premier temps que $d(v) < 0$. Continuons alors indéfiniment le prolongement de l'horosphère Σ_v après Σ'_v et appelons h_v ce qu'il en résulte. À chaque tour autour de v , le rayon de l'horosphère est multiplié par un facteur constant inférieur strictement à 1. Il existe donc un arc sur h_v de longueur bornée après un nombre de tour indéfiniment grand autour de v , et contenant une collection de points constituant une suite de Cauchy non convergente.

De même si $d(v) > 0$ pour tout sommet v , en tournant dans l'autre sens.

Supposons maintenant que pour le sommet $[v]$, $d(v) = 0$. Dans ce cas, considérons une nouvelle variété compacte M_0 issue de M après lui avoir enlevé un voisinage du sommet en horoboule. Soit $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$ une famille de variétés obtenues en enlevant des horoboules de rayon plus petit bornées par des horosphères à distance t de la première. Alors (M_t) satisfait les conditions du lemme suivant, donc M est complète. \square

Lemme 2.4.6 S'il existe une famille $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'ensembles compacts recouvrant M tels que M_{t+a} contient un voisinage de rayon a autour de M_t , alors M est un espace métrique complet.

Preuve Soit (u_i) une suite de Cauchy de M et $\epsilon > 0$. Alors, il existe un entier k tel que $d(u_i, u_j) < \epsilon$ pour tout $i, j \geq k$. Comme les M_t recouvrent M , il existe un entier l tel que $\{u_1, \dots, u_l\} \subset M_l$. Alors l'ensemble $M_{l+\epsilon}$ contient entièrement la suite (u_i) . Comme $M_{l+\epsilon}$ est compact, la suite des (u_i) converge. Donc M est bien complète. \square

Théorème 2.4.7 Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 obtenue par un $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ -appareillage propre d'une famille finie disjointe de tétraèdres idéaux de \mathbb{H}^3 . Alors M admet une structure hyperbolique complète si et seulement si le lien du point cusp admet une structure euclidienne complète.

Preuve Soit v un point idéal de M et $L[v]$ son lien. Supposons que $L[v]$ ne soit pas complet. Alors, d'après le lemme 2.4.4, il existe une face f croisant $[v]$ tel que la projection radiale $p_f \neq \text{Id}$. Il s'agit à partir de cela de construire une suite de Cauchy non convergente de M : Notons f_1, \dots, f_m des faces ayant pour sommets v_1, \dots, v_m respectivement, numérotés tel que $g_{f_i}(v_{i+1}) = v_i$, $g_{f_m}(v_1) = v_m$, $p_{f_i} = \text{Id}$ pour chaque $i = 1, \dots, m-1$, et $S = S'_m$. Notons aussi $L_i = L(v_i)$, les triangles euclidiens pour $i = 1, \dots, m$. Soit x'_0 un point de $f \cap L_1$. Soit α_1 un segment joignant x'_0 à un point x_1 de $f_1 \cap L_1$. On choisit récursivement un point x_i de $f_i \cap L_i$ et un segment α_i de L_i joignant x'_{i-1} à x_i pour $i = 2, \dots, m$ tel que $p_f(x'_m) = x'_0$ (voir figure 2.25)

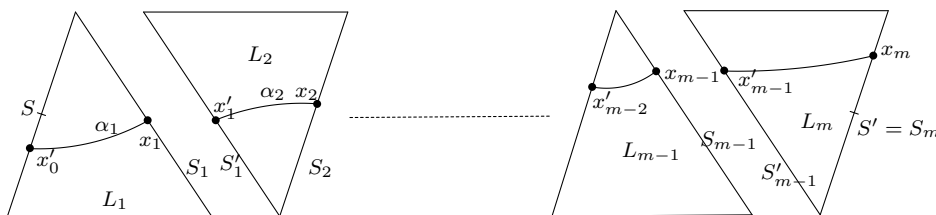


FIGURE 2.25 – Construction d'une suite de Cauchy non convergente

Ainsi, la suite constituée des x_i , soit dans l'ordre des indices croissants puis prolongée après x_m , soit dans l'ordre des indices décroissants puis prolongée après x_1 , constitue une suite de Cauchy non convergente telle que mentionnée dans la preuve du lemme 2.4.5. Ce qui prouve que M n'est pas complète.

Réciproquement, supposons que $L[v]$ soit complète. D'après le théorème 1.2.24, il existe un groupe d'isométries Γ_v de \mathbb{H}^3 agissant librement et discontinument sur Σ_v , et il existe une $(\mathbb{E}^2, \mathcal{I}(\mathbb{E}^2))$ -équivalence entre Σ_v/Γ_v et $L[v]$, compatible avec la projection de $L(v)$ sur $L[v]$. Soit $B(v)$ l'horoboule ouverte centrée en v telle que $\partial B(v) = \Sigma_v$. Alors, Γ_v agit librement et discontinument sur $B(v)$ comme un groupe d'isométries. Par conséquent, pour chaque $[v]$, $B(v)/\Gamma_v$ est une variété hyperbolique de dimension 3 qui vérifie les conditions du lemme 2.4.6, donc M est complète. \square

2.4.3 Équation de complétude

Considérons donc maintenant une triangulation idéale à un seul sommet idéal du complémentaire d'un nœud dans S^3 , nous allons maintenant voir une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres de formes des tétraèdres de la triangulation pour que cette variété puisse être munie d'une structure hyperbolique complète. Avant cela, récapitulons ce que nous avons vu jusqu'à présent :

D'après le théorème 2.4.7, M est complète si et seulement si L est complète. D'après les théorèmes 1.2.11, 1.2.21 et 1.2.24, on a que L est complète si et seulement si l'holonomie

$$\eta : \pi_1(L) \rightarrow S(\mathbb{E}^2)$$

envoie $\pi_1(L)$ isomorphiquement sur un groupe libre discret d'isométries euclidiennes. Ce qui est le cas si et seulement si l'image de η est un groupe de translations. En identifiant \mathbb{E}^2 à \mathbb{C} , on peut écrire une isométrie euclidienne de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, il s'agit donc d'avoir $\alpha = 1$.

Revenons-en au tore L , qui admet une triangulation induite par la triangulation du complémentaire du nœud : il s'agit de l'intersection d'une horosphère avec les tétraèdres idéaux. À chacun des sommets de ces triangles, est associé un paramètre de forme des

tétraèdres dont le module est égal, par construction, à un ratio de longueurs des côtés adjacents des triangles. En suivant les notations de la figure 2.26, on a $|z| = \frac{|u_1|}{|u_2|}$. Ainsi, le paramètre α de l'image d'un chemin sur L correspond à un certain produit des paramètres de forme successifs :

Référons-nous par exemple à la figure 2.27. Cette figure représente une partie de chemin sur un lien L . Par construction des paramètres de forme, $z_1(-z_4z_6)z_8(-z_{10}z_{12}) = \frac{a}{b}$, où a et b sont vus comme des longueurs algébriques. Ainsi, l'image d'une boucle sur le lien par η est le produit des paramètres de forme aux angles des triangles que croise la boucle. Cela nous fournit donc une équation supplémentaire aux équations de recollement, à partir des paramètres de forme, à savoir que le produit des paramètres de forme donné par le méridien sur le lien du point cusp doit être égal à 1. On peut aussi le faire pour la longitude, les deux équations sont équivalentes, si l'on a déjà imposé les équations de recollement.

Remarque 2.4.8 Notons que dans l'exemple précédent, les relations de triangle impliquent : $\frac{a}{b} = z_1z_5^{-1}z_8z_{11}^{-1}$.

S'il existe, l'ensemble de paramètres de forme qui constitue une solution aux équations de recollement et de complétude pour une triangulation donnée, est unique, et il induit une représentation fidèle du groupe du nœud dans $PSL(2, \mathbb{C})$. Nous le noterons Sol_C .

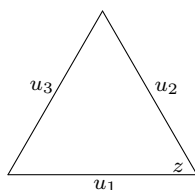


FIGURE 2.26 – Lien d'un sommet ; les u_i représentent les longueurs de côtés, z est un paramètre de forme

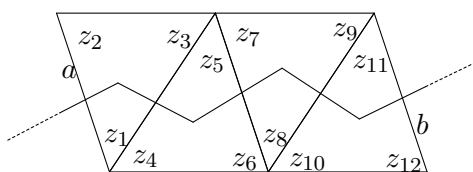


FIGURE 2.27 – Chemin sur L ; les z_i sont des paramètres de forme, a et b sont les longueurs des côtés

2.4.4 Exemple du nœud de huit

Reprenons la triangulation idéale du complémentaire du nœud de huit dans S^3 vue précédemment et la triangulation du lien du sommet idéal.

L'équation de recollement autour de l'arête labellisée d'une simple flèche est

$$z_1z_2^2w_2w_3^2 = 1,$$

pour la double flèche :

$$z_1z_3^2w_1^2w_2 = 1.$$

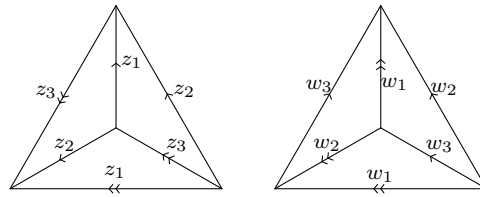


FIGURE 2.28 – Triangulation idéale du complémentaire du nœud de huit ; les paramètres de formes sont écrits à côté des arêtes

Tronquer les tétraèdres de la triangulation idéale donne une décomposition cellulaire du complémentaire d'un voisinage tubulaire du nœud, cela permet aussi de déterminer le lien du sommet idéal (voir figure 2.30). L'arête labellisée g constitue un méridien de cette triangulation et on en déduit donc l'équation de complétude suivante :

$$z_2(-w_2w_3) = 1.$$

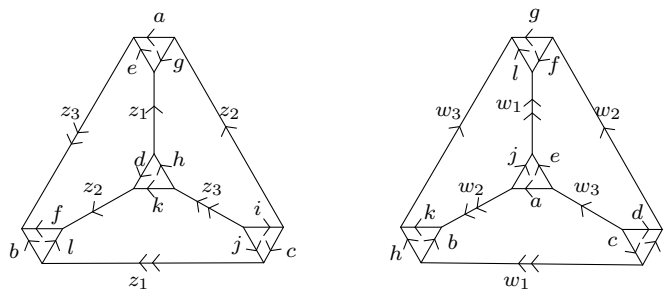


FIGURE 2.29 – Triangulation idéale tronquée du complémentaire du nœud de huit dans S^3 .

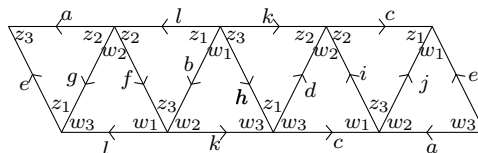


FIGURE 2.30 – Lien du point cusp de la triangulation idéale du complémentaire du nœud de huit

- Remarque 2.4.9**
1. Dans le cas du nœud de huit, la triangulation idéale à deux tétraèdres fournit une métrique hyperbolique complète si et seulement si les deux tétraèdres sont réguliers, c'est à dire que tous les paramètres de forme sont égaux à $e^{i\pi/3}$.
 2. Le volume d'une variété hyperbolique complète est un invariant topologique, d'après le théorème de rigidité de Mostow. Si Sol_C admet une solution, chaque tétraèdre a une géométrie qui permet de calculer son volume. Le volume de la variété est la somme des volumes des tétraèdres.

3. Sol_H est appelé *variété de déformation*. Il s'agit d'une variété algébrique affine et « presque tous ses points » correspondent à la déformation d'une variété complète qu'il est possible d'obtenir à partir d'une chirurgie de Dehn. Toute variété hyperbolique complète peut être obtenue à partir d'une triangulation idéale d'une variété à *cusp* par chirurgie de Dehn (voir par exemple [36] pour plus d'informations).

2.4.5 H-triangulations et équations de recollement

Comme nous l'avons vu précédemment, les triangulations idéales de complémentaires de nœud peuvent s'obtenir à partir de H-triangulations à un sommet. Remarquons que dans une H-triangulation particulière, le nœud est représenté par une arête et il est représenté par un sommet dans une triangulation idéale. La H-triangulation contient en quelque sorte plus d'informations que la triangulation idéale correspondante. Nous allons voir tout de suite ce qu'il en est des équations de recollement et de complétude avec les H-triangulations. Avant cela, distinguons trois types d'arêtes dans une H-triangulation :

1. il y a l'arête distinguée ;
2. il y a des arêtes qui ont une arête correspondante dans la triangulation idéale : ce sont, d'une part, les arêtes qui n'apparaissent pas dans le tétraèdre distingué et, d'autre part, l'arête opposée à l'arête distinguée dans le tétraèdre distingué ;
3. enfin, il y a les arêtes des deux classes d'équivalence qui sont identifiées lors de la contraction du tétraèdre distingué permettant de passer de la H-triangulation à la triangulation idéale correspondante.

Notons que les deux dernières catégories ne sont pas forcément disjointes, comme dans l'exemple du nœud de trèfle présenté précédemment.

Proposition 2.4.10 *Considérons une triangulation particulière d'un couple (S^3, K) où K est un nœud, et sa triangulation idéale correspondante. Associons à chaque arête de tétraèdre non-distingué un paramètre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ qui vérifie les équations suivantes :*

- (1) *Si z_1, z_2, z_3 sont trois paramètres d'arêtes autour d'un sommet, ordonnés dans le sens trigonométrique, alors ils vérifient les équations :*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= -1 \\ 1 - z_2 + z_1 z_2 &= 0 \end{aligned}$$

- (2) *Soit $[E]$ une classe d'équivalence d'arêtes de la triangulation et z_1, \dots, z_n les paramètres associés aux arêtes de $[E]$ qui ne sont pas dans le tétraèdre distingué, alors*

- (i) *Si $[E]$ est dans la troisième catégorie précédemment définie,*

$$\prod_{i=1}^n z_i = -1;$$

- (ii) *si non,*

$$\prod_{i=1}^n z_i = 1;$$

Alors l'ensemble des solutions de ces équations est égal à Sol_C .

Remarque 2.4.11 À partir d'une H-triangulation particulière du couple (S^3, K) , on peut donc directement avoir les équations de recollement et l'équation de complétude de la triangulation idéale correspondante.

Preuve Soit $[v]$ la classe d'équivalence du sommet de la H-triangulation. Alors le lien de $[v]$ est une sphère. Étudions le cas des trois types d'arêtes de la H-triangulation :

Il est clair que le produit des paramètres complexes associés à une classe d'équivalence d'arêtes qui sont dans la deuxième catégorie mais pas dans la troisième, correspond à une équation de recollement de la triangulation idéale. Celles-ci permettent donc d'avoir toutes les équations de recollement. En effet, rappelons que s'il y a n classes d'équivalence d'arêtes, il suffit d'avoir $n - 1$ équations de recollement, puisque la dernière se déduit de celles-ci. Il s'agit donc d'observer quelle équation donne le produit des paramètres de forme correspondant à une des deux dernières classe d'équivalence d'arêtes. Pour cela, reportons-nous à la figure 2.31. Il s'agit d'un schéma de triangulation du lien d'une H-triangulation, donc d'une sphère triangulée. Les deux triangles des extrémités gauche et droite sont les liens des sommets bordant l'arête distinguée. La courbe bleue représente donc les produits de paramètres complexes associés à une arête de la troisième catégorie. Il s'agit par ailleurs du produit des paramètres de forme associés au méridien du lien du sommet idéal de la triangulation idéale correspondante. \square

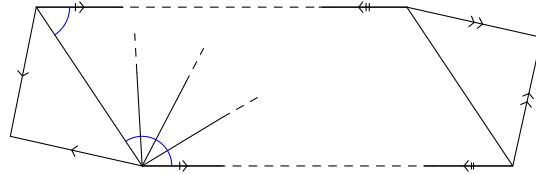


FIGURE 2.31 – Schéma du lien du sommet d'une H-triangulation

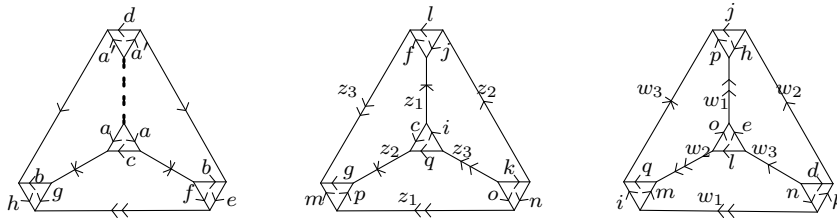


FIGURE 2.32 – H-triangulation tronquée du couple $(S^3, 4_1)$

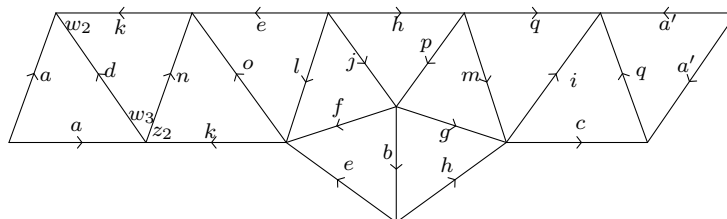


FIGURE 2.33 – Lien du sommet de la H-triangulation de $(S^3, 4_1)$

Dans l'exemple du nœud de huit, on a pour l'arête labellisée double flèche :

$$z_1 z_3^2 w_1^2 w_2 = 1$$

et pour l'arête simple flèche :

$$z_2 w_2 w_3 = -1.$$

Chapitre 3

Une généralisation non commutative

3.1 Introduction

In his famous Princeton notes [36], Thurston introduced the following gluing equations. Starting from an ideal triangulation X of a cusped manifold, $M \setminus K$, assign to each edge of each tetrahedron a shape parameter $z \in \mathbb{C}$ so that :

- if z_1, z_2, z_3 are three shape parameters counter-clockwisely ordered around a vertex of a tetrahedron, then $z_1 z_2 z_3 = -1$ and $z_2 - z_1 z_2 = 1$;
- for each edge E of X , let z_1, \dots, z_n be the shape parameters of all the edges which are identified to E , then $\prod_{i=1}^n z_i = 1$.

This defines a set of polynomial equations, hence an affine variety in $(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^{6n}$, where n is the number of tetrahedra in the triangulation. This affine variety is called *deformation variety*. We denote by R_I its associated ring of regular functions. The deformation variety may be empty for some triangulations. In that case, R_I is defined to be the ring with one element.

Since then, the gluing equations have been extensively studied, see for example [15, 16, 26, 27, 33, 34].

Later, Kashaev introduced Δ -groupoids [10] and B' -rings associated to ideal triangulations of manifolds and computed them for the trefoil and the figure eight knot complements [13].

Then, in [11], Kashaev introduced the ring \tilde{R}_H , the abelianisation of which is studied in this article. This ring is associated to a particular 1-vertex H-triangulation of a pair (M^3, K) (where M^3 is a connected, oriented, closed 3-manifold and K is a knot) to which naturally corresponds an ideal triangulation of the complement of K in M^3 . This will be precised in section 3.2. In the case of the trefoil knot, \tilde{R}_H is abelian and isomorphic to R_I . In the case of the figure-eight knot, \tilde{R}_H is not abelian, but its abelianization is isomorphic to R_I .

We prove in the following that for any knot embedded in an integral homology 3-sphere there exists an isomorphism between the abelianization of the ring \tilde{R}_H defined from particular H-triangulations and the ring R_I of regular functions on the deformation variety of a corresponding ideal triangulation. This isomorphism is explicitly constructed in section 3.3 and the corresponding theorem 3.3.2 is proved in section 3.4. In section 3.5 we give an example of a knot embedded in the 3-sphere and examples of knots embedded in other manifolds.

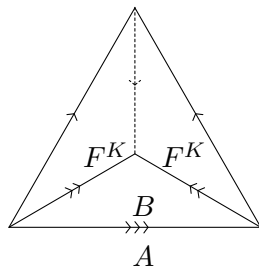


FIGURE 3.1 – Example of a distinguished tetrahedron T^K . Its distinguished edge K is dotted.

3.2 Preliminaries

3.2.1 Triangulations

Let M be a connected, oriented, closed 3-manifold. A triangulation Δ of M is defined to consist of a pairwise disjoint union of oriented euclidian tetrahedra $\Delta^3 = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i^3$, together with a collection Φ of orientation-reversing affine isomorphisms pairing the faces of the tetrahedra in Δ^3 , so that M is homeomorphic to the identification space Δ^3/Φ . In the following, for $k \in \mathbb{N}$, Δ^k will denote the set of cells of dimension k of the triangulation Δ .

An H-triangulation is a pair (Δ, K) , where Δ is a triangulation of a 3-manifold M and K is a hamiltonian subcomplex of the 1-skeleton of Δ . In the following, we will consider only *particular* H-triangulations : we will assume that Δ has only one vertex, and the hamiltonian subcomplex is given by a single edge K , which is contained in a single face, F^K of Δ , obtained from a single tetrahedron T^K of Δ , glued to itself as a closed book by Φ along its two faces. The edge K represents a knot embedded in M . Such a H-triangulation of (M, K) will be denoted \mathcal{T}_H . In order to stress the "H-nature" of \mathcal{T}_H , the set of k dimensional cells of \mathcal{T}_H will be denoted $\Delta^{k, \mathbf{H}}$ and the set of face pairings, $\Phi^{\mathbf{H}}$. We will denote $p_H : \Delta^{3, \mathbf{H}} \rightarrow \Delta^{3, \mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}$ the identification projection. K, F^K, T^K will respectively be called *distinguished edge*, *distinguished face* and *distinguished tetrahedron* (see figure 3.1).

Proposition 3.2.1 *For any knot K in \mathbb{S}^3 , there exists a particular H-triangulation of (\mathbb{S}^3, K) .*

Proof There exist algorithms for one vertex H-triangulations of couples (\mathbb{S}^3, K) . See, for example, [12], section 4. A slight modification of this algorithm allows one to get a particular H-triangulation : at the last stage of the decomposition of the 3-cell onto several tetrahedra, one has to extract a distinguished tetrahedron, and the previous steps of the algorithm always make this possible. \square

From \mathcal{T}_H , one gets a cell decomposition of another manifold by removing an open neighbourhood of the vertex. This is equivalent to truncating the tetrahedra, so that the new 3-cells are bounded by *triangular* and *hexagonal* faces. The triangular faces are bounded by *short edges*, and hexagonal faces are bounded by short and *long edges* which are remnants of the edges of \mathcal{T}_H . The obtained manifold is the complement in M of an open ball. Such a cell decomposition will be denoted $\overline{\mathcal{T}_H}$ and the set of k dimensional cells in $\overline{\mathcal{T}_H}$ will be denoted $\overline{\Delta}^{k, \mathbf{H}}$. Figure 3.2 is an example of a truncated tetrahedron. We will

denote $\mathcal{H} \subset \overline{\Delta^{2,\mathbf{H}}}/\Phi^{\mathbf{H}}$ and $\tilde{\mathcal{H}} \subset \overline{\Delta^{2,\mathbf{H}}}$ the sets of non distinguished hexagonal faces, \mathcal{T} the set of triangular faces disjoint from the distinguished edge, $\mathcal{L} \subset \overline{\Delta^{1,\mathbf{H}}}/\Phi^{\mathbf{H}}$ and $\tilde{\mathcal{L}} \subset \overline{\Delta^{1,\mathbf{H}}}$ the sets of non distinguished long edges, $\mathcal{S} \subset \overline{\Delta^{1,\mathbf{H}}}/\Phi^{\mathbf{H}}$, and $\tilde{\mathcal{S}} \subset \overline{\Delta^{1,\mathbf{H}}}$ the sets of short edges disjoint from the knot.

An ideal triangulation of a connected, oriented, cusped manifold N , is defined to consist of a pairwise disjoint union of oriented euclidian tetrahedra $\Delta^{\mathbf{3},\mathbf{I}} = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i^{\mathbf{3},\mathbf{I}}$, together with a set $\Phi^{\mathbf{I}}$ of orientation-reversing affine isomorphisms pairing the faces of the tetrahedra in $\Delta^{\mathbf{3},\mathbf{I}}$ so that $N = (\Delta^{\mathbf{3},\mathbf{I}} \setminus \Delta^{\mathbf{0},\mathbf{I}})/\Phi^{\mathbf{I}}$. Such a triangulation will be denoted \mathcal{T}_I . We will denote $p_I : \Delta^{\mathbf{3},\mathbf{I}} \setminus \Delta^{\mathbf{0},\mathbf{I}} \rightarrow (\Delta^{\mathbf{3},\mathbf{I}} \setminus \Delta^{\mathbf{0},\mathbf{I}})/\Phi^{\mathbf{I}}$ the identification projection. In the following, we will consider a knot K embedded in a 3-manifold M and ideal triangulations of $N = M \setminus K$, such that $\Delta^{\mathbf{3},\mathbf{I}}/\Phi^{\mathbf{I}}$ is a pseudomanifold having one singular point, its only vertex, corresponding to K . The tetrahedra of \mathcal{T}_I can be seen as hyperbolic ideal tetrahedra with vertices at infinity.

Let us remark that from a so-called particular H-triangulation of a pair (M, K) , with at least two tetrahedra, one can get an ideal triangulation of $M \setminus K$ by collapsing the distinguished edge to a point in such a way that the distinguished face F^K is collapsed to an edge while the two other faces of the distinguished tetrahedron (not bounded by distinguished edge) are identified with each other. For example, in figure 3.1, the edges with simple and double arrows are identified with each other; face F^K collapses and faces B and A are identified with each other. Then, each cell of \mathcal{T}_H different from the distinguished ones have a canonical corresponding cell in \mathcal{T}_I .

One can find more information on triangulations of 3-manifolds in [4, 20].

From an ideal triangulation of a knot complement in a 3-manifold, one can construct a ring R_I as in the introduction.

3.2.2 Definition of R_H

According to [11], the ring \tilde{R}_H is defined from $\overline{\mathcal{T}_H}$ with oriented short edges by the following presentation. The set of generators is given by associating to each oriented short edge $e \in \mathcal{S}$, disjoint with the distinguished edge, a pair of generators (u_e, v_e) ; and the set of relations :

- if \bar{e} is the edge e with opposite orientation, $u_{\bar{e}} = u_e^{-1}$ and $v_{\bar{e}} = -u_e^{-1}v_e$;
- *hexagonal face relation* : if \check{e} is the unique oriented short edge such that it belongs to the same hexagonal face as e , and the terminal points of e and \check{e} form the boundary of a long edge, then $u_{\check{e}} = v_e$ and $v_{\check{e}} = u_e$;
- *triangular face relations* : if e_1, e_2, e_3 are cyclically oriented short edges constituting the boundary of a triangular face, then $u_{e_1}u_{e_2}u_{e_3} = 1$ and $u_{e_1}u_{e_2}v_{e_3} + u_{e_1}v_{e_2} + v_{e_1} = 0$.

One can easily check that there exists a representation of the knot group onto $GL(2, \tilde{R}_H)$ by associating the matrix $\begin{pmatrix} u_e & v_e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ to each oriented short edge disjoint from the distinguished edge and the matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ to each (oriented) long edge different from the distinguished one.

Note that the ring \tilde{R}_H is not necessarily commutative. We will denote by R_H the abelianization of \tilde{R}_H .

Lemma 3.2.2 *Let the truncated distinguished tetrahedron be labelled as in figure 3.2, then $u_l = u_m$, $u_p = v_m^{-1}v_l$, $v_p = 0$.*

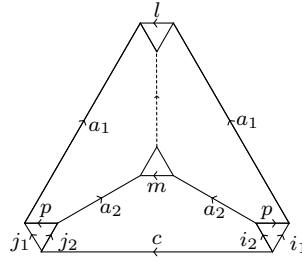


FIGURE 3.2 – Truncated distinguished tetrahedron

Proof Let us write the two triangular face relations where all generators with indices i_1, i_2, j_1, j_2 are expressed in terms of (u_l, v_l) and (u_m, v_m) through the use of the hexagonal faces relations.

For the left hand triangle :

$$1 = v_m u_p v_l^{-1} \quad (3.1)$$

$$0 = -v_m u_p v_l^{-1} u_l + v_m v_p + u_m \quad (3.2)$$

and the right hand triangle :

$$1 = u_m^{-1} v_m u_p v_l^{-1} u_l \quad (3.3)$$

$$0 = -u_m^{-1} v_m u_p (v_l^{-1} u_l) u_l^{-1} + u_m^{-1} v_m v_p + u_m^{-1} \quad (3.4)$$

Equations (3.1) and (3.3) imply that $u_m = u_l$. Then (3.2) implies that $v_p = 0$ because v_m is invertible. \square

3.3 A ring homomorphism from R_I to R_H

We define a ring homomorphism $f : R_I \rightarrow R_H$ as follows. Let E be an edge of a tetrahedron of the ideal triangulation with shape parameter z . Let us still call E the corresponding long edge in $\tilde{\mathcal{L}}$. We choose a boundary point of E in $\overline{\Delta^{0,\mathbf{H}}}$, and let e_i and e_j be the short edges in $\tilde{\mathcal{S}}$ sharing this point at their origins and such that E, e_i, e_j are clockwise ordered. Let (u_i, v_i) and (u_j, v_j) be the couples of generators in R_H assigned to e_i and e_j . We define, $f(z) = v_i v_j^{-1}$ (see figure 3.3).

Remark 3.3.1 Keeping the notation of figure 3.3, f can be equivalently defined as $f(z) = u_p u_q^{-1}$.

Let us check that f is a well defined ring homomorphism.

First, the definition of f does not depend on the choice of the boundary point of E : if $e_k = \bar{e}_i$ and $e_n = \bar{e}_j$, then $v_i = v_k^{-1}$ and $v_j = v_n^{-1}$ so that $v_i v_j^{-1} = v_n v_k^{-1}$.

Let E_1, E_2, E_3 be three long edges counter-clockwise ordered around a vertex of a tetrahedron in $\Delta^{\mathbf{3},\mathbf{I}}$, with shape parameters z_1, z_2, z_3 , and let e_i, e_j, e_k be three short edges bounding a triangular face obtained after truncation along the corresponding vertex and such that E_1, e_i, e_j and E_2, \bar{e}_j, e_k are clockwise ordered. Then, the triangular face relations are $u_j u_k u_i^{-1} = 1$ and $-v_i + u_j v_k + v_j = 0$.

So,

$$f(z_1)f(z_2)f(z_3) = (v_i v_j^{-1})(-u_j^{-1} v_j v_k^{-1})(u_k^{-1} v_k v_i^{-1} u_i) = -u_j^{-1} u_k^{-1} u_i = -1$$

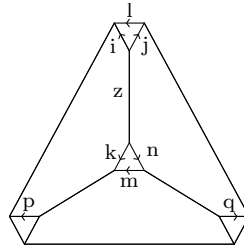


FIGURE 3.3 – $f(z) = v_i v_j^{-1}$

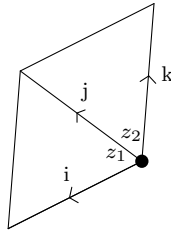


FIGURE 3.4 – Glued triangles

and

$$f(z_2) - f(z_1)f(z_2) = -u_j^{-1}v_jv_k^{-1} + v_iv_j^{-1}u_j^{-1}v_jv_k^{-1} = u_j^{-1}(-v_j + v_i)v_k^{-1} = 1$$

Let us now check that the gluing equations are respected. If the ideal triangulation of the knot complement contains an edge with only one preimage by p_I , then both R_I and R_H are the ring with one element and all conditions are trivially satisfied.

Before considering the general case, let us first remark the following. Let two triangles in \mathcal{T} be glued together along an oriented short edge e_j with initial point corresponding to long edges with shape parameters z_1 and z_2 . Let e_i, e_j, e_k be short edges clockwise ordered as in figure 3.4. Then, $f(z_1)f(z_2) = (v_iv_j^{-1})(v_jv_k^{-1}) = v_iv_k^{-1}$.

Let us now consider separately few different cases. First, if an edge E in the ideal triangulation has no corresponding one in a distinguished tetrahedron of the H-triangulation, then the product of the $f(z_i)$ around E telescopically reduces to 1.

Second, E has a corresponding edge opposite to the distinguished edge in the distinguished tetrahedron. Then, after telescopication, keeping notations of lemma 3.2.2, the product of $f(z_i)$'s around E reduces to $v_m v_i^{-1}$ which is equal to 1 due to lemma 3.2.2.

Third case, E has a corresponding edge in the distinguished tetrahedron in the boundary of the distinguished face. Again, and after telescopication, the product of $f(z_i)$'s around E reduces to a product of parameters v_i which is equal to 1. In order to see this, it is easier to use the equivalent definition of f : $f(z) = u_p u_q^{-1}$ as in remark 3.3.1. Then, by using the notation of figure 2, the edge a_2 will contribute $u_{i_2} u_{j_2}^{-1}$ and the edge a_1 will contribute $u_{i_1}^{-1} u_{j_1}$ (both a_k appear twice in the distinguished tetrahedron). The product of those two contributions is 1 due to hexagonal face relations of figure 3.2.

Theorem 3.3.2 *If $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$, then f is a ring isomorphism.*

Remark 3.3.3 Poincaré duality theorem and Universal coefficients theorem imply that if $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$, then $H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$.

3.4 Proof of the main theorem

First of all, let us clear up the particular cases where the ideal triangulation of a knot complement contains an edge with only one preimage by p_I . Such an edge must be in a tetrahedron closed as a book around it. Then, the shape parameter of that edge must be equal to 1, which means that the deformation variety is empty. As a consequence, the ring R_I is the ring with one element. Besides, according to lemma 3.2.2, in that case, there is an invertible element in R_H equal to 0. So R_H is also the ring with one element and the isomorphism between R_I and R_H is trivial.

For the general case, let us first remark that the image of an element of R_I by f is a priori a product of an even number of elements in R_H . Then, in order to prove the surjectivity of f , the main difficulty is to write an equality in R_H with one generating element on the left hand side and an even number of generating elements on the right hand side. For that, we will use the triviality of $H_1(M, \mathbb{Z})$.

From now on, we will say that an oriented short edge $e \in \tilde{\mathcal{S}}$ is *parallel* (resp. *antiparallel*) to an oriented long edge E of $\tilde{\mathcal{L}}$ if there exists E' of $p_H^{-1}(p_H(E))$ such that e and E' are disjointly contained in the boundary of one and the same hexagonal face F , and if the orientations of \bar{e} (resp. e) and E' are induced from the orientation of F . We will also say that two oriented short edges e and e' are *parallel* (resp. *antiparallel*) if there exists a long edge E of $\tilde{\mathcal{L}}$ such that e and e' are both parallel or antiparallel (resp. one is parallel and another one is antiparallel) to E . We will also say that an edge $e \in \mathcal{S}$ is parallel (resp. antiparallel) to an edge $E \in \mathcal{L}$ if there exists a parallel (resp. antiparallel) preimage of e and E by p_H . For instance, in figure 3.2, m , c and l are parallel.

Lemma 3.4.1 *If e and e' are parallel short edges in \mathcal{S} , then there exists $m \in R_I$ such that $f(m) = u_e u_{e'}^{-1}$.*

Proof We will prove that there exists $m \in R_I$ such that $f(m) = v_{\check{e}} v_{\check{e}'}^{-1}$ (see subsection 3.2.2 for the definition of \check{e} and \check{e}'), which is equivalent to the lemma 3.4.1.

Let $E \in \mathcal{L}$ be parallel to e and e' . Then, among the triangles containing the edge E in $\overline{\mathcal{T}}_H$ there are some which also contain the edge \check{e} or \check{e}' . On the disk composed by the triangular faces containing a given end point of E , choose a path from \check{e} to \check{e}' . Let e_1, \dots, e_n be short edges met by this path and oriented so that they all have the same starting point (here $\check{e} = e_1$ and $\check{e}' = e_n$). Let $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{n-1} \in p_H^{-1}(E)$ be long edges intersecting e_1, \dots, e_n in their starting point, and let z_1, \dots, z_{n-1} be the corresponding parameters in the ideal triangulation (see figure 3.5). Let $m = \prod_{i=1}^{n-1} z_i \in R_I$. According to the gluing equations in R_I , m does not depend on the choice of the path from \check{e} to \check{e}' . Besides, $\prod_{i=1}^{n-1} f(z_i) = \prod_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1}^{-1} = v_1 v_n^{-1} = v_{\check{e}} v_{\check{e}'}^{-1}$ (here, (u_i, v_i) is the couple of generators in R_H associated to the short edge e_i). \square

It will be useful in the following to denote $m_{e \rightarrow e'}$ for such a word.

Corollary 3.4.2 *Let $e \in \mathcal{S}$ and $m \in R_I$ be such that $f(m) = u_e$. Then, for any short edge e' parallel to e , there exists $m' \in R_I$ such that $f(m') = u_{e'}$.*

Being a cell complex decomposition of M , \mathcal{T}_H induces a presentation of the first homology group with 1-cells as generators, and 2-cells as relations. Let us denote by K the distinguished edge corresponding to the knot in M . Let us also denote by E_i^H for $1 \leq i \leq n$ all the other edges in $\Delta^{1, \mathbf{H}} / \Phi^{\mathbf{H}}$ and $E_i^{j, H}$ the edges of $\Delta^{1, \mathbf{H}}$ such that $p_H(E_i^{j, H}) = E_i^H$. Let us denote by $\Delta_l^H(M)$ the group of oriented l -chains (the free abelian group with basis the oriented open l -simplices), with boundary maps $\partial_l^H : \Delta_l^H(M) \rightarrow \Delta_{l-1}^H(M)$. Let us

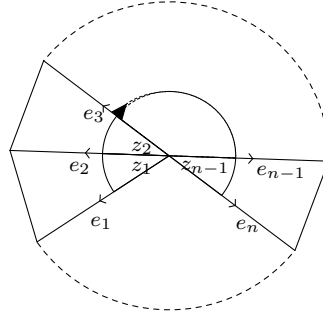


FIGURE 3.5 – $\prod_{i=1}^{n-1} f(z_i) = v_1 v_n^{-1}$

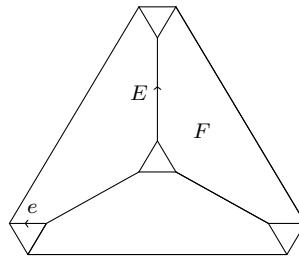


FIGURE 3.6 – Definition of $r : e = r(F, E)$

denote by F^K the distinguished face of $\Delta^{2,\mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}$, and F_i^H for $1 \leq i \leq m$ the other faces. Then $\partial_2^H(F^K) = \epsilon_K K + \epsilon_j E_j^H + \epsilon_{j'} E_{j'}^H$ ($\epsilon_i = \pm 1$). Besides, according to the particular H-triangulations considered here, F^K is the only face of $\Delta^{2,\mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}$ whose boundary contains K . Thus, one can consider another presentation of the first homology group with generators the edges in $\Delta^{1,\mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}$ without the distinguished one, and relations corresponding to non-distinguished faces. On what follows, we assume that K and F^K are removed from the corresponding sets of cells.

Let us assume from now on that $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ and define some useful notations. Let A be an edge in $\Delta^{1,\mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}$. Then, there exists a map $\eta_A : \Delta^{2,\mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbb{Z}$ such that

$$A = \sum_{F \in \Delta^{2,\mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}} \eta_A(F) \partial_2^H(F) \in \Delta_1^H(M).$$

It is a tautological equality in a free abelian group.

For any $F \in \tilde{\mathcal{H}}$ let

$$\tilde{\mathcal{E}}_F = \{E \in \tilde{\mathcal{L}} \mid E \text{ is on the boundary of } F\}$$

and let us define a set

$$X = \{(F, E) \mid F \in \tilde{\mathcal{H}}, E \in \tilde{\mathcal{E}}_F\}$$

and a map $r : X \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ in the following way. E is on the boundary of two faces in $\tilde{\mathcal{H}}$, F and F' , so $r(F, E)$ is the short edge on the boundary of F' disjoint from E and parallel to it (see figure 3.6).

We fix a section $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ with the image disjoint with the distinguished tetrahedron. Denote $\tilde{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{H})$ and reinterpret η_A as a map from $\tilde{\mathcal{F}}$ to \mathbb{Z} .

We define

$$U_A = \prod_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \prod_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_F} (u_{r(F,E)})^{\eta_A(F)}$$

Let us also define a map $s : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{S}$ which associates arbitrarily, to each long edge, a parallel short edge, and

$$U_A^s = \prod_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \prod_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_F} (u_{s \circ p_H(E)})^{\eta_A(F)}$$

and remark that $U_A^s = u_{s(A)}$; it is a tautological equality in the free abelian group generated by the symbols u_i associated to short edges. Then, for each $A \in \Delta^{1,\mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}$, one can write the equality

$$u_{s(A)} = \frac{U_A^s}{U_A} = \prod_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \prod_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_F} \left(\frac{u_{s \circ p_H(E)}}{u_{r(F,E)}} \right)^{\eta_A(F)}.$$

By definitions of r and s and thanks to lemma 3.4.1, there exist words $m_{F,E} \in R_I$ such that $\frac{u_{s \circ p_H(E)}}{u_{r(F,E)}} = f(m_{F,E})$ and thus there exists a word $m_{s(A)}$ in R_I such that $f(m_{s(A)}) = u_{s(A)}$.

According to corollary 3.4.2, for any short edge e_i parallel to $s(A)$ and with the generators of R_H (u_i, v_i), there exists a word $m_i \in R_H$ such that $f(m_i) = u_i$. Besides, for any short edge e_j , there exists a short edge e_i such that $v_j = u_i$ or $v_j = u_i^{-1}$. Thus f is surjective, and this almost allows one to define a ring homomorphism $g : R_H \rightarrow R_I$: keeping the previous notation, $g(u_i) = g(v_j) = m_i$.

One still has 4 things to check :

1. The images of the u_i do not depend on the choice of η_A :

Let $\eta_A^{(1)}$ and $\eta_A^{(2)}$ be two maps such that

$$A = \sum_F \eta_A^{(1)}(F)F = \sum_F \eta_A^{(2)}(F)F \in \Delta_1^H(M).$$

As $H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$, $\phi = \sum_F \eta_A^{(1)}(F)F - \sum_F \eta_A^{(2)}(F)F = \partial_3^H(\tau)$, where τ is a linear combination of tetrahedra in \mathcal{T}_H . If τ contains the distinguished tetrahedron, then there is an ambiguity in the word $m_{s(A)}$ given by a power of the product of all shape parameters associated to the edge opposite to the distinguished edge in the distinguished tetrahedron, which is 1 thanks to the gluing equations. Let us now assume that τ contains only tetrahedra different from the distinguished one. Let us denote by $m_{s(A)}^{(1)}$ and $m_{s(A)}^{(2)}$ the corresponding words for $\eta_A^{(1)}$ and $\eta_A^{(2)}$. Then $\frac{m_{s(A)}^{(1)}}{m_{s(A)}^{(2)}}$ is the product of all shape parameters of all tetrahedra contained in τ , so it is equal to 1.

2. The definition of U_A does not depend on the choice of $\tilde{\mathcal{F}}$ *i.e.* the section $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$: Let $F \in \mathcal{H}$ and $\{F^1, F^2\} = p_H^{-1}(F)$. If one of the F^i 's is on the boundary of the distinguished tetrahedron, then there is no problem thanks to the definition of σ . Else, let E_k^i , $1 \leq k \leq 3$, $1 \leq i \leq 2$ be the long edges in the boundary of F^i , with the corresponding shape parameters z_k^i . Let $e_k^i = r(F^i, E_k^i)$. It is then easy to see that for each k , $f(z_k^1 z_k^2) = u_k^1 (u_k^2)^{-1}$, then the ambiguity of $m_{s(A)}$ is given by a power of $\prod_{k=1}^3 z_k^1 z_k^2 = 1 \in R_I$.
3. The definition of m_i does not depend on the choice of s :

Let $A \in \mathcal{L}$, $e_1, e_2 \in \mathcal{S}$ with parameters (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , and $s_1, s_2 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{S}$ such that $s_1(A) = e_1$, $s_2(A) = e_2$ and for any $E \in \mathcal{L}, E \neq A$, $s_1(E) = s_2(E)$. Then, from the definition of g , one can write $g_{s_1}(u_1) = m_{s_1(A)}$, $g_{s_2}(u_2) = m_{s_2(A)}$ and $g_{s_2}(u_1) = m_{e_1 \rightarrow e_2} m_{s_2(A)}$.

The sum of the powers of u_i in the definition of $U_A^{s_i}$ is 1, so $U_A^{s_1} = \frac{u_1}{u_2} U_A^{s_2}$ and

$$\begin{aligned} g_{s_1}(u_1) &= m_{s_1(A)} \\ &= m_{e_1 \rightarrow e_2} m_{s_2(A)} \\ &= g_{s_2}(u_1). \end{aligned}$$

The same reasoning works for $g_{s_1}(u_2) = g_{s_2}(u_2)$.

For $E \neq A$, the sum of the powers of u_i in the definition of $U_E^{s_i}$ is 0, so changing s has no influence on the definition of $g(u)$ for the short edges parallel with E .

4. Let us now prove that g respects the relations in R_H .

The hexagonal face relations are preserved by definition of the image of v_i .

Until now, orientation of long edges, hence the sign, was implied in the notation, and short edges were considered parallel with long edges. Reversing orientation of a short edge naturally inverses the image of its generator u by g .

Let us check now, that reversing orientation preserves the relation for the parameter v .

Let e_1, e_2, e_3 be three short edges on the boundary of a face $F \in \tilde{\mathcal{H}}$, respectively parallel to long edges E_1, E_2, E_3 (also on the boundary of F) and oriented such that the starting point of e_1 and e_3 bound E_2 , and the end point of e_1 and e_2 bound E_3 . Then, by definition of g , $g(v_2) = g(u_1)$. Let us reverse orientation of e_2 and let us call it \bar{e}_2 , then $g(v_{\bar{2}}) = g(u_3)$, and one has to check that $g(u_3) = -g(u_2)^{-1}g(u_1)$. Let us do this from the definition of $g(u_3)$ and let us assume without loss of generality, that $e_3 = s(E_3)$. Let us write $\partial_2^H(F) = E_2 + E_3 - E_1 \in \Delta_1^H(M)$, so

$$\begin{aligned} E_3 &= \partial_2^H(F) + E_1 - E_2 \\ &= \partial_2^H \left(F + \sum_{\phi} \eta_{E_1}(\phi)\phi - \sum_{\phi} \eta_{E_2}(\phi)\phi \right). \end{aligned}$$

Let us assume, as a first case, that $p_H(E_1), p_H(E_2), p_H(E_3)$ are three different edges and that $e_1 = s(E_1)$ and $e_2 = s(E_2)$. Let us denote $u'_i = r(F, E_i)$. Then, one has the following tautological equality :

$$u_3 = \frac{u_3 u'_1 u_2 U_1^s U_2}{u'_3 u_1 u'_2 U_1 U_2^s}.$$

$\frac{u_3 u'_1 u_2}{u'_3 u_1 u'_2}$ has as preimage in R_I a product of three different shape parameters of a tetrahedron (which is equal to -1), $\frac{U_1^s}{U_1}$ has as preimage in R_I a word m_1 from lemma 3.4.1 such that $f(m_1) = u_1$ and $\frac{U_2^s}{U_2}$ has as preimage in R_I a word m_2 from lemma 3.4.1 such that $f(m_2) = u_2$. So, by construction of g , $g(u_3) = -g(u_1)g(u_2)^{-1}$. Let us now assume that another edge of the boundary of F has projection equal to E_3 in $\Delta^{1, \mathbf{H}}/\Phi^{\mathbf{H}}$, for example E_1 , with $s(E_1) = s(E_3) = e_3$. Then, one has the following tautological equality : $u_3 = \frac{u_3 u'_1 u_2 U_1^s U_2}{u'_3 u_3 u'_2 U_1 U_2^s}$, but now, $\frac{U_1^s}{U_1} = u_3$ and $\frac{u_3 u'_1 u_2}{u'_3 u_1 u'_2} = \frac{u_3 u'_1 u_2 u_1}{u'_3 u_1 u'_2 u_3}$

which has preimage in R_I the product of three different shape parameters of a tetrahedron and the word of corollary 3.4.2 going from e_3 to e_1 .

Let us end with the triangular face relations. Let e_i, e_j, e_k be short edges bounding a triangular face in $\overline{T_H}$, with generators $(u_i, v_i), (u_j, v_j), (u_k, v_k)$. Let F be the opposite hexagonal face, with long edges E_i, E_j, E_k on its boundary. Let us assume they are oriented so that $\partial_2^H(F) = E_i + E_j - E_k$, and one has to prove that $g(u_i)g(u_j)g(u_k)^{-1} = 1$: the reasoning is similar to the previous one. One also has to prove that

$$-g(v_k) + g(u_i)g(v_j) + g(v_i) = 0,$$

or equivalently,

$$g(u_i)g(v_j)g(v_k)^{-1} + g(v_i)g(v_k)^{-1} = 1,$$

so, by definition of g ,

$$g(u_i)g(u_j)g(u_k)^{-1} + g(u_i)g(u_k)^{-1} = 1.$$

Let us call e_l , the short edge in the same tetrahedron parallel with e_i , then it is equivalent to prove that

$$g(u_i)g(u_l)^{-1}g(u_l)g(u_j)g(u_k)^{-1} + g(u_i)g(u_k)^{-1} = 1.$$

The left part of the equality is equal, by definition of g and thanks to the preceding relation, to $-z_k z_j + z_j = 1$.

It is now a straightforward computation to check that $f \circ g = id_{R_I}$ and $g \circ f = id_{R_H}$.

Remark 3.4.3 We actually proved that for any edge E of $\Delta_1^H(M)$ of which the projection onto $H_1(M)$ is trivial, the parameters u_i associated to short edges parallel to E are in the image of f .

3.5 Examples

3.5.1 Figure-eight knot

Let K be the figure-eight knot embedded in \mathbb{S}^3 . The cell complex of figure 3.7 is a truncated particular H-triangulation corresponding to the well known ideal triangulation of $\mathbb{S}^3 \setminus K$, see [3]. The distinguished edge is dotted. The edges labelled with double and triple arrows are identified when collapsing that edge onto the vertex before truncation. The shape parameters z_i and w_i are actually associated to the corresponding edges of the ideal triangulation.

Thurston's gluing equations are $z_1^2 z_2 w_1 w_3^2 = 1$ and $z_2 z_3^2 w_1 w_2^2 = 1$, or, equivalently, $z_1(1 - z_1)w_3(1 - w_3) = 1$.

Keeping the previous notations, one has, for example, $f(z_1) = v_2 v_{11}^{-1} = u_7 u_{16}^{-1}$. According to theorem 3.3.2, f is an isomorphism. Let us see, for example, what the preimage of u_1 is. e_1 is parallel to the edge labelled with a simple arrow. That edge is tautologically equal to $\partial_2^H(B) \in \Delta_1^H(\mathbb{S}^3)$. Let us consider the only triangular face opposite to the hexagonal face corresponding to B which is not in the distinguished tetrahedron. Let us assume that the image by s of the long edge labelled with a double arrow is e_{15} , and e_1 for the long one labelled with a simple arrow. Then, one has the following equality : $u_1 = \frac{u_1 u_{15} u_{15}^{-1}}{u_{14} u_{15} u_{16}}$. Besides, following the proof of lemma 3.4.1, one has $f(w_2 z_2 w_2 z_3 w_1) = \frac{u_1}{u_{14}}$ and, by definition of f and thanks to the hexagonal face relations in R_H , $f(w_3) = \frac{u_{16}}{u_{15}}$. Then, using the gluing equations in R_I , we find that $f(z_2 z_3 w_1 w_2^2 w_3) = u_1$.

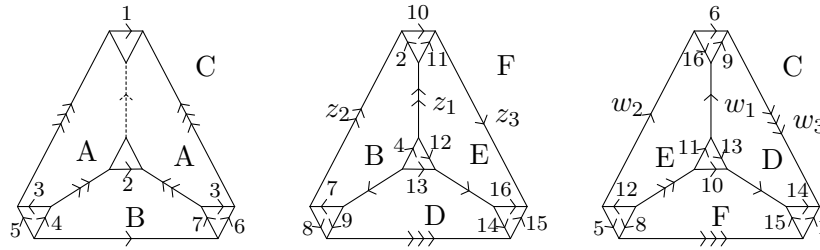


FIGURE 3.7 – Figure eight knot in \mathbb{S}^3

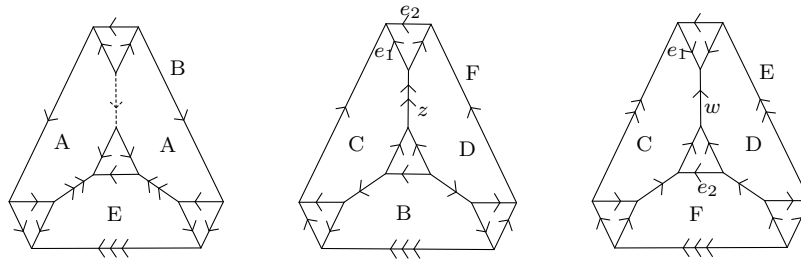


FIGURE 3.8 – Knot in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. All edges are oriented, but for simplicity, only the necessary names have been given.

3.5.2 A knot in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Figure 3.8 represents a truncated particular H-triangulation of a knot in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. The knot is represented by the dotted edge. Here, $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, so $H_1(M, \mathbb{Z}) \simeq H_2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

The shape parameters z and w are associated to the corresponding edges in \mathcal{T}_I . The Thurston's gluing equation is $zw = 1$. After computation, the presentation of R_H reduces to $\mathbb{Z}\langle u_1, u_{\bar{1}}, u_2 \mid u_1 u_{\bar{1}} = 1, u_2^3 = 1 \rangle$

f is neither surjective, nor injective. Indeed, $u_1 \notin \text{Im}(f)$, and $f(w) = u_2$, so $f(w^3) = 1$.

3.5.3 Knot in $L(3, 1)$

The figure 3.9 represents a truncated particular H-triangulation of a knot in $L(3, 1)$. The knot is represented by the dotted edge. The shape parameters z, t, u, w are actually associated to edges of the corresponding ideal triangulation. Let us remind that $H_1(L(3, 1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ and $H_2(L(3, 1), \mathbb{Z}) = 0$.

The gluing equations are $t = u^{-1}$ and $z = w^{-1}$ and the presentation of the ring R_H reduces to $\mathbb{Z}\langle u_1, u_{\bar{1}}, u_2, u_3, u_{\bar{3}} \mid u_1 u_{\bar{1}} = 1, u_3 u_{\bar{3}} = 1, u_2^3 = -1 \rangle$. f is not surjective, because $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}\langle u_1 u_2^2, u_{\bar{1}} u_2, u_3, u_{\bar{3}} \mid u_1 u_{\bar{1}} = 1, u_3 u_{\bar{3}} = 1, u_2^3 = -1 \rangle$.

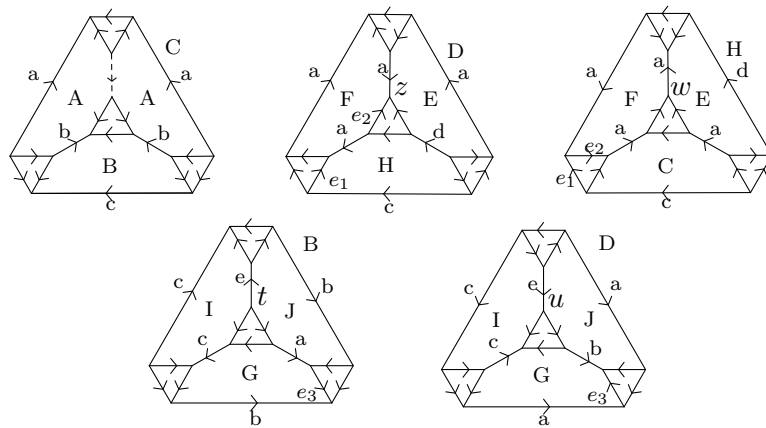


FIGURE 3.9 – Knot in $L(3, 1)$. All edges are oriented, but for simplicity, only the necessary names have been given.

Bibliographie

- [1] I. R. Aitchison and J. H. Rubinstein. An introduction to polyhedral metrics of non-positive curvature on 3-manifolds. In *Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989)*, volume 151 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 127–161. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [2] I. R. Aitchison and J. H. Rubinstein. Combinatorial cubings, cusps, and the dodecahedral knots. In *Topology '90 (Columbus, OH, 1990)*, volume 1 of *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, pages 17–26. de Gruyter, Berlin, 1992.
- [3] Stéphane Baseilhac and Riccardo Benedetti. Quantum hyperbolic invariants of 3-manifolds with $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ -characters. *Topology*, 43(6) :1373–1423, 2004.
- [4] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [5] L. A. Best. On torsion-free discrete subgroups of $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ with compact orbit space. *Canad. J. Math.*, 23 :451–460, 1971.
- [6] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.*, 18(2) :279–315, 1983.
- [7] B. Everitt. 3-manifolds from platonic solids. *Topology Appl.*, 138 :253–263, 2004.
- [8] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(3) :357–453, 1982.
- [9] H. Gieseking. Analytische untersuchungen über topologische gruppen. 1912.
- [10] R. M. Kashaev. δ -groupoids in knot theory. *Geometriae Dedicata*, 150(1) :105–130, 2010.
- [11] Rinat Kashaev. Noncommutative teichmüller spaces and deformation varieties of knot complements.
- [12] Rinat Kashaev, Feng Luo, and Grigory Vartanov. A tqft of turaev–viro type on shaped triangulations. *Annales Henri Poincaré*, pages 1–35, 2015.
- [13] Rinat M. Kashaev. Delta-groupoids and ideal triangulations. In *Chern-Simons gauge theory : 20 years after*, volume 50 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 201–216. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [14] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann. On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 :742–749, 1969.
- [15] Feng Luo. Solving thurston equation in a commutative ring. *arXiv preprint arXiv :1201.2228*, 2012.
- [16] Feng Luo, Stephan Tillmann, and Tian Yang. Thurston’s spinning construction and solutions to the hyperbolic gluing equations for closed hyperbolic 3-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(1) :335–350, 2013.

- [17] Ciprian Manolescu. Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(1) :147–176, 2016.
- [18] Albert Marden. The geometry of finitely generated kleinian groups. *Ann. of Math. (2)*, 99 :383–462, 1974.
- [19] Bernard Maskit. On Poincaré’s theorem for fundamental polygons. *Advances in Math.*, 7 :219–230, 1971.
- [20] Sergei Matveev. *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, volume 9 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, second edition, 2007.
- [21] John Milnor. Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. *Ann. of Math. (2)*, 74 :575–590, 1961.
- [22] John Milnor. Hyperbolic geometry : the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(1) :9–24, 1982.
- [23] Edwin E. Moise. Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Ann. of Math. (2)*, 56 :96–114, 1952.
- [24] Emil Molnár. Two hyperbolic football manifolds. In *Differential geometry and its applications (Dubrovnik, 1988)*, pages 217–241. Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1989.
- [25] G. D. Mostow. Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (34) :53–104, 1968.
- [26] Walter D. Neumann and Don Zagier. Volumes of hyperbolic three-manifolds. *Topology*, 24(3) :307 – 332, 1985.
- [27] Carlo Petronio. Ideal triangulations of link complements and hyperbolicity equations. *Geom. Dedicata*, 66(1) :27–50, 1997.
- [28] Gopal Prasad. Strong rigidity of \mathbf{Q} -rank 1 lattices. *Invent. Math.*, 21 :255–286, 1973.
- [29] T. Radó. Über den begriff der riemannschen fläche. 2 :96–114, 1925.
- [30] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [31] Robert Riley. A quadratic parabolic group. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77 :281–288, 1975.
- [32] Robert Riley. An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures. In *Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977)*, volume 722 of *Lecture Notes in Math.*, pages 99–133. Springer, Berlin, 1979.
- [33] Henry Segerman. A generalisation of the deformation variety. *Algebr. Geom. Topol.*, 12(4) :2179–2244, 2012.
- [34] Henry Segerman and Stephan Tillmann. Pseudo-developing maps for ideal triangulations I : essential edges and generalised hyperbolic gluing equations. In *Topology and geometry in dimension three*, volume 560 of *Contemp. Math.*, pages 85–102. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [35] Herbert Seifert. Komplexe mit Seitenzuordnung. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, (6) :49–80, 1975.
- [36] William P. Thurston. The geometry and topology of 3-manifolds. *Princeton Univ. Math. Dept.*, 1978.
- [37] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3) :357–381, 1982.

-
- [38] William P. Thurston. On proof and progress in mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 30(2) :161–177, 1994.
- [39] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [40] C. Weber and H. Seifert. Die beiden Dodekaederräume. *Math. Z.*, 37(1) :237–253, 1933.