Le problème des châteaux de cartes

Chanudet, Maud

How to cite

CHANUDET, Maud. Le problème des châteaux de cartes. In: Revue de mathématiques pour l'école, 2017, n° 228, p. 4–13.

This publication URL: https://archive-ouverte.unige.ch/unige:98071

LE PROBLEME DES CHATEAUX DE CARTES

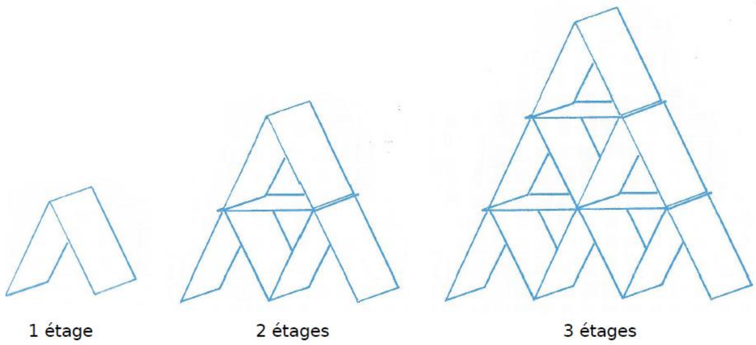
Maud Chanudet

Université de Genève

Nous nous intéressons dans cet article au problème dit des châteaux de cartes. Après avoir présenté le contexte de l'étude, nous faisons une brève analyse a priori de ce problème. Nous nous appuyons ensuite sur l'analyse de quatre-vingt-quatre productions d'élèves de 10e LS dans le cadre du cours de *Développements en mathématiques* pour illustrer les différentes procédures mises en œuvre par les élèves et présentons enfin quelques pistes en vue d'une institutionnalisation.

LE PROBLÈME

Pour construire un château de cartes à un étage, il faut 2 cartes. Pour un château de cartes à deux étages, il faut 7 cartes. Et pour un château de cartes à trois étages, il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? A 30 étages ? A 100 étages ?



Ce problème est présenté sur le site Sesamaths[1] et destiné à des élèves de 3ème (14-15 ans). Nous l'avons proposé à des élèves de 10e LS[2] option scientifique du cycle d'orientation à Genève, dans le contexte du cours de *Développements en mathématiques*.

LE COURS DE DÉVELOPPEMENTS EN MATHÉMATIQUES

Ce cours dispensé à raison d'une période de 45 minutes par semaine vise « au renforcement et au développement des capacités et des compétences des élèves dans les stratégies de résolution de problèmes et les activités de situations mathématiques » (DIP, 2013, p. 18).

Les objectifs d'apprentissage de ce cours ne sont pas centrés sur des savoirs mathématiques spécifiques (résoudre une équation du second degré à une inconnue, additionner deux fractions de même dénominateur, etc.) ou des domaines mathématiques particuliers (espace, algèbre, etc.), mais visent des compétences plus transversales, liées à la résolution de problèmes. Le document de spécificité cantonale qui est le document curriculaire de référence incite en ce sens les enseignants à proposer aux élèves de résoudre des problèmes ouverts (Arsac, Germain & Mante, 1991).

1 http://manuel.sesamath.net/

2 Il s'agit des élèves de 13-14 ans ayant choisi la filière littéraire et scientifique.

LA NARRATION DE RECHERCHE COMME DISPOSITIF D'ÉVALUATION

Ce document invite par ailleurs les enseignants à évaluer leurs élèves à partir de leur narration de recherche (Bonafé, 1993). Il s'agit pour l'élève de raconter

> « la suite des actions qu'il ou elle a réalisée au cours de sa recherche. Un nouveau contrat est passé avec l'enseignant-e : l'élève s'engage à raconter du mieux possible toutes les étapes de sa recherche, à décrire ses erreurs, comment lui sont venues de nouvelles idées ; en échange, l'enseignant-e s'engage à faire porter son évaluation sur ces points précis sans privilégier la solution » (DIP, 2013, p. 22).

Un des objectifs visés par ce dispositif est de permettre à l'enseignant un accès à la partie recherche du travail mathématique de l'élève. Bien souvent l'enseignant n'a pas accès à cette partie qui reste de l'ordre du travail privé de l'élève, auquel, ce dernier ne donne à voir que la réponse qu'il estime correcte ou en tout cas susceptible de l'être. Mais ce dispositif vise aussi à développer chez les élèves des compétences en communication, compétences considérées comme importantes en résolution de problèmes. Les élèves doivent ainsi communiquer leur recherche, la mettre en forme et la structurer pour la rendre intelligible par autrui (en particulier par l'enseignant, mais aussi par les autres élèves).

BRÈVE ANALYSE A PRIORI DU PROBLÈME

La résolution de ce problème nécessite peu de connaissances préalables spécifiques. Il semble toutefois préférable que les élèves aient déjà quelques notions d'algèbre, notamment en ce qui concerne l'élaboration d'expressions littérales à partir d'énoncés de problèmes, de figures géométriques ou d'expressions verbales.

Variables didactiques

Les deux variables didactiques importantes de ce problème sont le nombre d'étages proposés (n) et le nombre de cas proposés. Le choix des valeurs de ces variables va en effet influencer les stratégies mises en œuvre par les élèves.

Si tous les cas à étudier sont des nombres d'étages faibles ($n = 7$ par exemple), les élèves vont pouvoir se contenter d'une stratégie de comptage sur le schéma. En posant la question pour un nombre d'étages élevé ($n = 100$ par exemple), on incite implicitement les élèves à abandonner la stratégie de comptage sur le schéma. En effet, cette stratégie devient longue et la probabilité de se tromper en comptant le nombre de cartes sur le schéma élevée.

Le fait de proposer un seul cas à étudier avec un nombre d'étages assez grand ($n = 100$ par exemple) va permettre de travailler la réduction temporaire de la complexité du problème. Les élèves vont ainsi devoir penser à simplifier le problème en étudiant des cas avec un nombre d'étages plus faible et faire des choix sur les valeurs de sous cas en vue d'une généralisation. A l'inverse, en proposant plusieurs cas à traiter ($n = 7$, 30 et 100 par exemple), dont des nombres d'étages faibles (ici $n = 7$), on s'assure que tous les élèves s'approprient le problème. En effet tous peuvent débuter la résolution du problème par une représentation de la situation et une stratégie de comptage sur le schéma. Mais dans ce cas, le travail sur la réduction temporaire de la complexité d'un problème est moindre, voire nulle, puisque différents cas sont déjà proposés.

Stratégies

1. Comme noté précédemment, les élèves peuvent compter simplement le nombre de cartes nécessaires à partir de leurs schémas. Bien qu'efficace pour des nombres d'étages faibles ($n = 7$ par exemple) cette stratégie devient longue et fastidieuse au fur et à mesure que le nombre d'étages augmente.

2. Les élèves peuvent considérer une suite et chercher comment passer d'un terme de la suite (u_n) au suivant (u_{n+1}). La récurrence s'exprime formellement[3] sous la forme de $u_{n+1} = u_n + 3n + 2$ avec $u_1 = 2$. Une fois le pas de récurrence trouvé, les élèves peuvent alors déterminer de proche en proche la liste des termes de la suite. Cette stratégie est, elle aussi, longue puisque les élèves doivent calculer l'intégralité des termes de la suite, de u_1 jusqu'à u_{100}. On peut par ailleurs chercher à exprimer u_n comme fonction de n, à partir de la relation de récurrence exprimée ci-dessus.

3. Les élèves peuvent chercher à établir une formule qui exprime le nombre de cartes nécessaires pour construire le château en fonction du nombre d'étages. C'est cette stratégie qui est en particulier visée chez les élèves à qui on a proposé le problème. Les élèves peuvent alors soit expliquer sous forme de texte comment calculer le nombre de cartes, soit donner la formule sous forme d'une expression littérale.

Ce problème amène à considérer une suite arithmétique de degré 2, c'est à dire que son terme général est un polynôme de degré 2. En effet, pour construire un château de cartes à *n* étages, on a besoin de $2n + 3((n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1)$ c'est à dire de $\frac{1}{2}(3n^2 + n)$ cartes. Mais le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique n'étant pas au programme de la classe de 10^e, nous n'attendons pas des élèves qu'ils sachent que l'expression $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$ peut s'exprimer sous la forme de $\frac{n(n-1)}{2}$. Cette transformation peut cependant faire l'objet d'un travail spécifique avec les élèves. Sans celle-ci, le calcul du nombre de cartes nécessaires pour construire un château à 100 étages peut s'avérer long.

Une autre difficulté posée par ce problème est qu'il est rarement possible pour les élèves de prouver que l'expression algébrique qu'ils ont trouvée est correcte. Ils peuvent seulement montrer, à partir de quelques tests et de la comparaison avec les résultats obtenus par comptage sur les schémas, qu'elle n'est pas invalidée, ou encore montrer qu'elle est équivalente à d'autres formules obtenues.

Notons enfin que si les élèves avaient eu accès à un tableur, ils auraient pu penser à s'en servir pour programmer le calcul de proche en proche du nombre de cartes nécessaires, pour tous les cas jusqu'à *n = 100*, ou encore pour se décharger de certains calculs tels que la somme des *n* premiers entiers.

Objectifs d'apprentissage

En proposant ce problème aux élèves, on ne vise pas le développement de connaissances mathématiques spécifiques mais des compétences plus transversales de résolution de problème, ce qui correspond aux objectifs visés dans le cours de *Développements en mathématiques*.

Si l'on se réfère au Plan d'Etude Romand[4], les éléments pour la résolution de problèmes mis en jeu dans ce problème sont :

– la mise en œuvre d'une démarche de résolution ;

– la pose de conjectures, puis validation ou réfutation (validation et réfutation qui s'appuient ici sur la comparaison entre le nombre de cartes obtenu par une formule et celui déterminés par comptage sur le schéma) ;

– la réduction temporaire de la complexité d'un problème (en particulier dans le cas où seul le cas *n = 100* étages est proposé) ;

[3] Un tel formalisme n'est bien évidemment pas attendu dans les productions des élèves de 10^e LS.

[4] Le plan d'études romand définit les objectifs et les finalités de l'école publique dans les cantons de Suisse romande.

– la vérification, puis communication d'une démarche et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats (enjeu important de la narration de recherche).

De façon plus spécifique, les élèves sont amenés dans ce problème à calculer la somme des n premiers entiers et à élaborer des expressions littérales à partir d'une situation, voire ensuite à identifier des expressions littérales équivalentes.

SYNTHÈSE DES PROCÉDURES MISES EN ŒUVRE PAR LES ÉLÈVES

Contexte du recueil des données

Dans le cadre d'un recyclage auquel a participé la quasi-totalité des enseignants dispensant en 2016-2017 le cours de développements en mathématiques, nous avons demandé aux participants de proposer le problème des châteaux de cartes à leurs élèves. Chacun d'eux nous a ensuite envoyé deux narrations de recherche d'élèves qu'ils considéraient comme des productions « moyennes » (c'est à dire ni trop bonnes, ni trop mauvaises et représentatives du travail des élèves). Nous avons analysé ces 84 narrations de recherche. Nous présentons ci-dessous une synthèse des différentes procédures mises en œuvre par les élèves[5].

Procédure basée sur la proportionnalité

Quelques élèves ont questionné l'application du modèle proportionnel dans ce problème[6]. Un seul élève a appliqué un raisonnement proportionnel sans le remettre en cause. Tous les autres élèves qui ont tenté d'appliquer le modèle proportionnel l'ont ensuite rejeté et se sont lancés sur d'autres pistes de résolution (Fig. 1).

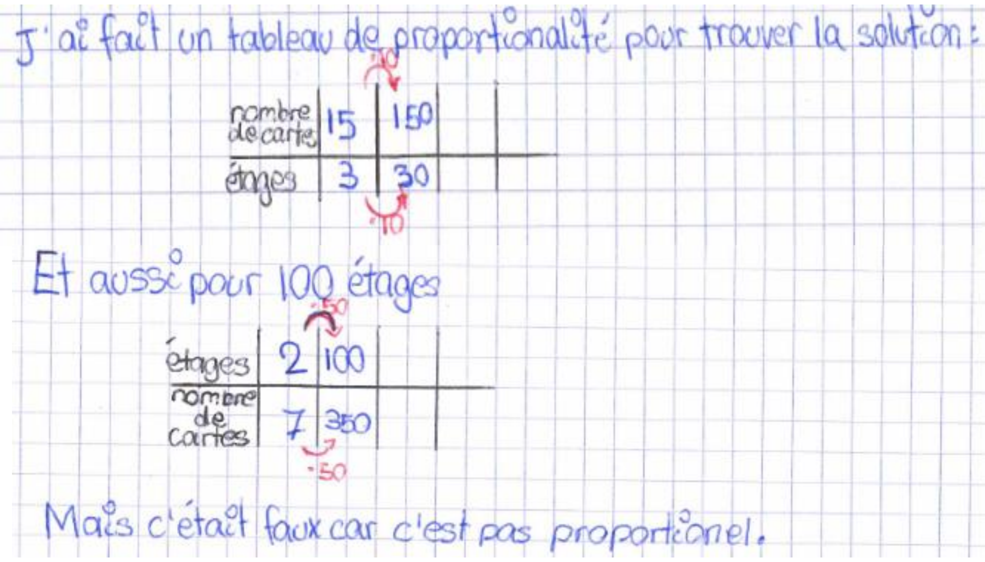


Fig. 1[7] : Narration 1

[5] Nous présentons les procédures majoritairement mises en œuvre par les élèves. Nous passons sous silence quelques procédures isolées identifiées dans les narrations.

[6] 11 élèves sur 84 ont réfléchi à propos du caractère proportionnel ou non de la situation.

[7] Toutes les figures présentées ci-après sont extraites de narration de recherche d'élèves.

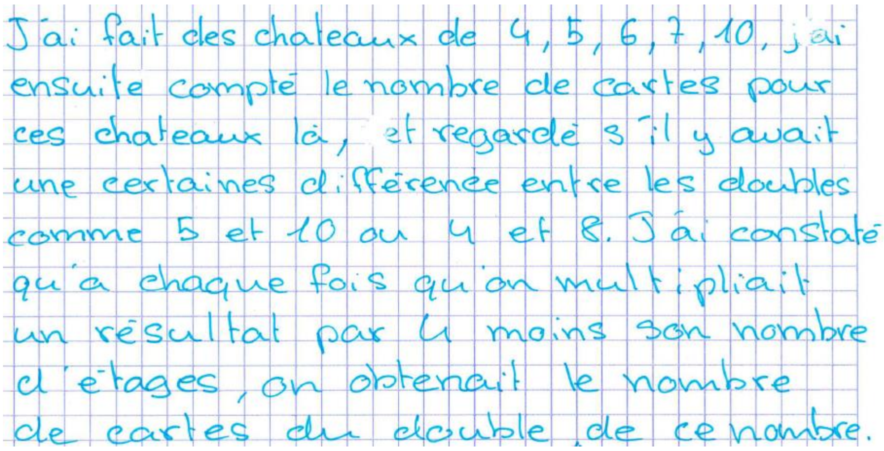

J'ai fait des chateaux de 4, 5, 6, 7, 10, j'ai ensuite compté le nombre de cartes pour ces chateaux là, et regardé s'il y avait une certaines différence entre les doubles comme 5 et 10 ou 4 et 8. J'ai constaté qu'a chaque fois qu'on multipliait un résultat par 4 moins son nombre d'étages, on obtenait le nombre de cartes du double de ce nombre.

Fig. 2 : Narration 2

Certains élèves ont plus largement cherché des régularités entre les nombres de cartes nécessaires, dans le cas où les nombres d'étages considérés sont multiples l'un de l'autre. Ils ont ainsi par exemple cherché à savoir s'il y avait un lien entre le nombre de cartes nécessaires pour *n* étages et le nombre de cartes nécessaires pour *2n* étages (Fig. 2).

Procédure par récurrence basée sur la recherche d'une suite logique

Un certain nombre d'élèves a considéré l'enjeu de ce problème comme relevant de la recherche d'une suite logique[8]. Après avoir représenté les premiers cas ($n = 2, 3, 4$, etc.) et compté le nombre de cartes nécessaires à la construction des châteaux à partir de leurs schémas, ils ont cherché une « règle » qui permet de passer d'un nombre de cartes pour un nombre d'étages donné (n) au nombre de cartes nécessaires pour le nombre d'étages suivant $(n+1)$ (Fig. 3).

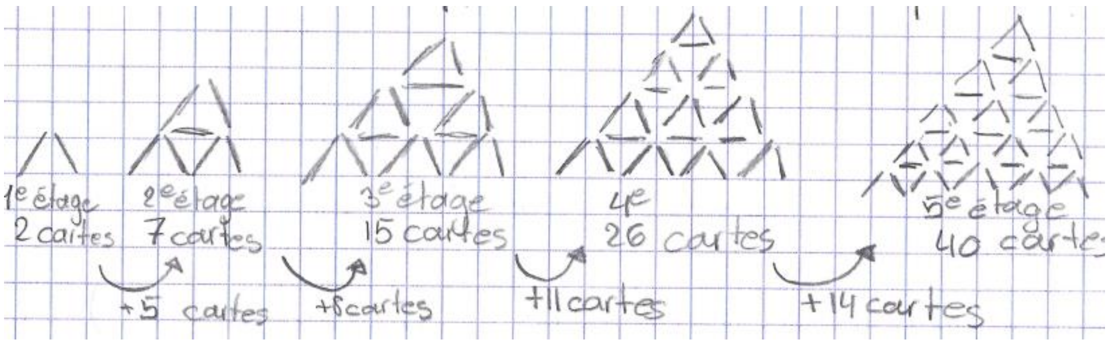


Fig. 3 : Narration 3

[8] Cette approche a été adoptée par 26 élèves sur 84.

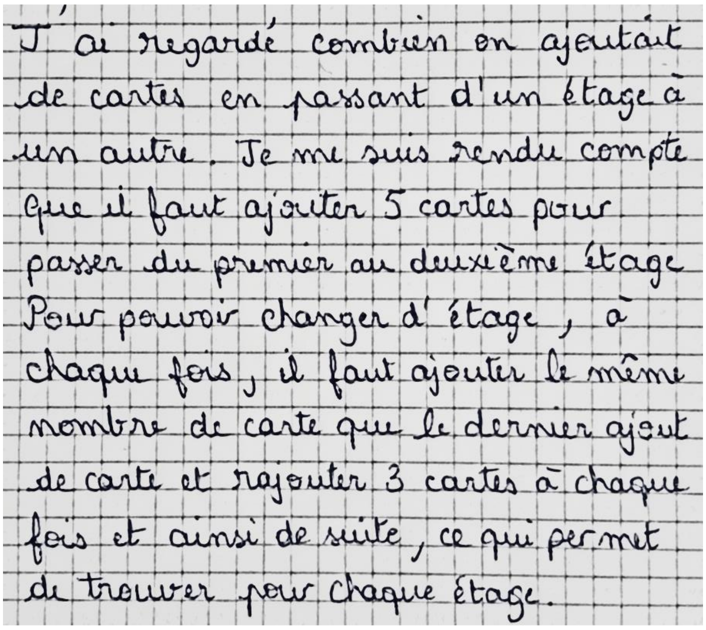

J'ai regardé combien on ajoutait
de cartes en passant d'un étage à
un autre. Je me suis rendu compte
que il faut ajouter 5 cartes pour
passer du premier au deuxième étage
Pour pouvoir changer d'étage, à
chaque fois, il faut ajouter le même
nombre de carte que le dernier ajout
de carte et rajouter 3 cartes à chaque
fois et ainsi de suite, ce qui permet
de trouver pour chaque étage.

Fig. 4 : Narration 4

Ces élèves ont remarqué que pour déterminer le nombre de cartes nécessaires pour un château de $n+1$ étages, il suffisait d'ajouter au nombre de cartes nécessaires pour un château de n étages, le nombre de cartes ajouté pour passer du cas $n-1$ au cas n, augmenté de 3 (Fig. 4). Ils ont ensuite raisonné de proche en proche, jusqu'aux valeurs demandées ($n = 30$ et 100).

Après avoir représenté les premiers cas et compté le nombre de cartes correspondant, les élèves ont donc raisonné de façon indépendante du problème, sans s'appuyer sur la manière dont ont été construits les châteaux. Cette procédure par récurrence s'est avérée toutefois longue et certains élèves l'ont abandonnée au profit d'autres stratégies dans le but de traiter des calculs plus simples.

Procédure basée sur la recherche d'une formule générale

D'autres élèves ont cherché une formule, une manière de calculer, qui permette de connaitre le nombre de cartes nécessaires pour construire les châteaux dans le cas général, le nombre de cartes nécessaires étant exprimé comme une fonction du nombre d'étages du château[9].

Parmi ces élèves, une grande partie d'entre eux a cherché à établir une formule à partir de la façon dont sont construits les châteaux. Ils ont ainsi décomposé les châteaux en triangles ou en montagnes (Fig. 5), ils ont distingué les cartes situées à la base des châteaux et celles des étages, ils ont distingué les cartes « verticales » et les cartes horizontales (Fig. 6). Toutes ces façons différentes de « voir » les châteaux ont donné lieu à un grand nombre de méthodes de calcul différentes.

Beaucoup d'élèves ont exprimé la méthode de calcul obtenue sous forme de texte. Certains élèves ont illustré leur raisonnement par un calcul sur un cas générique (Fig. 5). Cela signifie que les élèves ont raisonné sur un nombre d'étages donné ($n = 9$ dans l'exemple ci-dessous), mais que ce raisonnement s'entend comme valable pour toute autre valeur de n. Les raisonnements s'opèrent sur un nombre d'étages qui est « un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus » (Balacheff, 1987, p. 165).

[9] 40 élèves ont raisonné de cette manière.

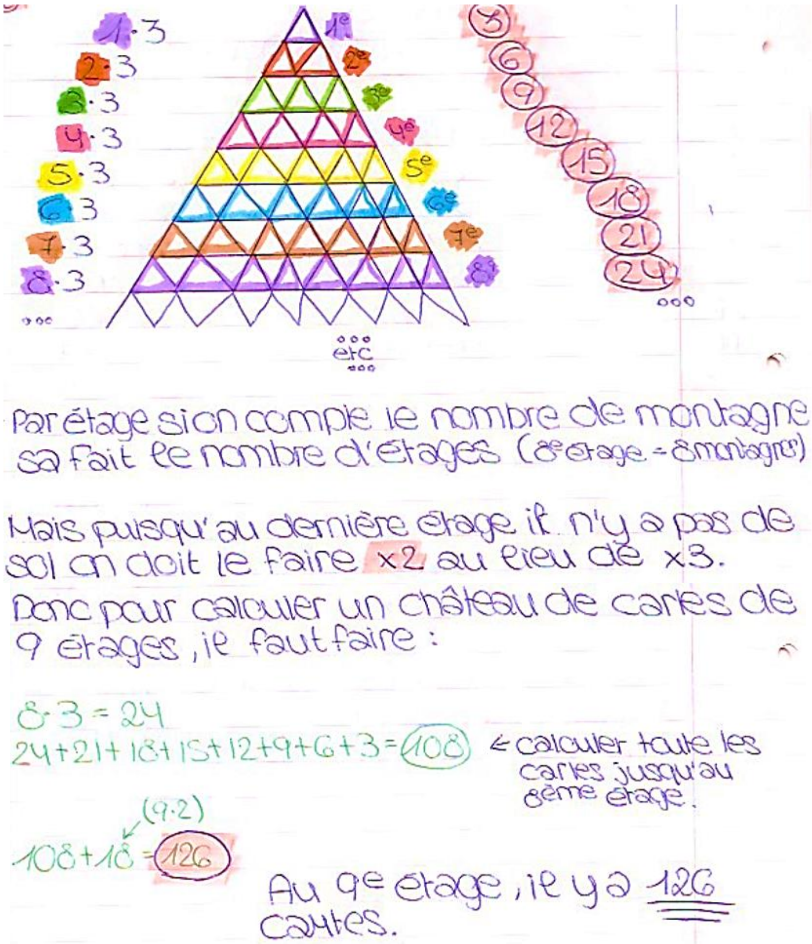


Fig. 5 : Narration 5

Ces élèves ont abouti pour la grande majorité à une formule faisant apparaitre la somme des termes d'une suite arithmétique, les bloquant parfois dans l'expression d'une formule algébrique simple. Quelques élèves ont cependant exprimé leur méthode sous forme d'une expression littérale, plus ou moins correcte et plus ou moins complète.

Peu d'élèves ont réussi à trouver une méthode de calcul correcte qui ne fasse pas appel à la somme des termes d'une suite arithmétique (Fig. 6).

étage	C. horizontale	C. oblique	Total
1	0	2	2
2	1	6	7
3	3	12	15
4	6	20	26
5	10	30	40
6	15	42	57
7	21	56	77
8	28	72	100

Nous avons essayé de trouver un théorime puis nous l'avons trouvé.
Pour trouver le nombre de cartes obliques dans un étage nous avons multiplié le nombre de étages en question et le nombre d'étage suivant pour trouver le nombre de cartes obliques. Ex 5 étages $5 \cdot 6 = 30$
Pour trouver le nombre de carte horizontale dans un étage nous avons multiplier le nombre d'étage en question et le nombre d'étage précédent puis on divise par 2 pour trouvé le résultat de nombre de carte horizontale
Ex avec 5 étages : $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Fig. 6 : Narration 6

Pour les autres élèves ayant cherché à contourner la difficulté liée au calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique, les formules proposées semblent bien souvent « tombées du ciel » (Fig. 7). Une majorité d'élèves a résolu le problème et rédigé sa narration de recherche sur deux périodes à une semaine d'intervalle. Cela peut expliquer que certains élèves aient été chercher des réponses sur Internet ou se soient faits aider.

méthode 2 :
on peut calculer le nombre de carte en :
divisant le nombre d'étages que l'on veut (n étages = n)
la division : il faut le multiplier par n additionner
par 1 multiplier par 3 moins n.
la Formule est : $(n : 2) \cdot (n+1) \cdot 3 - n$

Fig. 7 : Narration 7

Synthèse des formules

Après l'analyse des 84 narrations de recherche des élèves, nous avons identifié 14 manières différentes de calculer le nombre de cartes en fonction du nombre d'étages. Nous présentons ci-dessous quelques-unes de ces manières.

Soit N le nombre de cartes nécessaires pour construire le château, et n le nombre d'étages[10].

M1 : $N = u_n$ avec u_1 =2 et $u_{n+1} = u_n + 3n + 2$

M2 : $N = 2n + 3.\sum_{k=1}^{n-1} k$

M3 : $N = 2.\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{j=1}^{n-1} j$

M4 : $N = 3.\sum_{k=1}^{n} k - n$

M5 : $N = \sum_{k=0}^{n}(2n - 2k) + \sum_{j=1}^{n-1} j$

M6 : $N = \frac{3}{2}(n^2 + n) - n$

M7 : $N = \frac{3n^2+n}{2}$

M8 : $N = n.(1{,}5n + 0{,}5)$

PISTES EN VUE D'UNE INSTITUTIONNALISATION

Ce problème nous semble avoir des potentiels (recherche, résistance, débat et diactique), au sens de Georget (2009), intéressants pour une exploitation en classe.

Un bon *potentiel de recherche* tout d'abord puisque les élèves cherchent un problème nouveau qui ne se réduit pas à la seule application de techniques connues et qu'ils peuvent l'aborder de différentes manières. De plus d'après le retour des enseignants, ce problème semble avoir suscité l'intérêt et la curiosité des élèves. Le choix de commencer par proposer le problème pour sept étages favorise aussi la dévolution et l'implication des élèves dans la tâche et la dévolution.

Il a aussi un bon *potentiel de résistance* puisque ce problème résiste aux tentatives des élèves pour le résoudre, et un bon *potentiel de résistance dynamique* puisque cette résistance évolue au cours de la recherche. En effet au début de la recherche les élèves ne voient pas comment répondre aux questions pour les cas 30 et 100, mais leurs essais successifs leur permettent d'avancer vers une solution. Le milieu assure de plus une rétroaction (lorsqu'ils travaillent sur des nombres d'étages faibles) puisque les élèves peuvent s'assurer de l'adéquation entre le nombre de cartes qu'ils obtiennent avec leur formule et le nombre de cartes qu'ils ont comptées sur les schémas et qu'ils savent donc être exact.

Un *potentiel de débat* peut être exploité si l'on présente aux élèves les autres procédures mises en œuvre par les élèves de la classe et que l'on amène un questionnement sur l'équivalence des expressions algébriques obtenues. Il semble par contre difficile de débattre de la validité des formules trouvées (pour autant qu'aucune des valeurs numériques testées ne mette en défaut la formule trouvée).

Enfin il possède enfin un bon *potentiel didactique*. Il met en jeu des compétences en résolution de problème comme nous l'avons vu dans l'analyse a priori. Il nous semble que suite au travail des élèves sur ce problème, l'institutionnalisation peut porter sur :

[10] Pour simplifier, nous avons synthétisé les méthodes observées sous forme d'expressions algébriques formalisées bien qu'elles ne soient pas exprimées ainsi dans les narrations des élèves.

- l'application du modèle proportionnel. En effet, si ce problème relevait de la proportionnalité, il serait alors beaucoup plus simple à résoudre, il est donc pertinent de se questionner sur ce point. C'est l'occasion de revoir avec les élèves ce que signifie le fait que deux grandeurs sont proportionnelles et comment prouver sur des exemples numériques qu'elles ne le sont pas ;

- la réduction de la complexité du problème, le choix des sous cas à traiter. Cela est d'autant plus pertinent si on a demandé aux élèves de ne traiter que le cas $n = 100$. On peut sinon en profiter pour leur faire noter que l'on s'est intéressé à des cas plus petits avant de traiter un cas plus général et que cette réduction de la complexité qui a cette fois été prise en charge par l'enseignant sera par la suite de leur responsabilité ;

- l'utilisation de l'algèbre pour exprimer une formule ;

- tester une formule sur des exemples dans le but de s'assurer qu'elle n'est pas invalide. On peut en particulier mettre en avant des exemples de formules incorrectes qui auraient pu être invalidées sur quelques tests avec des valeurs simples (recherche de contre-exemples) ;

- différencier preuve, validation, invalidation. En particulier, il est intéressant de voir qu'ici les élèves ne peuvent bien souvent pas prouver que la formule qu'ils ont trouvée est correcte, mais seulement montrer qu'elle n'est pas invalidée (sauf dans le cas d'un raisonnement par récurrence) ;

- montrer que les différentes formules obtenues par les élèves sont équivalentes, et ce en s'appuyant sur la propriété de distributivité. Par exemple, on peut montrer que les méthodes M6, M7 et M8 sont équivalentes ;

- de façon plus spécifique, en profiter pour voir avec les élèves une manière astucieuse de calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.

Conclusion

Le problème des châteaux de cartes nous semble être intéressant à proposer dans les classes pour développer les compétences des élèves en résolution de problème. Les élèves se l'approprient facilement et la dévolution se maintient tout au long de la résolution. Bien que la stratégie experte soit difficilement accessible à des élèves de 10e, on a pu voir que ces derniers mettent en œuvre beaucoup de procédures différentes, et que cela peut permettre d'institutionnaliser des aspects importants de la résolution de problème, et du travail en algèbre : comment réduire la complexité d'un problème ? Quelle est la différence entre prouver, tester, invalider ? Comment montrer que deux expressions algébriques sont équivalentes ?

Bibliographie

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176.

Bonafé, F. (1993). Les narrations de recherche, un outil pour apprendre à démontrer. *Repères IREM*, *12*, 5–14.

Département de l'Instruction Publique, de la culture et du sport. (2013). Programme cantonal, littéraire-scientifique, profil sciences (S).

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* (Thèse de doctorat en didactique des mathématiques). Université Paris Diderot. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/fr/